TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964
8 2017
Số 482

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 54
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 58, năm 2017

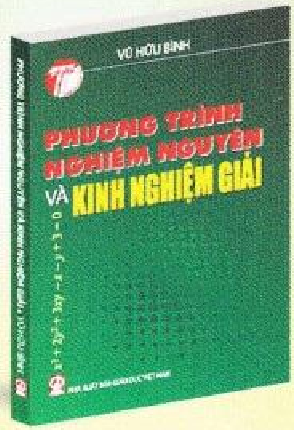
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH
Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607 • Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

SỬ DỤNG TÍNH ĐỐI XỨNG TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

VŨ HỒNG PHONG (*GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh*)

Định nghĩa: Phương trình (PT) $f(x)=0$ xác định trên miền D được gọi là có tính đối xứng trên miền D nếu $\forall x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$.

Nhận xét. Nếu x_0 là nghiệm của PT có tính đối xứng $f(x)=0$ thì $f(-x_0)=f(x_0)=0$ suy ra $-x_0$ cũng là nghiệm của PT.

Vì vậy để giải PT có tính đối xứng ta chỉ cần tìm các nghiệm $x\ge 0$ rồi từ nhận xét trên ta suy ra được các nghiệm $x\le 0$. Sau đây là một vài thí dụ.

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$\left(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}+\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}\right)=4.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với:

$$\left(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}+\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}\right)-4=0 \ (*)$$

Miền xác định của PT(*): $D=[-5;5]$. Ta xét:

$$f(x)=\left(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}+\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}\right)-4.$$

Ta thấy $\forall x\in D$ có $-x\in D$ và

$f(-x)=$

$$=\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt[3]{-\frac{13}{4}x+14}+\sqrt[3]{-\frac{13}{4}x-14}\right)-4$$

$$=-\left(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\right)\left(-\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}-\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}\right)-4$$

$$=\left(\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}+\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}\right)-4$$

$=f(x)$.

Suy ra PT(*) có tính đối xứng. Do đó ta xét $x\in[0;5]$. Khi đó: $\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{5}-\sqrt{5}=0$,

$$\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}+\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}\ge\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{-14}=0.$$

+ Dễ thấy $x=4$ là nghiệm PT(*).

+ Xét $x\in[0;4)$ ta thấy

$$\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}<\sqrt{5+4}-\sqrt{5-4}=2;$$

$$\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}+\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}<\sqrt[3]{13+14}+\sqrt[3]{13-14}=2.$$

Suy ra VT(*) $<4-4=0$.

+ Xét $x\in(4;5]$ ta thấy

$$\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}>\sqrt{5+4}-\sqrt{5-4}=2;$$

$$\sqrt[3]{\frac{13}{4}x+14}+\sqrt[3]{\frac{13}{4}x-14}>\sqrt[3]{13+14}+\sqrt[3]{13-14}=2.$$

Suy ra VT(*) $>4-4=0$.

Vậy với $x\in[0;5]$ thì $x=4$ là nghiệm duy nhất của PT(*).

Theo tính chất đối xứng của PT(*) thì với $x\in[-5;0]$ có $x=-4$ là nghiệm duy nhất của PT(*).

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x=4$ và $x=-4$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}}\right)^4+\left(\frac{2+|x|}{3}\right)^4=2.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}}\right)^4+\left(\frac{2+|x|}{3}\right)^4-2=0 \ (*)$$

Miền xác định của PT là $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Đặt VT(*) là $f(x)$.

Dễ thấy $\forall x\in D$ ta có $-x\in D$ và

$$f(-x)=$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{-x-\sqrt{(-x)^2-1}}+\sqrt[3]{-x+\sqrt{(-x)^2-1}}}\right)^4+\left(\frac{2+|-x|}{3}\right)^4-2$$

$$=\left(\frac{2}{-\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}}\right)^4+\left(\frac{2+|x|}{3}\right)^4-2$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}}\right)^4+\left(\frac{2+|x|}{3}\right)^4-2$$

$$=f(x).$$

+ Do tính đối xứng của PT(*) nên ta xét $x\in[1;+\infty)$. Khi đó

$$x+\sqrt{x^2-1}>0\,;\,x-\sqrt{x^2-1}>x-\sqrt{x^2}=0.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho ba số:

$x-\sqrt{x^2-1}$; 1; 1 ta có:

$$\sqrt[3]{(x-\sqrt{x^2-1}).1.1}\le\frac{x-\sqrt{x^2-1}+1+1}{3}$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}\le\frac{x+2-\sqrt{x^2-1}}{3}\qquad(1)$$

Tương tự: $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}\le\dfrac{x+2+\sqrt{x^2-1}}{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$\le\frac{x+2-\sqrt{x^2-1}}{3}+\frac{x+2+\sqrt{x^2-1}}{3}=\frac{2x+4}{3}$$

$$\Rightarrow\frac{2}{\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}}\ge\frac{3}{x+2}\qquad(3)$$

Từ $x\ge1$ và (3) suy ra

$$\text{VT}(*)=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}}\right)^4+\left(\frac{2+x}{3}\right)^4-2$$

$$\ge\left(\frac{3}{x+2}\right)^4+\left(\frac{x+2}{3}\right)^4-2\qquad(4)$$

+ Áp dụng BĐT Cauchy có:

$$\left(\frac{3}{x+2}\right)^4+\left(\frac{x+2}{3}\right)^4\ge2\sqrt{\left(\frac{3}{x+2}\right)^4\left(\frac{x+2}{3}\right)^4}=2\quad(5)$$

Từ (4) và (5) suy ra VT(*) ≥ VP(*).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$.

Vậy khi $x\in[1;+\infty)$ thì PT(*) có nghiệm $x=1$.

Suy ra khi $x\in(-\infty;-1]$ thì PT(*) có nghiệm $x=-1$.

PT đã cho có hai nghiệm $x=1$; $x=-1$.

Chú ý. Với một số PT ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa về giải một PT mới có tính đối xứng. Sau đây là một thí dụ.

Thí dụ 3. *Giải phương trình*

$$\frac{\dfrac{1}{(6x+1)^8}+\dfrac{1}{(7x+2)^8}+\dfrac{1}{(8x+3)^8}}{\dfrac{1}{2^8}+\dfrac{1}{3^8}+\dfrac{1}{4^8}}=\frac{1}{(x+1)^8}.$$

Lời giải. PT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\left(\dfrac{6x+1}{x+1}\right)^8}+\frac{1}{\left(\dfrac{7x+2}{x+1}\right)^8}+\frac{1}{\left(\dfrac{8x+3}{x+1}\right)^8}=\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\left(\dfrac{7x+2}{x+1}-1\right)^8}+\frac{1}{\left(\dfrac{7x+2}{x+1}\right)^8}+\frac{1}{\left(\dfrac{7x+2}{x+1}+1\right)^8}$$

$$-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}=0\ (*)$$

Đặt $\dfrac{7x+2}{x+1}=t$ thì PT(*) trở thành

$$\frac{1}{(t-1)^8}+\frac{1}{t^8}+\frac{1}{(t+1)^8}-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}=0\qquad(1)$$

Miền xác định của PT(1): $D=\mathbb{R}\setminus\{0,\pm1\}$.

$$f(t)=\frac{1}{(t-1)^8}+\frac{1}{t^8}+\frac{1}{(t+1)^8}-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}.$$

Ta thấy $\forall t \in D$ thì $-t \in D$ và

$$f(-t)=\frac{1}{(-t-1)^8}+\frac{1}{(-t)^8}+\frac{1}{(-t+1)^8}-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}$$

$$=\frac{1}{(t+1)^8}+\frac{1}{t^8}+\frac{1}{(t-1)^8}-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}=f(t).$$

Như vậy PT(1) có tính đối xứng. Do đó ta xét $t\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$. Dễ thấy $t=3$ là nghiệm PT(1).

+ Xét $t\in(0;1)$ ta thấy $-1<t-1<0$

$$\Rightarrow 0<(t-1)^8<1;\ 0<t^8<1;\ (t+1)^8>0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(t-1)^8}>1;\ \frac{1}{t^8}>1;\ \frac{1}{(t+1)^8}>0.$$

$$\Rightarrow \text{VT}(1)>2-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}>0.$$

+ Xét $t\in(1;3)$ ta thấy $0<t-1<2;\ 2<t+1<4$

$$\Rightarrow 0<(t-1)^8<2^8;\ 0<t^8<3^8;\ 2^8<(t+1)^8<4^8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(t-1)^8}>\frac{1}{2^8};\ \frac{1}{t^8}>\frac{1}{3^8};\ \frac{1}{(t+1)^8}>\frac{1}{4^8}$$

$$\Rightarrow \text{VT}(1)>0.$$

+ Xét $t\in(3;+\infty)$ ta thấy $t-1>2;\ t+1>4$

$$\Rightarrow (t-1)^8>2^8;\ t^8>3^8;\ (t+1)^8>4^8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(t-1)^8}<\frac{1}{2^8};\ \frac{1}{t^3}<\frac{1}{3^8};\ \frac{1}{(t+1)^8}<\frac{1}{4^8}$$

Do đó $\text{VT}(1)<0$.

Vậy với $t\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$ thì $t=3$ là nghiệm duy nhất của PT(1).

Theo tính chất đối xứng của PT(1) suy ra với $t\in(-\infty;0)\setminus\{-1\}$ có $t=-3$ là nghiệm duy nhất của PT(1).

Vậy PT(1) có hai nghiệm $t=3$ và $t=-3$.

Suy ra PT đã cho có hai nghiệm là

$$x=-\frac{1}{2} \text{ và } x=\frac{1}{4}.$$

BÀI TẬP

Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt[4]{40x^2-40x+1}+\sqrt[4]{40x^2+40x+1}=4.$

2. $\dfrac{\sqrt[4]{41+x}-\sqrt[4]{41-x}}{\sqrt{41+x}+\sqrt{41-x}}=\dfrac{8}{x}.$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{\frac{13}{2}x+14}+\sqrt[3]{\frac{13}{2}x-14}}{\sqrt{10+3x}+\sqrt{10-3x}}=\dfrac{8}{3x^3}.$

4. $\dfrac{32}{(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x-3})^6}+\dfrac{8}{(x+1)^2}=1.$

5. $\dfrac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}}{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{x-4}}=\dfrac{x}{2}.$

6. $(2x+1)\sqrt[3]{14x+13}+(2x-1)\sqrt[3]{14x-13}=10.$

7. $\left(\sqrt[3]{7x-6}+\sqrt[3]{7x+20}\right)\left(\sqrt[3]{2x-2}+\sqrt[3]{2x+6}\right)=8.$

8. $\dfrac{2-\left(\left(\sqrt[4]{\frac{2-x}{4}}+\sqrt[4]{\frac{2+x}{4}}\right)\left(\frac{x^3}{32}+\frac{x}{8}+\frac{1}{x}\right)\right)^4}{\left(\frac{2\sqrt{2-x}+2\sqrt{2+x}}{2+|x|}\right)^4}=1.$

9. $\left(\dfrac{4\sqrt{2-x}+4\sqrt{2+x}}{2+|x|}\right)^3+3\left(\dfrac{x^3}{32}+\dfrac{x}{8}+\dfrac{1}{x}\right)^4=11.$

10. $\dfrac{2-\left(\frac{2}{\sqrt[3]{7x-6}+\sqrt[3]{7x+20}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4x+4}}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{7x-6}+\sqrt[3]{7x+20}+\sqrt[3]{32x+32}\right)^4}=\dfrac{1}{2^{12}}.$

11. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x-1)^8}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^8}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^8}}=2+\dfrac{1}{9.\sqrt[3]{9}}.$

12. $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^4+\left[\dfrac{(2x+\sqrt{x^2-1})^9+(2x-\sqrt{x^2-1})^9}{512}\right]^4=32.$

13. $\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}}\right)^4+\left(\dfrac{x^2+2}{3}\right)^4=2.$

NHỮNG HỆ THỨC LIÊN QUAN ĐẾN BA ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN ĐỨC HUẤN (*GV THCS Phan Bội Châu - Tứ Kỳ - Hải Dương*)

Việc tập hợp những bài toán có cùng giả thiết là việc làm vô cùng quan trọng đối với mỗi thầy cô dạy toán, việc làm đó giúp cho người thầy có một sự tổng hợp kiến thức dạy học sinh dễ hiểu và dễ nhớ, học sinh không phải học nhiều mà vẫn đạt kết quả cao, chẳng hạn như bài toán sau:

Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

1) $AB^2 + HC^2 = BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2$.

2) $AB.HC + BC.HA + AC.HB = 4S$ (*với S là diện tích* ΔABC).

3) $\left(\dfrac{AE}{AB}\right)^2 = \dfrac{AF.EF}{AC.BC}$.

4) $BH.BE + CH.CF + AH.AD$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right).$$

5) *H là tâm đường tròn nội tiếp* ΔDEF.

6) $AE.CD.BF = AF.BD.CE = DE.EF.FD$.

7) $\dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HA.HC}{BA.BC} + \dfrac{HA.HB}{CA.CB}$

$$= \frac{DH}{AD} + \frac{EH}{BE} + \frac{FH}{CF}.$$

8) $\dfrac{HB.HC}{AB.AC} + \dfrac{HA.HC}{BA.BC} + \dfrac{HA.HB}{CA.CB} = 1$.

9) $\dfrac{AD}{HD} + \dfrac{BE}{HE} + \dfrac{CF}{HF} \geq 9$.

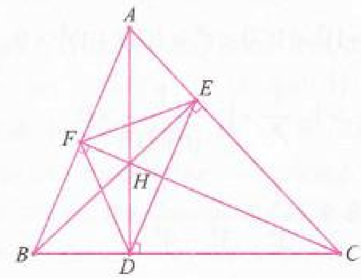
10) $\dfrac{HD}{AH} + \dfrac{HE}{BH} + \dfrac{HF}{CH} \geq \dfrac{3}{2}$.

11) $\dfrac{HA}{BC} + \dfrac{HB}{AC} + \dfrac{HC}{AB} \geq \sqrt{3}$.

12) $\dfrac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C\right)$.

13) $\dfrac{S_{AEF}}{AH^2} = \dfrac{S_{DBF}}{BH^2} = \dfrac{S_{DCE}}{CH^2}$.

Hướng dẫn.



1) Áp dụng định lý Pythagore có

$$AB^2 + HC^2 = AE^2 + BE^2 + HE^2 + EC^2$$

$$= (AE^2 + HE^2) + (BE^2 + EC^2) = AH^2 + BC^2 \quad (1)$$

Chứng minh tương tự có

$$AC^2 + HB^2 = AH^2 + BC^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$AB^2 + HC^2 = BC^2 + HA^2 = CA^2 + HB^2.$$

2) Ta có $BC.HA = BC(AD - HD)$

$$= BC.AD - BC.HD = 2S - 2S_{HBC} \quad (3)$$

Tương tự, $AB.HC = 2S - 2S_{HAB}$ (4)

$$AC.HB = 2S - 2S_{HAC} \quad (5)$$

Từ (3), (4), (5) ta thấy

$AB.HC + BC.HA + AC.HB$

$$= 6S - 2(S_{HBC} + S_{HAB} + S_{HAC}) = 6S - 2S = 4S.$$

3) Từ $\Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{AF}{AC}$

$$\Rightarrow \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{AF.EF}{AC.BC}.$$

4) Do $\Delta BDH \backsim \Delta BEC \Rightarrow BH.BE = BD.BC$.

$\Delta CDH \backsim \Delta CFB \Rightarrow CH.CF = CD.CB$

$\Rightarrow BH.BE + CH.CF = BC(BD + CD) = BC^2$ (1)

Tương tự $\quad AH.AD + CH.CF = AC^2 \quad (2)$

$\quad AH.AD + BH.BE = AB^2 \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra hệ thức cần chứng minh.

5) Tứ giác $BDHF$ nội tiếp nên $\widehat{DBH} = \widehat{HFD}$.

Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{DBH} = \widehat{HFE}$, suy ra $\widehat{HFD} = \widehat{HFE} \Rightarrow FH$ là phân giác $\widehat{DFE}$.

Tương tự có EH là phân giác $\widehat{DEF}$ suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

6) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$

$$\Rightarrow \Delta AEF \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}.$$

Tương tự: $\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{CE}{BC} = \dfrac{DE}{AB}$; $\dfrac{BF}{BC} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{DF}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB}.\frac{CD}{AC}.\frac{BF}{BC} = \frac{AF}{AC}.\frac{CE}{BC}.\frac{BD}{AB} = \frac{EF}{BC}.\frac{DE}{AB}.\frac{DF}{AC}$$

$$\Rightarrow AE.CD.BF = AF.BD.CE = DE.EF.DF.$$

Chú ý. Nếu bài toán chỉ yêu cầu chứng minh $AE.CD.BF = AF.BD.CE$ thì có thể chứng minh cách khác như sau:

Từ $\Delta FBC \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{BF}{BD} = \dfrac{BC}{BA}$

Tương tự có: $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{AC}{BC}$, $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BD}.\frac{CD}{CE}.\frac{AE}{AF} = \frac{BC}{AB}.\frac{AC}{BC}.\frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

7) Ta có: $\Delta DHC \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{HC}{AB} = \dfrac{HD}{BD}$

$\Delta DBH \backsim \Delta DAC \Rightarrow \dfrac{HB}{AC} = \dfrac{DB}{DA}$

$\Rightarrow \dfrac{HC}{AB}.\dfrac{HB}{AC} = \dfrac{HD}{AD}$. Tương tự có

$\dfrac{HA.HC}{BA.BC} = \dfrac{HE}{BE}$; $\dfrac{HA.HB}{CA.CB} = \dfrac{HF}{CF}$

$$\Rightarrow \frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HC}{BA.BC} + \frac{HA.HB}{CA.CB} = \frac{DH}{AD} + \frac{EH}{BE} + \frac{FH}{CF}.$$

8) Theo câu 7) ta có: $\dfrac{HC}{AB}.\dfrac{HB}{AC} = \dfrac{HD}{AD} = \dfrac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự có $\dfrac{HA.HC}{BA.BC} = \dfrac{S_{AHC}}{S_{ABC}}$; $\dfrac{HA.HB}{CA.CB} = \dfrac{S_{ABH}}{S_{ABC}}$

$$\Rightarrow \frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HC}{BA.BC} + \frac{HA.HB}{CA.CB} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}} = 1.$$

Cách khác: Ta có: $\Delta BHF \backsim \Delta BAE \Rightarrow \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{BF}{BE}$.

Ta có: $\dfrac{BH.CH}{AB.AC} = \dfrac{BF.CH}{BE.AC} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự: $\dfrac{CH.AH}{BC.BA} = \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}}$; $\dfrac{AH.BH}{AC.BC} = \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}}$

$$\Rightarrow \frac{HB.HC}{AB.AC} + \frac{HA.HC}{BA.BC} + \frac{HA.HB}{CA.CB} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 1.$$

9) $\dfrac{HD}{AD} + \dfrac{HE}{BE} + \dfrac{HF}{CF} = \dfrac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$

Nhận xét rằng, với $x, y, z > 0$ thì ta có BĐT

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \qquad (*)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$. Thật vậy

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right)$$

$\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Áp dụng (*) ta có

$$\left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF}\right)\left(\frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF} \geq 9.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{HD}{AD}=\dfrac{HE}{BE}=\dfrac{HF}{CF}$

$\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

10) Đặt $S_{ABC}=S$; $S_{HBC}=S_1$; $S_{HAC}=S_2$; $S_{HBC}=S_3$.

Ta có $\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{S_1}{S}\Rightarrow\dfrac{HD}{AD-HD}=\dfrac{S_1}{S-S_1}$

$$\Rightarrow\frac{HD}{HA}=\frac{S_1}{S_2+S_3}.$$

$\dfrac{HE}{HB}=\dfrac{S_2}{S_1+S_3}$; $\dfrac{HF}{HC}=\dfrac{S_3}{S_1+S_2}$. Vậy

$$\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}=\frac{S_1}{S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_1+S_3}+\frac{S_3}{S_1+S_2}.$$

Nhận xét rằng, với $a, b, c>0$ thì ta có BĐT:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

Thật vậy $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$

$$=\left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a+b)+(b+c)+(c+a)\right]\times$$

$$\times\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

Áp dụng BĐT trên ta có

$$\frac{HD}{HA}+\frac{HE}{HB}+\frac{HF}{HC}$$

$$=\frac{S_1}{S_2+S_3}+\frac{S_2}{S_1+S_3}+\frac{S_3}{S_1+S_2}\ge\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $S_1=S_2=S_3$ $\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

11) Đặt $BC=a$; $AC=b$, $AB=c$,

$$AH=x,\ BH=y,\ CH=z.$$

Khi đó

$$\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}=\frac{HA.HB}{CA.CB}+\frac{HA.HC}{BA.BC}+\frac{HB.HC}{AB.AC}=1.$$

Ta có: $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}-\dfrac{x}{a}\right)^2\ge0$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2\ge3\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)=3.1=3$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\ge\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{HA}{BC}+\frac{HB}{AC}+\frac{HC}{AB}\ge\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{HA}{BC}=\dfrac{HB}{AC}=\dfrac{HC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{HF}{CF}=\dfrac{HD}{AD}=\dfrac{HE}{BE}=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow$ ΔABC đều.

12) Áp dụng công thức

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$, $S_{AEF}=\dfrac{1}{2}AE.AF.\sin A$

$$\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{AF.AE}{AB.AC}=\frac{AF}{AC}.\frac{AE}{AB}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\cos^2A.$$

Tương tự: $\dfrac{S_{BDF}}{S_{ABC}}=\cos^2B$; $\dfrac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\cos^2C\Rightarrow$ đpcm.

13) Ta có $\Delta AEH\backsim\Delta DBH$

$$\Rightarrow\ \frac{AE}{DB}=\frac{AH}{DH}\Rightarrow\frac{AE^2}{DB^2}=\frac{AH^2}{DH^2}$$

$\Delta AFH\backsim\Delta CDH\Rightarrow\dfrac{AF}{CD}=\dfrac{AH}{CH}$

$$\Rightarrow\frac{AF^2}{CD^2}=\frac{AH^2}{CH^2}.$$

Chứng minh được $\Delta AEF\backsim\Delta DEC\backsim\Delta DBF$ (cùng $\backsim\Delta ABC$). Do đó

$$\frac{S_{AEF}}{S_{DEC}}=\frac{AF^2}{CD^2}=\frac{AH^2}{CH^2}\qquad(1)$$

$$\frac{S_{AEF}}{S_{DBF}}=\frac{AE^2}{DB^2}=\frac{AH^2}{BH^2}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{S_{AEF}}{AH^2}=\frac{S_{DBF}}{BH^2}=\frac{S_{DEC}}{CH^2}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

NĂM HỌC 2017 - 2018

VÒNG 1

(Dành cho mọi thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức

$$P=\frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)\left(a+\sqrt{a+b}\right)}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)$$

với $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, $a + b \neq a^2$.

1) Chứng minh $P = a - b$.

2) Tìm a, b biết rằng $P = 1$ và $a^3 - b^3 = 7$.

Câu 2 (1 điểm). Giả sử x, y là hai số thực phân biệt thoả mãn $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}=\dfrac{2}{xy+1}$. Hãy tính

$$S=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{2}{xy+1}.$$

Câu 3 (2 điểm). Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -2ax - 4a$, với a là tham số.

1) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) khi $a=-\dfrac{1}{2}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $|x_1| + |x_2| = 3$.

Câu 4 (1 điểm). Anh *Nam* đi xe đạp từ A đến C. Trên quãng đường AB ban đầu (B nằm giữa A và C) anh *Nam* đi với vận tốc không đổi là a (km/h) và thời gian đi từ A đến B là 1,5 giờ. Trên quãng đường BC còn lại, anh *Nam* đi chậm dần đều với vận tốc tại thời điểm t (tính bằng giờ) kể từ B là $v = -8t + a$ (km/h). Quãng đường đi được từ B đến thời điểm t đó là $S = -4t^2 + at$. Tính quãng đường AB biết rằng đến C xe dừng hẳn và quãng đường BC dài 16km.

Câu 5 (3 điểm). Cho đường tròn (O) bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC có ba góc nhọn. Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm P. Gọi D, E tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống các đường thẳng AB, AC và M là trung điểm cạnh BC.

1) Chứng minh $\widehat{MEP}=\widehat{MDP}$.

2) Giả sử B, C cố định và A chạy trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC luôn là tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

3) Khi tam giác ABC đều, hãy tính diện tích tam giác ADE theo R.

Câu 6 (1 điểm). Các số thực không âm $x_1, x_2, ..., x_9$ thỏa mãn: $\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_9=10 \\ x_1+2x_2+\cdots+9x_9=18 \end{cases}$.

Chứng minh $1.19x_1 + 2.18x_2 + ... + 9.11x_9 \geq 270$, đẳng thức xảy ra khi nào?

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (1,5 điểm). Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng trong 4 số

$$a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\ b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};\ c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a};\ d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu 2 (1,5 điểm). Giải phương trình:

$$\sqrt{(x^2+2x)^2+4(x+1)^2}-\sqrt{x^2+(x+1)^2+(x^2+x)^2}=2017.$$

Câu 3 (3 điểm).

1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 = b^3$, $c^3 = d^4$ và $a = d + 98$.

2) Tìm tất cả các số thực x sao cho trong 4 số

$$x-\sqrt{2};\ x^2+2\sqrt{2};\ x-\frac{1}{x};\ x+\frac{1}{x}$$

có đúng một số không phải là số nguyên.

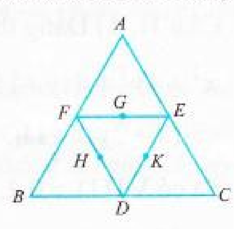
Câu 4 (3 điểm). Cho đường tròn (O) bán kính R và điểm M nằm phía ngoài đường tròn (O). Kẻ các tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A và C khác B). Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MA, MC. Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

1) Chứng minh $KO^2 - KM^2 = R^2$.

2) Chứng minh tứ giác $BCDM$ là tứ giác nội tiếp.

3) Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm của KE. Đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5 (1 điểm). Xét hình vẽ. Ta viết các số 1, 2, 3, ..., 9 vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng 3 số trên mỗi cạnh của tam giác bằng 18.



Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số ở các điểm (A; B; C; D; E; F; G; H; K) của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt? Tại sao?

NGUYỄN THANH HỒNG
(GV THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội) ***Giới thiệu.***

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN KHTN ĐHQG HÀ NỘI NĂM HỌC 2017-2018

(Đề thi đăng trên TH&TT Số 481, tháng 7 năm 2017)

VÒNG 1

Câu I. 1) Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 & (1) \\ x.1+x^2y=2y^3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$x(x^2+y^2-xy)+x^2y=2y^3 \Leftrightarrow x^3-2y^3+xy^2=0.$

Nếu $y=0 \Rightarrow x=0$: không thỏa mãn hệ.

Chia hai vế cho $y^3 \neq 0$ ta thu được $\left(\frac{x}{y}\right)^3-2+\frac{x}{y}=0.$

Đặt $t=\frac{x}{y}$ ta có: $t^3+t-2=0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2)=0 \Leftrightarrow t=1.$

Do đó $x=y$ và thu được

$$\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2-xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm 1.$$

2) ĐK: $-1 \le x \le 1.$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+1} \\ v=\sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2=2 \\ 2u^3=(u+v)(2-uv) \end{cases}$

$\Rightarrow 2u^3=(u+v)(u^2+v^2-uv)=u^3+v^3 \Leftrightarrow u=v$

$\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn).

Câu II. 1) Đẳng thức đã cho được viết lại

$x^2+4y^2+4xy+11x^2+11y^2+22xy=4617$

$\Leftrightarrow (x+2y)^2+11(x+y)^2=4617 \quad (1)$

Ta có VT(1) $\equiv 0,1,4,9,3,5 \pmod{11}$

mà $4617 \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow$ không có số nguyên x, y nào thỏa mãn đẳng thức đã cho.

2) Theo BĐT Bunyakovsky ta có

$$\left(\sqrt{a^3}\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\sqrt{b}\right)^2 \le \left(a^3+b\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \le \left(a^3+b\right)\left(\frac{1}{a}+b\right) \Rightarrow \frac{a+b}{a^3+b} \le \frac{\frac{1}{a}+b}{a+b}.$$

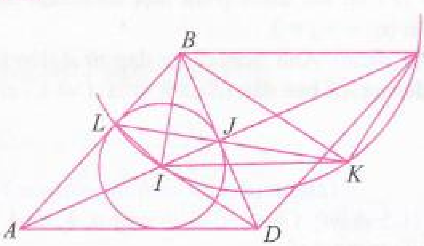
Tương tự: $\frac{a+b}{b^3+a} \le \frac{\frac{1}{b}+a}{a+b}$. Từ đó

$$(a+b)\left(\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{b^3+a}\right) \le \frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+a+b\right)=1+\frac{1}{ab}$$

$$\Rightarrow M=(a+b)\left(\frac{1}{a^3+b}+\frac{1}{b^3+a}\right)-\frac{1}{ab} \le 1+\frac{1}{ab}-\frac{1}{ab}=1.$$

Vậy $\max M=1$ khi $a=b=1$.

Câu III.



1) Do $BC \parallel AD$, $BK \parallel ID$ và AI là trung trực của BD nên $\widehat{CBK}=\widehat{IDA}=\widehat{IBA}$.

2) Từ câu 1) chú ý tứ giác $BJIL$ nội tiếp nên $\widehat{CBK}=\widehat{IBA}=\widehat{IJL}=\widehat{CJK}$. Từ đó tứ giác $BCKJ$ nội tiếp nên $\widehat{CKB}=\widehat{CJB}=90^0$.

3) Từ tứ giác $BCKJ$ nội tiếp ta có

$$\widehat{JCK}=\widehat{JBK}=\widehat{JBI}=\widehat{JLI}$$

từ đó tứ giác $CKIL$ nội tiếp.

Câu IV. Ta chứng minh với $n>4$ (n là hợp số) không tồn tại một cách sắp xếp $a_1, a_2, ..., a_n$ của các số $1, 2, ..., n$ sao cho các số $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2...a_n$ có số dư phân biệt khi chia cho n. Giả sử phản chứng có tồn tại một cách sắp xếp thỏa mãn suy ra chỉ có một số trong dãy số $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, ..., a_1a_2...a_n$ chia hết cho n. Hiển nhiên là số cuối cùng $a_1a_2...a_n = n!$ và có $a_n = n$ (nếu không sẽ có số khác trong dãy chia hết cho n).

Suy ra $a_1a_2...a_{n-1} = (n-1)!$. Ta có kết quả $n|(n-1)!$ Thật vậy vì n là hợp số lớn hơn 4 nên

$$n = a.b\left(2 \le a \le n-1, 2 \le b \le n-1, a+b \le n-1\right)$$

$$\Rightarrow (n-1)! \vdots (a+b)!$$

mà $(a+b)! = (1.2...a)\left((a+1)...(a+b)\right) \vdots ab$

$$\Rightarrow n|(n-1)!.$$

Suy ra $a_1a_2...a_{n-1}$ chia hết cho n (mâu thuẫn).

Với $n = 4$ ta có một cách sắp xếp của 1, 2, 3, 4 là 1, 3, 2, 4. Khi đó các số 1, 1.3, 1.3.2, 1.3.2.4 có số dư 1, 3, 2, 0 khi chia cho 4.

Đáp số $n = 4$.

VÒNG 2

Câu I. 1) Hệ tương đương với ($x + y \ge 0$)

$$\begin{cases}(x+y)^2 = x+3y \\ (x+y)^2 = 3+xy\end{cases} \Rightarrow x+3y = 3+xy \Leftrightarrow (x-3)(y-1) = 0$$

• $\begin{cases}x=3 \\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3 \\ y^2+3y+6=0\end{cases}$ (vô nghiệm)

• $\begin{cases}y=1 \\ x^2+y^2+xy=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=1 \\ x^2+x-2=0\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=1, x=1 \\ y=1, x=-2.\end{array}\right.$

2) • *Cách 1*: Vì $ab + a + b = 1$ nên

$$a^2+1 = a^2+ab+a+b = (a+b)(a+1);$$
$$b^2+1 = b^2+ab+a+b = (a+b)(b+1).$$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{(a+b)(a+1)} + \frac{b}{(a+b)(b+1)} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(a+b)^2(a+1)(b+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+b)(a+1)(b+1)} = \frac{1+ab}{(a+b)\sqrt{2(a+1)(b+1)}}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(b+1) = \sqrt{2(a+1)(b+1)}$$

(vì $a(b+1)+b(a+1) = ab+1$)

$$\Leftrightarrow (a+1)(b+1) = 2 \Leftrightarrow ba+a+b = 1 \text{ (đúng).}$$

• *Cách 2*: Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a(1+b^2)+b(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}} \quad (*)$$

mà $a(1+b^2)+b(1+a^2) = (a+b)(1+ab)$ nên

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a+b}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)^2 = (1+a^2)(1+b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+4ab = 1+a^2b^2 \Leftrightarrow (a+b)^2 = (1-ab)^2.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng vì $a + b = 1 - ab$.

Câu II. 1) a) Nếu $p = q$ thì $p-1 = q^2-1$ $\Rightarrow p = q = 0$ hoặc $p = q = 1$, vô lí.

Xét $p \ne q$ thì vì p, q nguyên tố

$q \mid p-1$ và $p \mid q^2-1 \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho

$$p-1 = k_1q, \; q^2-1 = k_2p.$$

Thay vào (*) ta có $pk_1q = qk_2p \Rightarrow k_1 = k_2$.

Suy ra tồn tại $k \in \mathbb{Z}^+$ để $\begin{cases}p-1 = kq \\ q^2-1 = kp.\end{cases}$

b) Thế $p = 1+kq$ vào đẳng thức $q^2 - 1 = kp$ ta có $q^2-1 = k(kq+1) \Leftrightarrow q^2-k^2q-1-k = 0$.

Suy ra $\Delta = k^4+4k+4$ là số chính phương.

Ta có $k^4 < k^4+4k+4 \le k^4+4k^2+4 = (k^2+2)^2$

suy ra: $k^4+4k+4 = (k^2+1)^2 = k^4+2k^2+1$

$\Leftrightarrow 2k^2-4k-3 = 0$: không có nghiệm nguyên.

Hoặc $k^4+4k+4 = (k^2+2)^2 = k^4+4k^2+4$

$\Leftrightarrow k = k^2 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow q^2-q-2 = 0 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow p = 3$.

Các số $p = 3, q = 2$ thoả mãn (*), là các số nguyên tố cần tìm.

2) Ta có $ab+bc+ca+abc = 2$

$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c) = (1+a)+(1+b)+(1+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)} + \frac{1}{(1+b)(1+c)} + \frac{1}{(1+c)(1+a)} = 1.$$

Đặt $x=\dfrac{1}{1+a}, y=\dfrac{1}{1+b}, z=\dfrac{1}{1+c} \Rightarrow xy+yz+zx=1.$

Ta có $M=\dfrac{a+1}{(a+1)^2+1}+\dfrac{b+1}{(b+1)^2+1}+\dfrac{c+1}{(c+1)^2+1}$

$$=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}+1}+\frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}+1}=\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$$

$$=\frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Mặt khác

$$9(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2\geq 6xyz$$

(đúng vì theo BĐT Cauchy)

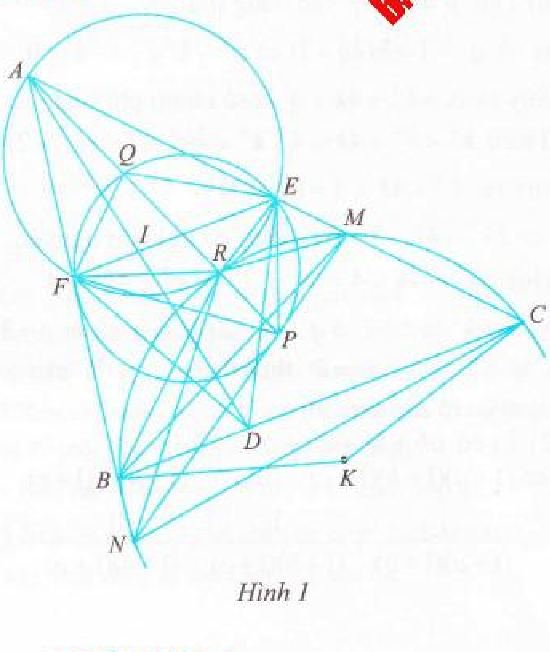
$$\Rightarrow M\leq\frac{2}{\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)}=\frac{9}{4(x+y+z)}$$

$$\leq\frac{9}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (vì } (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)=3\text{)}.$$

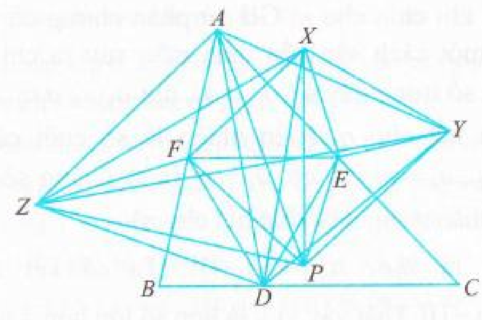
Vậy $\max M=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ khi $x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}-1.$$

Câu III.



Hình 1



Hình 2

1) (h.1) Vì tứ giác $PEQF$ nội tiếp, ta có:

$\widehat{EQF}=180^0-\widehat{EPF}=\widehat{PEF}+\widehat{PFE}=\widehat{DEC}+\widehat{DFB}$

$=(\widehat{EAD}+\widehat{EDA})+(\widehat{FAD}+\widehat{FDA})=\widehat{BAC}+\widehat{EDF}.$

2) Không mất tổng quát ta giả sử M nằm giữa A, C còn N nằm trên tia đối tia BA như hình 1 còn các trường hợp khác làm tương tự. Ta có

$\widehat{MNB}=180^0-\widehat{NPF}-\widehat{PFN}=180^0-\widehat{PEF}-\widehat{DFE}$

$=180^0-\widehat{DEC}-\widehat{DEF}=180^0-\widehat{CEF}=\widehat{AEF}=\widehat{ACB}.$

Do đó tứ giác $NCMB$ nội tiếp trong đường tròn (K).

3) Ta có nhận xét: $\widehat{PAB}=\widehat{DAC}$. Thật vậy, gọi X, Y, Z lần lượt là các điểm đối xứng của P qua EF, AE, AF (h.2) thì từ giả thiết $\widehat{PEC}=\widehat{DEF}$ suy ra $\widehat{DEY}=\widehat{DEX}$, mà EX = EY nên DX = DY. Tương tự thì DX = DZ. Do đó DX = DY = DZ, mà AY = AP = AZ do đó $\widehat{DAZ}=\widehat{DAY}$, kết hợp tính đối xứng suy ra $\widehat{PAB}=\widehat{DAC}$.

Đường tròn (PEM) cắt đường tròn (AEF) tại R khác E. Ta thấy $\widehat{RPN}=\widehat{REM}=\widehat{RFA}$, do đó tứ giác $PRFN$ nội tiếp. Lại do tứ giác $BNCM$ nội tiếp nên $\widehat{ABC}=180^0-\widehat{NBC}=180^0-\widehat{CMN}=\widehat{AMN}$. Từ đây ta thu được

$$\widehat{ARE}=\widehat{AFE}=\widehat{ABC}=\widehat{AMN}=180^0-\widehat{PRE}$$

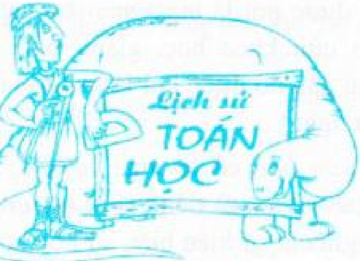
nên A, R, P thẳng hàng.

Gọi giao điểm của EF và AD là I, theo tính chất đường trung bình thì I là trung điểm của AD.

Ta lại có $\widehat{AEI}=\widehat{ARF}$, kết hợp nhận xét $\widehat{PAB}=\widehat{DAC}$ thì $\Delta AEI \backsim \Delta ARF$ (g.g).

Cùng gấp đôi hai cạnh AI và AF thì hai tam giác $\Delta AED \backsim \Delta ARB$ (c.g.c). Ta thu được

(*Xem tiếp trang 13*)



PYTHAGORAS VÀ MÔN PHÁI PYTHAGORAS

NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

Nhà toán học Hy Lạp *Pythagoras* lừng lẫy thời kỳ trước Công nguyên được biết đến qua việc sưu tầm, nghiên cứu của nhiều tác giả trong các tài liệu rải rác ở nhiều nơi, trong đó phải kể đến nguồn thông tin chính là:

1) Một số sách về cuộc đời của *Pythagoras* của các nhà sử học *Iamblichus* (khoảng từ năm 245 đến 325); *Porphyry* (khoảng từ năm 234 đến 305); *Laertius* (khoảng từ năm 200 đến 250).

2) Quyển *Tóm lược Eudemus* của nhà bình luận lịch sử toán *Proclus* (khoảng từ năm 412 đến 485 ở Athens, Hy Lạp). Tài liệu này viết ngắn gọn về sự phát triển của Số học, Hình học ở Hy Lạp từ thời xa xưa đến *Euclid* (khoảng từ năm – 356 đến năm – 300) mà *Proclus* biết đến qua các tài liệu còn lưu trữ được. Tài liệu này có tên là *Tóm lược Eudemus* vì chủ yếu dựa vào các công trình được viết bởi nhà toán học *Eudemus* (khoảng năm – 370 đến – 300) ở Rhodes, Hy Lạp, là học trò của nhà toán học triết học Hy Lạp *Aristotle* (khoảng từ năm – 384 đến năm – 322). Sách của nhà triết học, toán học Plato (khoảng năm – 427 đến năm – 347), sách Số học của nhà toán học *Nicomachus* (khoảng từ năm 60 đến 120).

Khi nói về *Pythagoras* người ta vẫn luôn đặt câu hỏi: Liệu những chi tiết về cuộc đời của *Pythagoras* được viết bởi những người sống sau hơn 700 năm chuẩn xác đến mức nào?.

Nhà toán học, triết học *Pythagoras* ($\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma o\rho\alpha\varsigma$, Pythagôrơ, tiếng Pháp *Pythagore* đọc là Pytago) sinh vào khoảng năm – 580 (hoặc – 570) tại đảo Samos của Hy Lạp, ở phía đông biển Aegea, đảo nằm ở phía tây gần vùng đất Ionia của Hy Lạp (nay là vùng bờ biển phía tây Thổ Nhĩ Kỳ), mẹ ông sống ở Samos là *Pythais* và cha là thương gia *Mnesarchus* buôn ngọc trai, đến từ Tyros (nay thuộc Libăng). Thuở nhỏ *Pythagoras* học ở quê nhà, rồi đến học ở Syros (nay là Syri). Khoảng 18 tuổi *Pythagoras* đến thành phố biển Miletus thuộc Hy Lạp cổ đại (nay là Milet thuộc Thổ Nhĩ Kỳ) học nhà toán học, thiên văn nổi tiếng *Thales* (sống khoảng từ năm – 624 đến năm – 546) và học trò của *Thales* là nhà triết học, khoa học tự nhiên *Anaximandros* (khoảng từ năm – 610 đến năm – 546). *Pythagoras* đi nhiều nơi trong hàng chục năm ở Ai Cập, Babylon, Syros,..., tìm hiểu nền khoa học của nhiều dân tộc và trở thành người uyên bác trong nhiều lĩnh vực: toán học, thiên văn, địa lý, triết học, y học, âm nhạc,... Gần 50 tuổi ông trở về quê hương thành lập trường học, nhưng không lâu sau thì đảo Samos bị chính thể bạo chúa thống trị nên ông di tản đến cảng biển Crotone ở miền nam Italia (Crotone là thuộc địa của Đại Hy Lạp lúc đó).

Vào khoảng năm – 530 tại Crotone, *Pythagoras* thành lập một trường học gồm hàng trăm môn sinh, cả nam và nữ với thời gian học 5 năm, gồm 4 môn: Số học, Hình học, Thiên văn học và Âm nhạc. Sau đó Ông thành lập một *Hội huynh đệ Crotone*, cũng gọi là *môn phái Pythagoras*, nghiên cứu về triết học, tôn giáo, khoa học tự nhiên, toán học, lôgic, thiên văn, âm nhạc,... Các hội viên sống tuân theo những quy định riêng (trong đó có nhiều điều mê tín), tài sản chung, ăn chay tập thể, sáng tập thể dục, học khoa học và triết học. Họ cùng nhau hát bài ca tụng thần Apollo (vị thần ánh sáng, chân lý và nghệ thuật trong thần thoại Hy Lạp, tượng của thần đeo cung bạc và đàn lyre), dùng đàn lyre (đàn có khung hình cung gần giống chữ U, thời đó có 7 dây có đầu dây ở đáy chữ U) và ngâm thơ để tăng cường trí nhớ.

Pythagoras và môn đồ

Những phát minh của từng người được xem là thành quả chung nên ta không biết được ai là tác giả của từng phát minh. Hoạt động của Hội tuân theo những nghi lễ và trong vòng bí mật, không còn lại bất cứ văn bản nào của hội viên. Vai trò của nam và nữ trong Hội là bình đẳng, trong số các nữ triết gia đó có bà *Pythais* là mẹ của *Pythagoras* và bà *Theano*, là học trò tại Crotone và là vợ của *Pythagoras*, bà *Perictione*, mẹ của nhà triết học, toán học *Plato* (khoảng năm – 427 đến năm – 347), tiếp theo có *Myia*, con gái út của *Pythagoras*. *Pythagoras* có một con trai và ba con gái, chồng của cô *Myia* là đô vật, cộng tác tích cực vào việc xây dựng Hội. Bà *Theano* viết nhiều tác phẩm về toán học, vật lý, y học, tâm lý học trẻ em, tiếc rằng những tài liệu đó đều thất truyền.

Đàn lyre

Các hội viên được gọi là *mathematikoi* (những người nghiên cứu khoa học, giảng bài). Các sinh viên sống gần đó được gọi là *akousmatikoi* (những người nghe).

Thuật ngữ *Toán học* có lẽ xuất hiện từ thời *Pythagoras*, bắt nguồn từ tiếng Hy Lạp μαθημα (mathêma), nghĩa là sự hiểu biết, sự học hỏi, sự nghiên cứu, tiếng Anh là *Mathematics*, tiếng Pháp là *Mathématique*, tiếng Nga là Математика.

Các môn đồ *Pythagoras* tin vào lý thuyết luân hồi của tâm hồn, họ thường tiến hành nghi lễ nhằm tự làm trong sạch bản thân để tiến gần với Thượng đế. Thời thanh niên, *Pythagoras* đã được ông nội mời nhà triết học *Pherecydes* (khoảng năm – 580 đến năm – 520) ở Syros về dạy, nên chịu ảnh hưởng của ông về thuyết luân hồi và vũ trụ học, thiên văn, địa lý. Dựa theo thuyết của *Pherecydes*, các môn đồ *Pythagoras* sử dụng biểu tượng *pentemychos* (*pentagram*), tức là hình sao năm cánh (khắc trên hình tròn bằng đồng), giữa các cánh viết 5 chữ cái E, Γ, I, EI, A (epsilon, gamma, iota, EI có thể là Ξ theta, anpha) để chứng tỏ sức mạnh nội lực và nhận ra nhau. Năm chữ cái được các nhà nghiên cứu giải thích là: Nước (Water), Trái Đất (Earth), Ý tưởng (Idea), Lửa (Heat), Khí (Air). *Pythagoras* là một trong những người đầu tiên khẳng định rằng Trái Đất có dạng hình cầu và là tâm của vũ trụ, ông cho rằng Mặt trời, Mặt trăng và các vì sao có chuyển động riêng biệt, khác với các ngôi sao đứng yên.

Thuyết luân hồi là một thách thức căn bản đối với tín ngưỡng truyền thống ở Olympia, Hy Lạp vì việc đề cao linh hồn con người lên tầm bất tử đã hạ thấp giá trị của các vị thần trên đỉnh Olympus cũng như sự tôn thờ của người dân đối với họ, đồng thời nâng cao tầm quan trọng của việc chăm sóc (thờ cúng, làm lễ, ...) cho linh hồn người chết.

Do ảnh hưởng của học thuyết *Pythagoras* và khuynh hướng bảo vệ người nô lệ của Hội dần trở thành quá lớn nên các thế lực chúa đất, quý tộc ở miền nam Italia đã phá hủy tòa nhà của học viện và yêu cầu giải tán Hội. Người ta kể rằng *Pythagoras* đã trốn về Metapontum (nay thuộc Italia), một thị trấn ven biển cách Crotone gần 200 km về phía đông bắc và có lẽ ông già gần 80 tuổi bị người chống đối học thuyết *Pythagoras* giết chết vào khoảng năm – 495 (hoặc – 500).

Sau khi bị giải tán, Hội *Pythagoras* còn tồn tại khoảng 200 năm sau.

Tượng bán thân của *Pythagoras* được đặt ở bảo tàng Rome, thủ đô Italia, ở Vatican, nhiều nơi trên đất Hy Lạp,...Hình ông được đúc trên đồng tiền Hy Lạp. Tại đảo Samos quê ông có thị trấn *Pythagoreio*, nhà bảo tàng về *Pythagoras*, di tích đền thờ *Pythagoras* và nữ thần *Hera* được UNESCO công nhận là di sản văn hóa thế giới năm 1992.

Tên của ông được đặt cho một miệng núi lửa ở phần nhìn thấy của Mặt trăng.

"Ông ta được khâm phục đến nỗi các môn đồ của ông thường được gọi là 'những nhà tiên tri tuyên truyền ý Chúa'..." *Diogenes Laertius* đã viết về *Pythagoras* như thế.

Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10...

(Tiếp theo trang 10)

$$\widehat{ABR}=\widehat{ADE}=\widehat{DEC}-\widehat{DAE}=\widehat{PEF}-\widehat{PAB}$$
$$=\widehat{PEF}-\widehat{FER}=\widehat{PER}=\widehat{RMP}.$$

Từ đó tứ giác *NMRB* nội tiếp hay *B* nằm trên (*K*). Lại có

$$\widehat{ERM}=\widehat{EPM}=\widehat{EFP}=\widehat{EFR}+\widehat{RFP}=\widehat{RAE}+\widehat{RNM}$$

vậy hai đường tròn ngoại tiếp tam giác *REF* và (*K*) tiếp xúc nhau tại *R* (đpcm).

Câu IV. a) Ký hiệu đa giác 2018 cạnh là $A_1A_2...A_{2018}$. Kẻ các đường chéo $A_1A_5, A_1A_8, A_1A_{11},..., A_1A_{2015}$. Khi đó đa giác này được chia thành 672 ngũ giác lồi:

$A_1A_2A_3A_4A_5$

$A_1A_5A_6A_7A_8$

....

$A_1A_{2012}A_{2013}A_{2014}A_{2015}$

$A_1A_{2015}A_{2016}A_{2017}A_{2018}$.

b) Giả sử ta có thể chia đa giác lồi 2017 cạnh này thành 672 ngũ giác lồi bởi các đường chéo của nó. Gọi *p* là số giao điểm của các đường chéo nằm trong đa giác. Do mỗi đỉnh của ngũ giác lồi là đỉnh của đa giác đã cho hoặc là một trong *p* giao điểm của các đường chéo nên tổng số góc của các ngũ giác này là

$$p.360^0+(2017-2)180^0=(2p+2015)180^0\,(1).$$

Mặt khác số ngũ giác là 672, mỗi ngũ giác có tổng số góc ở các đỉnh là 3.180^0 nên tổng số góc của các ngũ giác là $672.3.180^0$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2p+2015=672.3 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$ (vô lý).

Vậy ta không thể thực hiện được với

$$n=2017,\ k=672.$$

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội) ***giới thiệu***

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

ĐỀ XUẤT LỜI GIẢI MỚI CHO BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT TRONG KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2016 - 2017

HUỲNH DUY THỦY

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Hoài Nhơn, Bình Định)

Bài toán tìm GTLN, GTNN của một biểu thức nhiều biến có một vị trí quan trọng trong chương trình toán học phổ thông, mà phần nhiều thí sinh rất ngại khi va chạm. Bài toán này cũng thường xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi. Hầu hết các bài toán dạng này rất phong phú, có yêu cầu cao về tư duy, kỹ năng và thường không theo quy tắc hay khuôn mẫu có sẵn. Chính vì thế việc tìm tòi những ý tưởng mới, hợp lý nhằm tiếp cận và giải quyết được bài toán là vô cùng cần thiết. Trong bài viết này tác giả xin góp một chút suy nghĩ để tìm *thêm* một góc nhìn về bài toán này.

Các bài toán trình bày dưới đây được nêu ra hai cách giải: *Cách thứ nhất là đáp án của kỳ thi, cách thứ hai là của tác giả đề xuất*. Phần nhận xét được đưa ra nhằm *phân tích* những điều cần chú ý của mỗi lời giải.

Bài toán 1. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $ab+bc+ca+2abc=1$. Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2(a+b+c)$.*

(Đề thi chọn HSG năm học 2016-2017, TP. Hà Nội)

Lời giải. Cách 1. Dự đoán giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 3 đạt tại $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy ta sẽ chứng minh BĐT: $P=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2(a+b+c)\geq 3$.

Từ giả thiết suy ra tồn tại các số $x,y,z>0$ sao cho $a=\frac{x}{y+z}$, $b=\frac{y}{z+x}$, $c=\frac{z}{x+y}$

BĐT cần chứng minh trở thành:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+3 \quad (1).$$

Từ BĐT $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq\frac{4}{m+n}$ $(m,n>0)$ ta có:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right).$$

Nên BĐT (1) sẽ đúng nếu ta chứng minh được:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

Đây chính là bất đẳng thức Nesbitt.

Vậy $\min P=3$ đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Đặt $\sqrt{bc}=\cos A, \sqrt{ca}=\cos B, \sqrt{ab}=\cos C$ (A, B, C là 3 góc của 1 tam giác nhọn). Suy ra:

$$a=\frac{\cos B\cos C}{\cos A},\ b=\frac{\cos C\cos A}{\cos B},\ c=\frac{\cos A\cos B}{\cos C}.$$

Ta có $P=\frac{ab+bc+ca}{abc}-2(a+b+c)$

$$=\frac{1-2abc}{abc}-2(a+b+c)=\frac{1}{abc}-2(a+b+c)-2$$

$$=\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}-2\left(\frac{\cos B\cos C}{\cos A}+\frac{\cos C\cos A}{\cos B}+\frac{\cos A\cos B}{\cos C}\right)-2$$

$$=\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}-2\left(\frac{\cos^2 B\cos^2 C+\cos^2 C\cos^2 A+\cos^2 A\cos^2 B}{\cos A\cos B\cos C}\right)-2$$

$$\geq\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}-2.\frac{\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\right)^2}{3\cos A\cos B\cos C}-2$$

$$=\frac{1}{\cos A\cos B\cos C}-\frac{2(1-2\cos A\cos B\cos C)^2}{3\cos A\cos B\cos C}-2$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{2(1-2x)^2}{3x}-2=\frac{1}{3x}-\frac{8x}{3}+\frac{2}{3}$$

(với $x = \cos A \cos B \cos C \in \left(0; \frac{1}{8}\right]$).

Ta sẽ chứng minh: $\frac{1}{3x} - \frac{8x}{3} \ge \frac{7}{3}$ (2).

Thật vậy: (2) $\Leftrightarrow 1 - 8x^2 \ge 7x \Leftrightarrow (8x-1)(x+1) \le 0$

(BĐT này đúng vì $x \in \left(0; \frac{1}{8}\right]$). Do đó: $P \ge \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Vậy $\min P = 3$ đạt được khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. 1) Đây là một bài toán hay, giả thiết của bài toán và biểu thức P có hình thức gọn, đẹp, nhìn thích mắt. Điều ta cần phân tích là cách tiếp cận bài toán theo cách giải 1, đáp án của kì thi. Trước hết, ta nhận dạng bài toán: Biểu thức P là biểu thức ba biến đối xứng, do đó: $P(a,b,c) = P(c,b,a) = P(b,a,c)$.

HS cần nắm chắc và biết vận dụng những kiến thức tối thiểu về biểu thức 3 biến đối xứng, cụ thể là:
- Các biến có vai trò bình đẳng.
- Có thể sắp xếp các biến theo một trật tự tùy ý.
- Với đa số những biểu thức ba biến đối xứng thì GTLN (và GTNN) của chúng thường đạt được khi $a = b = c$ hoặc $a = b$, $c = 0$.

Trong bài toán này, để dự đoán GTNN của biểu thức P ta thử chọn $a = b = c = \frac{1}{2}$. Nhưng vì sao chọn giá trị $\frac{1}{2}$? Câu trả lời tự nhiên là: giá trị $\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện của giả thiết $ab + bc + ca + 2abc = 1$.

2) Ta phân tích cách giải 2. Giả thiết $ab + bc + ca + 2abc = 1$ gợi ý cho ta hình thành cách đặt: $\sqrt{bc} = \cos A$, $\sqrt{ca} = \cos B$, $\sqrt{ab} = \cos C$ với A, B, C là 3 góc của 1 tam giác nhọn.

Việc suy nghĩ để hình thành phép đặt trên không mất tính tự nhiên, bởi ta dựa theo hệ thức lượng giác trong tam giác: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$, tương ứng với hệ thức này phép đặt trên phát huy được tác dụng. Đây chính là điểm mấu chốt của quá trình khám phá bài toán. Dĩ nhiên rằng, với những bài toán xuất hiện trong các kỳ thi chọn HSG thì để có những ý tưởng có ý tưởng như trên, HS phải có vốn kiến thức nền tảng nhất định.

Xin nhắc lại một số hệ thức lượng giác, đóng vai trò như điểm tựa, giúp ta có những ý nghĩ đúng hướng

Trong tam giác ABC, ta có:

1) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$

2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

3) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

4) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

5) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$

6) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$

7) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

8) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$

9) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

10) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

(*tam giác ABC không vuông*).

3) Hai cách giải hoàn toàn độc lập nhau, giúp ta có cách nhìn và kinh nghiệm về sự gắn kết giữa kiến thức đã biết với điều cần hướng tới.

Cách giải hai đã phát hiện được mối liên hệ giữa hệ thức đại số có trong giả thiết bài toán với một kiến thức lượng giác đã biết, từ đó hình thành phép đặt mang tính quyết định và hữu ích. Điều đáng nhấn mạnh là ý tưởng của cách giải này giúp ta vận dụng cho một lớp bài toán chứ không chỉ dừng lại ở bài toán đã đề cập. Hơn nữa cách giải thứ hai giải quyết trực tiếp với yêu cầu của đề ra bằng những kiến thức phổ thông quen thuộc chứ không phải qua BĐT trung gian Nesbitt. Với góc nhìn trên thì bài toán này thuộc dạng bài "*thân thiện*" và "*đáng yêu*".

Bài toán 2. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 0$. Tìm GTNN của biểu thức:*

$$P = \left(a^2+1\right)^2 + \left(b^2+1\right)^2 + \left(c^2+1\right)^2 + 6\sqrt{6}.abc$$

(Đề thi chọn HSG năm học 2016-2017, TP. Hồ Chí Minh)

Lời giải. Cách 1. Theo nguyên lý Dirichlet, trong 3 số a, b, c luôn có hai số có tích không âm và do vai trò của a, b, c trong bài toán là bình đẳng nên ta có thể giả sử $ab \ge 0$.

Nếu $c \ge 0$ thì dễ thấy $\min P = 3$.

Với $c < 0$, xét hiệu: $P(a,b,c) - P\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$

$$= \left(a^2+1\right)^2 + \left(b^2+1\right)^2 + \left(c^2+1\right)^2 + 6\sqrt{6}abc$$

$$-2\left[\frac{(a+b)^2}{4} + 1\right]^2 - \left(c^2+1\right)^2 - 6\sqrt{6}\frac{(a+b)^2}{4}c$$

$$= \frac{1}{8}(a-b)^2\left(7a^2 + 10ab + 7b^2 + 8 - \frac{3\sqrt{6}}{2}c\right) \ge 0$$

(do $ab \ge 0$, $c < 0$).

Đặt $t=\dfrac{a+b}{2}$, khi đó: $c=-2t$.

Ta có: $P \ge 2\left(t^2+1\right)^2+\left(4t^2+1\right)^2+12\sqrt{6}t^3$

$$=3+2t^2\left(3t+\sqrt{6}\right)^2 \ge 3.$$

Vậy $\min P=3$ đạt được khi $a=b=c=0$ hoặc $a=b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $c=\dfrac{-2\sqrt{6}}{3}$.

Cách 2. Xét hai trường hợp

TH1: Có một trong ba số a,b,c bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử: $a=0$.

Khi đó: $P=1+\left(b^2+1\right)^2+\left(c^2+1\right)^2 \ge 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=0$.

TH2: Cả ba số hạng a,b,c đều khác 0. Như vậy trong 3 số a,b,c sẽ tồn tại 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát, ta giả sử: $a,\ b>0,\ c<0$.

Từ giả thiết, ta có: $c=-(a+b)$. Suy ra:

$$P=(a^2+1)^2+(b^2+1)^2+\left[(a+b)^2+1\right]^2-6\sqrt{6}.ab(a+b)$$

$$\ge\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+2\right)^2+\left[(a+b)^2+1\right]^2-6\sqrt{6}.\frac{(a+b)^2}{4}.(a+b)$$

$$\ge\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+b)^2+2\right]^2+\left[(a+b)^2+1\right]^2-3\sqrt{6}.\frac{(a+b)^3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+4}{2}\right)^2+(x^2+1)^2-\frac{3\sqrt{6}}{2}x^3$$

(với $x=a+b>0$)

$$=\frac{9}{8}x^4-\frac{3\sqrt{6}}{2}x^3+3x^2+3=\frac{9}{8}x^2\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2+3\ge 3.$$

Từ các trường hợp đã xét, ta luôn có $P\ge 3$.

Vậy $\min P=3$ đạt được khi $a=b=c=0$ hoặc $a=b=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $c=\dfrac{-2\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét. 1) Ý tưởng lời giải ở cách 1 rất hay, bởi vì thay cho việc tìm $\min P$ bằng cách xét hiệu: $P(a,b,c)-P\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2},c\right)$ và từ đánh giá hiệu không âm, ta tìm $\min P\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a+b}{2},c\right)$. Đây chính là ý tưởng "*Dồn biến*": chuyển từ ba biến $a,\ b,\ c$ về hai biến $t=\dfrac{a+b}{2},\ c$.

2) Giả thiết bài toán chứa đựng nội dung quen thuộc, thường gặp.

Cách giải 2 đã sử dụng nguyên lý Dirichlet:

Trong 3 số a, b, c, luôn có hai số có tích không âm.

Việc khai thác giả thiết "ba số thực $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=0$" thuộc kỹ năng cơ bản của HS, vấn đề còn lại là kỹ năng biến đổi, đánh giá các đại lượng $a^2+b^2,\ a+b,\ ab$. Ưu điểm trong cách giải 2 là cách tiếp cận bài toán "tự nhiên". Việc đặt $x=a+b$ giúp các bước biến đổi được dễ dàng, nhanh chóng.

Bài toán 3. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a+b+c=9$. Tìm GTLN của biểu thức:*

$$T=\frac{ab}{3a+4b+5c}+\frac{bc}{3b+4c+5a}+\frac{ca}{3c+4a+5b}-\frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}.$$

(Đề thi chọn HSG năm học 2016-2017, tỉnh Bắc Ninh)

Lời giải. Cách 1. Sử dụng các BĐT

TB điều hòa $\le$ TB nhân $\le$ TB cộng, ta có:

$$\sum_{a,b,c}\frac{ab}{3a+4b+5c}=\sum_{a,b,c}\frac{2ab}{5(a+b+2c)+(a+3b)}$$

$$\le\frac{2}{36}\left(\sum_{a,b,c}\frac{5ab}{a+b+2c}+\sum_{a,b,c}\frac{ab}{a+3b}\right).$$

Ta có: $\displaystyle\sum_{a,b,c}\frac{ab}{a+b+2c}\le\frac{1}{4}\left(\sum_{a,b,c}\frac{ab}{c+a}+\sum_{a,b,c}\frac{ab}{b+c}\right)$

$$=\frac{1}{4}(a+b+c)=\frac{9}{4}.$$

$$\sum_{a,b,c}\frac{ab}{a+3b}\le\frac{1}{16}\left(\sum_{a,b,c}\frac{ab}{a}+\sum_{a,b,c}\frac{3ab}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\sum_{a,b,c}b+\sum_{a,b,c}3a\right)=\frac{1}{4}(a+b+c)=\frac{9}{4}.$$

Do đó $\displaystyle\sum_{a,b,c}\frac{ab}{3a+4b+5c}\le\frac{1}{18}\left(5.\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

Mặt khác theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}=\frac{2}{2\sqrt{(ab+2bc)(ab+2ca)}}$$

$$\ge\frac{2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{3}{3(ab+bc+ca)}$$

$$\ge\frac{3}{(a+b+c)^2}=\frac{3}{9^2}=\frac{1}{27}.$$

Từ đó ta được: $T \le \frac{3}{4} - \frac{1}{27} = \frac{77}{108}$.

Vậy $\max T = \frac{77}{108}$ khi $a = b = c = 3$.

Cách 2. Theo BĐT Schwarz, ta có

$$\frac{25}{5(a+c)} + \frac{25}{5(b+c)} + \frac{4}{a+3b} \ge \frac{(5+5+2)^2}{6a+8b+10c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{a+c} + \frac{5}{b+c} + \frac{4}{a+3b} \ge \frac{72}{3a+4b+5c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab}{3a+4b+5c} \le \frac{1}{72}\left(\frac{5ab}{a+c} + \frac{5ab}{b+c} + \frac{4ab}{a+3b}\right).$$

Với hai số a, b dương ta luôn có: $\frac{4ab}{a+3b} \le \frac{3a+b}{4}$.

Thật vậy: $\frac{4ab}{a+3b} \le \frac{3a+b}{4} \Leftrightarrow 16ab \le 3a^2 + 10ab + 3b^2$

$\Leftrightarrow 3(a-b)^2 \ge 0$ (luôn đúng). Từ đó ta có:

$$\frac{ab}{3a+4b+5c} \le \frac{1}{72}\left(\frac{5ab}{a+c} + \frac{5ab}{b+c} + \frac{3a+b}{4}\right).$$

Biến đổi tương tự ta có:

$$\frac{bc}{3b+4c+5a} \le \frac{1}{72}\left(\frac{5bc}{b+a} + \frac{5bc}{c+a} + \frac{3b+c}{4}\right)$$

$$\frac{ca}{3c+4a+5b} \le \frac{1}{72}\left(\frac{5ca}{c+b} + \frac{5ca}{a+b} + \frac{3c+a}{4}\right)$$

Do đó

$$\frac{ab}{3a+4b+5c} + \frac{bc}{3b+4c+5a} + \frac{ca}{3c+4a+5b}$$

$$\le \frac{1}{72}\left[\left(\frac{5ab}{a+c} + \frac{5bc}{a+c}\right) + \left(\frac{5ab}{b+c} + \frac{5ac}{b+c}\right) + \left(\frac{5bc}{a+b} + \frac{5ac}{a+b}\right) + a+b+c\right]$$

$$= \frac{1}{72}(5b+5a+5c+a+b+c) = \frac{1}{12}(a+b+c) = \frac{3}{4} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$4(a+b+c) = 3a+3b+(a+2c)+(b+2c) \ge 4\sqrt[4]{9ab(a+2c)(b+2c)}$$

$$\Leftrightarrow 9 \ge \sqrt{3}.\sqrt[4]{ab(a+2c)(b+2c)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab(a+2c)(b+2c)} \le 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}} \le \frac{-1}{27} \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $T \le \frac{3}{4} - \frac{1}{27} = \frac{77}{108}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 3$.

Vậy $\max T = \frac{77}{108}$ khi $a = b = c = 3$.

Nhận xét. 1) Trong cách 1, ta thấy biểu thức T gồm 2 phần độc lập về ý tưởng tiếp cận:

Phần thứ nhất $\frac{ab}{3a+4b+5c} + \frac{bc}{3b+4c+5a} + \frac{ca}{3c+4a+5b}$ được đánh giá bằng công cụ quen thuộc: Vận dụng kỹ thuật tách, ghép các biến, kết hợp với kết quả từ những BĐT trung gian.

Phần thứ hai $\frac{1}{\sqrt{ab(a+2c)(b+2c)}}$ được biến đổi đại lượng ở mẫu về tổng $a+b+c$ để sử dụng giả thiết $a+b+c=9$.

2) Trong cách 2, các biến a, b, c xuất hiện trong tổng $\frac{ab}{3a+4b+5c} + \frac{bc}{3b+4c+5a} + \frac{ca}{3c+4a+5b}$ có vai trò như nhau, mặt khác với giả thiết $a+b+c=9$ đã gợi ý cho ta biến đổi $A \le \frac{a+b+c}{X}$ và dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=3$. Điểm then chốt trong cách giải là thể hiện rõ ở bước vận dụng BĐT Schwarz, hiệu quả của bước vận dụng này làm phong phú khả năng đánh giá các đại lượng.

Bài toán 4. *Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm GTLN của biểu thức:*

$$P = \frac{1}{x^2+2y^2+3} + \frac{1}{y^2+2z^2+3} + \frac{1}{z^2+2x^2+3}.$$

(Đề thi chọn HSG năm học 2016-2017, tỉnh Lạng Sơn)

Lời giải. Cách 1. Ta có:

$$P = \sum_{x,y,z} \frac{1}{x^2+2y^2+3} = \sum_{x,y,z} \frac{1}{x^2+y^2+1+y^2+2}$$

$$\le \sum_{x,y,z} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+y^2+1} + \frac{1}{y^2+2}\right).$$

Ta có: $x^2+y^2+1 = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^3 + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}$

$$\ge x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}}{z^{\frac{2}{3}}}.$$

Suy ra: $\sum_{x,y,z} \frac{1}{x^2+y^2+1} \le \sum_{x,y,z} \frac{z^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}} = 1$ (1).

Theo BĐT Schwarz, ta có:

$$\sum_{x,y,z}\frac{y^2}{y^2+2}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2+6}$$

$$\ge\frac{x^2+y^2+z^2+2.3.\sqrt[3]{(xyz)^2}}{x^2+y^2+z^2+6}=1.$$

Từ hai điều trên ta được: $P\le\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}$.

Vậy $\max P=\frac{1}{2}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$x^2+y^2\ge 2xy,\ \ y^2+1\ge 2y.$$

Do đó: $x^2+2y^2+1\ge 2xy+2y$

$\Leftrightarrow\ x^2+2y^2+3\ge 2xy+2y+2$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{x^2+2y^2+3}\le\frac{1}{2xy+2y+2}$. Tương tự, ta có:

$$\frac{1}{y^2+2z^2+3}\le\frac{1}{2yz+2z+2};$$

$$\frac{1}{z^2+2x^2+3}\le\frac{1}{2zx+2x+2}$$

Cộng theo vế ba BĐT trên, ta được:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)$$

Do $xyz=1$ nên

$$\frac{1}{yz+z+1}=\frac{xy}{xy.yz+xy.z+xy}=\frac{xy}{xy+y+1}.$$

Tương tự: $\frac{1}{zx+x+1}=\frac{y}{y.zx+y.x+y}=\frac{y}{xy+y+1}$.

Từ đó suy ra:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{xy}{xy+y+1}+\frac{y}{xy+y+1}\right)=\frac{1}{2}$$

Với $x=y=z=1$ thì dấu đẳng thức xảy ra.

Vậy $\max P=\frac{1}{2}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

• Cũng với ý tưởng trên, lời giải theo cách 2 có thể trình bày như sau:

Ta có: $\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}=$

$$=\frac{1}{xy+y+1}+\frac{xy}{xy^2z+xyz+xy}+\frac{y}{xyz+xy+y}$$

$$=\frac{1}{xy+y+1}+\frac{xy}{y+1+xy}+\frac{y}{1+xy+y}=1.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$x^2+2y^2+3=(x^2+y^2)+(y^2+1)+2$$

$$\ge 2xy+2y+2=2(xy+y+1).$$

Do đó: $\frac{1}{x^2+2y^2+3}\le\frac{1}{2(xy+y+1)}$.

Biến đổi tương tự ta có:

$$\frac{1}{y^2+2z^2+3}\le\frac{1}{2(yz+z+1)};$$

$$\frac{1}{z^2+2x^2+3}\le\frac{1}{2(zx+x+1)}$$

Cộng vế theo vế ba BĐT trên, ta có:

$$P\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy+y+1}+\frac{1}{yz+z+1}+\frac{1}{zx+x+1}\right)=\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}.$$

Với $x=y=z=1$ thì dấu đẳng thức xảy ra.

Vậy $\max P=\frac{1}{2}$ đạt được khi $x=y=z=1$.

Nhận xét. 1) Cách giải 1 đã khai thác tính chất của biểu thức P qua phép hoán vị vòng quanh các biến, dự đoán được GTLN của P và điều kiện để xảy ra dấu đẳng thức. Kết hợp với điều kiện $xyz=1$ và dạng các số hạng trong tổng P để đánh giá tổng P.

2) Cách giải 2 đã vận dụng điều kiện của giả thiết biểu thị quan hệ của các biến dưới dạng tích các đa thức đơn giản để đưa ra bước đánh giá:

$$a^2-ab+b^2=\frac{1}{4}(a+b)^2+\frac{3}{4}(a-b)^2\ge\frac{1}{4}(a+b)^2.$$

Bước đánh giá này có tính quyết định giúp ta hình thành bất đẳng thức $P\ge Q$, trong đó Q không chứa căn. Lúc này ta nhận được bài toán đơn giản hơn: Tìm min$Q$.

Bài toán 5. *Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^5+b^5+c^5=3$. Tìm GTLN của biểu thức: $a^6b^6+b^6c^6+c^6a^6$.*

(Đề thi HSG năm học 2016-2017, tỉnh Hà Tĩnh)

Lời giải. Cách 1. Đặt $x=a^5, y=b^5, z=c^5$ thì $x+y+z=3$. Ta sẽ chứng minh:

$$P=xy.\sqrt[5]{xy}+yz.\sqrt[5]{yz}+zx.\sqrt[5]{zx}\le 3$$

Theo BĐT Cauchy thì:

$$\sum_{x,y,z} xy\sqrt[5]{xy} \le \sum_{x,y,z} \frac{xy(x+y+3)}{5}$$

$$= \sum_{x,y,z} \frac{xy(x+y+x+y+z)}{5} = \sum_{x,y,z} \frac{2xy(x+y)+xyz}{5}$$

$$= \frac{2(x+y+z)(xy+yz+zx)-3xyz}{5}$$

$$= \frac{6(xy+yz+zx)-3xyz}{5}.$$

Mặt khác theo BĐT Schur thì:

$$(x+y+z)^3 + 9xyz \ge 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow\ 3^3 + 9xyz \ \ge\ 4.3(xy+yz+zx)$$

$\Leftrightarrow 9 + 3xyz \ge 4(xy+yz+zx)$. Suy ra

$$\frac{6(xy+yz+zx)-3xyz}{5} \le \frac{6(xy+yz+zx)-4(xy+yz+zx)+9}{5}$$

$$= \frac{2(xy+yz+zx)+9}{5} \le \frac{\frac{2}{3}(x+y+z)^2+9}{5} = 3.$$

Vậy $\max P = 3$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Cách 2. Đặt: $x = a^5, y = b^5, z = c^5 \Rightarrow x,y,z > 0$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x = \min(x,y,z)$.

Từ giả thiết $x+y+z=3$ suy ra $x \le 1$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a^5 + b^5 + 1 + 1 + 1 \ge 5\sqrt[5]{a^5b^5} = 5ab$$

$$\Leftrightarrow ab \le \frac{a^5+b^5+3}{5}$$

$$\Leftrightarrow a^6b^6 \le \left(\frac{a^5+b^5+3}{5}\right).a^5b^5 = \frac{(x+y+3)xy}{5} = \frac{(6-z)xy}{5}.$$

Biến đổi tương tự, ta nhận được:

$$b^6c^6 \le \frac{(6-x)yz}{5};\ c^6a^6 \le \frac{(6-y)zx}{5}.$$

Do đó: $P \le \dfrac{(6-z)xy}{5} + \dfrac{(6-x)yz}{5} + \dfrac{(6-y)zx}{5}$

$$= \frac{6(xy+yz+zx)-3xyz}{5} = \frac{6x(y+z)+3yz(2-x)}{5}$$

$$\le \frac{6x(3-x)+\frac{3}{4}(y+z)^2(2-x)}{5}$$

$$\left(\text{vì } yz \le \frac{(y+z)^2}{4},\ 2-x>0\right)$$

$$= \frac{6x(3-x)+\frac{3}{4}(3-x)^2(2-x)}{5}$$

$$= \frac{3}{20}\left(-x^3+3x+18\right) = 3 - \frac{3}{20}\left(x^3-3x+2\right)$$

$$= 3 - \frac{3}{20}(x-1)^2(x+2) \le 3.$$

Với $a=b=c=1$ thì dấu đẳng thức xảy ra.

Vậy $\max P = 3$ đạt được khi $a=b=c=1$.

Nhận xét. 1) Dự đoán $\max P = 3$ đạt được khi $a=b=c=1$ là khá rõ. Với phép đặt: $x=a^5, y=b^5, z=c^5$ bài toán được đưa về chứng minh BĐT: $xy.\sqrt[5]{xy} + yz.\sqrt[5]{yz} + zx.\sqrt[5]{zx} \le 3$. Bản chất lời giải cách 1 là chứng minh BĐT này.

2) Nhận thấy các biến trong giả thiết bài toán có dạng a^5, mặt khác $a^6b^6 = a^5b^5.ab$, điều này gợi ý cho ta chuyển ab theo a^5, b^5. Kết hợp với dự đoán $\max P = 3$ đạt được khi $a=b=c=1$, cũng có nghĩa là $a^5 = b^5 = c^5 = 1$, từ đây xuất hiện ý nghĩ: áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho năm số dương $a^5, b^5, 1, 1, 1$. Lúc này khó khăn của bài toán đã được giải quyết. Đây chính là cách tiếp cận bài toán trong lời giải cách 2.

Bài toán 6. *Cho các số thực a,b,c thỏa mãn điều kiện $a+b+c \ge 0$. Tìm GTNN của biểu thức:* $P = \sqrt{\dfrac{a}{b+c}} + \sqrt{\dfrac{b}{c+a}} + \sqrt{\dfrac{c}{a+b}}.$

(Đề thi chọn đội tuyển dự thi HSG Quốc gia năm học 2016 – 2017, tỉnh Hà Nam)

Lời giải. Cách 1. Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Ta sẽ chứng minh rằng $\sqrt{\dfrac{a}{b+c}} = \sqrt{\dfrac{a}{3-a}} \ge \dfrac{2}{3}a.$

Điều này tương đương với $a(2a-3)^2 \ge 0$: hiển nhiên đúng. Tương tự: $\sqrt{\dfrac{b}{c+a}} \ge \dfrac{2}{3}b$; $\sqrt{\dfrac{c}{a+b}} \ge \dfrac{2}{3}c.$

Cộng lại ta được: $P \ge \dfrac{2}{3}.3 = 2.$

Vậy $\min P = 2$ đạt được khi trong ba số a, b, c, có một số bằng 0 và hai số khác không, bằng nhau.

(Xem tiếp trang 23)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 23

Problem: *Let $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable and periodic function. Prove that:*

(i) f is bounded, i.e. there exists M such that $f(x) \le M$, $\forall x$.

(ii) f' is also a periodic function.

Solution: Since f is periodic, there exists a number $T > 0$ such that $f(x) = f(x+T)$ for all x. In particular, the range of f is equal to $f([0; T])$. Here, the notation $f([0; T])$ means the set $\{f(x) | x$ belongs to $[0; T]\}$. On the other hand, f is continuous on $[0; T]$, it obtains its maximum value on $[0; T]$. Hence (i) is done.

For part (ii), we use the definition of derivative. In fact, for any x_0 we have

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x+T \to x_0+T} \frac{f(x+T) - f(x_0+T)}{(x+T) - (x_0+T)} = f'(x_0+T),$$

where the second equality is due to the fact that f is periodic.

Remark: We can use the above properties to show that a function is not periodic, e.g. you can apply this approach to show that the functions $f(x) = \sin x^2$, $f(x) = \cos x^2$,... are not periodic.

TỪ VỰNG

differentiable:	có đạo hàm
periodic:	tuần hoàn
bounded:	bị chặn
range (*of a function*):	tập giá trị (của một hàm số)

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

BÀI DỊCH SỐ 20

Bài toán. *Hãy xây dựng một hàm số xác định trên khoảng $(0, 1)$ nhưng không liên tục tại bất kỳ điểm nào trên khoảng đó.*

Lời giải. Xét hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \\ 0 & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$

Nếu $x_0 = q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ thì $f(x_0) = 1$.

Ta chọn một dãy số vô tỷ $\{x_n\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, với $x_n = x_0 - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Dễ thấy x_n là số vô tỷ với mọi n và $x_n \to x_0$. Hơn nữa, với n đủ lớn thì $x_n \in (0, 1)$. Nhưng với cách xây dựng hàm số như trên ta có $f(x_n) = 0$ và dãy số $\{f(x_n)\}$ không dần đến $f(x_0) = 1$.

Nếu $x_0 \in (0, 1)$ và x_0 là số vô tỷ thì $f(x_0) = 0$. Giả sử $x_0 = 0,a_1a_2...a_n...$ là khai triển thập phân của x_0. Ta chọn dãy số vô tỷ $\{x_n\} \in \mathbb{Q}$ như sau: $x_1 = 0,a_1; x_2 = 0,a_1a_2; x_3 = 0,a_1a_2a_3; ...; x_n = 0,a_1a_2...a_n, ...$

Với cách xây dựng hàm số như trên thì $f(x_n) = 1$ và dãy số $\{f(x_n)\}$ không dần đến $f(x_0) = 0$.

Do đó ta đã chỉ ra hàm $f(x)$ không liên tục tại mọi điểm $x_0 \in (0, 1)$.

Câu hỏi: Có thể xây dựng một hàm số $f(x)$ với những yêu cầu như trên nhưng $|f(x)|$ là hàm liên tục trên $(0, 1)$ hay không?

Nhận xét. Các bạn sau có bài dịch tốt hơn cả: **Quảng Nam:** *Nguyễn Lê Thanh Hằng*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Tam Kỳ; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Quân, Huỳnh Lý Vân Anh* 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI *(Hà Nội)*

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ (IMO) LẦN THỨ 58 - NĂM 2017

IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International
Mathematical Olympiad

LÊ ANH VINH
(Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam)

I. ĐÔI NÉT TỔNG QUAN

IMO lần thứ 58 năm 2017 (IMO 2017) được tổ chức từ ngày 13/7 đến ngày 23/7/2016, tại Rio de Janeiro, Brazil. Dự thi IMO 2017 có 615 học sinh, trong đó có 62 học sinh nữ, thuộc 111 Quốc gia và Vùng lãnh thổ trên toàn thế giới. Đây cũng là kỳ thi IMO có quy mô lớn nhất từ trước tới nay. Đoàn Việt Nam gồm 6 học sinh: *Hoàng Hữu Quốc Huy* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bà Rịa – Vũng Tàu**), *Lê Quang Dũng* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá**), *Nguyễn Cảnh Hoàng* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**), *Phan Nhật Duy* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**), *Phạm Nam Khánh* (HS lớp 11, Trường THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội**) và *Đỗ Văn Quyết* (HS lớp 12, Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**). Đoàn do *PGS. TS. Lê Anh Vinh*, Phó Viện trưởng Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam, Bộ GD&ĐT làm Trưởng đoàn và *TS. Lê Bá Khánh Trình*, giảng viên Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh làm Phó trưởng đoàn; thầy *Nguyễn Khắc Minh,* chuyên viên Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD, Bộ GD&ĐT tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên A (Quan sát viên đi cùng Trưởng đoàn). Tham gia Đoàn với tư cách Quan sát viên C (Quan sát viên đi cùng học sinh) có: TS. *Sái Công Hồng*, Phó Cục trưởng Cục Quản lý chất lượng, Bộ GD&ĐT, TS. *Nguyễn Duy Kha*, Trưởng phòng Khảo thí, Cục Quản lý chất lượng, Bộ GD&ĐT, thầy *Chu Anh Tuấn,* Hiệu trưởng Trường THPT chuyên Lam Sơn, tỉnh Thanh Hoá, thầy *Ngô Xuân Ái*, giáo viên Trường THPT chuyên Lam Sơn, tỉnh Thanh Hoá, thầy *Hồ Sỹ Hùng*, giáo viên Trường THPT chuyên Phan Bội Châu, tỉnh Nghệ An, thầy *Nguyễn Duy Liên*, giáo viên Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc và nhà báo *Đoàn Xuân Kỳ*, Báo Nhân Dân.

Lễ Khai mạc IMO 2017 đã được tổ chức vào hồi 15h00 ngày 17/7/2017, và lễ Bế mạc IMO 2017 đã được tổ chức vào hồi 16h00 ngày 22/7/2017, tại Trung tâm Hội nghị, Khách sạn Windsor Oceanico, Rio de Janeiro.

II. ĐỀ THI

Đề thi của IMO 2017 được xây dựng theo nguyên tắc và phương thức như tại các kì IMO gần đây (IMO 2013 – IMO 2016). Cụ thể, từ các bài toán thuộc danh sách các bài toán được đề xuất sử dụng làm đề thi (do Ban tổ chức IMO xây dựng trên cơ sở các bài toán đề xuất của các nước tham dự IMO), Hội đồng các Trưởng đoàn tiến hành bầu chọn cho mỗi phân môn Đại số, Tổ hợp, Hình học và Số học 1 bài dễ và 1 bài trung bình; từ đó, Hội đồng xây dựng các tổ hợp 4 bài toán gồm 2 bài ở mức độ dễ, 2 bài ở mức độ trung bình và có đầy đủ cả 4 phân môn, rồi biểu quyết chọn một tổ hợp trong số đó; tiếp theo, căn cứ 4 bài toán đã được chọn, đề xuất và biểu quyết chọn ra một cặp bài khó cho đề thi. Theo sự sắp xếp phân môn trong Danh sách bài đề xuất và kết quả bình chọn của Hội đồng các Trưởng đoàn, trong 6 bài toán của Đề thi, Bài 1 là bài dễ thuộc phân môn Số học, Bài 2 là bài trung bình thuộc phân môn Đại số, Bài 3 là bài khó thuộc phân môn Tổ hợp, Bài 4 là bài dễ thuộc phân môn Hình học, Bài 5 là bài trung bình thuộc phân môn Tổ hợp và Bài 6 là bài khó thuộc phân môn Số học. Các bài toán trong đề thi IMO 2017 được đề xuất tương ứng bởi Nam Phi, Albania, Áo, Luxembourg, Nga và Mỹ. Các tác giả của các bài toán là *Stephan Wagner, Dorlir Ahmeti, Gerhard Woeginger, Charles Chelnokov* và *John Berman.*

Một điểm đáng lưu ý về hai Bài 3 và Bài 6 của đề thi IMO năm nay là cả hai bài đều có những ý tưởng hiện đại của Toán Cao cấp. Ngoài ra, Bài 3 thật sự là một thử thách lớn đối với các thí sinh khi chỉ có hai bạn đạt được điểm tuyệt đối và điểm số trung bình của 615 thí sinh là 0.042. Đây cũng là bài toán với điểm số trung bình đạt được của các thí sinh thấp nhất trong 58 kì thi IMO.

Dưới đây là phương án tiếng Việt của **Đề thi IMO 2017**:

Ngày thi thứ nhất, 18/7/2017

(Thời gian làm bài: $4^h30'$, mỗi bài tối đa 7 điểm)

Bài 1. Với mỗi số nguyên $a_0 > 1$, xét dãy số nguyên dương $a_0, a_1, a_2, \ldots$ xác định bởi:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{nếu } \sqrt{a_n} \text{ là số nguyên dương} \\ a_n + 3 & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

với mỗi số nguyên $n \geq 0$.

Hãy xác định tất cả các số a_0 sao cho tồn tại số A mà $a_n = A$ với vô hạn số n.

Bài 2. Kí hiệu $\mathbb{R}$ là tập số thực. Hãy tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi số thực x và y, $f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy)$.

Bài 3. Một cô thợ săn và một con thỏ tàng hình chơi trò chơi sau trên mặt phẳng. Điểm xuất phát A_0 của con thỏ và điểm xuất phát B_0 của cô thợ săn trùng nhau. Sau $n-1$ lượt chơi con thỏ ở điểm A_{n-1} và cô thợ săn ở điểm B_{n-1}. Ở lượt chơi thứ n, có ba điều lần lượt xảy ra theo thứ tự dưới đây:

(i) Con thỏ di chuyển một cách không quan sát được tới điểm A_n sao cho khoảng cách giữa A_{n-1} và A_n bằng đúng 1.

(ii) Một thiết bị định vị thông báo cho cô thợ săn về một điểm P_n, đảm bảo khoảng cách giữa P_n và A_n không lớn hơn 1.

(iii) Cô thợ săn di chuyển một cách quan sát được tới điểm B_n sao cho khoảng cách giữa B_{n-1} và B_n bằng đúng 1.

Hỏi điều sau đây sai hay đúng: Cho dù con thỏ có di chuyển như thế nào và các điểm được định vị thông báo có là những điểm nào, cô thợ săn luôn có thể chọn cho mình cách di chuyển sao cho sau 10^9 lượt chơi, cô ta có thể khẳng định chắc chắn rằng khoảng cách giữa mình và con thỏ không vượt quá 100?

Ngày thi thứ hai, 19/7/2017

(Thời gian làm bài: $4^h30'$, mỗi bài tối đa 7 điểm)

Bài 4. Cho R và S là hai điểm phân biệt trên đường tròn Ω sao cho RS không phải là đường kính. Cho ℓ là tiếp tuyến tại R của Ω. Lấy điểm T sao cho S là trung điểm của đoạn thẳng RT. Lấy điểm J trên cung nhỏ $\overset{\frown}{RS}$ của Ω sao cho đường tròn ngoại tiếp Γ của tam giác JST cắt ℓ tại hai điểm phân biệt. Gọi A là giao điểm gần R nhất của Γ và ℓ. Đường thẳng AJ cắt lại Ω tại K. Chứng minh rằng KT tiếp xúc với Γ.

Bài 5. Cho số nguyên $N \geq 2$. Có $N(N+1)$ cầu thủ bóng đá, trong đó không có hai người nào có cùng chiều cao, đứng thành một hàng ngang. Ngài Alex muốn đưa $N(N-1)$ cầu thủ ra khỏi hàng sao cho ở hàng ngang mới nhận được, gồm $2N$ cầu thủ còn lại, N điều kiện sau được đồng thời thoả mãn:

(1) không có cầu thủ nào đứng giữa hai cầu thủ cao nhất;

(2) không có cầu thủ nào đứng giữa cầu thủ cao thứ ba và cầu thủ cao thứ tư;

(N) không có cầu thủ nào đứng giữa hai cầu thủ thấp nhất.

Chứng minh rằng Ngài Alex luôn có thể làm được điều đó.

Bài 6. Cặp có thứ tự các số nguyên (x, y) được gọi là *điểm nguyên thủy* nếu ước số chung lớn nhất của x và y bằng 1. Cho tập S gồm hữu hạn điểm nguyên thủy. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n và các số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sao cho với mỗi điểm (x, y) thuộc S, ta có:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

III. KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế IMO 2017, Hội đồng Quốc tế đã biểu quyết thông qua ngưỡng điểm cho các loại Huy chương như sau:

- Huy chương Vàng (HCV): Từ **25** đến **42** điểm;
- Huy chương Bạc (HCB): Từ **19** đến **24** điểm;
- Huy chương Đồng (HCĐ): Từ **16** đến **18** điểm.

Theo đó, tại IMO 2017 có 291 học sinh được trao Huy chương; gồm: 48 học sinh được trao HCV, trong đó có 3 học sinh đạt điểm cao nhất 35/42 là *Hoàng Hữu Quốc Huy* (Việt Nam), *Yuta Takaya* (Nhật Bản) và *Amirmojtava Sabour*

(Iran); 90 học sinh được trao HCB và 153 học sinh được trao HCĐ.

Với ngưỡng điểm của các loại Huy chương ở mức thấp nhất từ trước tới nay, đề thi IMO 2017 được đánh giá là một trong những đề thi IMO khó nhất trong lịch sử. Tuy nhiên, cả 6 thí sinh của Đoàn Việt Nam đều đã hoàn thành tốt bài thi của mình và đạt được kết quả cao, trong đó 4 em được trao HCV, 1 em được trao HCB và 1 em được trao HCĐ. Kết quả chi tiết của các học sinh Đoàn Việt Nam như bảng dưới.

Thêm vào đó, với tổng điểm 155, Đoàn Việt Nam đứng thứ 3 trong Bảng tổng sắp không chính thức của IMO 2017, sau các Đoàn: Hàn Quốc (170 điểm), Trung Quốc (159 điểm). Các nước đứng ngay tiếp theo Đoàn Việt Nam là: Mỹ (148 điểm), Iran (142 điểm), Nhật Bản (134 điểm),…

Stt	Họ và Tên	Điểm thi							HC
		B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng	
1	*Hoàng Hữu Quốc Huy*	7	7	0	7	7	7	35	Vàng
2	*Lê Quang Dũng*	7	7	0	7	0	7	28	Vàng
3	*Nguyễn Cảnh Hoàng*	7	7	0	7	7	0	28	Vàng
4	*Phan Nhật Duy*	7	4	0	7	7	0	25	Vàng
5	*Phạm Nam Khánh*	7	7	0	7	0	0	21	Bạc
6	*Đỗ Văn Quyết*	7	4	0	7	0	0	18	Đồng

ĐỀ XUẤT LỜI GIẢI MỚI…

(Tiếp theo trang 19)

Cách 2. Xét hai trường hợp:

TH1: Trong 3 số a,b,c có một số bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $a=0$. Khi đó, áp dụng BĐT Cauchy ta có: $P=\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{b}}\ge 2.$

TH2: Cả 3 số a,b,c đồng thời khác 0. Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}=\sqrt{\left(\frac{b+c}{a}\right).1}\le\frac{\frac{b+c}{a}+1}{2}=\frac{a+b+c}{2a}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge\frac{2a}{a+b+c}$$

Tương tự, ta có: $\sqrt{\frac{b}{c+a}}\ge\frac{2b}{a+b+c};\sqrt{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{2c}{a+b+c}.$

Do đó: $P\ge\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2.$

Trong cả hai trường hợp đã xét, ta đều có: $P\ge 2$. Với $a=0,b=c\ne 0$ thì dấu đẳng thức xảy ra.

Vậy $\min P=2$ đạt được khi trong ba số *a*, *b*, *c*, có một số bằng 0 và hai số khác không, bằng nhau.

Nhận xét. 1) Cách 1 đã vận dụng việc chuẩn hóa $a+b+c=3$ từ đó nhận được

$$\sqrt{\frac{a}{3-a}}\ge\frac{2}{3}a\Leftrightarrow a(2a-3)^2\ge 0.$$

Lời giải ở cách 1 ngắn gọn và đẹp.

2) Việc phân chia trường hợp cho các biến làm bài toán chặt chẽ, mang tính tổng quát.

Vận dụng BĐT Cauchy để khử các dấu căn bậc hai, chuyển về các phân thức hữu tỉ là mấu chốt của cách giải 2. Cách giải 2 không phải thông qua chuẩn hóa các biến nên gần gũi với nhiều HS hơn.

KẾT LUẬN

Ở cùng một bài toán, với cùng một giả thiết, tương ứng với mỗi ý tưởng khám phá khác nhau, ta nhận được những lời giải khác nhau. Có những ý tưởng tạo ra lời giải thật công phu, với những phép biến đổi qua nhiều công đoạn, cũng có những ý tưởng cho ta lời giải thật cô đọng, trí tuệ.

Điều quan trọng trong dạy và học toán là tự mình rèn luyện, kiên trì tìm ý tưởng cho mỗi bài toán, tạo ra cho mình cái vốn và kinh nghiệm, từ đó hình thành được lời giải hay.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/482 (Lớp 6). Tùy theo giá trị của số tự nhiên n, hãy tìm chữ số tận cùng của

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/482 (Lớp 7). Cho tam giác ABC vuông cân tại B có O là trung điểm AC. Lấy điểm J trên đoạn OC sao cho $3AJ = 5JC$. Gọi N là trung điểm OB. Chứng minh $AN \perp NJ$.

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T3/482. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(y^2 - x^2) = \dfrac{14}{x} - \dfrac{13}{y} \\ 4(x^2 + y^2) = \dfrac{14}{x} + \dfrac{13}{y} \end{cases}$$

BÙI HẢI QUANG
(GV THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T4/482. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^0$. Giả sử trên cạnh BC có điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 90^0$ và $AB = DC = 1$. Tính độ dài đoạn thẳng BD.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(3/29e, *Đà Nẵng, Hải Phòng*)

Bài T5/482. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{6051}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{2a}{\sqrt{a^2 + 2017}} + \dfrac{2b}{\sqrt{b^2 + 2017}} + \dfrac{2c}{\sqrt{c^2 + 2017}}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/482. Giải phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2x+2}} \text{ với } x > \frac{1}{2}.$$

VŨ VĂN BẮC
(GV THPT A Nghĩa Hưng, Nam Định)

Bài T7/482. Cho p, q, r là ba nghiệm nguyên phân biệt của đa thức với hệ số nguyên: $x^3 + ax^2 + bx + c$, trong đó $16a + c = 0$. Chứng minh rằng $\dfrac{p+4}{p-4}.\dfrac{q+4}{q-4}.\dfrac{r+4}{r-4}$ cũng là một số nguyên.

LƯU BÁ THẮNG
(GV Khoa Toán ĐHSP Hà Nội)

Bài T8/482. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác đều ABC cạnh a. Trên cung $\widehat{BC}$ không chứa điểm A lấy điểm P bất kỳ $(P \neq B, P \neq C)$. Các đoạn AP và BC cắt nhau tại Q. Chứng minh

$$PQ \leq \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

CAO HẢI VÂN
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/482. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 6.$

HOÀNG NGỌC MINH
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/482. Với mỗi số nguyên $n > 2$, gọi u_n là số các chữ số 0 đứng tận cùng của $n!$ viết trong hệ cơ số n. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{u_n}{n-1}.$$

NGUYỄN TUẤN NGỌC
(GV THPT chuyên Tiền Giang, TP. Mỹ Tho, Tiền Giang)

Bài T11/482. Cho thập giác lồi $A_1A_2...A_9A_{10}$. Ta thực hiện phép toán tô màu các cạnh và đường chéo của thập giác bởi 5 màu khác nhau theo quy tắc sau:

a) Mỗi cạnh hoặc đường chéo được tô nhiều nhất 1 màu.

b) Các cạnh và các đường chéo được tô màu không có đỉnh chung và không cắt nhau (không kể phần kéo dài của chúng).

Hỏi có thể thực hiện được bao nhiêu cách tô màu khác nhau?

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH

(GV Toán Học viện PKKQ, Sơn Tây, Hà Nội)

Bài T12/482. Cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (I, r). Đường tròn (I, r) tiếp xúc với AB, BC, CA lần lượt tại P, Q, R. Gọi K là trung điểm AC, đường thẳng IK cắt AB tại M. Đoạn thẳng PQ cắt đường cao AH của tam giác ABC tại N. Chứng minh N là trực tâm tam giác MQR.

CAO MINH THÁI

(B26, Phước Bình, Phước Tỉnh, Long Điền, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài L1/482. Cho đoạn mạch có R, L mắc nối tiếp, điện trở $R = 100\Omega$, cuộn cảm thuần có độ tự cảm $L = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (H). Giả sử điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là $u = 400\cos^2(50\pi t + \pi)$ (V). Xác định cường độ dòng điện hiệu dụng qua đoạn mạch.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/482. Hai điểm M, N nằm trên một phương truyền sóng, cách nhau một khoảng bằng một phần ba bước sóng $\frac{\lambda}{3}$. Biết sóng truyền đi với biên độ không đổi. Tại thời điểm t nào đó, khi li độ dao động tại M là $u_M = 3$cm thì li độ dao động tại N là $u_N = 2$cm. Xác định biên độ.

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/482 (For 6th grade). For each natural number n, find the last digit of

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n.$$

Problem T2/482 (For 7th grade). Suppose that ABC is an isosceles right triangle with B is the right angle. Let O be the midpoint of AC. Choose J on the segment OC such that $3AJ = 5JC$. Let N be the midpoint of OB. Prove that $AN \perp NJ$.

Problem T3/482. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 2(y^2 - x^2) = \dfrac{14}{x} - \dfrac{13}{y} \\ 4(x^2 + y^2) = \dfrac{14}{x} + \dfrac{13}{y} \end{cases}.$$

Problem T4/482. Given a triangle ABC with $\widehat{BAC} = 120^0$. Suppose that on the side BC there exists a point D such that $\widehat{BAD} = 90^0$ and $AB = DC = 1$. Find the length of BD.

Problem T5/482. Given three positive numbers a, b, and c such that $a + b + c = \sqrt{6051}$.

Find the maximum value of the expression

$$P = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 2017}} + \frac{2b}{\sqrt{b^2 + 2017}} + \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 2017}}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/482. Solve the equation

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2x+2}}$$

assuming that $x > \frac{1}{2}$.

(Xem tiếp trang 34)

Bài T1/478. *Tìm tất cả các số chính phương có bốn chữ số mà khi viết theo thứ tự ngược lại ta cũng được số chính phương (số chính phương là bình phương của số tự nhiên).*

Lời giải. Gọi số chính phương có bốn chữ số là $x^2 = \overline{abcd}$ với $a \neq 0$. Theo giả thiết thì $y^2 = \overline{dcba}$. Dễ thấy $32 \leq x \leq 99$ và $0 \leq y \leq 99$. Từ đó

$x^2 + y^2 =$

$1000a + 100b + 10c + d + 1000d + 100c + 10b + a$

$= 1001(a + d) + 110(b + c)$

$= 11.91(a + d) + 11.10(b + c)$ chia hết cho 11. Đặt $x = 11k + r$ với $0 \leq r \leq 10$ thì

$x^2 = (11k + r)^2 = 11k(11k + 2r) + r^2 = 11h + s$, trong đó k, r, h, s đều là các số nguyên không âm với s bằng 0, 1, 4, 9, 5, 3.

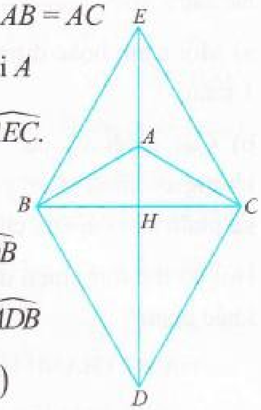
Tương tự $y^2 = 11u + v$ với v bằng 0, 1, 4, 9, 5, 3. Từ đó $x^2 + y^2 = 11(h + u) + s + v$ chia hết cho 11, suy ra $s + v$ chia hết cho 11, điều này xảy ra chỉ khi $s = v = 0$, tức là $x = 11m$ và $y = 11n$. Như thế x thuộc tập số {33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}. Kiểm tra thấy chỉ có hai số thỏa mãn đề bài là $33^2 = 1089$ và $99^2 = 9801$. ❐

➤***Nhận xét.*** Chỉ có một bạn giải đúng bài này là *Hoàng Lê Bích Ngọc*, 6A, THCS Thái Thịnh, Đống Đa, **Hà Nội**.

VIỆT HẢI

Bài T2/478. *Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A lấy điểm D sao cho $\widehat{BAD} = 2\widehat{ADC}$ và $\widehat{CAD} = 2\widehat{ADB}$. Chứng minh rằng tam giác CBD cân tại D.*

Lời giải. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Ta có $AE = AB = AC$ nên ΔABE, ΔACE cân tại A



$\Rightarrow \widehat{BAD} = 2\widehat{AEB}, \widehat{CAD} = 2\widehat{AEC}$.

Mặt khác

$\widehat{BAD} = 2\widehat{ADC}, \widehat{CAD} = 2\widehat{ADB}$

do đó $\widehat{BEA} = \widehat{ADC}, \widehat{AEC} = \widehat{ADB}$

$\Rightarrow \Delta BDE = \Delta CED$ (g.c.g)

$\Rightarrow BE = CD$. Gọi H là giao điểm của AD và BC.

Ta có $\Delta HBE = \Delta HCD$(g.c.g) $\Rightarrow BH = HC$.

Xét ΔABC cân tại A có AH là đường trung tuyến nên AH là đường trung trực của BC

$\Rightarrow DB = DC$. Vậy ΔCBD cân tại D. ❐

➤***Nhận xét.*** Bài toán này không khó nhưng không có bạn nào tham gia giải.

NGUYỄN HIỆP

Bài T3/478. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $(10^{3^n} - 1) \vdots 3^{n+2}$.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bài toán trên bằng phương pháp quy nạp.

- Xét $n = 0$. Ta có: $10^{3^0} - 1 = 9 \vdots 3^2 = 9$.

Bài toán đúng với $n = 0$.

- Giả sử bài toán đúng với $n = k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$, tức là $10^{3^k} - 1 \vdots 3^{k+2}$. Ta sẽ chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$, tức là $10^{3^{k+1}} - 1 \vdots 3^{k+3}$.

Thật vậy, ta có:

$$10^{3^{k+1}} - 1 = 10^{3^k.3} - 1 = \left(10^{3^k}\right)^3 - 1$$

$$= \left(10^{3^k} - 1\right)\left[\left(10^{3^k}\right)^2 + 10^{3^k} + 1\right].$$

Ta có: $10 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 10^{3^k} \equiv 1 \pmod 3$.

Suy ra: $\left(10^{3^k}\right)^2 + 10^{3^k} + 1 \equiv 3 \equiv 0 \pmod 3$

hay $\left(10^{3^k}\right)^2 + 10^{3^k} + 1 \,\vdots\, 3$.

Theo giả thiết quy nạp $10^{3^k} - 1 \,\vdots\, 3^{k+2}$ nên

$10^{3^{k+1}} - 1 = \left(10^{3^k} - 1\right)\left[\left(10^{3^k}\right)^2 + 10^{3^k} + 1\right] \vdots\, 3^{k+2}.3 = 3^{k+3}$.

Vậy bài toán đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp, bài toán đúng với mọi số tư nhiên n. ❒

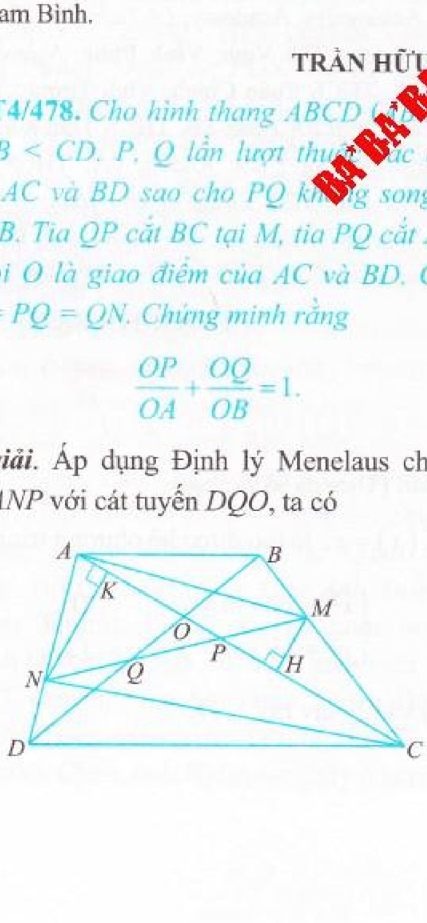
➢***Nhận xét.*** Các bạn tham gia đều dùng phương pháp quy nạp để giải và đều giải đúng bài này. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Nguyễn Hà Nam Khánh*, 8A2, Trường Hanoi Acadamy, Q. Tây Hồ, *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C2, THCS Archimedes Acadamy, *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT Dân lập Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trọng Thuận*, *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, H. Hoằng Hóa, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Võ Thuấn*, 9A1, THCS Thị trấn Tam Bình.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/478. *Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB < CD. P, Q lần lượt thuộc các đường chéo AC và BD sao cho PQ không song song với AB. Tia QP cắt BC tại M, tia PQ cắt AD tại N, gọi O là giao điểm của AC và BD. Giả sử MP = PQ = QN. Chứng minh rằng*

$$\frac{OP}{OA} + \frac{OQ}{OB} = 1.$$

Lời giải. Áp dụng Định lý Menelaus cho tam giác ANP với cát tuyến DQO, ta có



$$\frac{OP}{OA}.\frac{DA}{DN}.\frac{QN}{QP} = 1 \Leftrightarrow \frac{OP}{OA} = \frac{DN}{DA}.$$

Tương tự ta có $\dfrac{OQ}{OB} = \dfrac{CM}{CB}$.

Đặt $\dfrac{OP}{OA} = \dfrac{DN}{DA} = a$, $\dfrac{OQ}{OB} = \dfrac{CM}{CB} = b$.

Ta có $b = \dfrac{CM}{CB} = \dfrac{S_{CMA}}{S_{CBA}}$, $\dfrac{S_{CNA}}{S_{CDA}} = \dfrac{AN}{AD} = 1 - a$ (1)

Hạ $MH \perp AC$ và $NK \perp AC$, ta có

$$\frac{MH}{NK} = \frac{MP}{NP} = \frac{1}{2} \text{ (định lý Thales).}$$

Suy ra $\dfrac{S_{CMA}}{S_{CNA}} = \dfrac{MH}{NK} = \dfrac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{b}{1-a} = \frac{S_{CMA}}{S_{CNA}}.\frac{S_{CDA}}{S_{CBA}} = \frac{1}{2}.\frac{CD}{AB} \quad (3)$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{a}{1-b} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{CD}{AB}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$\frac{b}{1-a} = \frac{a}{1-b} \Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0.$$

Theo giả thiết PQ không song song với AB nên $a - b \neq 0$. Suy ra $a + b = 1$ (đpcm). ❒

➢***Nhận xét.*** Chỉ có hai bạn *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh, và *Thiều Đình Minh Hùng*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá, **Thanh Hoá** cho lời giải đúng.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/478. *Cho ba số thực dương a, b, c sao cho* $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất của* $P = \sqrt{abc}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \dfrac{1}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}\right)$.

Lời giải. *Cách 1.* Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có

$a+b\ge 2\sqrt{ab}; b+c\ge 2\sqrt{bc}; \sqrt{b}+\sqrt{c}\ge 2\sqrt[4]{bc}$,

nên $\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\dfrac{\sqrt{abc}}{\sqrt{2\sqrt{ab}.2\sqrt{ac}}}=\dfrac{\sqrt[4]{bc}}{2}$

$$\le\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{4} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Chứng minh tương tự, ta có

$$\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}\le\frac{\sqrt{c}+\sqrt{a}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}\le\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{4} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và kết hợp với giả thiết $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$, ta có

$$P=\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{(c+b)(c+a)}}$$

$$\le\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{4}+\frac{\sqrt{c}+\sqrt{a}}{4}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=b=c\\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{9}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{1}{2}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{9}$.

Cách 2. Đặt $x=\sqrt{a}; y=\sqrt{b}; z=\sqrt{c}$ (x, y, z là các số dương), ta có $x+y+z=1$ và

$$P=xyz\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+x^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(z^2+y^2)(z^2+x^2)}}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có

$\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}\ge\sqrt{2xy.2xz}=2x\sqrt{yz}$ nên

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}\le\frac{1}{2x\sqrt{yz}}=\frac{\sqrt{yz}}{2xyz}\le\frac{y+z}{4xyz}.$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{(y^2+z^2)(y^2+x^2)}}\le\frac{x+z}{4xyz}; \frac{1}{\sqrt{(z^2+y^2)(z^2+x^2)}}\le\frac{x+y}{4xyz}.$$

Suy ra

$$P\le xyz.\left(\frac{y+z}{4xyz}+\frac{x+z}{4xyz}+\frac{x+y}{4xyz}\right)=xyz.\frac{1}{2xyz}=\frac{1}{2}$$

(do $x+y+z=1$).

Vậy $\max P=\dfrac{1}{2}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x=y=z\\ x+y+z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3},$$

hay $a=b=c=\dfrac{1}{9}$. ❒

➤***Nhận xét.*** Đa số các bạn gửi bài đều giải theo một trong hai cách trên.Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Nguyễn Đặng Nhật Minh*, 8C2, THCS Achimedes Academy; *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc**: *Nguyễn Anh Minh*, 9A, THCS Tuân Chính, Vĩnh Tường; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh**: *Hoàng Quốc Khánh*, 9A, THCS Đồng Lạng, Đức Thọ; **Vĩnh Long**: *Lê Nữ Hoàng Kim*, 9/1, THCS Nguyễn Trường Tộ, TP. Vĩnh Long; **Bến Tre**: *Ngô Quốc Bảo*, 7/1, THCS Mỹ Hóa, TP. Bến Tre.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/478. *Giải biện luận phương trình theo tham số m:* $f(f(x))=x$, *với* $f(x)=x^2+2x+m$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

Đặt $f(x)=y$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+2x+m=y & (1)\\ y^2+2y+m=x & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(x-y)(x+y+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-3-x \end{array}\right.$$

• Xét trường hợp $y = x$, ta thu được phương trình $x^2+x+m=0$ (3)

Ta có $\Delta = 1-4m$. Suy ra

- Với $m>\frac{1}{4}$ thì (3) vô nghiệm.

- Với $m=\frac{1}{4}$ thì (3) có nghiệm kép $x=-\frac{1}{2}$.

- Với $m<\frac{1}{4}$ thì (3) có hai nghiệm

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2}.$$

• Xét trường hợp $y=-x-3$, ta thu được phương trình $x^2+3x+m+3=0$ (4)

Ta có $\Delta = -3-4m$. Suy ra

- Với $m>-\frac{3}{4}$ thì PT(4) vô nghiệm.

- Với $m=-\frac{3}{4}$ thì PT(4) có nghiệm kép $x=-\frac{3}{2}$.

- Với $m<-\frac{3}{4}$ thì PT(4) có hai nghiệm

$$x_{3,4}=\frac{-3\mp\sqrt{-3-4m}}{2}.$$

Kết luận:

- Với $m<-\frac{3}{4}$ thì phương trình có bốn nghiệm

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2} \text{ và } x_{3,4}=\frac{-3\mp\sqrt{-3-4m}}{2}.$$

- Với $m=-\frac{3}{4}$ thì phương trình có ba nghiệm: hai nghiệm đơn: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$ và một nghiệm kép $x=-\frac{3}{2}$.

- Với $m\in\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$ thì phương trình có hai nghiệm $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$.

- Với $m=\frac{1}{4}$ thì phương trình có nghiệm kép

$$x=-\frac{1}{2}.$$

- Với $m>\frac{1}{4}$ thì phương trình vô nghiệm. ❐

➤***Nhận xét.*** Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân; **Bình Định:** *Nguyễn Công Khả*, 10T, THPT Tây Sơn; **Bình Phước:** *Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thừa Thiên Huế:** *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 11T2, *Ng[illegible] Thị Phương Nhi*, 11T1, THPT chuyên Quốc [illegible] Huế; **Hưng Yên:** *Hoàng Văn Thái*, 11A3, TH[illegible] Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Long An:** *Lê [illegible] Phú*, 11T1, THPT chuyên Long An; **Nghệ An:** *Bạch Quang Hiệu*, 11A1, THPT Cửa Lò, *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Nam:** *Phan Văn Chính*, *Nguyễn Lê Thanh Hằng*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thanh Hoá:** *Thiều Đình Minh Hùng*, *Nguyễn Trọng Thuận*, 8C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/478. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Xét biểu thức* $F(a,b,c)=$

$$a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a).$$

Chứng minh rằng $F(a,b,c)=$

$$\min\left\{F(a+b,b+c,c+a),4a^2b^2c^2F\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\right\}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $c\ge a;\ c\ge b$. Ta có $F(x,y,z)=$

$$=x^3+y^3+z^3+3xyz-xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z+x)$$

$$= \left(x^3 + y^3 + 2xyz - x^2y - zx^2 - xy^2 - y^2z\right) + \left(xyz - z^2x - yz^2 + z^3\right)$$

$$= (x+y-z)(x-y)^2 + z(x-z)(y-z).$$

+ Ta chứng minh được:

$$F(a+b, b+c, c+a) \ge F(b+c, c+a, a+b).$$

Mà $F(b+c, c+a, a+b) - F(a,b,c)$

$$=(b+c+c+a-a-b)(b+c-c-a)^2 + (a+b)(b+c-a-b)(c+a-a-b) - (a+b-c)(a-b)^2 - c(a-c)(b-c)$$

$$=(3c-a-b)(a-b)^2 + (a+b-c)(c-a)(c-b) \ge 0 \quad (1)$$

(do $c \ge a, c \ge b$ và a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác) nên

$$F(a+b, b+c, c+a) \ge F(a,b,c).$$

+) $4a^2b^2c^2F\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) - F(a,b,c)$

$$=4a^2b^2c^2\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\right] - (a+b-c)(a-b)^2 - c(a-c)(b-c)$$

$= \frac{G}{abc}$, trong đó

$$G = 4c^2(bc+ca-ab)(a-b)^2 + 4a^2b^2(a-c)(b-c) - abc(a+b-c)(a-b)^2 - abc^2(a-c)(b-c)$$

$$= c\left(4c^2a + 4bc^2 - a^2b - ab^2 - 3abc\right)(a-b)^2 + ab\left(4ab - c^2\right)(a-c)(b-c)$$

$$\ge \left(4c^3a + 4bc^3 - a^2bc - ab^2c - 3abc^2\right)(a-b)^2 + ab\left[4ab - (a+b)^2\right](a-c)(b-c)$$

$$= \left[4c^3a + 4bc^3 - a^2bc - ab^2c - 3abc^2 - ab\left(ab - bc - ca + c^2\right)\right](a-b)^2$$

$$= \left(4c^3a + 4bc^3 - a^2b^2 - 4abc^2\right)(a-b)^2 \ge 0$$

(do $4c^3a \ge 4abc^2, bc^3 \ge a^2b^2$) (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra khẳng định của bài toán.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tức là tam giác đã cho là tam giác đều. ❐

➤***Nhận xét.*** Đây là bài toán bất đẳng thức có biến đổi hay mặc dù khá phức tạp. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11T, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Thanh Hoá:** *Lê Tiến Đạt*, 10A1, THPT Nông Cống I, Nông Cống; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Thừa Thiên – Huế:** *Trương Xuân Như Ngọc*, 11T2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 10T, THPT chuyên Thăng Long; **Long An:** *Lê Trí Phú*, 11T1, THPT chuyên Long An.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/478. *Cho ABC là tam giác nhọn. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$$\frac{r}{2R} \le \frac{abc}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}}.$$

Lời giải. Ta có kết quả sau:

$$\frac{r}{4R} = \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \quad (1)$$

Thật vậy $r = \frac{2S_{ABC}}{a+b+c} = \frac{abc}{2R(a+b+c)}$

$$= \frac{8R^3 \sin A.\sin B.\sin C}{4R^2(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{2R\sin A.\sin B.\sin C}{4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2},$$

hệ thức (1) được chứng minh.

Trở lại bài **T8/478**, rõ ràng có BĐT:

$$b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \ge b^2 + c^2 - \left(b^2 + c^2\right)\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 \ge \left(b^2 + c^2\right)(1 - \cos A)$$

$$\Rightarrow a^2 \ge 2\left(b^2 + c^2\right)\sin^2\frac{A}{2}.$$

Tương tự có

$$b^2 \geq 2\left(a^2+c^2\right)\sin^2\frac{B}{2};\ c^2 \geq 2\left(a^2+b^2\right)\sin^2\frac{C}{2}.$$

Do đó $a^2b^2c^2 \geq$

$$8\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\sin^2\frac{A}{2}.\sin^2\frac{B}{2}.\sin^2\frac{C}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{r}{2R} \leq \frac{abc}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)}} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❐

➤***Nhận xét.*** Có ít bạn tham gia giải bài toán này. Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Lào Cai:** *Vũ Lê Mai*, 10 Toán, THPT chuyên Lào Cai; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Anh Minh*, 9A, THCS Tuân Chính, Vĩnh Tường; **Thanh Hoá:** *Lê Tiến Đạt*, 10A1, THPT Nông Cống 1, Nông Cống; **Nghệ An:** *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Quảng Trị :** *Võ Thanh Long*, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bình Phước:** *Nguyễn Tấn Tài*, 11A; THPT chuyên Quang Trung; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/478. *Giả sử a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a \neq 1$ và phương trình*

$$a^x - \frac{1}{a^x} = 2\cos(bx) \quad (1)$$

có 2017 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình $a^x + \frac{1}{a^x} = 2\cos(bx)+4$ (2) có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

Lời giải. (Của bạn *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**).

Nếu x_0 là một nghiệm của PT(1) thì

$$a^{x_0} - \frac{1}{a^{x_0}} = 2\cos(bx_0)$$

$$\Rightarrow \left(a^{x_0} - \frac{1}{a^{x_0}}\right)^2 = 4\cos^2(bx_0)$$

$$\Rightarrow a^{2x_0} + \frac{1}{a^{2x_0}} - 2 = 4.\frac{1+\cos(2bx_0)}{2}$$

$$\Rightarrow a^{2x_0} + \frac{1}{a^{2x_0}} = 2\cos(2bx_0)+4.$$

Do đó $2x_0$ cũng là một nghiệm của PT(2).

Mặt khác nếu x_0 là một nghiệm của PT(2) thì

$$a^{x_0} + \frac{1}{a^{x_0}} = 2\cos(bx_0)+4$$

$$\Leftrightarrow a^{-x_0} + \frac{1}{a^{-x_0}} = 2\cos\left[b(-x_0)\right]+4$$

$\Rightarrow -x_0$ cũng là một nghiệm của PT(2).

Ta cũng thấy nếu x_0 là một nghiệm của PT(1) thì $-x_0$ không phải là nghiệm của PT(1).

Thật vậy giả sử $-x_0$ cũng là nghiệm của PT(1) thì ta có: $a^{-x_0} - \frac{1}{a^{-x_0}} = a^{x_0} - \frac{1}{a^{x_0}}$

$$\Leftrightarrow (a^{x_0} - a^{-x_0})\left(1+\frac{1}{a^{x_0}a^{-x_0}}\right) = 0 \Leftrightarrow a^{x_0} = a^{-x_0}$$

$\Rightarrow x_0 = 0$ (do $0 < a \neq 1$): vô lý vì 0 không là nghiệm của PT(1).

Từ các kết quả trên ta thấy nếu PT(1) có 2017 nghiệm thực phân biệt thì PT(2) có 2.2017 = 4034 nghiệm thực phân biệt. ❐

➤***Nhận xét.*** Ngoài bạn *Mơ*, bạn *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam** cũng có lời giải tốt.

NHƯ HOÀNG

Bài T10/478. *Trong một đất nước các thành phố được nối với nhau bằng các con đường. Độ dài của mỗi con đường nhỏ hơn 100km, và từ thành phố này có thể đi tới thành phố khác theo các con đường với chiều dài tổng cộng nhỏ hơn 100km. Khi một các con đường phải cấm đi lại để sửa chữa thì ta vẫn có thể đi lại từ thành phố* *này tới thành phố khác trên các con đường còn lại. Chứng minh rằng khi đó có thể chọn các con đường này sao cho độ dài tổng cộng nhỏ hơn 300km.*

Lời giải. Giả sử ngược lại là tồn tại một cạnh $e = AB$ sao cho khi bỏ e đi thì đồ thị $G-e$ có hai đỉnh X, Y sao cho con đường ℓ nối XY có độ dài nhỏ nhất lớn hơn 300km. Khi đó, với mọi thành phố M trên ℓ, đường đi ngắn nhất trong $G-e$ từ M tới X và Y cũng sẽ là đường đi dọc theo ℓ. Do độ dài của ℓ dài hơn 300km và độ dài mỗi con đường nhỏ hơn 100km, cho nên tồn tại thành phố M trên ℓ mà con đường ngắn nhất nối M với X và Y trong $G-e$ đều dài hơn 100km. Trong đồ thị G tồn tại theo giả thiết đầu bài đường đi ℓ_1 từ M tới X và ℓ_2 từ M tới Y, mỗi con đường đều có độ dài nhỏ hơn 100 km. Do trong $G-e$ những con đường ngắn nhất từ X và Y đến M đều dài hơn 100km, cho nên ℓ_1 và ℓ_2 đều phải đi qua $e = AB$ cả. Dễ kiểm tra là $\ell_1 \cup \ell_2 - e$ là một hệ thống chứa một con đường nối X với Y trong $G-e$ với tổng chiều dài nhỏ hơn 200 km, mâu thuẫn với giả thiết về X và Y. ❐

➤***Nhận xét.*** Bài toán này chỉ có hai bạn sau đây gửi lời giải: **Phú Yên:** *Lê Thành Lâm*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Nghệ An:** *Nguyễn Hữu Thắng*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T11/478. *Chứng minh rằng:*

BCNN(1,2,…,2n) chia hết cho C_{2n}^n với mọi số nguyên dương n.

Lời giải. Cho số nguyên x và p là một số nguyên tố bất kì, ta kí hiệu $v_p(x)$ là số mũ cao nhất của p mà chia hết x.

Đặt M = BCNN(1,2,…,2n). Ta cần chứng minh $v_p(M) \geq v_p(C_{2n}^n)$, với mọi số nguyên tố p.

Áp dụng công thức $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$ và $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!}$ ta được

$$v_p\left(C_{2n}^n\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right].$$

Đặt $m = v_p\left(C_{2n}^n\right)$. Khi đó ta có $p^m \leq 2n$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, $p^m > 2n$. Khi đó

$$p^m > n \Rightarrow \left[\frac{2n}{p^i}\right] = \left[\frac{n}{p^i}\right] = 0, \forall i \geq m, i \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra $m = v_p\left(C_{2n}^n\right) = \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\sum_{i=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right) = \sum_{i=1}^{m-1}\left(\left[\frac{2n}{p^i}\right] - 2\left[\frac{n}{p^i}\right]\right). \quad (*)$$

Với $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ thì ta có:

$[2x] = 2x - \{2x\} = 2([x] + \{x\}) - \{2x\}$

$= 2[x] + 2\{x\} - \{2x\} \leq 2[x] + 2\{x\} < 2[x] + 2$

$\Rightarrow [2x] - 2[x] \leq 1$ (do $[2x] - 2[x]$ là số nguyên).

Do đó, từ (*) suy ra $m \leq m - 1$ (mâu thuẫn).

Vậy $p^m \leq 2n$. (**)

Mặt khác, vì M = BCNN(1,2,…,2n) nên $v_p(M) = k$, với k là số nguyên lớn nhất sao cho $p^k \leq 2n$.

Do tính lớn nhất của k nên từ (**) suy ra $k \geq m$. Từ đó ta có đpcm. ❐

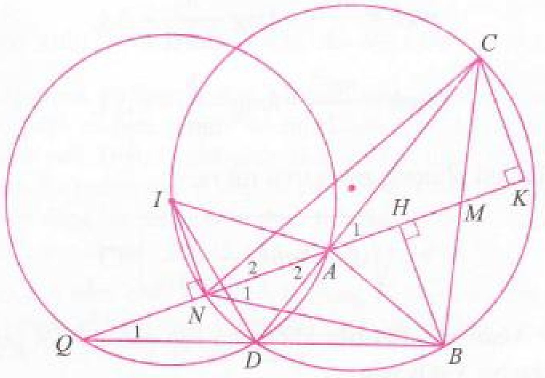
➤***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Nguyễn Hữu Thắng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, TP. Vinh; **Bình Phước:** *Nguyễn Hoàng Đức*, *Trịnh Hoàng Hiệp*, 11A, THPT chuyên Quang Trung; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/478. *Cho tam giác ABC với AB < AC và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B trên AM. Lấy điểm Q trên tia đối của tia AM sao cho AQ = 4MH. AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC.*

Lời giải. Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ; N, K theo thứ tự là hình chiếu của I, C trên AM.



Hình 1

Dễ thấy $\Delta MBH = \Delta MCK$ (g.c.g); $NA = NQ$.

Từ đó, chú ý rằng $AQ = 4MH; NA = NQ$, suy ra $BH = CK; NH = AK; QH = NK$.

Do đó $\Delta BNH = \Delta CAK; \Delta BQH = \Delta CNK$.

Điều đó có nghĩa là $\widehat{N_1} = \widehat{A_1}$; $\widehat{Q_1} = \widehat{N_2}$ (1)

Từ (1) suy ra

$$\widehat{BDC} = \widehat{A_2} + \widehat{Q_1} = \widehat{A_1} + \widehat{N_2} = \widehat{N_1} + \widehat{N_2} = \widehat{BNC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), chú ý rằng $ID = IA; IN \perp QA$, suy ra $\widehat{BDI} = \widehat{BDC} + \widehat{CDI} = \widehat{BDC} + 90° - \frac{1}{2}\widehat{DIA}$

$$= \widehat{N_1} + \widehat{N_2} + 90° - \widehat{Q_1} = \widehat{N_1} + 90° = \widehat{BNI} \quad (3)$$

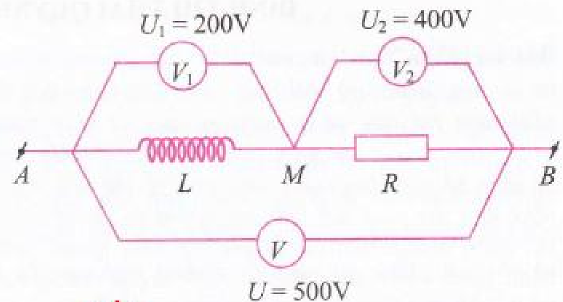
Từ (2) và (3) suy ra các tứ giác $DBCN$ và $DBIN$ nội tiếp. Vậy tứ giác $DBCI$ nội tiếp (đpcm). □

➤***Nhận xét.*** 1) Lời giải trên của các bạn *Đỗ Thùy Nga*, *Đỗ Hải Đăng*, 10T, *Nguyễn Minh Hiệu*, 11T, THPT chuyên Lào Cai, TP. Lào Cai, **Lào Cai**; *Lê Hà Khiêm*, 10T, THPT chuyên Lê Thánh Tông, TP. Hội An, **Quảng Nam**.

2) Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Lê Anh Dũng*, 10A1, *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Thanh Hoá:** *Lê Tiến Đạt*, 10A1, THPT Nông Cống 1; **Nghệ An:** *Bạch Quang Hiệu*, 11A1, THPT Cửa Lò, *Nguyễn Hữu Thắng*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Trung Kiên*, 11T2, THPT chuyên Quốc Học Huế; TP. Huế; **Phú Yên**: *Phạm Minh Chiến*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/478. *Cho mạch điện như hình vẽ.*



Các vôn kế là lí tưởng. Hãy chứng tỏ rằng cuộn dây không thuần cảm và xác định hệ số công suất của mạch điện.

Lời giải. Theo đề bài

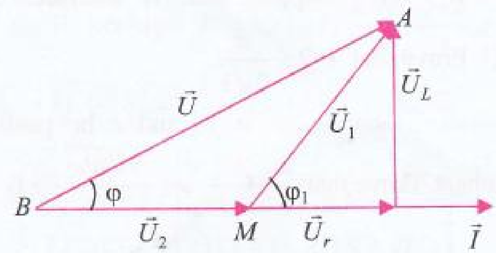
- $U^2 = 500^2 \neq U_1^2 + U_2^2 = 200^2 + 400^2$

Suy ra cuộn dây không thuần cảm, vì nếu cuộn dây thuần cảm ($r = 0$) thì $u = u_1 + u_2$ và $U^2 = U_1^2 + U_2^2$.

- Gọi $\varphi_{U_{AM/i}} = \varphi_1; \varphi_{U_{AB/i}} = \varphi$

$$u_1 = u_{AM}; u_2 = u_{MB} = u_R; u_{AB} = u = u_1 + u_2$$

Ta có giản đồ vectơ:



Từ giản đồ vectơ, áp dụng định lí hàm số cô sin ta có: $U_1^2 = U^2 + U_2^2 - 2UU_2\cos\varphi$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{U^2 + U_2^2 - U_1^2}{2UU_2}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{500^2 + 400^2 - 200^2}{2.500.400} = 0,925$$

Hệ số công suất của mạch điện là:

$\cos\varphi = 0,925.$ ❒

➤***Nhận xét.*** Chúc mừng bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: *Nguyễn Đăng Khoa*, 12D4, trường THPT Nguyễn Khuyến, **TP. Hồ Chí Minh**.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/478. *Một vật nhỏ điện tích dương trượt từ đỉnh mặt phẳng nghiêng có độ cao h và góc nghiêng α so với phương nằm ngang. Tại điểm A người ta đặt cố định điện tích +Q. Vận tốc của vật khi đến B là v_0. Xác định vận tốc của vật khi đến B nếu đặt tại A điện tích –Q. Biết hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng nghiêng là k và vật không nảy khỏi mặt phẳng nghiêng.*

Lời giải. Công của lực ma sát trong quá trình vật chuyển động từ đỉnh đến chân mặt phẳng nghiêng là: $A_0 = kmgS\cos\alpha = kmg\dfrac{h}{\tan\alpha}$

Công của lực điện trong quá trình đó khi ở A đặt điện tích Q và $-Q$ tương ứng là ΔA và $-\Delta A$, áp dụng định luật bảo toàn năng lượng cho hai trường hợp ta có:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2} + kmg\frac{h}{\tan\alpha} - \Delta A,$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + kmg\frac{h}{\tan\alpha} + \Delta A.$$

Từ hai phương trình trên rút ra:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 4gh\left(1 - \frac{k}{\tan\alpha}\right)}$$ ❒

➤***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải cho bài Vật lí này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 25)

Problem T7/482. Suppose that p, q, and r are three distinct integral roots of the equation $x^3 + ax^2 + bx + c$ where a, b, c are integers and $16a + c = 0$. Prove that $\dfrac{p+4}{p-4}\cdot\dfrac{q+4}{q-4}\cdot\dfrac{r+4}{r-4}$ is an integer.

Problem T8/482. Let (O) be the circumcircle of the equilateral triangle ABC whose sides are equal to a. On the arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A choose an arbitrary point P $(P \neq B, P \neq C)$. Suppose that AP intersects BC at Q. Prove that $PQ \le \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Problem T9/482. Let a, b, and c be positive numbers. Prove that $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \ge 6.$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/482. For each natural number $n > 2$, let u_n be the number of 0's at the end in the base n representation of $n!$. Find the maximum value of the expression $P = \dfrac{u_n}{n-1}$.

Problem T11/482. Given a convex decagon $A_1A_2...A_9A_{10}$. We color its sides and its diagonals by 5 different colors as follows:

a) Each side or each diagonal is colored by at most 1 color.

b) The sides and the diagonals which are colored have no common vertex and do not intersect (notice that the sides and the diagonals here are line segments, not the whole lines passing though them).

In how many ways can we color by the above rule?

Problem T12/482. Given a right triangle ABC with the right angle A. A circle (I, r) is tangent to the line segments AB, BC, and CA at P, Q, and R respectively. Let K be the midpoint of AC. The line IK intersects AB at M. The line segment PQ intersect the altitude AH (of ABC) at N. Prove that N is the orthocenter of MQR.

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ VÀ MỘT VÀI ỨNG DỤNG

PHẠM THỊ THU HIỀN
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Sự hấp dẫn của toán học nằm trong sự hài lòng, thỏa mãn sau khi chúng ta tìm ra lời giải cho một bài toán khó. Bài toán đếm trong Tổ hợp là một trong những bài toán hay và khó, có nhiều ứng dụng vào thực tiễn. Trong bài viết này, tác giả xin phép được tập trung trình bày về một nguyên lý cơ bản của bài toán đếm đó là "*Nguyên lý bù trừ*" và tìm hiểu một số ứng dụng của nguyên lý này trong các bài toán được sắp xếp theo thứ tự từ đơn giản đến phức tạp

I. Một số nguyên lý cơ bản cho các bài toán đếm

Nếu A là một tập hợp hữu hạn thì ta kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập hợp A.

1. Nguyên lý cộng: Cho $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập hữu hạn từng đôi một rời nhau. Khi đó ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i|.$$

2. Nguyên lý nhân: Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập hữu hạn thì $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = |A_1||A_2|..|A_m|$.

3. Nguyên lý trừ: Nếu Y là một tập con của một tập hữu hạn X thì $|X \setminus Y| = |X| - |Y|$.

4. Nguyên lý bù trừ:

• **Công thức tính lực lượng của tập hợp**

– Cho hai tập A, B ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

– Cho ba tập A, B, C ta có

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \\ - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

– Tổng quát: Cho $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập hữu hạn ta đặt

$$N_1 = \sum_{i=1}^{m} |A_i|;\ N_2 = \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$$

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}|$$

....

$$N_m = |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_m|$$

Khi đó: $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} N_i$ (1).

Chứng minh. Với mỗi $a \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, ta chứng minh a được đếm số lần như nhau ở cả hai vế của công thức (1). Vì a thuộc ít nhất một trong các tập $A_1, A_2, ..., A_m$, không mất tổng quát giả sử a thuộc đúng k tập $A_1, A_2, ..., A_k$ trong các tập đã cho. Ta thấy trong VT(1), a được đếm 1 lần. Theo VP(1), a cũng được đếm: C_k^1 lần trong $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$, C_k^2 lần trong $\sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$,... Do đó ở vế phải của công thức (1), a được đếm số lần là

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - ... + (-1)^{k-1} C_k^k = C_k^0 - \\ -\left(C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 - ... + (-1)^k C_k^k\right) = 1 - (1-1)^k = 1.$$

Rõ ràng, với mỗi $a \notin \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, ở cả VT và VP của (1) số lần a được đếm là 0 lần. Như vậy, với mọi phần tử a, số lần a được đếm ở VT(1) và VP(1) là như nhau. Do đó ta có điều phải chứng minh.

• **Nguyên lý bù trừ (Công thức Sieve)**

Giả sử $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập con của một tập hữu hạn X, kí hiệu $\overline{A_i}$ là phần bù của A_i trong X, ($i = 1, 2, ..., m$) thì

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}\right|=\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m}\right|$$

$$=|X|+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le m}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right|$$

$$=|X|+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i N_i.$$

Chứng minh. Theo công thức De Morgan ta có

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}\right|=\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m}\right|.$$

Theo nguyên lý trừ ta có

$$\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m}\right|=|X|-\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m\right|$$

$$=|X|+\sum_{i=1}^{m}(-1)^i N_i.$$

II. Ứng dụng nguyên lý bù trừ giải một số bài toán trung học phổ thông

1. Bài toán mở rộng giản đồ Ven phổ thông bằng nguyên lý bù trừ

Thí dụ 1.1. *Một số điện thoại $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ được gọi là dễ nhớ nếu dãy $d_1d_2d_3$ giống $d_4d_5d_6$ hoặc $d_5d_6d_7$. Mỗi d_i là một trong các giá trị $0,1,\ldots,9$. Hãy tính các số điện thoại dễ nhớ.*

Lời giải. Kí hiệu A là tập các số điện thoại dễ nhớ mà $d_1d_2d_3$ giống $d_4d_5d_6$ và B là tập các số điện thoại dễ nhớ mà $d_1d_2d_3$ giống $d_5d_6d_7$. Khi đó $A\cup B$ là tập tất cả các số điện thoại dễ nhớ, còn $A\cap B$ là tập các số điện thoại thỏa mãn $d_1=d_2=d_3=d_4=d_5=d_6=d_7$.

Ta có $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=10^3.1.10+10^3.10.1-10$

$=19990$.

Thí dụ 1.2. *Đề thi học sinh giỏi toán của một trường trung học phổ thông gồm có ba bài: hình học, đại số, tổ hợp. Có 100 học sinh tham gia kì thi. Kết quả chấm thi cho thấy: 80 em giải được bài hình học, 70 em giải được bài đại số, 50 em giải được bài tổ hợp, 60 em giải được cả bài hình học và đại số, 50 em giải được cả bài hình học và bài tổ hợp, 40 em giải được cả bài đại số và bài tổ hợp và 30 em giải được cả ba bài. Hỏi có bao nhiêu em giải được ít nhất một bài thi.*

Lời giải. Kí hiệu A_1 là tập hợp các học sinh giải được bài hình học, A_2 là tập hợp các học sinh giải được bài đại số, A_3 là tập hợp các học sinh giải được bài tổ hợp. Khi đó tập hợp học sinh giải được ít nhất một bài là $A_1\cup A_2\cup A_3$. Ta có

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-$$
$$-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$=80+70+50-60-50-40+30=80.$$

2. Đếm số phần tử trong tập hợp X không thỏa mãn tính chất α_k $(k=1,2,\ldots,n)$ nào cả.

Thí dụ 2.1. *Cho số nguyên dương n. Tính số các số nguyên dương không lớn hơn $n(n+1)(n+2)$ mà không chia hết cho cả ba số $n, n+1, n+2$.*

Lời giải. Kí hiệu X là tập các số nguyên dương không lớn hơn $n(n+1)(n+2)$. Giả sử A_1, A_2, A_3 tương ứng là các tập con của X gồm các số chia hết cho $n, n+1, n+2$. Khi đó $A=X\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3)$ là tập các số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán. Dễ thấy $|A_1|=(n+1)(n+2), |A_2|=n(n+2), |A_3|=n(n+1)$.

Mặt khác $A_1\cap A_2=\{k\in X \mid k\ \vdots\ n(n+1)\}$. Do đó $|A_1\cap A_2|=n+2$. Tương tự $|A_2\cap A_3|=n$. Ta còn phải tính $|A_3\cap A_1|, |A_1\cap A_2\cap A_3|$. Xét 2 trường hợp

TH1: n lẻ. Khi đó $n, n+2$ nguyên tố cùng nhau, do đó $|A_3\cap A_1|=n+1, |A_1\cap A_2\cap A_3|=1$.

TH2: n chẵn. Khi đó $(n,n+2)=2$, do đó $|A_3\cap A_1|=2(n+1), |A_1\cap A_2\cap A_3|=2$.

Theo nguyên lý bù trừ ta có

$|A_1\cup A_2\cup A_3|=3n(n+1)$ nếu n lẻ

và $|A_1\cup A_2\cup A_3|=n(3n+2)$ nếu n chẵn.

Từ đó $|A|=n^3-n$ nếu n lẻ và $|A|=n^3$ nếu n chẵn.

Thí dụ 2.2. *Cho số 1122334567. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ số của số trên sao cho không có hai chữ số giống nhau nào đứng cạnh nhau ?*

Lời giải. Gọi X_1, X_2, X_3 lần lượt là các tập hợp các số sau khi sắp xếp có hai chữ số 1, hai chữ số 2, hai chữ số 3 đứng cạnh nhau. Ta đi tính $|X_1|$ như sau: Coi hai chữ số 1 đứng cạnh nhau tạo thành một phần tử. Khi đó ta có số hoán vị của 9 phần tử là $9!$, tuy nhiên hoán vị hai chữ số 2 không làm thay đổi số đó, hoán vị hai chữ số 3 cũng như vậy. Do đó $|X_1| = \dfrac{9!}{2!2!}$.

Tương tự $|X_2| = |X_3| = \dfrac{9!}{2!2!}$,

$$|X_1 \cap X_2| = |X_2 \cap X_3| = |X_3 \cap X_1| = \frac{8!}{2!},$$

$$|X_1 \cap X_2 \cap X_3| = 7!.$$

Số cách sắp xếp các chữ số đã cho là $\dfrac{10!}{2!\,2!\,2!}$.

Theo nguyên lý bù trừ số cách sắp xếp các chữ số trên sao cho không có hai chữ số giống nhau nào đứng cạnh nhau là

$$\frac{10!}{2!\,2!\,2!} - \frac{3.9!}{2!\,2!} + \frac{3.8!}{2!} - 7! = 236880..$$

Thí dụ 2.3 (China Mathematical Competition 1994). *Giả sử tất cả các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với 105 được xếp thành dãy số tăng $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Tính a_{1000}.*

Lời giải. Đặt $a_{1000} = n$, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $A_i = \{k \in S \mid k \vdots i\}, i = 3,5,7$. Vì $105 = 3.5.7$ nên k nguyên tố cùng nhau với 105 khi và chỉ khi k không chia hết cho 3,5 và 7. Theo nguyên lý bù trừ ta có:

$$1000 = \left|\overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}\right|$$

$$= |S| - |A_3| - |A_5| - |A_7| + |A_3 \cap A_5| + |A_5 \cap A_7| + $$

$$+ |A_3 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$

$$= n - \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] - \left[\frac{n}{7}\right] + \left[\frac{n}{3.5}\right] + \left[\frac{n}{5.7}\right] + \left[\frac{n}{3.7}\right] - \left[\frac{n}{3.5.7}\right] \ (*)$$

Áp dụng BĐT: $\alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$, suy ra

$$1000 > n - \left(\frac{n}{3} + \frac{n}{5} + \frac{n}{7}\right) + \left(\frac{n}{3.5} - 1 + \frac{n}{3.7} - 1 + \frac{n}{5.7} - 1\right) - \frac{n}{3.5.7};$$

$$1000 < n - \left(\frac{n}{3} - 1 + \frac{n}{5} - 1 + \frac{n}{7} - 1\right) + \left(\frac{n}{3.5} + \frac{n}{5.7} + \frac{n}{3.7}\right) - \left(\frac{n}{3.5.7} - 1\right).$$ T

ừ đó ta có $2178\dfrac{3}{4} < n < 2194\dfrac{1}{16}$. Vì n và 105 nguyên tố cùng nhau nên n nhận một trong các giá trị: 2179, 2182, 2183, 2186, 2188, 2189, 2192, 2194. Thử trực tiếp các số này vào (*) ta được $n = 2186$ thỏa mãn. Vậy $a_{1000} = 2186$.

Thí dụ 2.4. *Dãy số $\{a_n\}$ thu được từ dãy các số nguyên dương $\{1,2,3,\ldots\}$ bằng cách xóa đi các số là bội của 3 hoặc 4, nhưng không là bội của 5. Tính số hạng a_{2009}.*

Lời giải. Đặt $a_{2009} = n$, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $A_i = \{k \in S \mid k \vdots i\}, i = 3,4,5$.

Như vậy tập hợp các số không bị xóa là $\left(\overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}\right) \cup A_5$. Theo nguyên lý bù trừ ta có

$$2009 = \left|\left(\overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}\right) \cup A_5\right| = \left|\overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}\right| + |A_5|$$

$$= |S| - \sum_{i=3}^{5} |A_i| + \sum_{3 \le i < j \le 5} |A_i \cap A_j| - |A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_5|$$

$$= n - \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{3.4}\right] + \left[\frac{n}{3.5}\right] + \left[\frac{n}{4.5}\right] - \left[\frac{n}{3.4.5}\right] + \left[\frac{n}{5}\right]$$

$$= n - \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{3.4}\right] + \left[\frac{n}{3.5}\right] + \left[\frac{n}{4.5}\right] - \left[\frac{n}{3.4.5}\right] \quad (*)$$

Áp dụng BĐT: $\alpha - 1 < [\alpha] \le \alpha$, suy ra

$$2009 < n - \left(\frac{n}{3} - 1\right) - \left(\frac{n}{4} - 1\right) + \frac{n}{3.4} + \frac{n}{3.5} + \frac{n}{4.5} - \left(\frac{n}{3.4.5} - 1\right)$$

$$= \frac{3}{5}n + 3 \ (1);$$

$$2009 > n - \frac{n}{3} - \frac{n}{4} + \left(\frac{n}{3.4} - 1\right) + \left(\frac{n}{3.5} - 1\right) + \left(\frac{n}{4.5} - 1\right) - \frac{n}{3.4.5}$$

$$= \frac{3}{5}n - 3 \ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $3343\dfrac{1}{3} < n < 3353\dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, n không nằm trong dãy $\{a_n\}$ nên n nhận giá trị trong các giá trị: 3345, 3346, 3347, 3349, 3350, 3353. Thay trực tiếp các giá trị vào phương trình (*) ta được $n = 3347$ là giá trị cần tìm.

Vậy $a_{2009} = 3347$.

3. Bài toán đếm số bộ nghiệm nguyên của phương trình nghiệm nguyên

Nhắc lại bài toán chia kẹo: "*Có m cái kẹo giống nhau chia cho n đứa trẻ. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia kẹo ?*". Bài toán chia kẹo tương đương với bài toán 3.1 sau đây.

Bài toán 3.1. *Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình* $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ *với* $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Giả sử bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$. Ta có tương ứng 1-1 mỗi nghiệm này với bộ $\underbrace{1...1}_{x_1}0\underbrace{1...1}_{x_2}0...0\underbrace{1...1}_{x_n}$ gồm m số 1 và $n-1$ số 0. Số nghiệm của phương trình bằng số cách chọn $n-1$ vị trí để đặt chữ số 0 trong $m+n-1$ vị trí và các vị trí còn lại đặt số 1. Suy ra số cách chia kẹo là C_{m+n-1}^{n-1}.

Bài toán 3.2. *Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$. Tìm số nghiệm tự nhiên của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ thỏa mãn $x_i \geq a_i$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Lời giải. Đặt $y_i = x_i - a_i, i \in \{1, 2, .., n\}$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Khi đó ta có: $y_1 + y_2 + ... + y_n = m - S$ (*)

Bài toán trở thành tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình (*).

- Nếu $m < S$ phương trình (*) vô nghiệm.
- Nếu $m = S$ phương trình (*) có một nghiệm.
- Nếu $m > S$ phương trình (*) có C_{m+n-1}^{n-1} nghiệm.

Bài toán 3.3. Tìm số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n \leq m$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải. Đặt $x_{n+1} = m - (x_1 + x_2 + ... + x_n)$. Ta có $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = m$, và $x_{n+1} \in \mathbb{N}$. Như vậy bài toán trở thành đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = m$.

Vậy ta có C_{m+n}^{n} nghiệm.

Áp dụng bài toán chia kẹo trên và nguyên lý bù trừ chúng ta sẽ giải quyết được một số bài toán đếm số nghiệm nguyên của phương trình nghiệm nguyên nhiều ẩn thỏa mãn các điều kiện cho trước.

Thí dụ 3.1. *Tìm số nghiệm nguyên của phương trình* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ *với* $5 \leq x_i \leq 10$, $i = \overline{1,4}$.

Lời giải. Đặt $y_i = x_i - 5 \Rightarrow 0 \leq y_i \leq 5, i = \overline{1,4}$. Ta có phương trình $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10$ (*).

Gọi X là tập các nghiệm nguyên không âm của phương trình (*), ta có $|X| = C_{13}^3$.

Gọi A là tập nghiệm nguyên không âm của (*) thỏa mãn $y_1 \geq 6$. Đặt $Y_1 = y_1 - 6$, phương trình (*) trở thành: $Y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4$. Theo bài toán 3.1 ta có $|A| = C_7^3$. Tương tự gọi B, C, D lần lượt là tập nghiệm nguyên không âm của (*) thỏa mãn $y_2 \geq 6, y_3 \geq 6, y_4 \geq 6$. Ta có $|B| = |C| = |D| = C_7^3$.

Dễ thấy

$|A \cap B| = |A \cap C| = |A \cap D| = |B \cap C| = |B \cap D| = |C \cap D| = 0$

$|A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = |B \cap C \cap D| = 0$

$|A \cap B \cap C \cap D| = 0$.

Theo nguyên lý bù trừ ta có số nghiệm bằng

$$|X| - |A| - |B| - |C| - |D| + |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| - |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap D| - |A \cap C \cap D| - |B \cap C \cap D| + |A \cap B \cap C \cap D|$$

$$= C_{13}^3 - 4C_7^3 = 146.$$

Thí dụ 3.2. *Cho số nguyên dương n chia hết cho 6. Gọi a_n là số các bộ gồm ba thành phần là các số nguyên không âm đôi một khác nhau có tổng không vượt quá n. Hãy xác định biểu thức của a_n theo n.*

Lời giải. Đặt $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 | x, y, z \geq 0; x + y + z \leq n\}$.

Theo bài toán bài toán 3.3 ta có

$$|A| = C_{n+3}^3 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Đặt A_1, A_2, A_3 lần lượt là các tập con của A gồm các bộ (x, y, z) thỏa mãn $x = y; y = z; z = x$.

Nếu $(x, y, z) \in A_1$ thì $x + y = 2x$ là một số chẵn, do đó nó có thể nhận một trong $\frac{n}{2} + 1$ giá trị $0, 2, ..., n$.

Nếu $2x = 2k$ với $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ thì z có $n - 2k + 1$ cách chọn.

Vậy $|A_1| = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(n-2k+1) = \frac{(n+2)^2}{4}$.

Do vai trò A_1, A_2, A_3 như nhau nên $|A_2| = |A_3| = |A_1| = \frac{(n+2)^2}{4}$. Ta lại có

$$|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_3 \cap A_1| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \frac{n}{3}+1.$$

Từ đó ta có: $a_n = |A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$

$$= |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 3\frac{(n+2)^2}{4} + 3\left(\frac{n}{3}+1\right) - \left(\frac{n}{3}+1\right)$$

$$= \frac{n(2n^2+3n-6)}{12}.$$

4. Bài toán Bernoulli – Euler và bài toán Lucas

Bài toán 4.1 (Bài toán Bernoulli – Euler). *Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào phong bì.*

a) Hỏi xác suất để xảy ra sự kiện không một lá thư nào bỏ đúng địa chỉ là bao nhiêu?

b) Hỏi xác suất để đúng r lá thư đúng địa chỉ là bao nhiêu? ($r \le n$).

Lời giải. a) Gọi X là tập tất cả các cách bỏ thư vào phong bì. Ta có $|X| = n!$.

Gọi A_i, $(1 \le i \le n)$, là tập tất cả các cách bỏ thư sao cho lá thư thứ i đúng địa chỉ. Ta có $|A_i| = (n-1)!$.

Dễ thấy $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$,

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)!$, $(1 \le i_1 < ... < i_k \le n)$.

Theo nguyên lý bù trừ ta có số cách bỏ thư để không một lá thư nào đúng địa chỉ là

$$D_n = |X| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| - ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

$$= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - ... + (-1)^n C_n^n 0!$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right) = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Suy ra xác suất cần tính là $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Số $D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ chính là số các hoán vị σ của tập $\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn $\sigma(i) \ne i, \forall i \in \{1,2,...,n\}$, nó được gọi là số mất trật tự.

b) Số cách bỏ thư để đúng r lá thư đúng địa chỉ là

$$C_n^r.D_{n-r} = C_n^r.(n-r)!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right)$$

$$= \frac{n!}{r!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right).$$

Do đó xác suất để đúng r lá thư đúng địa chỉ là

$$\frac{1}{r!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right).$$

Thí dụ 4.2. *Có bao nhiêu cách sắp xếp n cặp vợ chồng thành một hàng ngang sao cho không có anh nào ngồi cạnh vợ của mình?*

Lời giải. Gọi S là tập tất cả các hoán vị của n cặp vợ chồng khi xếp thành một hàng ngang. Ta có $|S| = (2n)!$. Gọi A_i là tập tất cả các hoán vị n cặp vợ chồng khi xếp thành một hàng ngang mà cặp vợ chồng thứ i ngồi kề nhau.

Theo nguyên lý bù trừ ta có số cách xếp thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| - ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

$$= (2n)! - C_n^1.2.(2n-1)! + C_n^2.2^2.(2n-2)! - ... + (-1)^k.C_n^k.2^k.(2n-k)! + ... + (-1)^n C_n^n.2^n.n!$$

$$= (2n)! + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k.C_n^k.2^k.(2n-k)!.$$

Thí dụ 4.3. *Cho tập $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ gồm n phần tử phân biệt $(n \ge 2)$. Có bao nhiêu cách sắp xếp các phần tử của A sao cho a_{i+1} không nằm ngay sau a_i, $i \in \{1,2,...,n-1\}$.*

Lời giải. Giả sử A_i là tập tất cả các cách sắp xếp các phần tử của A sao cho a_{i+1} nằm ngay sau a_i. Ta có số cách sắp xếp thỏa mãn đề bài là

$$M_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}|.$$

Với $\varnothing \neq \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$ ta có $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}|$ là tập tất cả các cách sắp xếp các phần tử của A mà với mỗi $j = 1, 2, \ldots, r$, phần tử a_{i_j+1} nằm ngay sau phần tử a_{i_j}, ta coi hai phần tử đứng liền nhau này tạo thành một khối. Chẳng hạn, khi $i_1 = 2, i_2 = 3, i_3 = 5, i_4 = 6, i_5 = 7, i_6 = 10$ ta sẽ thu được các khối là $(a_2, a_3, a_4), (a_5, a_6, a_7, a_8), (a_{10}, a_{11})$.

Rõ ràng, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}|$ bằng số cách sắp xếp các khối và các phần tử còn lại của A. Nếu có b khối thì có $b + r$ phần tử của A tham gia vào các khối đó, do đó các phần tử còn lại của A không tham gia các khối đó là $n - b - r$. Suy ra

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}| = (b + n - b - r)! = (n - r)!$$

Như vậy

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}| = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} C_{n-1}^r (n-r)!.$$

Từ đó ta có

$$M_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}| = n! - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r+1} C_{n-1}^r (n-r)!$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_{n-1}^r (n-r)! = (n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{n-r}{r!}.$$

Bài toán 4.4 (Bài toán Lucas). *Có một bàn tròn, xung quanh có $2n$ ghế. Cần sắp xếp chỗ ngồi cho n cặp vợ chồng sao cho các ông ngồi xen kẽ các bà và không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp ?*

Lời giải. Trước tiên ta hiểu hai cách xếp chỗ ngồi được coi là khác nhau nếu có ít nhất một ghế được ngồi bởi hai người khác nhau trong hai cách xếp đó.

* Xếp chỗ cho các bà trước theo nguyên tắc giữa hai bà để một ghế trống (dành cho các ông).

\+ Nếu các bà ngồi ghế lẻ thì có $n!$ cách sắp xếp.

\+ Nếu các bà ngồi ghế chẵn thì có $n!$ cách sắp xếp.

Vậy tổng cộng là $2n!$ cách xếp các bà.

Số cách sắp xếp cần tính là $M_n = 2n!s$ với s là số cách sắp xếp n ông chồng vào n ghế còn lại thỏa mãn điều kiện không ông nào ngồi cạnh vợ mình.

• Đánh số các bà (đã xếp) theo thứ tự từ 1 đến n theo trật tự vòng tròn, đánh số các ông tương ứng với các bà (ông i là chồng bà i), đánh số các ghế trống theo quy tắc: ghế số i là ghế giữa bà i và bà $i+1$ (quy ước $n+1=1$). Việc xếp ghế cho các ông là một song ánh F từ tập các ghế vào tập các ông với quy ước $F(i) = j$ tức là ghế i được xếp cho ông j.

• Ta cần tìm s là số song ánh đi từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào chính nó thỏa mãn điều kiện $F(i) \neq i, F(i) \neq i+1$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Gọi P_i là tính chất $F(i) = i$, Q_i là tính chất $F(i) = i+1$.

Khi đó ta có $s = n! - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^{2n} N_{2n}$ với N_k là tổng tất cả các song ánh thỏa mãn k tính chất lấy từ $2n$ tính chất đang xét.

Dễ thấy P_i, Q_i hoặc P_{i+1}, Q_i không đồng thời được thỏa mãn. Vì thế ta cần lấy ra k tính chất trong $2n$ tính chất đang xét sao cho P_i, Q_i hoặc P_{i+1}, Q_i không đồng thời được thỏa mãn. Với mỗi cách lấy k tính chất như vậy, $(k \leq n)$ ta lại có $(n-k)!$ song ánh thỏa mãn. Ta xếp các tính chất đang xét trên một vòng tròn $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_{2n}, Q_{2n}$. Ta đi tìm số cách lấy ra k phần tử trong $2n$ phần tử được xếp trên một vòng tròn sao cho không có hai phần tử kề nhau nào được chọn. Ta xét hai bài toán sau:

Bài toán 1: Có bao nhiêu cách lấy ra k phần tử trong m phần tử xếp trên đường thẳng sao cho không có hai phần tử liền nhau nào được chọn?

Khi ta lấy ra k phần tử, còn lại $m-k$ phần tử. Giữa $m-k$ phần tử đó có $m-k+1$ khoảng trống (kể cả khoảng trống ở hai đầu). Mỗi cách lấy ra k khoảng từ $m-k+1$ khoảng này tương ứng với một cách chọn k phần tử thỏa mãn đề bài, do đó số cần tìm là C_{m-k+1}^k.

Bài toán 2: Giống như bài toán 1, nhưng m phần tử xếp trên một vòng tròn.

Cố định phần tử a trong m phần tử. Chia các cách lấy thành hai lớp

1. Các cách mà a được chọn, khi đó 2 phần tử kề a không được chọn. Như vậy ta chọn $k-1$ phần tử trong $m-3$ phần tử. Các phần tử này được xem như nằm trên đường thẳng giống bài toán 1, ta có C_{m-k-1}^{k-1} cách chọn.

2. Các cách mà a không được chọn, khi đó ta bỏ a đi, ta chọn k phần tử trong $m-1$ phần tử được xem như xếp trên đường thẳng, do đó có C_{m-k}^{k}.

Do đó số cách chọn ở bài toán 2 là

$$C_{m-k-1}^{k-1}+C_{m-k}^{k}=\frac{m}{m-k}C_{m-k}^{k}.$$

Như vậy số cách lấy ra k phần tử trong $2n$ phần tử được xếp trên một vòng tròn sao cho không có hai phần tử kề nhau nào được chọn là $\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}$.

Từ đó ta có $s=n!-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(n-k)!\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(n-k)!\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}.$$

Vậy số cách xếp thỏa mãn đề bài là

$$M_n=2n!s=2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}(n-k)!\frac{2n}{2n-k}C_{2n-k}^{k}.$$

Thí dụ 4.5. *Đức vua Arthur cho mời n cặp hiệp sĩ là đối thủ của nhau đến ăn tối tại cung điện. Hỏi hoàng gia có bao nhiêu cách để xếp họ ngồi quanh một bàn tròn sao cho không có hai hiệp sĩ nào là đối thủ của nhau ngồi cạnh nhau?*

Lời giải. Trước tiên ta hiểu hai cách xếp chỗ ngồi được coi là khác nhau nếu có ít nhất một ghế được ngồi bởi hai người khác nhau trong hai cách xếp đó.

Giả sử M_n là tổng số cách xếp chỗ ngồi cho các hiệp sĩ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có $M_n=(2n)!-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|$.

Với mỗi tập $\varnothing\neq\{i_1,i_2,\ldots,i_r\}\subset\{1,2,\ldots,n\}$ ta có $|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}|$ là tập tất cả các cách sắp xếp sao cho có r cặp hiệp sĩ ngồi cạnh nhau. Hai chỗ ngồi liền kề để xếp cho cặp hiệp sĩ thứ nhất có $2n$ cách chọn, ta coi $r-1$ cặp hiệp sĩ còn lại là $r-1$ phần tử, còn lại $2n-2r$ hiệp sĩ. Như vậy ta có $r-1+2n-2r=2n-r-1$ phần tử. Ta có $(2n-2r-1)!$ cách xếp chỗ cho $2n-2r-1$ phần tử này. Hơn nữa, trong mỗi cách xếp r cặp hiệp sĩ, ta có thể đổi chỗ hai hiệp sĩ cho nhau nên ta có

$$\begin{aligned}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}|&=2^r.2n(2n-2r-1)!\\&=2^{r+1}n(2n-2r-1)!.\end{aligned}$$

Do đó $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}C_n^r2^{r+1}n(2n-2r-1)!$

Vậy $M_n=(2n)!-\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}C_n^r2^{r+1}n(2n-2r-1)!$

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}C_n^r2^{r+1}n(2n-2r-1)!.$$

Chú ý: Nếu ta coi hai cách xếp chỗ ngồi mà cách xếp này thu được từ cách xếp kia bằng cách quay theo vòng tròn là như nhau thì số cách xếp là

$$\frac{M_n}{2n}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}C_n^r2^{r}(2n-r-1)!.$$

II. Bài tập đề nghị

1. Trong tập $\{1,2,\ldots,2016\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho $2,3,5,7$.

2. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4=17$ với $3\le x_i\le 5$, $i=\overline{1,4}$.

3. Có bao nhiêu cách hoán vị các chữ cái M, A, T, H, I, S, F, U, N sao cho các từ MATH, IS và FUN không được xuất hiện (chẳng hạn hoán vị INUMATHSF không được tính).

4. Một cửa hàng có n loại hàng hóa khác nhau. Một người khách muốn mua k sản phẩm, ($k\ge n$) sao cho mỗi loại hàng hóa có ít nhất một sản phẩm. Hỏi người đó có bao nhiêu sự lựa chọn.

5. Có bao nhiêu cách xếp n cặp vợ chồng ngồi vào một bàn dài gồm hai dãy ghế song song sao cho tất cả các ông ngồi về một phía và không ai ngồi đối diện với vợ của mình.

6. Giả sử $1\le r<n$, có bao nhiêu cách sắp xếp các phần tử của tập $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ sao cho với mỗi $i=1,2,\ldots,r$ phần tử a_{i+1} không nằm ngay sau phần tử a_i.

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

☆**BÀI TOÁN 4.** (IMO 1995) *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn* $abc=1$. *Chứng minh rằng* $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geq\dfrac{3}{2}$ (1)

Nhận xét 1. Bài toán này khi tiếp cận, chúng ta thấy vế trái của BĐT có dạng phân số, bậc của mẫu số lớn hơn bậc của tử số. Điều đó giúp chúng ta nghĩ tới BĐT Schwarz. Đến đây nếu áp dụng trực tiếp luôn, chúng ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$
$$\geqslant\frac{(1+1+1)^2}{a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)}.$$

Khi đó bài toán trở nên phức tạp hơn, và chúng ta sẽ gặp khó khăn trong việc giải quyết bài toán đó. Vì vậy để ý một chút chúng ta thấy rằng

$\dfrac{1}{a^3(b+c)}=\dfrac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}$, lúc này việc áp dụng BĐT Schwarz dạng phân thức mang lại hiệu quả rõ rệt.

Lời giải 1. Ta có:

$$\mathrm{VT}(1)=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$
$$=\frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)}+\frac{\frac{1}{b^2}}{b(c+a)}+\frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)}$$
$$\geq\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Vậy $\mathrm{VT}(1)\geqslant\dfrac{ab+bc+ca}{2}$.

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\mathrm{VT}(1)\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=\mathrm{VP}(1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Lời giải 2. Đặt $x=ab, y=bc, z=ca$ thì x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xyz=1$.

BĐT đã cho được viết lại:

$$\frac{1}{a^2(ab+ac)}+\frac{1}{b^2(bc+ba)}+\frac{1}{c^2(ca+cb)}\geq\frac{3}{2}.$$

Chúng ta có

$$\frac{1}{a^2(ab+ac)}+\frac{1}{b^2(bc+ba)}+\frac{1}{c^2(ca+cb)}$$
$$=\frac{y}{zx(x+z)}+\frac{z}{xy(x+y)}+\frac{x}{yz(y+z)}$$
$$=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}.$$

Áp dụng BĐT Schwarz ta có

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}$$
$$\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hay $a=b=c=1$.

Nhận xét 2. Quan sát điều kiện, chúng ta thấy $abc=1$. Mà tử số của mỗi phân số trong biểu thức bằng 1. Vậy để tận dụng giả thiết chúng ta sẽ thay số 1 bởi $a^2b^2c^2$ và từ đó $\dfrac{1}{a^3(b+c)}=\dfrac{a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}=\dfrac{b^2c^2}{a(b+c)}$.

Tương tự $\dfrac{1}{b^3(a+c)}=\dfrac{a^2c^2}{b(a+c)};\dfrac{1}{c^3(a+b)}=\dfrac{a^2b^2}{c(a+b)}$.

Như vậy BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\frac{3}{2}.$$

Đến đây ta có nhiều hướng để giải bài toán.

Lời giải 3. Áp dụng BĐT Schwarz và BĐT Cauchy ta có

$$\text{VT}(1)=\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}$$

$$\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{ab+bc+ca}{2}$$

$$\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=\text{VP}(1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Lời giải 4. Áp dụng BĐT Bunyakovsky, ta có

$$\left[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right]\left(\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}\right)\geq(bc+ca+ab)^2.$$

Do đó: $\dfrac{a^2b^2}{c(a+b)}+\dfrac{b^2c^2}{a(b+c)}+\dfrac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\dfrac{ab+bc+ca}{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\text{VT}(1)\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=\text{VP}(1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Sử dụng hướng chọn điểm rơi trong BĐT Cauchy ta có lời giải 5. Ý tưởng cho lời giải này xuất phát từ việc chúng ta dễ dàng dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Do đó chúng ta chứng minh như sau

Lời giải 5. Ta có $\dfrac{a^2b^2}{c(a+b)}+\dfrac{c(a+b)}{4}\geq ab$,

$$\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{a(b+c)}{4}\geq bc,\ \frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{b(c+a)}{4}\geq ca.$$

Cộng các BĐT lại theo vế, ta được

$$\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\text{VT}(1)\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=\text{VP}(1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Sử dụng tích vô hướng của hai vectơ, chúng ta có lời giải 6.

Lời giải 6. Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz* xét hai vectơ

$$\overrightarrow{OA}=\left(\sqrt{a(b+c)};\sqrt{b(c+a)};\sqrt{c(a+b)}\right),$$

$$\overrightarrow{OB}=\left(\frac{bc}{\sqrt{a(b+c)}};\frac{ca}{\sqrt{b(c+a)}};\frac{ab}{\sqrt{c(a+b)}}\right)$$

Gọi α với $0\leq\alpha\leq\pi$ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$. Ta có

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2(ab+bc+ca)}$$

$$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}}.$$

và

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\alpha\leq\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|$$

$$\leq\sqrt{2(ab+bc+ca)}.\sqrt{\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=ab+bc+ca$, từ đó:

$$ab+bc+ca\leq\sqrt{2(ab+bc+ca)}.\sqrt{\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(c+a)}+\frac{a^2b^2}{c(a+b)}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2b^2}{c(a+b)}+\frac{b^2c^2}{a(b+c)}+\frac{c^2a^2}{b(a+c)}\geq\frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\text{VT}(1)\geqslant\frac{ab+bc+ca}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}=\text{VP}(1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài toán 1' *(Tổng quát hóa BĐT IMO 1995).* *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ và số $\lambda \geq 2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^{\lambda}(b+c)} + \frac{1}{b^{\lambda}(c+a)} + \frac{1}{c^{\lambda}(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ thì

$$\frac{1}{a^{\lambda}(b+c)} + \frac{1}{b^{\lambda}(c+a)} + \frac{1}{c^{\lambda}(a+b)}$$
$$= \frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y}.$$

Vì BĐT đối xứng nên chúng ta giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó

$$x^{\lambda-2} \geq y^{\lambda-2} \geq z^{\lambda-2};\ \frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y}$$

và $\frac{x^{\lambda-2}}{y+z} \geq \frac{y^{\lambda-2}}{z+x} \geq \frac{z^{\lambda-2}}{x+y}.$

Sử dụng BĐT hoán vị, ta có:

$$\frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y} \geq z.\frac{x^{\lambda-2}}{y+z} + x.\frac{y^{\lambda-2}}{z+x} + y.\frac{z^{\lambda-2}}{x+y}$$

$$\frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y} \geq y.\frac{x^{\lambda-2}}{y+z} + z.\frac{y^{\lambda-2}}{z+x} + x.\frac{z^{\lambda-2}}{x+y}.$$

Cộng hai BĐT này lại theo vế, ta được

$$\frac{x^{\lambda-1}}{y+z} + \frac{y^{\lambda-1}}{z+x} + \frac{z^{\lambda-1}}{x+y} \geq \frac{1}{2}\left(x^{\lambda-2} + y^{\lambda-2} + z^{\lambda-2}\right)$$
$$\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^{\lambda-2}y^{\lambda-2}z^{\lambda-2}} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy BĐT tổng quát được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Với $\lambda = 3$ ta được BĐT IMO 1995 và đây cũng là lời giải 7 cho BĐT này.

HOÀNG MINH QUÂN

(GV THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Hà Nội)

Bài *Khai thác và phát triển một bài toán hình học hay* trong TH&TT số 481 tháng 7 năm 2017 ở phần cuối, ở trang 13, cột phải, bắt đầu từ dòng 10, dưới lên: Khi dựng tam giác đều *ACH*, tác giả đã mặc nhiên công nhận *C*, *H*, *B* thẳng hàng. Điều này chưa thật chặt chẽ, chúng tôi xin đưa ra lập luận chặt chẽ như sau:

Trên nửa mặt phẳng bờ *AC* chứa điểm *B*, trên tia *CB* lấy điểm *H* sao cho $CH = AC = AE$.

Ta có $CE = AD$ và

$$\widehat{HCE} = \widehat{BCE} = 180^0 - \widehat{BEC} - \widehat{EBC}$$
$$= 180^0 - 2(72^0 + 4x) = 36^0 - 8x = \widehat{CAD},$$

do đó $\Delta HCE = \Delta\ CAD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{CHE} = \widehat{ACD} = 5x.$

Từ đó $\widehat{HEA} = \widehat{HEC} - \widehat{AEC} = \widehat{CDA} - \widehat{AEC}$
$$= 180^0 - \widehat{CAD} - \widehat{ACD} - \widehat{AEC}$$
$$= 180^0 - (36^0 - 8x) - 5x - (72^0 + 4x)$$
$$= 72^0 - x.$$

Mặt khác do $CA = CH$ nên

$$2\widehat{AHC} = 180^0 - 180^0 - \widehat{ACH} = 180^0 - \widehat{ACB}$$
$$= 180^0 - (36^0 + 7x + 5x) = 144^0 - 12x$$

nên $\widehat{AHC} = 72^0 - 6x$, suy ra

$$\widehat{AHE} = \widehat{AHC} + \widehat{CHE}$$
$$= 72^0 - 6x + 5x = 72^0 - x = \widehat{HEA}.$$

Từ đó có $AH = AE = AC = CH$ nên ΔAHC đều, do đó: $72^0 - 6x = \widehat{AHC} = 60^0$, suy ra $x = 2^0$.

HOÀNG NGUYỄN *(Nghệ An)*

Mời các bạn gửi lời giải bài toán 5 sau đây về toà soạn TH&TT trước ngày 30.9.2017.

Bài toán 5. *Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên trên AC, M và N lần lượt là trung điểm của AH, CD. Chứng minh rằng: BM vuông góc với MN.*

CAO NGỌC TOẢN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Tạp chí TH&TT số 482, tháng 8/2017 giới thiệu với các bạn hai bài toán, một bài nằm trong kì thi Olympic châu Á Thái Bình Dương năm 1998, một bài nằm trong kì thi Vô địch Quốc gia của Iran năm 1999, cùng với các lời giải của chúng.

Bài 5. (APMO 1998, *bài* 3).

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a, b, số (36a + b)(a +36b) không thể là một luỹ thừa của 2.

Lời giải. *Cách* 1. Giả sử ngược lại, tồn tại hai số nguyên dương a, b để $(36a + b)(a + 36b)$ là một lũy thừa của 2. Suy ra $a \neq b$ và $36a + b$ và $a + 36b$ là các lũy thừa của 2.

Đặt

$36a+b=2^m=p,\ a+36b=2^n=q;\ m,n\in\mathbb{N}^*.$

Khi đó $m\neq n$ và

$$36p-q=1295a>0\Rightarrow\frac{p}{q}>\frac{1}{36}.$$

Tương tự: $36q-p=1295b>0\Rightarrow\dfrac{p}{q}<36.$

Do đó: $\dfrac{1}{36}<\dfrac{p}{q}=2^{m-n}<36.$

Suy ra: $-6<m-n<6$ (1).

Mặt khác

$4^n(4^{m-n}-1)=p^2-q^2=35.37.(a^2-b^2),$

do đó: $4^{m-n}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,37)$ (2).

Nhưng (2) không thể xảy ra với các số nguyên $m-n\ (m\neq n)$ thỏa mãn (1).

Do đó giả sử trên là sai. Vậy với mọi số nguyên dương a, b, số $(36a + b)(a +36b)$ không thể là một luỹ thừa của 2.

Cách 2. Giả sử ngược lại, tồn tại cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $(36a + b)(a + 36b)$ là một lũy thừa của 2. Trong các cặp như vậy gọi $(m;n)$ là cặp có tổng $m + n$ bé nhất.

Vì $(36m+n)(m+36n)=2^k$ với $k>10$ nên $(36m + n)$ và $(m + 36n)$ phải là các số chẵn. Do đó m và n đều là các số chẵn.

Đặt $m=2x,\ n=2y$ với $x,y\in\mathbb{N}^*$. Ta có

$(36m+n)(m+36n)=(72x+2y)(2x+72y)=2^k$

$\Leftrightarrow(36x+y)(x+36y)=2^{k-2}.$

Như vậy cặp $(x; y)$ cũng thỏa mãn tích $(36x + y)(x + 36y)$ là một lũy thừa của 2. Nhưng ta lại có

$$x+y=\frac{m+n}{2}<m+n.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết chọn cặp $(m; n)$ có tổng bé nhất. Mâu thuẫn này chứng tỏ với mọi số nguyên dương a, b, số

$(36a + b)(a +36b)$ không thể là một luỹ thừa của 2.

Nhận xét. Cách giải thứ nhất khá kỹ thuật, nhưng cách giải thứ hai thực sự ngắn gọn và đẹp, trong đó đã sử dụng nguyên lý cực hạn:

Mọi tập hợp khác rỗng các số tự nhiên luôn có phần tử nhỏ nhất.

Bài 6. (*Cộng hòa Iran, 1999, Vòng 2, Bài 3*)

Giả sử $n(r)$ là số tất cả các điểm nguyên trên một đường tròn có bán kính $r > 1$. Chứng minh rằng $n(r) < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Lời giải. Xét đường tròn bán kính r có chứa n điểm có tọa độ nguyên trên đó. Ta cần chứng minh $n < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$. Vì $r > 1$ và $6\sqrt[3]{\pi r^2} > 8$ nên ta có thể giả sử $n > 8$. Gọi n điểm có tọa độ nguyên nói trên là $M_1, M_2, ..., M_n$ và được xếp theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ. Vì

$$\text{sđ}\overset{\frown}{M_1M_3} + \text{sđ}\overset{\frown}{M_2M_4} + ... + \text{sđ}\overset{\frown}{M_nM_2} = 4\pi$$

nên tồn tại chỉ số $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho

$\text{sđ}\overset{\frown}{M_iM_{i+2}} \le \frac{4\pi}{n}$, không mất tính tổng quát ta giả sử đó là cung $\overset{\frown}{M_1M_3}$. Xét tam giác ABC nội tiếp trong cung $\overset{\frown}{M_1M_3}$. Diện tích tam giác ABC lớn nhất khi hai điểm A và C trùng với hai đầu mút cung $\overset{\frown}{M_1M_3}$ và B là giao điểm của trung trực của AC với $\overset{\frown}{M_1M_3}$ (khi đó khoảng cách từ B đến đường thẳng AC là lớn nhất). Ta có:

$$\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = \alpha \le \frac{\pi}{n} \text{ và } \widehat{ABC} = 2\pi - 2\alpha.$$

Gọi ba cạnh của tam giác ABC có độ dài là a, b, c, khi đó ta có:

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4r} = \frac{2r\sin A.\,2r\sin B.\,2r\sin C}{4r}$$

$$= \frac{2r\sin\alpha.\,2r\sin 2\alpha.\,2r\sin\alpha}{4r}$$

$$\le \frac{2r.\frac{\pi}{n}.2r.\frac{2\pi}{n}.2r.\frac{\pi}{n}}{4r} = \frac{4r^2\pi^3}{n^3}.$$

Vì tam giác $M_1M_2M_3$ nội tiếp trong cung $\overset{\frown}{M_1M_3}$ nên ta có $S_{M_1M_2M_3} \le S_{ABC} \le \frac{4r^2\pi^3}{n^3}$ (1).

Vì M_1, M_2, M_3 có tọa độ nguyên nên theo định lý Pick ta có $\min S_{M_1M_2M_3} = \frac{1}{2}$.

Do đó: $\frac{1}{2} \le S_{ABC} \le \frac{4r^2\pi^3}{n^3}$.

Vậy $n^3 \le 8r^2\pi^3$, suy ra: $n \le 2\pi\sqrt[3]{r^2} < 6\sqrt[3]{\pi r^2}$.

Nhận xét. Trong chứng minh trên đã sử dụng kết quả: $\sin x < x, \forall x > 0$ và định lý Pick. Nội dung định lý Pick như sau: *Cho đa giác (P) không tự cắt nhau trong mặt phẳng tọa độ có các đỉnh có tọa độ nguyên. Ký hiệu B là số các điểm có tọa độ nguyên nằm trên biên của (P), I là số các điểm có tọa độ nguyên nằm bên trong của (P). Khi đó diện tích S_P của đa giác (P) là:*

$$S_P = B + \frac{1}{2}I - 1.$$

Mời các bạn tìm thêm những lời giải khác cho hai bài toán trên.

Sau đây là hai bài tập đề nghị. Các bạn hãy thử sức giải chúng với nhiều lời giải nhất có thể và gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 30.9.2017.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 7. Tồn tại hay không dãy vô hạn các số thực $a_1, a_2, a_3, \ldots$ thỏa mãn

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots = m$$

với mọi số nguyên dương m ?

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC có D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, CA, AB và H là trực tâm. Chứng minh rằng

$$\frac{AB.BC + BC.CA + CA.AB}{AH.AD + BH.BE + CH.CF} \le 2.$$

TRẦN HỮU NAM (*Hà Nội*)

GIẢI ĐÁP: CHỌN ĐÁP ÁN NÀO ?

(Đề đăng trên TH&TT số 478, tháng 4 năm 2017)

Phân tích. Sai lầm ở trong lời giải ở chỗ: Sau hai lần áp dụng BĐT Cauchy thì dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2}{y} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$: không thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 3$.

Lời giải đúng. *Cách 1* (Của bạn *Nguyễn Thị Thu Trang*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**).

Áp dụng BĐT Schwarz, ta có:

$$S = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{4}{2y}$$

$$\geq x + y + \frac{(1+2)^2}{2x + 2y} = x + y + \frac{9}{2(x+y)}.$$

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{9}{2t}$ với $t = x + y \geq 3$.

Ta có: $f'(t) = 1 - \dfrac{18}{4t^2} = \dfrac{2t^2 - 9}{2t^2} > 0\ \forall t \geq 3$.

Do đó hàm số *f*(*t*) đồng biến trên $[3; +\infty)$.

Suy ra $\min\limits_{[3;+\infty)} f(t) = f(3) = 3 + \dfrac{9}{2.3} = \dfrac{9}{2} = 4\dfrac{1}{2}$.

Do đó ta chọn đáp án **E**.

Cách 2. (Của bạn *Lê Trí Phú*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Long An**). Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$S = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{2}{y}\right) + \frac{x+y}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{1}{2x}} + 2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{2}{y}} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2x} \\ x + y = 3 \\ \dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy $\min S = 4\dfrac{1}{2}$ khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Do đó ta chọn đáp án **E**.

Nhận xét. Ngoài bạn *Trang* và bạn *Phú* kể trên, bạn *Hoàng Văn Phái*, 11A3, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, ***Hưng Yên***; *Lê Cẩm Thanh Hà*, 11 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế, ***Thừa Thiên Huế*** cũng đã phát hiện đúng sai lầm và đưa ra lời giải tốt.

KIHIVI

NGHIỆM NÀO ?

Đề bài. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{2x+6} + \sqrt[3]{9-x} = \sqrt[3]{3x-11}.$$

Sau đây là lời giải của bạn *An*:

Từ phương trình, lập phương hai vế, ta được:

$$2x + 6 + 9 - x + 3\sqrt[3]{2x+6}.\sqrt[3]{9-x}\left(\sqrt[3]{2x+6} + \sqrt[3]{9-x}\right)$$
$$= 3x - 11.$$

Từ đây kết hợp với phương trình đã cho ta thu được:

$$2x + 6 + 9 - x + 3\sqrt[3]{2x+6}.\sqrt[3]{9-x}.\sqrt[3]{3x-11} = 3x - 11$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2x+6}.\sqrt[3]{9-x}.\sqrt[3]{3x-11} = 2x - 26$$

$$\Leftrightarrow 27(2x+6)(9-x)(3x-11) = (2x-26)^3$$

$$\Leftrightarrow 85x^3 - 939x^2 + 1623x - 796 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(85x - 769) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{769}{85} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = \dfrac{769}{85}$.

Bạn tìm được mấy nghiệm của phương trình này?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 482 (8.2017)

Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh bìa 1: Từ trái qua phải: Thầy *Lê Anh Vinh* (Trưởng đoàn), em *Lê Quang Dũng*, em *Phan Nhật Duy*, em *Đỗ Văn Quyết*, em *Phạm Nam Khánh*, em *Hoàng Hữu Quốc Huy*, em *Nguyễn Cảnh Hoàng*, Thầy *Lê Bá Khánh Trình* (Phó đoàn)

Biên tập: LÊ MAI — ***Mĩ thuật***: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN — ***Thiết kế, chế bản***: MAI ANH

Giải trí toán học

CHIỀU EM VÀ ANH

Có một chiều anh đến bên em
Ánh xạ cuộc đời cho anh hạnh phúc
Em là ảo là nguyên hay là thực
Anh ngu ngơ không biết tập chỉnh hình.

Có một chiều em đến bên anh
Hai đứa bâng khuâng hệ tiên đề còn thiếu
Bổ sung đủ cho nhau rồi chợt hiểu
Không gian yêu trù mật tháng ngày xanh.

Rồi một chiều anh đến bên em
Để được nói lời yêu thương thổn thức
Đôi mắt em tròn xoe cung lượng giác
Rồi quay đi gián đoạn cả ánh nhìn.

Và nếu một chiều anh phải xa em
Bao thương nhớ ngày bên nhau tích chập
Anh tích phân mong em đừng biến mất
Anh tìm em phương trình sóng dần xa.

Anh lang thang qua những chùm điều hoà
Đạo hàm riêng biết rằng em ở đó
Em đợi, em chờ nghiệm ngoại lai đâu có
Toán tử tim liên tục nhớ khôn nguôi.

Ao ước bao ngày nay bỗng chia phôi
Bài toán đề ra nhiều khi không chỉnh
Và cuộc đời dẫu nhiều phương thức tính
Tim anh hằng tồn tại chỉ em thôi.

Toạ độ phẳng nào mà chẳng thành đôi
Em hãy tin và vui lên để sống
Anh toàn phương chỉ khi em đối xứng
Chuyển thế nào hai đứa vẫn tình chung.

Anh tìm em bằng đa thức đặc trưng
Anh kì vọng bóng hình em xuất hiện
Để anh viết về tình anh bất biến
Không gian xanh yêu dấu của chúng mình.

Để cuộc đời em mãi mãi trong anh
Như chiều nay anh bên em đồng nhất
Như nụ hôn đầu không bao giờ tắt
Như những chiều ta mãi ở bên nhau.

NGƯT. ĐÀO QUANG ĐIỀN
(Cựu sinh viên Khoa Toán ĐHSP Hà Nội, 1969 - 1973)
Xã Tân Tiến, huyện Văn Giang, tỉnh Hưng Yên.

VÀO TIỆM CẮT TÓC

A, B, C vào tiệm cắt tóc. Sau khi cắt tóc xong cho A, anh thợ cắt tóc nói: *"Cậu hãy xem trong ngăn kéo có bao nhiêu tiền thì cậu đặt vào đó bấy nhiêu tiền công rồi lấy đi 20.000 đồng tiền thừa".* B và C cũng trả tiền công như thế. Sau khi ba người ra khỏi tiệm cắt tóc thì trong ngăn kéo chẳng còn đồng nào cả. Hỏi trước khi A trả tiền công, trong ngăn kéo của anh thợ cắt tóc có bao nhiêu tiền?

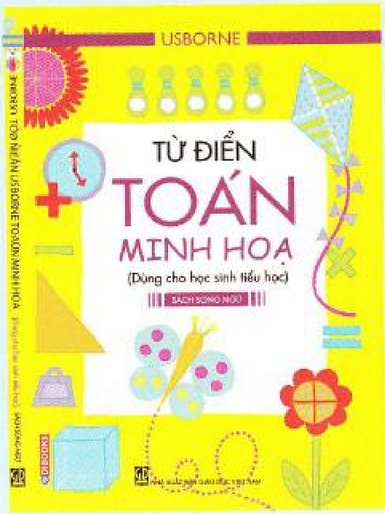
NGUYỄN VĂN HIẾU
(Số 80 đường Xuân 68, TP. Huế, Thừa Thiên Huế)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

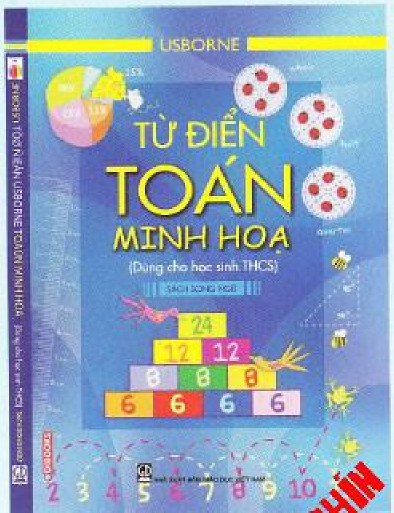
TRÂN TRỌNG GIỚI THIỆU

BỘ TỪ ĐIỂN USBORNE MINH HOẠ

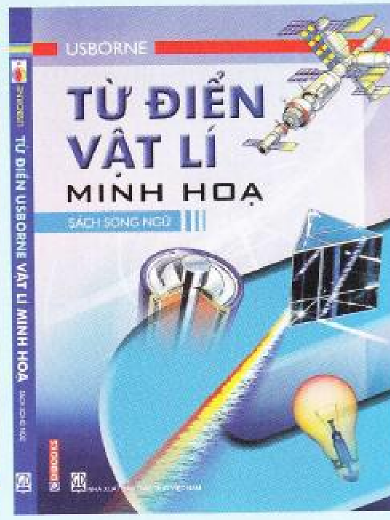
SÁCH SONG NGỮ ANH-VIỆT



Từ điển Toán minh họa
(dùng cho học sinh Tiểu học)
Nguyễn Chí Thành... (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ

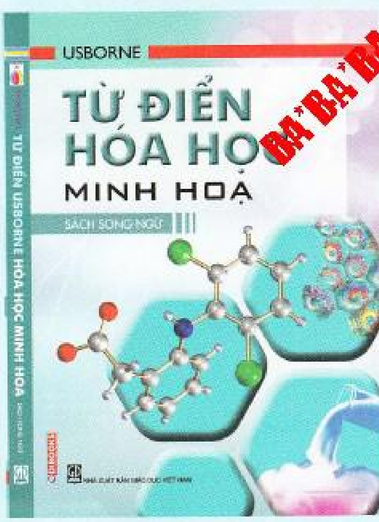


Từ điển Toán minh họa
(dùng cho học sinh THCS)
Nguyễn Chí Thành... (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ

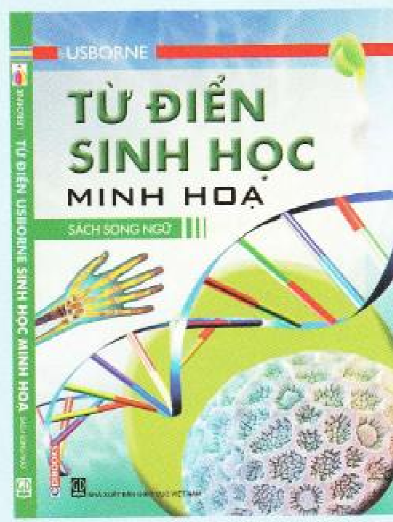


Từ điển Vật lí minh họa
Đặng Văn Sử (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ

BA*BA*BA= CHÍN + CHÍN + CHÍN



Từ điển Hóa học minh họa
Ngô Tuấn Cường... (dịch)
17x24 cm, 258 trang
160.000đ



Từ điển Sinh học minh họa
Nguyễn Việt Linh (dịch)
17x24 cm, 272 trang
160.000đ

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC HÀ NỘI
HANOI EDUCATION INVESTMENT AND DEVELOPMENT, JSC
Toà nhà Văn phòng HEID, ngõ 12, Láng Hạ - Thành Công - Ba Đình - Hà Nội
Tel: (024) 35123939 - *Phòng Kinh doanh* - Tel: (024) 35122636, Fax: (024) 35122504

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT8M7

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2017

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng