TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2015 Số 459

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 52

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ ĐỂ GIẢI MỘT DẠNG PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ ĐẶC BIỆT

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Tiên Du, Bắc Ninh)

Khi gặp một phương trình có dạng $u.\sqrt[m]{P}+v.\sqrt[n]{Q}=w$ (với u, v, w, P, Q là các biểu thức chứa ẩn) mà ta nhẩm được các hằng số e, f và các biểu thức P_0, Q_0 chứa ẩn thỏa mãn:

$$\begin{cases} u.P_0+v.Q_0=w \\ e.(P_0)^m+f.(Q_0)^n=e.P+f.Q \end{cases} \quad (*)$$

thì ta có thể giải PT đó như sau:

Đặt $\sqrt[m]{P}=a$; $\sqrt[n]{Q}=b$ suy ra $a^m=P$; $b^n=Q$.

Ta có hệ PT: $$\begin{cases} u.a+v.b=w \\ e.a^m+f.b^n=e.P+f.Q \end{cases} \quad (**)$$

Giải (**) để tìm $(a;\, b)$, từ đó việc tìm nghiệm của PT đã cho sẽ trở nên đơn giản hơn!

Lưu ý: Từ (*) ta thấy (**) luôn có nghiệm $(a;\, b)=(P_0;Q_0)$. Sau đây là các thí dụ:

Thí dụ 1. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2+4x-x^2}+\sqrt[3]{2x^2-6x+7}=x+1.$$

Phân tích. Ta có:

$$\begin{cases} (x-1)+2=x+1 \\ (x-1)^2+2^3=(2+4x-x^2)+(2x^2-6x+7) \end{cases}.$$

Như vậy $e=f=1$ và $(P_0;\, Q_0)=(x-1;\, 2)$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{2+4x-x^2}=a$; $\sqrt[3]{2x^2-6x+7}=b$.

Suy ra $a^2+b^3=x^2-2x+9$ (1). Từ PT đã cho ta có $a+b=x+1 \Rightarrow a=x+1-b$ (2). Thay vào (1) ta được:

$$(x+1-b)^2+b^3=x^2-2x+9$$
$$\Leftrightarrow x^2+1+b^2+2x-2b-2bx+b^3=x^2-2x+9$$
$$\Leftrightarrow b^3-8+b^2-2b-2bx+4x=0$$
$$\Leftrightarrow (b-2)(b^2+3b+4-2x)=0$$
$$\Leftrightarrow b=2 \text{ hoặc } b^2+3b+4=2x. \quad (3)$$

• Với $b^2+3b+4=2x$, từ (2) có $x=a+b-1$, thay vào (3) được $b^2+3b+4=2(a+b-1)$

$\Leftrightarrow b^2+b+6=2a$ (4). $\text{VT(4)}=\left(b+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{23}{4}>5$,

$\text{VP(4)}=2\sqrt{2+4x-x^2}=2\sqrt{6-(x-2)^2}\le 2\sqrt{6}<5.$

Suy ra (4) không xảy ra và do đó (3) không xảy ra.

• Với $b=2$, thay vào (2) được $a=x-1$.

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{2+4x-x^2}=x-1 \\ \sqrt[3]{2x^2-6x+7}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2+4x-x^2=(x-1)^2 \\ 2x^2-6x+7=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 2x^2-6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{11}}{2}.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}$.

Thí dụ 2. *Giải phương trình*:

$$\sqrt{7x^2+20x-86}+x.\sqrt{31-4x-x^2}=3x+2.$$

Phân tích. Ta nhẩm được $e=1$; $f=3$ và $(P_0;\, Q_0)=(2x+2;\, 1)$

vì $\begin{cases} 2x+2+x.1=3x+2 \\ (2x+2)^2+3.1^2=(7x^2+20x-86)+3.(31-4x-x^2) \end{cases}.$

Lời giải. Đặt $a=\sqrt{7x^2+20x-86}$, $b=\sqrt{31-4x-x^2}$.

Suy ra $a^2+3b^2=4x^2+8x+7$ (1).

Từ PT đã cho ta có: $a+xb=3x+2 \Rightarrow a=3x+2-bx$.

Thay vào (1) ta được:

$$(3x+2-bx)^2+3b^2=4x^2+8x+7$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+4+b^2x^2+12x-4bx-6bx^2+3b^2=4x^2+8x+7$$
$$\Leftrightarrow (x^2+3)b^2-(6x^2+4x)b+5x^2+4x-3=0$$
$$\Leftrightarrow (b-1)[(x^2+3)b-5x^2-4x+3]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{5x^2+4x-3}{x^2+3} \end{array}\right.$$

• Với $b=1$ thì $a=2x+2$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} \sqrt{7x^2+20x-86}=2x+2 \\ \sqrt{31-4x-x^2}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2\ge 0, 31-4x-x^2\ge 0 \\ 7x^2+20x-86=(2x+2)^2 \\ 31-4x-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le -2+\sqrt{35} \\ x^2+4x-30=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le -2+\sqrt{35} \\ x=-2\pm\sqrt{34} \end{cases} \Leftrightarrow x=-2+\sqrt{34}.$$

• Với $b=\dfrac{5x^2+4x-3}{x^2+3}$ thì ta có

$$\sqrt{31-4x-x^2}=\frac{5x^2+4x-3}{x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16-(x^2+4x-15)}=4+\frac{x^2+4x-15}{x^2+3} \quad (2).$$

• Nếu $x^2+4x-15>0$ thì VT(2) < 4 < VP(2).

• Nếu $x^2+4x-15<0$ thì VT(2) > 4 > VP(2).

• Nếu $x^2+4x-15=0$ thì VT(2) = 4 = VP(2), khi đó

$$\begin{cases} b=4 \\ a=3x+2-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{31-4x-x^2}=4 \\ \sqrt{7x^2+20x-86}=2-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\ge 0, 31-4x-x^2\ge 0 \\ 31-4x-x^2=16 \\ 7x^2+20x-86=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-\sqrt{35}\le x\le 2 \\ -x^2-4x+15=0 \\ 6(x^2+4x-15)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2-\sqrt{35}\le x\le 2 \\ x=-2\pm\sqrt{19} \end{cases} \Leftrightarrow x=-2-\sqrt{19}.$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm là $-2+\sqrt{34}$ và $x=-2-\sqrt{19}$.

Thí dụ 3. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} 20x^3-11x=4y^2 & (1) \\ \sqrt{1-2xy}+y.\sqrt[3]{x^2+y^2}=x & (2) \end{cases}$$

Phân tích. Với (2) ta nhẩm được $e=f=1$ và $(P_0;Q_0)=(x-y;1)$

vì $\begin{cases} x-y+y.1=x \\ (x-y)^2+1^3=(1-2xy)+(x^2+y^2) \end{cases}$

Lời giải. ĐK: $1-2xy\ge 0$

Đặt $\sqrt{1-2xy}=a;\ \sqrt[3]{x^2+y^2}=b.$

Suy ra $a^2+b^3=x^2+y^2-2xy+1$ (3)

Từ (2) ta có $a+yb=x\Rightarrow a=x-yb$ (4)

Thay (4) vào (3) ta được:

$$(x-by)^2+b^3=x^2+y^2-2xy+1$$

$$\Leftrightarrow b^3-1-2xy(b-1)+y^2(b^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)[b^2+b+1-2xy+y^2(b+1)]=0$$

$$\Leftrightarrow b=1 \text{ hoặc } b^2+b+1-2xy+y^2(b+1)=0 \quad (5)$$

• Ta có $\sqrt[3]{x^2+y^2}=b\ge 0$ nên $b^2+b\ge 0$; $b+1>0$.

Nếu $1-2xy=y^2(b+1)=0$ thì $\begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ (vô lý).

Vậy hai số không âm $1-2xy$ và $y^2(b+1)$ không đồng thời bằng 0 nên $1-2xy+y^2(b+1)>0$ do đó VT(5) > 0 suy ra (5) không xảy ra.

• Với $b=1$, thay vào (4) ta được $a=x-y$. Suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{1-2xy}=x-y \\ \sqrt[3]{x^2+y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\ge 0 \\ 1-2xy=(x-y)^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y \\ y^2=1-x^2 \end{cases}$ (*). Kết hợp (*) với (1) ta có:

$$\begin{cases} x\ge y \\ 20x^3-11x=4y^2 \\ y^2=1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y \\ 20x^3-11x=4(1-x^2) \\ y^2=1-x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y \\ 20x^3+4x^2-11x-4=0 \\ y^2=1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y \\ (2x+1)^2(5x-4)=0 \\ y^2=1-x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge y \\ x=\dfrac{-1}{2} \\ y^2=\dfrac{3}{4} \end{cases} \text{(I) hoặc } \begin{cases} x\ge y \\ x=\dfrac{4}{5} \\ y^2=\dfrac{9}{25} \end{cases} \text{(II).}$$

Nghiệm (x, y) của (I) và (II) cũng là nghiệm của hệ PT đã cho, là: $\left(\dfrac{-1}{2};\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ và $\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{-3}{5}\right)$.

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{12x^2+12x+9}{4}}=x+\sqrt[4]{\dfrac{4x^3-2}{3}}$.

b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}-6x^2}-x.\sqrt[3]{7x^2+2x+\dfrac{1}{2}}=1.$

c) $\sqrt{3x^2-5x+6}=x+(x-1)\sqrt{x^2+x-4}$.

d) $\sqrt{2x^2+48x-27}+x.\sqrt{2x^2-24x+67}=4x+6.$

2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^3+y^3=\dfrac{65}{8} \\ \sqrt{x^2+y^2+2}-y.\sqrt{2xy-1}=x \end{cases}$.

b) $\begin{cases} 3x^3+3y^3+x^3y^3=35 \\ \sqrt{x^2+y^2-4}=\sqrt{x^2-2xy+4}-y \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 8xy^2-2x=1 \\ \sqrt{3+4x-y^2}-x.\sqrt[3]{\dfrac{x^2+y^2+2}{3}}=2 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 Trường THPT chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội NĂM HỌC 2015 - 2016

(Đề thi đăng trên TH&TT số 458, tháng 8 năm 2015)

VÒNG I

Câu 1. 1) Ta có $P=\dfrac{(a^2+ab+b^2)(a-b)^2}{ab\left[a^3(a-b)-b^3(a-b)\right]}$

$=\dfrac{(a^2+ab+b^2)(a-b)^2}{ab(a-b)^2(a^2+ab+b^2)}=\dfrac{1}{ab}$.

2) Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$1=4a+b+\sqrt{ab}\ge 5\sqrt{ab}\Rightarrow P=\dfrac{1}{ab}\ge 25$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 25 khi và chỉ khi $a=\dfrac{1}{10}$, $b=\dfrac{2}{5}$.

Câu 2. 1) Đáp số: $x=\dfrac{8}{5}, y=\dfrac{19}{5}$.

2) • Hệ PT $\Leftrightarrow\begin{cases}(m^2+1)x=3m^2-3m+2\\ y=3m+1-mx\end{cases}$.

Do $m^2+1\ne 0$ với mọi m nên PT thứ nhất của hệ luôn có nghiệm. Suy ra hệ PT đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

• Giả sử $(x_0\,;y_0)$ là một nghiệm của hệ PT, ta có

$$\begin{cases}x_0-2=(y_0-4)m & (1)\\ y_0-1=(3-x_0)m & (2)\end{cases}$$

Nhân cả hai vế của (1) với $3-x_0$; của (2) với y_0-4 rồi trừ theo vế ta được

$(x_0-2)(3-x_0)-(y_0-1)(y_0-4)=0$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$.

Câu 3. PT $\Leftrightarrow (a+b)x^2-2(a^2+b^2)x+a^3+b^3=0$ (1).

Giả sử phản chứng $|a|\ne|b|$, suy ra $a\ne b$, $a\ne -b$.

$\Rightarrow$(1) là PT bậc hai ẩn x có

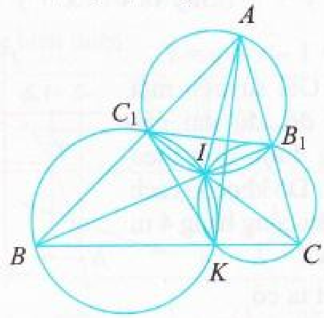
$\Delta'=(a^2+b^2)^2-(a+b)(a^3+b^3)=-ab(a-b)^2\ne 0$.

$\Rightarrow$(1) không thể có nghiệm duy nhất (trái với giả thiết). Do đó $|a|=|b|$.

Câu 4. 1) Ta có $\widehat{C_1IB_1}=\widehat{BIC}=180^\circ-\left(\dfrac{\widehat{B}}{2}+\dfrac{\widehat{C}}{2}\right)$

$=90^\circ+\dfrac{\widehat{A}}{2}=120^\circ$. Suy ra $\widehat{C_1IB_1}+\widehat{C_1AB_1}=180^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.



2) Vì các tứ giác $BKIC_1$ và AB_1IC_1 nội tiếp nên ta có $\widehat{IKC}=\widehat{IC_1B}=\widehat{IB_1A}$.

Suy ra tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.

3) Vì $\widehat{BKC_1}=\widehat{BIC_1}=\widehat{BAC}$ nên tứ giác $ACKC_1$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{KAC}=\widehat{KC_1I}=\widehat{KBI}=\dfrac{\widehat{B}}{2}$.

Mặt khác, $\widehat{AB_1C_1}=\widehat{B_1C_1C}+\widehat{B_1CC_1}$

$=\widehat{B_1AI}+\widehat{B_1CI}=\dfrac{\widehat{A}}{2}+\dfrac{\widehat{C}}{2}$.

Do đó $\widehat{KAC}+\widehat{AB_1C_1}=90^\circ$, nên $AK\perp B_1C_1$.

Câu 5. Ta có

$a^2+b+\dfrac{3}{4}=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+a+b+\dfrac{1}{2}\ge a+b+\dfrac{1}{2}>0.$

Tương tự $b^2+a+\dfrac{3}{4}\ge a+b+\dfrac{1}{2}>0$. Suy ra

$\left(a^2+b+\dfrac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\dfrac{3}{4}\right)\ge\left(a+b+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$=a^2+b^2+2ab+a+b+\dfrac{1}{4}$

$\ge 4ab+a+b+\dfrac{1}{4}=\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)\left(2b+\dfrac{1}{2}\right)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a=b=\dfrac{1}{2}$.

VÒNG II

Câu 1. 1) Đáp số: $S = 4$.

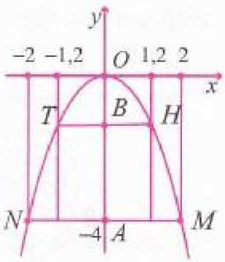
2) Từ giả thiết suy ra $2x + 2y - 1 = 3xy$, do đó $x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = (x+y-1)^2$.

Vậy $P = x + y + |x + y - 1|$.

Từ giả thiết ta lại có $\dfrac{x}{1-x} < 1 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$.

Tương tự $y < \dfrac{1}{2}$. Suy ra $0 < x + y < 1$, ta có $P = x + y + 1 - x - y = 1$.

Câu 2. 1) Giả sử trên mặt phẳng tọa độ, độ dài các đoạn thẳng được tính theo đơn vị mét. Do khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 4 m nên $MA = NA = 2$.



Từ giả thiết ta có

$OM = ON = 2\sqrt{5}$, do đó theo định lí Pythagore ta có $OA = 4$. Vậy $M(2; -4)$, $N(-2; -4)$.

Mặt khác, do M, N thuộc parabol nên $-4 = a.2^2$ $\Rightarrow a = -1$ và (P): $y = -x^2$.

2) Để đáp ứng được chiều cao, trước hết xe tải phải chọn phương án đi vào chính giữa cổng.

Trên parabol (P) xét hai điểm $H\left(\dfrac{6}{5}; -\dfrac{36}{25}\right)$ và $T\left(-\dfrac{6}{5}; -\dfrac{36}{25}\right)$ đối xứng nhau qua Oy và $HT = 2,4$ (ứng với chiều rộng của xe tải).

Gọi $B = HT \cap Oy$. Khi đó $AB = \dfrac{64}{25} > 2,5$.

Do đó xe tải có thể đi qua cổng.

Câu 3. Từ giả thiết suy ra $(b - a + 1)^2 = 4b$, suy ra $b - a + 1 \vdots 2$, do đó $b = \left(\dfrac{b-a+1}{2}\right)^2$ là số chính phương. Tương tự $a = \left(\dfrac{a-b+1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{b-a-1}{2}\right)^2$ cũng là số chính phương.

Mà $\dfrac{b-a+1}{2} - \dfrac{b-a-1}{2} = 1$ nên a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Câu 4. Vì $BE \perp CA$, $CF \perp AB$ nên $BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{XFB} = \widehat{ACB} = \widehat{XBF} \Rightarrow \Delta XFB$ cân tại X.

Mà ΔMFB cân tại M, suy ra $MX \perp BF$.

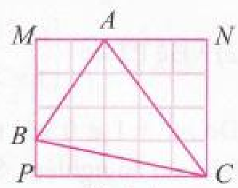
2) Dễ thấy $MX \perp AB$, $HF \perp AB$ nên $MX \,//\, HF$; $MS \perp BC$, $HD \perp BC$ nên $MS \,//\, HD$.

Mặt khác, do $CAFD$ là tứ giác nội tiếp và SB tiếp xúc (O) tại B nên $\widehat{SBD} = \widehat{BAC} = \widehat{BDF}$, suy ra $SX \,//\, FD$. Do đó $\Delta MXS \backsim \Delta HFD$ (có các cặp cạnh tương ứng song song).

3) Ta có $\widehat{OAE} = \dfrac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} = 90^\circ - \widehat{ABC}$ $= 90^\circ - \widehat{AEF}$, suy ra $OA \perp EF$. Dễ dàng chứng minh $\Delta AEF \backsim \Delta ABC$; $\Delta AFY \backsim \Delta ACD$, suy ra $\dfrac{FY}{CD} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC} \Rightarrow \dfrac{EF}{FY} = \dfrac{BC}{CD}$.

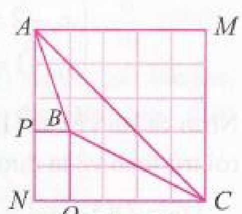
Câu 5. Ta kẻ mặt phẳng tọa độ Oxy thành bảng caro bởi các đường thẳng song song và vuông góc với trục hoành (gọi tắt là đường ngang và đường dọc) để giao của các đường này tạo nên tất cả các điểm nguyên của mặt phẳng.

• Nếu trong ba đỉnh của tam giác ABC, có hai đỉnh, chẳng hạn A và B cùng nằm trên một đường ngang hoặc một đường dọc, thì rõ ràng độ dài đoạn thẳng AB và chiều cao kẻ từ C xuống AB của tam giác ABC là những số nguyên. Do đó hai lần diện tích tam giác ABC là một số nguyên.



Hình 1

• Nếu các điểm A, B, C nằm trên các đường ngang và các đường dọc phân biệt thì không mất tính tổng quát, giả sử đường ngang chứa B nằm giữa các đường ngang chứa A và C. Có hai khả năng xảy ra:



Hình 2

– *Một là*: (h.1) Đường dọc chứa B không bị kẹp giữa hai đường dọc chứa A, chứa C.

Khi đó $2S_{ABC} = 2S_{PMNC} - 2S_{MAB} - 2S_{NAC} - 2S_{PBC}$ là một số nguyên.

– *Hai là*: (h.2) Đường dọc chứa B nằm giữa hai đường dọc chứa A và chứa C. Khi đó

$2S_{ABC} = 2S_{AMCN} - 2S_{NPBQ} - 2S_{PAB} - 2S_{MAC} - 2S_{QBC}$ là một số nguyên.

NGUYỄN THANH HỒNG

(*GV trường THPT chuyên ĐHSP Hà Nội*) ***giới thiệu***

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2015 - 2016

VÒNG I (120 phút)

Câu 1 (2 *điểm*).

1. Cho phương trình:

$x^2-2(m-2)x+m^2-3m+3=0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m=1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho: $3x_1x_2-x_1^2-x_2^2-5=0$.

2. Cho biểu thức:

$$A=\left(\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{2\sqrt{x}+1}-\frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2}\right):\frac{2\sqrt{x}+3}{3x-6\sqrt{x}}$$

$(x>0;\ x\neq 4)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A=2\sqrt{x}-1$.

Câu 2 (2 *điểm*). Cho parabol (P): $y=\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng (D): $y=\frac{1}{2}x+m^2$ (m là tham số).

a) Cho $m=\sqrt{2}$. Vẽ (P) và (D) trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy và tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng phép toán.

b) Tìm m để (P) và (D) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ sao cho

$$y_1-y_2+x_1^2+\frac{3}{2}x_2^2=9.$$

Câu 3 (2 *điểm*).

a) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=-6 \\ \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}+\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}=2 \end{cases}.$$

b) Một xe tải đi từ A đến B với vận tốc 40 km/h. Sau khi xe tải xuất phát một thời gian thì một xe khách cũng xuất phát từ A với vận tốc 50 km/h và nếu không có gì thay đổi thì sẽ đuổi kịp xe tải tại B. Nhưng sau khi đi được một nửa quãng đường AB, xe khách tăng vận tốc lên 60 km/h nên đến B sớm hơn xe tải 16 phút. Tính quãng đường AB.

Câu 4 (4 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC ($AB<AC$). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D. CE cắt BD tại H và AH cắt BC tại K.

a) Chứng minh tứ giác $BEHK$ nội tiếp và KA là tia phân giác của góc $\widehat{EKD}$.

b) Gọi AI, AJ là các tiếp tuyến của đường tròn (O) (I, J là các tiếp điểm và hai điểm D, J nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AK). Chứng minh rằng $\widehat{IKE}=\widehat{DKJ}$.

c) Chứng minh ba điểm J, H, I thẳng hàng.

d) Đường thẳng qua K và song song với ED cắt AB và CH lần lượt tại Q và S. Chứng minh rằng $KQ=KS$.

VÒNG II (150 phút)

Câu 1 (2 *điểm*). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(3x+1)(4x+1)(6x+1)(12x+1)=2$.

b) $\begin{cases} x\left(x+\dfrac{4}{y}\right)+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ x\left(2+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{2}{y}=3 \end{cases}$.

Câu 2 (2 *điểm*).

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$3x^2-2y^2-5xy+x-2y-7=0.$$

b) Chứng minh rằng $A=2012^{4n}+2013^{4n}+2014^{4n}+2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n.

Câu 3 (1 *điểm*). Cho x và y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x+y\leq 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\left(x^2+\dfrac{1}{4y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)$.

Câu 4 (4 *điểm*).

a) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt BC tại E. Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt CD tại F. Chứng minh O, E, F thẳng hàng.

b) Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, M là trung điểm của AB. Đường thẳng qua A vuông góc với MD cắt đường thẳng qua B vuông góc với MC tại N. Chứng minh $MN\perp CD$.

Câu 5 (1 *điểm*). Sau khi điểm danh xong, lớp trưởng tuyên bố: "*Số các bạn có mặt là một số có hai chữ số, số này bé hơn 2 lần tích hai chữ số của nó 9 đơn vị*". Hỏi có bao nhiêu bạn có mặt?

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(*TP. Hồ Chí Minh*) ***Sưu tầm***

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

NÉT ĐẸP HÌNH HỌC TIỀM ẨN TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

LÊ HỒ QUÝ
(GV THPT Lê Lợi, Kon Tum)

Trong Đề thi minh họa – Kỳ thi THPT Quốc gia của Bộ GD&ĐT có một câu tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức khá hay và khó mà cách giải đề xuất là sử dụng phương pháp tọa độ. Bài viết này được xây dựng theo lối tiếp cận trực diện với từng dạng toán, bài toán cụ thể với phân tích định hướng giải và lời giải tường minh. Hy vọng rằng sẽ giúp các bạn thí sinh sẽ tự tin hơn trong Kỳ thi THPT Quốc gia.

I. GIẢI PT, BPT VÀ HỆ PT

★**Thí dụ 1.** *Giải phương trình:*

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Phân tích. Ý tưởng khai thác yếu tố hình học bộc lộ từ vế trái PT được cho dưới dạng: $x.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{3-x}$, từ đó ta liên tưởng đến biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*.

Lời giải. ĐK: $-1\le x\le 3$.

Đặt $\begin{cases}\vec{u}=(x;1)\\ \vec{v}=(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x})\end{cases}$.

PT đã cho có dạng $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\Leftrightarrow \vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, hay

$$\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}>0\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<3\\ x^2(3-x)=x+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<3\\ (x-1)(x^2-2x-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<3\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm là $x=1;\ x=1+\sqrt{2}$. ❑

★**Thí dụ 2.** *Giải phương trình:*

$$x+\sqrt{2-x^2}+x\sqrt{2-x^2}=3.$$

Phân tích. Ý tưởng khai thác yếu tố hình học bộc lộ từ vế trái PT được cho dưới dạng: $1.x+\sqrt{2-x^2}.1+x.\sqrt{2-x^2}$, từ đó ta nhớ ngay đến biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*.

Lời giải. ĐK: $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

Đặt $\begin{cases}\vec{u}=(x;1;\sqrt{2-x^2})\\ \vec{v}=(1;\sqrt{2-x^2};x)\end{cases}\Rightarrow|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{3}$.

PT đã cho tương đương với

$$2(x+\sqrt{2-x^2}+x\sqrt{2-x^2})=2.3$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}^2+\vec{v}^2\Leftrightarrow(\vec{u}-\vec{v})^2=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ 1=\sqrt{2-x^2}\\ \sqrt{2-x^2}=x\end{cases}\Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn ĐK)}.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm là $x=1$. ❑

★**Thí dụ 3.** *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x-1}+x-3\ge\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}\qquad(1)$$

Phân tích. Ý tưởng khai thác yếu tố hình học ẩn chứa trong bài toán ở chỗ: vế trái BPT được cho dưới dạng: $\sqrt{x-1}.1+(x-3).1$, từ đó giúp ta nhớ đến biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*.

Lời giải. ĐK: $x\ge 1$.

Đặt $\begin{cases}\vec{u}=(x-3;\sqrt{x-1})\\ \vec{v}=(1;1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\vec{u}|=\sqrt{(x-3)^2+x-1}\\ |\vec{v}|=\sqrt{2}.\end{cases}$

Theo BĐT $\vec{u}.\vec{v}\le|\vec{u}||\vec{v}|$, ta có

$$\sqrt{x-1}+x-3\le\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2), suy ra BPT (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sqrt{x-1}+x-3=\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}\Leftrightarrow\vec{u}\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, hay $\vec{u}=k\vec{v}\ (k>0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=k \\ x-3=k \\ k>0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=x-3>0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Vậy BPT đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$. ❑

★Thí dụ 4. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}\le 12 \qquad (1)$$

Phân tích. Để ý rằng vế trái của BPT (1) là: $1.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{2x-3}+1.\sqrt{50-3x}$, nên ta nghĩ ngay tới biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Lời giải. ĐK: $\frac{3}{2}\le x\le \frac{50}{3}$.

Đặt $\begin{cases} \vec{u}=(1;1;1) \\ \vec{v}=(\sqrt{x+1};\sqrt{2x-3};\sqrt{50-3x}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|=\sqrt{3} \\ |\vec{v}|=4\sqrt{3}. \end{cases}$

PT (1) $\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}\le |\vec{u}||\vec{v}|$ (2)

Rõ ràng (2) luôn đúng, tức là (1) luôn đúng với mọi $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{50}{3}\right]$.

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $\left[\frac{3}{2};\frac{50}{3}\right]$. ❑

★Thí dụ 5 (Khối A – 2014). *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 & (1) \\ x^3-8x-1=2\sqrt{y-2} & (2) \end{cases}$

Phân tích. Ý tưởng khai thác yếu tố hình học biểu lộ từ PT đầu của hệ. Vế trái của PT thứ nhất được cho dưới dạng: $x.\sqrt{12-y}+\sqrt{12-x^2}.\sqrt{y}$, từ đó ta liên tưởng đến biểu thức tọa độ của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

Lời giải. ĐK: $-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3};\ 2\le y\le 12$.

Đặt $\begin{cases} \vec{u}=(x;\sqrt{12-x^2}) \\ \vec{v}=(\sqrt{12-y};\sqrt{y}) \end{cases} \Rightarrow |\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{12}.$

$$\text{PT(1)} \Leftrightarrow 2[x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}]=2.12$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}^2+\vec{v}^2 \Leftrightarrow (\vec{u}-\vec{v})^2=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y=12-x^2. \end{cases}$$

Thay $y=12-x^2$ vào PT (2), ta được

$$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3-8x-3+2(1-\sqrt{10-x^2})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=3\left(\text{do } x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}>0,\ \forall x\ge 0\right).$$

Suy ra $y=12-x^2=3$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y)=(3;3)$. ❑

★Thí dụ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2+4z^2+17=8x+4y+16z \\ 3x-4y+12z=12 \end{cases}.$$

Phân tích.

• Với PT thứ nhất của hệ, ta liên tưởng đến PT một mặt cầu (S) trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

• Với PT thứ hai của hệ, ta nghĩ ngay đến PT một mặt phẳng (P) trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

• Việc giải hệ PT được quy về bài toán tương đương: Xét sự tương giao của (S) và (P).

• Do khoảng cách từ tâm I của (S) đến (P) bằng bán kính của (S) nên (P) tiếp xúc với (S). Do đó, hệ PT đã cho có nghiệm duy nhất.

• Công việc còn lại là tìm tọa độ tiếp điểm của (S) và (P).

Lời giải. Hệ PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=1 \\ 3x-4y+12z-12=0 \end{cases}.$$

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, ta có

• PT thứ nhất của hệ xác định mặt cầu (S) có tâm $I\left(1;\frac{1}{2};2\right)$, bán kính $R=1$.

• PT thứ hai của hệ xác định một mặt phẳng , kí hiệu là (P).

Ta có $d(I,(P))=\frac{|3-2+24-12|}{\sqrt{9+16+144}}=1=R.$

Suy ra mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Do đó hệ PT đã cho có nghiệm duy nhất.

Nghiệm của hệ PT là tọa độ của tiếp điểm A giữa mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Gọi Δ là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với (P) thì Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = \dfrac{1}{2} - 4t \\ z = 2+12t \end{cases}$.

Ta có $A \in \Delta$ nên $A\left(1+3t; \dfrac{1}{2}-4t; 2+12t\right), A \in (P)$

$\Leftrightarrow 3(1+3t) - 4\left(\dfrac{1}{2} - 4t\right) + 12(2+12t) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{13}$. Suy ra $A\left(\dfrac{10}{13}; \dfrac{21}{26}; \dfrac{14}{13}\right)$.

Vậy hệ PT đã cho có nghiệm duy nhất

$$(x;y;z) = \left(\frac{10}{13}; \frac{21}{26}; \frac{14}{13}\right). \square$$

II. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC.

★Thí dụ 6 (ĐH Khối A - 2003). *Cho x,y,z là ba số dương và $x+y+z \le 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82}.$$

Phân tích. Bằng sự "va chạm" và khoanh vùng các dạng toán BĐT, ta phát hiện các biểu thức dạng $\alpha^2 + \beta^2$ ẩn chứa dưới các dấu căn bậc hai, với dấu hiệu này yếu tố hình học dần lộ diện. Điều cần quan tâm là việc lựa chọn tọa độ các vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ và $\vec{w}$ thích hợp, khi đó với việc sử dụng BĐT Cauchy cho từng bộ ba số dương $(x;y;z)$, $\left(\dfrac{1}{x}; \dfrac{1}{y}; \dfrac{1}{z}\right)$ thì giả thiết $x+y+z \le 1$ mới có tác dụng.

Lời giải. Gọi P là vế trái của BĐT.

Đặt $\vec{u} = \left(x; \dfrac{1}{x}\right)$, $\vec{v} = \left(y; \dfrac{1}{y}\right)$, $\vec{w} = \left(z; \dfrac{1}{z}\right)$ thì

$P = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \ge |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

hay $P = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \dfrac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \dfrac{1}{z^2}}$

$$\ge \sqrt{(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có $x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz}$;

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}}$.

Do đó $P \ge \sqrt{9t + \dfrac{9}{t}}$, với $t = \left(\sqrt[3]{xyz}\right)^2$, trong đó

$0 < t \le \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^2 \le \dfrac{1}{9}$.

Xét hàm số $g(t) = 9t + \dfrac{9}{t}$ trên $\left(0; \dfrac{1}{9}\right]$, ta có

$g'(t) = 9 - \dfrac{9}{t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \dfrac{1}{9}\right] \Rightarrow g(t)$ nghịch biến trên $\left(0; \dfrac{1}{9}\right]$. Vậy với $t \in \left(0; \dfrac{1}{9}\right]$ thì

$$g(t) \ge g\left(\frac{1}{9}\right) = 82, \text{ hay } P \ge \sqrt{g(t)} \ge \sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. $\square$

★Thí dụ 7. *Cho hai số thực x và y không âm thoả mãn điều kiện x + y = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2}$.*

Phân tích. Nhận thấy biểu thức đã cho là tổng của hai biểu thức. Bằng phép biến đổi đơn giản, ta viết được các biểu thức này dưới dạng $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, điều này giúp ta liên tưởng đến độ dài của một vectơ trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Lời giải. Ta có

$$P = \sqrt{3^2 + (3x)^2 + (3x)^2} + \sqrt{12^2 + 4^2 + (6y)^2}.$$

Đặt $\vec{u} = (3; 3x; 3x)$, $\vec{v} = (12; 4; 6y)$. Ta có

$|\vec{u}| = \sqrt{9 + 9x^2 + 9x^2} = 3\sqrt{1+2x^2}$;

$|\vec{v}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 36y^2} = 2\sqrt{40 + 9y^2}$;

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{15^2 + (3x+4)^2 + (3x+6y)^2}$

$= \sqrt{15^2 + 9x^2 + 24x + 16 + (6-3x)^2}$ (do $x+y=1$)

$= \sqrt{18x^2 - 12x + 277}$

$= \sqrt{2(3x-1)^2 + 275} \ge 5\sqrt{11}$.

Mặt khác $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+2x^2} + 2\sqrt{40+9y^2}$

$$\ge \sqrt{2(3x-1)^2 + 275} \ge 5\sqrt{11}.$$

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Bài 1 (*2 điểm*). Cho hàm số

$$y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m \ (C).$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.

b) Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Bài 2 (*1 điểm*).

a) Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{2}$.

Tính $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện:

$$2(z-1) = 3\overline{z} + (i-1)(i+2).$$

Tìm $|2\overline{z} - z|$.

Bài 3 (*0.5 điểm*). Giải phương trình:

$$\log_{\sqrt[3]{2}}(x-2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \log_2(7-2x).$$

Bài 4 (*1 điểm*). Giải bất phương trình:

$$32x^4 - 16x^2 - 9x - 9\sqrt{2x-1} + 2 \geq 0.$$

Bài 5 (*1 điểm*). Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3 - 2\cos 3x)\sin x dx.$$

Bài 6 (*1 điểm*). Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^0$, $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC).

Bài 7 (*1 điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I(1;4)$, đỉnh A nằm trên đường thẳng có phương trình $2x + y - 1 = 0$, đỉnh C nằm trên đường thẳng có phương trình $x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D của hình vuông đã cho.

Bài 8 (*1 điểm*). Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(-1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 4x + y - z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) và tìm tọa độ tiếp điểm.

Bài 9 (*0.5 điểm*). Lập số tự nhiên có 4 chữ số đôi một phân biệt từ các chữ số 0, 1, 4, 6. Tính xác suất để số lập được là số tự nhiên không chia hết cho 4.

Bài 10 (*1 điểm*). Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x^{18}} + \frac{1}{y^{18}} + \frac{1}{z^{18}} \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = \frac{x^{2015} + y^{2015}}{x^{1997} + y^{1997}} + \frac{y^{2015} + z^{2015}}{y^{1997} + z^{1997}} + \frac{z^{2015} + x^{2015}}{z^{1997} + x^{1997}}$.

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, Bắc Ninh)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng. Điều kiện cần để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng là $\frac{3}{12} = \frac{3x}{4} = \frac{3x}{6y} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ và $y = \frac{2}{3}$. Kiểm tra trực tiếp ta thấy $P = 5\sqrt{11}$ khi $x = \frac{1}{3}$ và $y = \frac{2}{3}$.

Vậy $\min P = 5\sqrt{11}$. ❒

Nhận xét. Hình thành được tọa độ các vectơ là chìa khóa của cách giải. Việc tách hai số hạng của tổng chứa trong các dấu căn thành ba số hạng giúp việc xác định tọa độ các vectơ được dễ dàng.

◆ **Bình luận.** Thông qua một số thí dụ ở trên, ta thấy rằng với mỗi bài toán có thể có nhiều cách tiếp cận khác nhau, chẳng hạn như: khai thác tính chất hình học, phương pháp hàm số, vận dụng BĐT trung gian, ... Tuy nhiên, với các bài toán này, cách giải *khai thác tính chất hình học* cho những lời giải gọn gàng và trong sáng.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x} = x^2 - 6x - 11$;

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{29}$.

2. Giải các bất phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$;

b) $(3-x)\sqrt{x-1} \geq \sqrt{40 - 34x + 10x^2 - x^3}$.

3. Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+4} - 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + yz = 0 \\ x^2 + x + y + 2yz = 0 \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz - 2x - 4z = 2. \end{cases}$

4. Cho x, y, z là ba số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+y^2}} + \frac{|y-z|}{\sqrt{1+y^2}.\sqrt{1+z^2}} > \frac{|x-z|}{\sqrt{1+x^2}.\sqrt{1+z^2}}.$$

5. Xét số thực x. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3}+1)x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3}-1)x + 1}.$$

MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

TRẦN QUANG HÙNG
(*GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội*)

Tóm tắt. Bài viết này đưa ra tổng quát cho một bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ với phép chứng minh thông qua *tính chất chùm điều hòa* và ứng dụng *bổ đề E.R.I.Q*, thêm vào đó là một vài ứng dụng của bài tổng quát.

Trên Tạp chí TH&TT số 402 tháng 12 năm 2010 trong mục *Đề ra kỳ này* có bài toán hay như sau của TS. *Nguyễn Minh Hà*.

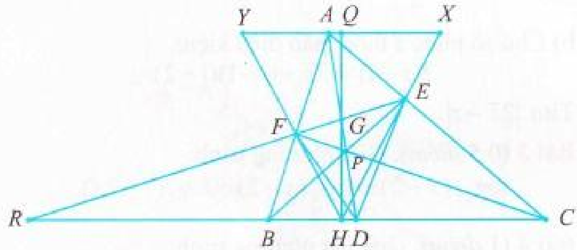
Bài toán 1. (Bài T9/402, TH&TT tháng 12 năm 2010). *Cho tam giác nhọn ABC đường cao AD. M là một điểm thuộc đoạn AD. Các đường thẳng BM, CM theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F; DE, EF theo thứ tự cắt các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của EF, KL đi qua điểm A.*

Lời giải bài toán trên đã đăng trên Tạp chí TH&TT số 406 tháng 4 năm 2011. Sau một vài tìm tòi nhỏ, chúng tôi nhận thấy rằng bài toán trên là trường hợp riêng của bài toán sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F; PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G trên BC; HE, HF lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HAC tại M, N khác H; HG cắt đường thẳng qua A song song với BC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm MN, EF đi qua điểm Q.*

Để giải bài toán ta sử dụng hai bổ đề sau.

Bổ đề 2.1. *Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F; PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G trên BC; HE, HF, HG lần lượt cắt đường thẳng qua A song song BC tại X, Y, Q thì Q là trung điểm XY và $HX = HY$.*

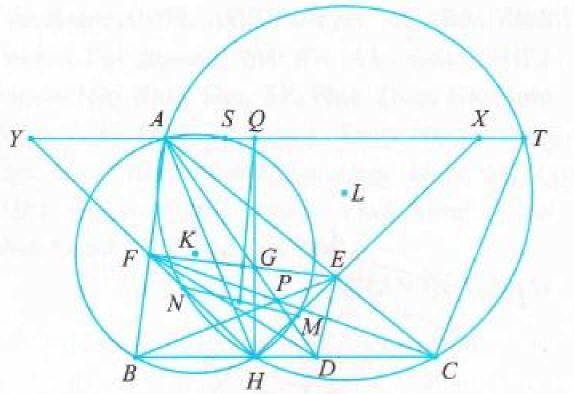


Hình 1

Chứng minh. (h.1) Giả sử $EF \cap BC = R$ ta có hàng điểm điều hòa cơ bản $(BC, DR) = -1$ chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng EF ta có $(EF, GR) = -1$ nên chùm $H(EF, GR) = -1$, lại có $HG \perp HR$, nên từ tính chất chùm phân giác suy ra HG là phân giác của $\widehat{EHF}$. Vậy trong tam giác HXY có $HG \equiv HQ$ là đường cao và phân giác, do đó tam giác HXY cân tại H, suy ra Q là trung điểm XY và $HX = HY$.

Bổ đề sau được đặt tên là E.R.I.Q bởi kiến trúc sư Hy Lạp *Kostas Vittas* là viết tắt các chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh. "*Equal Ratio In Quadrilateral*" tạm dịch là tỷ số bằng nhau trong tứ giác.

Bổ đề 2.2. *Cho tứ giác $ABCD$, các điểm M, N lần lượt thuộc AB, CD sao cho $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{ND}}{\overline{NC}}$ thì các điểm chia các đoạn thẳng AD, BC và MN theo cùng một tỷ số sẽ thẳng hàng.*



Hình 2

Bổ đề là kết quả cơ bản, bạn đọc có thể tham khảo nhiều cách chứng minh trong nhiều tài liệu khác nhau. Trở lại bài toán 2.

Lời giải. (h.2) Giả sử AQ cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HAC lần lượt tại S,T. HE, HF lần lượt cắt AQ tại X,Y. Ta thấy A,S,H,M thuộc đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AHB và A,T,H,N thuộc đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác AHC nên

$\overline{XS}.\overline{XA} = \overline{XM}.\overline{XH}$ và $\overline{YT}.\overline{YA} = \overline{YN}.\overline{YH}$, suy ra

$$\frac{\overline{XS}.\overline{XA}}{\overline{YT}.\overline{YA}} = \frac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}} \quad (1)$$

Vì tứ giác $ATCH$ là hình thang cân và có HQ là đường cao nên $TA - CH = 2QA$. Từ đó:

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XH}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XA}+\overline{CH}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{XA}+\overline{TA}-2\overline{QA}}$$

$$= \frac{\overline{XA}}{\overline{QX}+\overline{QT}} = \frac{\overline{XA}}{-\overline{QY}+\overline{QT}} = \frac{\overline{XA}}{\overline{YT}} \quad (2)$$

Tương tự $\dfrac{\overline{YF}}{\overline{YH}} = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{XS}}$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XH}}.\dfrac{\overline{YH}}{\overline{YF}} = \dfrac{\overline{XA}.\overline{XS}}{\overline{YT}.\overline{YA}}$ (4)

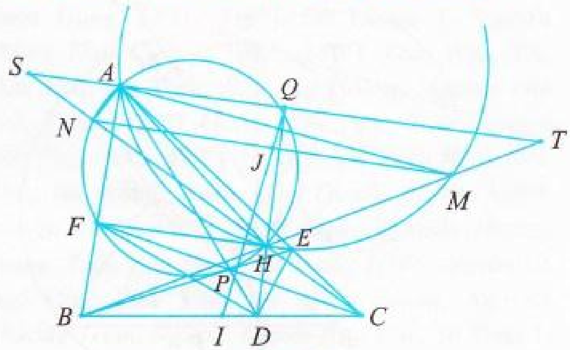
Từ (1), (4) suy ra $\dfrac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}} = \dfrac{\overline{XE}.\overline{YH}}{\overline{XH}.\overline{YF}}$, hay

$\dfrac{\overline{XM}}{\overline{XE}} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}.\dfrac{YH^2}{XH^2} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}$. Chú ý rằng $YH = XH$ theo bổ đề 2.1.

Từ đó, cũng theo bổ đề 2.1 và bổ đề 2.2 thì trung điểm Q của XY và các trung điểm của MN, EF thẳng hàng (đpcm).

Nhận xét. Khi AD là đường cao của tam giác ABC ta thu được bài toán 1. Bài toán phát biểu với P là điểm bất kỳ sẽ có giá trị ứng dụng lớn trong nhiều trường hợp đặc biệt khác nhau. Sau đây chúng tôi xin dẫn ra một vài ví dụ.

✪Bài toán 3. *Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE, AHF tại M, N; Q là hình chiếu của A lên HD. Chứng minh rằng đường nối trung điểm của BC và MN đi qua điểm Q.*



Hình 3

Lời giải. (h.3) Gọi T, S lần lượt là giao điểm của HM, HN với AQ. Áp dụng bài toán 2 vào trường hợp P bất kỳ của tam giác AEF với EB, FC và AD đồng quy tại P ta thu được điều phải chứng minh. Hoặc có thể chứng minh trực tiếp theo cách khác như sau:

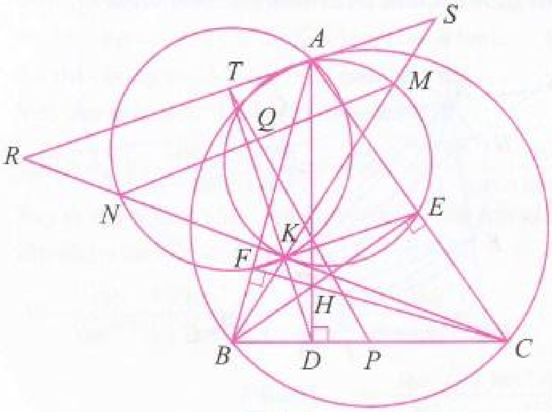
Ta thấy theo tính chất chùm điều hòa thì HQ là phân giác của $\widehat{SHT}$ mà $HQ \perp ST$ suy ra tam giác HST cân tại H. Do đó Q là trung điểm ST và $\widehat{HST} = \widehat{HTS}$. Vì $EF \parallel ST$ nên $\widehat{ANS} = 180^\circ - \widehat{ANH}$ $= 180^\circ - \widehat{AFH} = \widehat{BAT}$. Do đó $\Delta SAN \backsim \Delta TBA$

$\Rightarrow \dfrac{SA}{TB} = \dfrac{SN}{TA}$, suy ra $\overline{SA}.\overline{TA} = \overline{SN}.\overline{TB}$.

Chứng minh tương tự có $\overline{SA}.\overline{TA}=\overline{TM}.\overline{SC}$ suy ra $\overline{TM}.\overline{SC}=\overline{SN}.\overline{TB}$ hay $\dfrac{\overline{SN}}{\overline{SC}}=\dfrac{\overline{TM}}{\overline{TB}}$. Áp dụng *bổ đề E.R.I.Q* ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Việc áp dụng bài toán 2, bài toán 3 và mô hình giải của bài toán 2, bài toán 3 vào các tam giác khác nhau tạo ra nhiều bài toán mới hoặc bổ đề mới khá thú vị. Ta đến một ví dụ khác áp dụng bài toán 3 như sau:

✪Bài toán 4. *Cho tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF. K là hình chiếu của D lên EF; KB, KC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAE, KAF tại M, N khác K. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm MN, BC. Chứng minh rằng PQ và DK cắt nhau trên tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

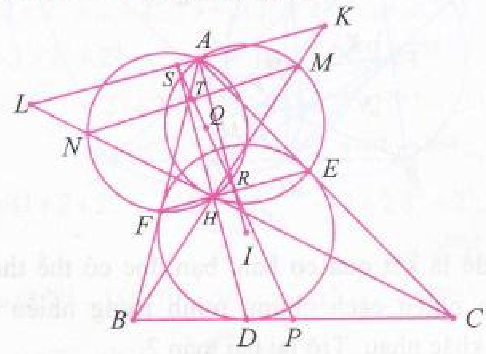


Hình 4

Lời giải. (h.4) Gọi S, R lần lượt là giao điểm KM, KN với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh tương tự bài toán 3 suy ra DK là phân giác $\widehat{BKC}$. Lại có kết quả quen thuộc là $EF // RS$, nên $DK \perp RS$ mà DK lại là phân giác $\widehat{RKS}$ suy ra tam giác KRS cân tại K. Gọi T là giao điểm DK và RS thì T là trung điểm RS. Đến đây ta thấy ngay mô hình của bài toán số 3 là trung điểm của các đoạn thẳng MN, BC và điểm T thẳng hàng.

Sau đây là một ứng dụng đẹp khác

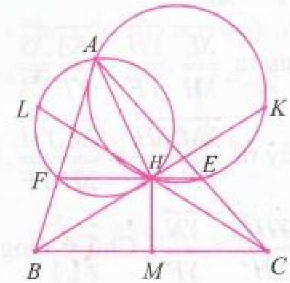
✪Bài toán 5. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F; H là hình chiếu của D lên EF; HB, HC theo thứ tự cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của BC, MN và AH thẳng hàng.*



Hình 5

Lời giải. (h.5) Gọi P, R, Q, T lần lượt là trung điểm BC, EF, AH, MN. Gọi S là giao điểm QR và DH. Dễ dàng chứng minh được $ASHR$ là hình chữ nhật, suy ra AS là phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC nên $AS // EF$. Gọi K, L lần lượt là giao điểm AS với HM, HN. Vẫn sử dụng mô hình bài toán 3 ta suy ra HS là phân giác của $\widehat{KHL}$, mà $DH \perp KL$ suy ra tam giác HKL cân tại H. Vậy S là trung điểm KL. Áp dụng bài toán 3, ta có S, T, P thẳng hàng và ở trên có S, T, R, Q thẳng hàng. Từ đó suy ra P, R, Q thẳng hàng.

✪Bài toán 6. *Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Các điểm E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho EF // BC. H là hình chiếu của M lên EF. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại K, L. Chứng minh rằng HK = HL.*



Hình 6

THÔNG BÁO

Được sự đồng ý của Cục Báo chí - Bộ Thông tin và Truyền thông và Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam, Tạp chí TH&TT thông báo: Từ tháng 10 năm 2015, mỗi số Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tăng từ 32 trang hiện nay lên 40 trang ruột với giá bìa là 12.500 đồng/1số. Với 8 trang tăng này, nhiều chuyên mục như: *Tìm hiểu sâu thêm Toán học phổ thông, Toán học và đời sống, Sai lầm ở đâu, Câu lạc bộ Toán học, ...* sẽ được xuất hiện thường xuyên trên Tạp chí, nội dung các chuyên mục sẽ đầy đủ và phong phú hơn.

Rất mong các thầy cô giáo, các em học sinh và bạn đọc yêu toán ủng hộ đọc, viết bài cho các chuyên mục, để Tạp chí ngày càng phát triển.

Tạp chí trân trọng cám ơn!

TH&TT

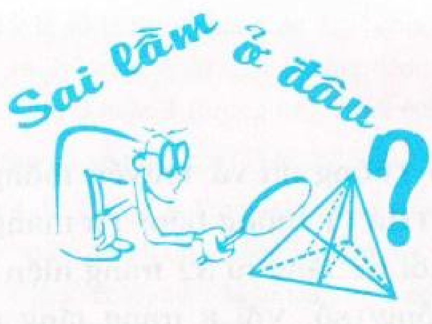
Lời giải. (h.6) Từ $EF//BC$, áp dụng định lý Thales suy ra $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$, lại có M là trung điểm BC nên $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=-1$. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với các điểm M,E,F lần lượt thuộc BC,CA,AB, ta có $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}=-1$ suy ra AM,BE,CF đồng quy. Chứng minh tương tự bài toán 3 có HM là phân giác $\widehat{KHL}$ và HM đi qua trung điểm KL, suy ra tam giác HKL cân tại H. Từ đó $HK=HL$ (đpcm).

Các bạn hãy các làm bài tập sau áp dụng bài toán 2,3 và *bổ đề E.R.I.Q* để luyện tập.

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt AO tại K khác O. Lấy các điểm E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho KA là phân giác $\widehat{EKF}$. KE, KF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAC, KAB tại M, N khác K. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của EF, MN đi qua A.*

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC với P, Q là hai điểm đẳng giác trên phân giác góc BAC. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. D là hình chiếu của Q lên BC. H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng BC, MN và AH thẳng hàng.*

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC với trực tâm H. P là điểm bất kỳ trên AH. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB, APC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHF, AHE tại M, N khác H. Chứng minh rằng đường thẳng nối điểm Lemoine của hai tam giác AEF, AMN đi qua điểm A.*



GIẢI ĐÁP:

LỜI GIẢI MANG ĐẬM CHẤT KỸ THUẬT?

(Đề đăng trên TH&TT số 455, tháng 5 năm 2015)

Lời giải của *Long* đã sai ở chỗ: Với BĐT $d(A;(\alpha))\le 9\sqrt{3}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$. Kết hợp với đẳng thức $2a+b+2c=0$ suy ra $a=b=c=0$, mâu thuẫn với giả thiết $a^2+b^2+c^2>0$.

Lời giải đúng là:

Ta có vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(2;1;2)$.

Lấy $M(1;0;2)\in d$ và gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ $\left(a^2+b^2+c^2>0\right)$ là vectơ pháp tuyến của (α).

Do mp (α) chứa đường thẳng d, nên ta có $M(1;0;2)\in(\alpha)$ và $\vec{n}\perp\vec{u}$. Do đó phương trình mp(α) là: $ax+by+cz-a-2c=0$ (1) và $2a+b+2c=0$.

Từ $2a+b+2c=0 \Rightarrow b=-2(a+c)$, khi đó

$$d\left(A;(\alpha)\right)=\frac{|a+5b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{9|a+c|}{\sqrt{a^2+4(a+c)^2+c^2}}$$

$=\dfrac{9|a+c|}{\sqrt{5(a+c)^2-2ac}}$. Ta có $(a+c)^2\ge 4ac,\ \forall a,c$

$$\Rightarrow d\left(A;(\alpha)\right)\le\frac{9|a+c|}{\sqrt{5(a+c)^2-\dfrac{(a+c)^2}{2}}}\le 3\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=c$, mà $a^2+b^2+c^2>0$ nên $a=c=-\dfrac{b}{4}\ne 0$. Khi đó chia hai vế PT (1) cho $-\dfrac{b}{4}$ ta được phương trình mp(α) là:

$$x-4y+z-3=0.\ \square$$

Nhận xét: Có hai bạn có đáp án đúng là: **Hà Nội:** *Đinh Vân Anh*, 12A1, THPT Hồ Xuân Hương, Số 1 Nguyễn Quý Đức, quận Thanh Xuân. **Nghệ An:** *Hồ Thanh Tùng*, 12C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn.

HOÀNG CHI (*Hà Nội*)

KẾT QUẢ ĐÃ ĐÚNG CHƯA?

Trong một giờ học, Thầy giáo ra một bài toán:

Cho các số thực x, y thỏa mãn: $x^2+y^2-xy=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^4+y^4-x^2y^2$.

Một học sinh đã giải bài toán trên như sau:

Ta có:

$$A=(x^2+y^2)^2-3x^2y^2=(1+xy)^2-3x^2y^2$$
$$=-2x^2y^2+2xy+1,\ \text{với } -1\le xy\le 1.$$

Xét hàm số $f(t)=-2t^2+2t+1,\ t\in[-1;1]$. Hàm $f(t)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ nên đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn này. Đồ thị của hàm $f(t)$ là parabol quay bề lõm xuống phía dưới, có hoành độ đỉnh

$$x=-\frac{2}{2.(-2)}=\frac{1}{2}\in[-1;1].$$

Do đó: $\max A=\max\limits_{t\in[-1;1]}f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

và $\min A=\min\limits_{t\in[-1;1]}f(t)=\min\{f(-1);f(1)\}$

$=\min\{-3;1\}=-3.$

Bạn học sinh trên đã làm đúng chưa? Cách giải của bạn như thế nào?

VŨ NGUYÊN DUY

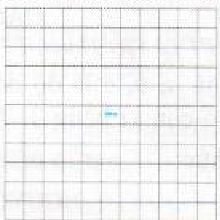
(GV THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt , Kiên Giang)

BẠN CÓ BIẾT?

CON KIẾN CỦA LANGTON
VÀ SỰ PHỨC TẠP SINH RA TỪ NHỮNG NGUYÊN LÝ ĐƠN GIẢN

ĐÀO VŨ QUANG
(*Lớp 12 Toán, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam*) - ***Phỏng dịch***

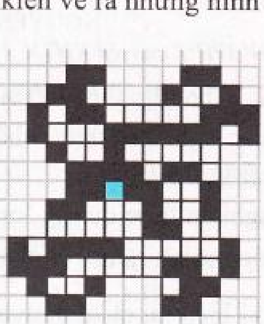
Chúng ta đang sống trong một thế giới thật phức tạp. Từ thị trường chứng khoán cho đến các thảm họa thiên nhiên, mọi thứ dường như là kết quả của những thế lực phức tạp, không thể lường trước được. Nhưng liệu chúng có thể bắt nguồn từ chỉ một vài quy tắc đơn giản không? Hay nói cách khác, liệu một hệ thống đơn giản có thể sinh ra những hành vi hỗn độn, khó tiên đoán được không?



Hình 1

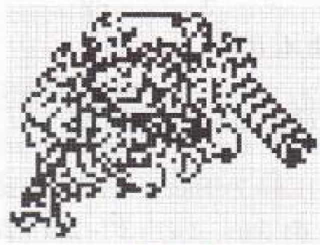
Một hệ thống điển hình là mô hình con kiến của Langton, được sáng tạo bởi *Christopher Langton* vào năm 1984. Trong mô hình (h.1), một con kiến sống trong lưới vô hạn các ô vuông. Ban đầu tất cả các ô đều màu trắng. Mỗi lần, con kiến đổi màu ô mà nó đang đứng: nếu là màu trắng thì đổi thành màu đen, nếu là màu đen thì đổi thành màu trắng. Sau đó, nếu ô đó màu trắng, con kiến sẽ quay phải 90^o và bước tiếp, nếu ô đó màu đen, con kiến quay trái 90^o và tiếp tục hành trình. Cũng như lưới vô hạn các ô vuông, số lượt đi của con kiến là vô hạn.

Ban đầu con kiến vẽ ra những hình khối khá đối xứng (h.2).



Hình 2

Nhưng càng ngày, hình vẽ càng trở nên rối rắm, dường như là ngẫu nhiên. Và theo lẽ thường tình, chúng ta nghĩ sự hỗn độn này sẽ kéo dài mãi. Chẳng phải khi con kiến di chuyển trong lưới hỗn độn, thì nó chỉ có thể vẽ ra những hình còn hỗn độn hơn hay sao? Thế nhưng, sau hơn 10000 bước, đột nhiên một quy luật hiện ra: con kiến vẽ ra một hình gồm 104 bước được lặp đi lặp lại, tạo thành một "xa lộ" trên lưới ô vuông (h.3). Thật là kì diệu!



Hình 3

Mọi chuyện còn trở nên thú vị hơn khi ta đổi một số ô trắng thành ô đen trong lưới ban đầu. Con kiến sẽ gặp những ô đen đó, thay đổi hướng đi, vẽ lên một ma trận hỗn loạn, nhưng rồi thật kì lạ, là "xa lộ" 104 bước luôn hiện ra, dù là sau một nghìn hay một triệu lượt đi. Dường như "xa lộ" ấy đã "hấp dẫn" con kiến để con kiến dần vẽ nên, bất kể trạng thái ban đầu của các ô.

Sự diệu kì của con kiến Langton đã sớm được các nhà toán học phát hiện, nhưng thật đáng tiếc là đến bây giờ, hiểu biết của chúng ta về mô hình ấy vẫn còn khá hạn hẹp. *Cohen - Kong* đã chứng minh được miền di chuyển của con kiến không bị chặn, tức là con kiến luôn đi xa vô hạn so với điểm xuất phát ban đầu. Tuy nhiên câu hỏi về tính tất yếu của "xa lộ" vẫn chưa có ai trả lời được.

Từ con kiến của Langton, phải chăng ta sắp đến gần với một mô hình miêu tả được thế giới ta đang sống? Và hơn nữa, phải chăng mọi sự kiện, hành động diễn ra đều tuân theo những quy tắc đơn giản nhất có thể, mà ta chưa khám phá ra? Câu trả lời có lẽ sẽ dành cho các bạn đọc và những thế hệ mai sau.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/459 (Lớp 6). Gọi

$$A=\frac{1}{1.2^2}+\frac{1}{2.3^2}+\frac{1}{3.4^2}+...+\frac{1}{49.50^2},$$

$$B=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{50^2}.$$

Hãy so sánh A, B với $\frac{1}{2}$.

PHAN THANH QUẢNG
(65/4, đường Nguyễn Văn Giai, P. Đa Kao, Q.1. TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/459 (Lớp 7). Biết a và b là các số thực thay đổi sao cho đa thức $A(x)=x^2-2ax+2a^2+b^2-5$ có nghiệm. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+1)(b+1).$$

NGUYỄN TẤN NGỌC
(GV THCS Nhơn Mỹ, An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/459. Giả sử $a_1,a_2,...,a_n$ là các số nguyên dương phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1$ và số lớn nhất trong các số a_i có dạng $2p$, với p là số nguyên tố nào đó. Hãy xác định $a_i\ (i=\overline{1,n})$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/459. Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = BC$), O là trung điểm AC. Qua C kẻ đường thẳng d vuông góc với BC. Gọi Cx là tia đối của tia CB, M là điểm bất kỳ thuộc Cx. Gọi E là giao điểm của d và AM, I là giao điểm của BE và OM. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên Cx thì I luôn thuộc một đường cố định.

VŨ QUỐC DŨNG *(GV ĐHSP Thái Nguyên)*

Bài T5/459. Giải phương trình:

$$x^2-2x=2\sqrt{2x-1}.$$

TẠ MINH HIẾU
(GV THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/459. Giải bất phương trình:

$$\frac{2x^3+3x}{7-2x}>\sqrt{2-x}.$$

NGUYỄN VĂN NHO
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghệ An)

Bài T7/459. Cho tam giác ABC nhọn, không cân có các đường cao AH, BE, CF ($H\in BC, E\in AC, F\in AB$). Gọi I, R lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB; K, J, L theo thứ tự là giao điểm của các đường thẳng MI và AH, NI và BE, PI và CF. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{HK}+\frac{1}{EJ}+\frac{1}{FL}>\frac{3}{R}.$$

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT Lê Viết Thuật, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T8/459. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=a^3+b^3+c^3+\sqrt{5}abc$.

NGUYỄN VĂN THIỆN
(GV THPT Tân Phú, Đồng Nai)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/459. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì các số sau đây đều là số chính phương

$$10\left(\left[(4+\sqrt{15})^n\right]+1\right)\left(\left[(4+\sqrt{15})^{n+1}\right]+1\right)-60,$$

$$6\left(\left[(4+\sqrt{15})^n\right]+1\right)\left(\left[(4+\sqrt{15})^{n+1}\right]+1\right)-60,$$

$$15\left(\left[(4+\sqrt{15})^n\right]+1\right)^2-60,$$

trong đó ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/459. Cho đa thức $f(x)=x^3-3x^2+1$.

a) Tìm số các nghiệm thực khác nhau của phương trình $f(f(x))=0$.

b) Gọi α là nghiệm thực dương lớn nhất của đa thức $f(x)$. Chứng minh rằng $\left[\alpha^{2020}\right]$ chia hết cho 17 (ký hiệu $[x]$ biểu thị phần nguyên của x).

NGUYỄN LƯU
(GV THPT chuyên Hà Tĩnh)

Bài T11/459. Cho dãy số (u_n) có

$u_1 = 2, u_2 = 20, u_3 = 56,$

$u_{n+3} = 7u_{n+2} - 11u_{n+1} + 5u_n - 3.2^n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

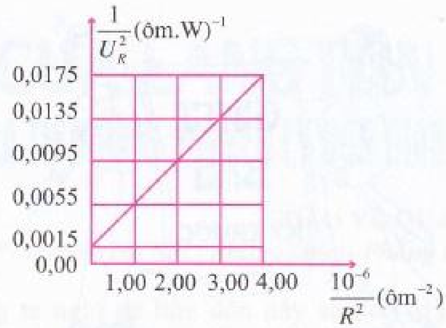
Tìm số dư khi chia u_{2011} cho 2011.

NGUYỄN VĂN XÁ
(GV THPT Yên Phong 2, Yên Phong, Bắc Ninh)

Bài T12/459. Cho ΔABC và đường thẳng d bất kỳ. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên d. Khi đó các đường thẳng qua A_1 và vuông góc với BC, qua B_1 và vuông góc với AC, qua C_1 và vuông góc với AB đồng quy tại một điểm và điểm này được gọi là *cực trực giao* của đường thẳng d đối với ΔABC. Chứng minh rằng trong một tam giác, đường thẳng Simson ứng với một điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp thì chia đôi đoạn thẳng nối P và cực trực giao của đường thẳng này đối với tam giác đã cho.

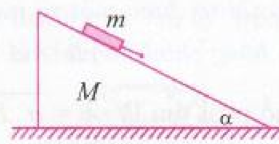
TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài L1/459. Đặt điện áp $u = U_0 \cos\omega t$ (với U_0 không đổi, $\omega = 314\text{rad/s}$) vào hai đầu một đoạn mạch gồm tụ điện C mắc nối tiếp với biến trở R. Biết $\frac{1}{U_R^2} = \frac{2}{U_0^2} + \frac{2}{U_0^2\omega^2C^2}\cdot\frac{1}{R^2}$, với U_R là điện áp giữa hai đầu R. Dựa vào đồ thị bên hãy tính giá trị điện dung C.



NGUYỄN QUANG HẬU (*Hà Nội*)

Bài L2/459. Một vật nhỏ bắt đầu trượt xuống trên mặt của nêm đang nằm yên trên mặt bàn nằm ngang như hình vẽ.



Nêm có góc nghiêng α, vật có khối lượng m, nêm có khối lượng M. Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt bàn. Hãy tìm vận tốc của nêm đối với bàn tại thời điểm vật m có:

a) vận tốc $\vec{v}$ đối với nêm.

b) vận tốc $\vec{v_0}$ đối với bàn.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/459 (For 6th grade). Let

$$A = \frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^2} + \ldots + \frac{1}{49.50^2},$$

and $B = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{50^2}$.

Compare A and B with $\frac{1}{2}$.

Problem T2/459 (For 7th grade). For all pairs of real numbers (a, b) such that the polynomial $A(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 + b^2 - 5$ has solutions, find the minimum value of the expression

$$P = (a+1)(b+1).$$

Problem T3/459. Suppose that $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are different positive integers such that $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$ and also assume that the biggest number among them is equal to $2p$, where p is some prime number. Determine $a_i\ (i = \overline{1,n})$.

Problem T4/459. Let ABC be a isosceles right triangle ($AB = BC$) and let O be the midpoint of AC. Through C draw the line d perpendicular to BC. Let Cx be the opposite ray of the ray CB and M be an arbitrary point on Cx. Assume that E is the intersection between d and AM and I is the intersection between BE and OM. Prove that when M varies on Cx, I always belongs to a fixed curve.

Problem T5/459. Solve the following equation

$$x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}.$$

(Xem tiếp trang 27)

Bài T1/455. *Tìm số tự nhiên có nhiều hơn 3 chữ số, biết rằng nếu ta bỏ đi 3 chữ số cuối cùng của số đó thì ta được một số mới mà lập phương của nó bằng chính số cần tìm.*

Lời giải. Gọi số phải tìm là $A = \overline{a...bcde}$. Đặt $N = \overline{a...b}$, $P = \overline{cde}$. Theo giả thiết thì $N^3 = A = 1000N + P$, hay là $N(N^2 - 1000) = P$. Do $P \geq 0$ nên $N^2 - 1000 \geq 0$, hay là $N^2 \geq 1000$, do đó $N \geq 32$. Thay vào đẳng thức trên với $P < 1000$ được $32(N^2 - 1000) \leq N(N^2 - 1000) < 1000$, từ đó $N^2 - 1000 < 32$, suy ra $N^2 < 1032$ nên $N < 33$. Từ đó và $N \geq 32$ nên chỉ có thể là $N = 32$. Thử lại ta thấy $32^3 = 32768$ là số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Vậy số phải tìm là $A = 32768$. ❒

➤***Nhận xét.*** Các bạn sau lập luận chặt chẽ, có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Quyết*, 6A1, *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, THCS Yên Lạc , *Mai Thanh Tâm*, 6A, THCS Lý Tự Trọng, Bình Xuyên, *Phùng Thị Hồng Nhung*, *Nguyễn Đài Anh*, *Triệu Thị Ngọc Minh*, *Lê Minh Việt Anh*, 6A, THCS Vĩnh Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Hà Khánh Nam*, 6A3, Trường Hanoi Academy, Quận Từ Liêm.

VIỆT HẢI

Bài T2/455. *Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn điều kiện $a^{2015} - a - 1 = 0$ và $b^{4030} - b - 3a = 0$. Hãy so sánh a và b.*

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát: Giả sử $a^n - a - 1 = 0$ và $b^{2n} - b - 3a = 0$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$. Hãy so sánh a và b.

Ta có $a^n = a + 1 > 1 \Rightarrow a > 1$, từ đó $a^{2n} = (a+1)^2 > 4a$, do đó

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} = \frac{b^{2n}}{a^{2n}} = \frac{b+3a}{a^{2n}} < \frac{b+3a}{4a}.$$

Nếu $a \leq b$ thì $\frac{b+3a}{4a} \leq \frac{b+3b}{4a} = \frac{b}{a}$. Do đó $\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} < \frac{b}{a}$. Điều này vô lí, vì $\frac{b}{a} \geq 1$. Vậy $a > b$.

Bài toán đã cho là trường hợp riêng, ta có kết luận $a > b$. ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Bài toán rất đơn giản, các bạn tham gia gửi bài đều cho kết luận đúng, song lập luận còn dài và phải dùng đến công thức khai triển phức tạp.
2) Các bạn sau có lời giải tốt:
Phú Thọ: *Lê Na*, 7A, THCS Thị trấn II, Yên Lập; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 7A5, THCS Cầu Giấy; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/455. *Giải phương trình:*

$$x + y + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. ĐK: $|x| \leq 1; |y| \leq 1.$ (*)

Áp dụng BĐT $2ab \leq a^2 + b^2$ ta có:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} 2x \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} 2y \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y^2 + \frac{3}{4}\right) \quad (2)$$

$$x\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} 2x\sqrt{3-3y^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(x^2 + 3 - 3y^2\right) \quad (3)$$

$$y\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} 2y\sqrt{3-3x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(y^2 + 3 - 3x^2\right) \quad (4)$$

Cộng theo từng vế của bốn BĐT trên ta có:

$$x + y + x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (5)$$

Đẳng thức xảy ra ở (5) khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra đồng thời ở (1), (2), (3), (4)

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ x=\sqrt{3-3y^2};\ y=\sqrt{3-3x^2}$

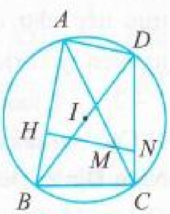
$\Leftrightarrow x=y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, thỏa mãn ĐK (*).

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ❐

➤***Nhận xét.*** Cách giải trên đây chỉ sử dụng duy nhất một BĐT đơn giản là $2ab \le a^2+b^2$ để đánh giá từng số hạng của vế trái của PT và tìm ngay được nghiệm của PT mà không phải giải các HPT (hình thành khi các đẳng thức xảy ra). Các bạn tham gia giải bài này đều có kết quả đúng nhưng chưa chú ý đến trình bày nên lời giải hầu hết chưa hoàn thiện. Các bạn được khen kì này là: **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP. Kon Tum; **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Phú Thọ:** *Trần Thị Thu Huyền, Nguyễn Hải Dương, Đào Tuấn Minh, Nguyễn Thảo Chi*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, *Phạm Ngọc Hoa*, 8A1, THCS Sông Lô, Sông Lô.

NGUYỄN ANH QUÂN

Bài T4/455. *Trên đường tròn tâm I cho trước, lấy hai điểm B, C cố định và điểm A chuyển động trên đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho MA = 3MC, H là hình chiếu vuông góc của M trên cạnh AB. Chứng minh rằng điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.*



Lời giải. Vẽ đường kính BD. Vì B cố định và đường tròn (I) cố định nên D cố định.

Dễ thấy $AD \perp AB$ và $MH \perp AB$ nên $AD \parallel MH$.

Gọi N là giao điểm của MH và DC. Áp dụng định lí Thales ta có $\dfrac{CN}{ND}=\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra N là điểm cố định.

Mặt khác, do BD là đường kính đường tròn (I) nên $\widehat{BCD}=90°$. Tứ giác $BHNC$ nội tiếp vì có $\widehat{BHN}=\widehat{BCN}=90°$.

Vậy H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN cố định. ❐

➤***Nhận xét.*** 1) Khi điểm M chia đoạn AC theo tỉ số k cho trước thì hình chiếu H của M trên AB cũng thuộc một đường tròn cố định.

2) Không nhiều bạn tham gia giải bài toán trên. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Nguyễn Hoàng Phi, Trần Quốc Lập, Nguyễn Hải Dương*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Hải Dương:** *Đồng Xuân Luân*, 9B, THCS Hợp Tiến, Nam Sách; **Cần Thơ:** *Nguyễn Trần Xuân Hoà, Huỳnh Thiện Hải, Hồ Gia Bảo, Tô Thiên Kim*, 9a6, THCS Thốt Nốt; **Thanh Hoá:** *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn; *Trần Quốc Phương*, 9A, THCS thị trấn Thường Xuân.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/455. *Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn*

$$(x^2+2)^2=2y^4+11y^2+x^2y^2+9.$$

Lời giải. *Cách* 1. Ta có

$(x^2+2)^2=2y^4+11y^2+x^2y^2+9$ (1)

$\Leftrightarrow (x^2+2)^2=(y^4+6y^2+9)+(y^4+x^2y^2+5y^2)$

$\Leftrightarrow (x^2+2)^2-(y^2+3)^2=y^2(x^2+y^2+5)$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2-1)(x^2+y^2+5)=y^2(x^2+y^2+5)$

Chia hai vế cho $x^2+y^2+5\ (\neq 0)$ ta được

$$x^2-y^2-1=y^2 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=2y^2.$$

Do $2y^2 \vdots 2$ nên $(x-1)(x+1) \vdots 2$.

Mà $(x+1)-(x-1)=2$ nên $(x+1) \vdots 2$ và $(x-1) \vdots 2$, suy ra $(x-1)(x+1) \vdots 4 \Rightarrow 2y^2 \vdots 4 \Rightarrow y^2 \vdots 2 \Rightarrow y \vdots 2$.

Vì y là số nguyên tố nên $y=2$. Từ đó

$$x^2=1+2y^2=1+2.2^2=9.$$

Do x là số nguyên tố nên $x=3$.

Vậy hai số nguyên tố $x=3$, $y=2$ thỏa mãn (1).

Cách 2. Nhận xét: Bình phương của một số lẻ chia cho 4 dư 1; bình phương của một số chẵn chia hết cho 4.

Nếu y là số lẻ thì y^2chia 4 dư 1, y^4 chia 4 dư 1. Suy ra $2y^4$ chia 4 dư 2; $11y^2$chia 4 dư 3; x^2y^2 chia 4 dư 0 hoặc 1 (tương ứng với x chẵn hoặc lẻ). Suy ra vế phải của (1) là $2y^4+11y^2+x^2y^2+9$ chia 4 dư 2 hoặc 3. Trong khi đó vế trái của (1) là $(x^2+2)^2$ chia 4 dư 0 hoặc 1. Điều này vô lí. Vậy y là số chẵn, mà y là số nguyên tố nên $y = 2$. Từ đó tìm được $x = 3$. ❒

➤***Nhận xét.*** Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Ngoài hai cách giải trên, ta có thể chuyển vế của (1) và đưa về phương trình bậc hai ẩn $t = x^2$ (coi y là tham số) để tìm nghiệm và đưa (1) về dạng phương trình tích $(x^2+y^2+5)(x^2-2y^2-1)=0$. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Thu Hiền*, 7A3, *Nguyễn Hoàng Phi, Trần Quốc Lập*, 8A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 6A4, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên; **Hà Nội:** *Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 7C, *Nguyễn Văn Mạnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Quang Bằng*, 8A2, THCS TT Quán Hành, Nghi Lộc; **Quảng Ngãi:** *Võ Thành Hy*, 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; **Kon Tum:** *Lê Viết Lưu Thanh*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/455. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^3+y^3=4y^2-5y+3x+4 \\ 2y^3+z^3=4z^2-5z+6y+6 \\ 3z^3+x^3=4x^2-5x+9z+8 \end{cases} \quad \text{(I)}.$$

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Hệ PT đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x^3-3x-2=-y^3+4y^2-5y+2 \\ 2y^3-6y-4=-z^3+4z^2-5z+2 \\ 3z^3-9z-6=-x^3+4x^2-5x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1)^2=(2-y)(y-1)^2 & (1) \\ 2(y-2)(y+1)^2=(2-z)(z-1)^2 & (2) \\ 3(z-2)(z+1)^2=(2-x)(x-1)^2 & (3) \end{cases} \quad \text{(II)}.$$

Xét các trường hợp:

• Nếu $x = 2$, từ (1) ta có: $y = 2$ hoặc $y = 1$; từ (3) ta có: $z = 2$ hoặc $z = -1$. Nhưng do (2) nên ta thấy chỉ $y = z = 2$ thỏa mãn.

• Tương tự, với $y = 2$ ta được: $x = z = 2$; với $z = 2$ ta được: $x = y = 2$.

• Với x, y, z khác 2, nhân các vế của (1), (2), (3), ta có:

$$(x-2)(y-2)(z-2)(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2$$
$$=-6(x-2)(y-2)(z-2)(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2+6(x+1)^2(y+1)^2(z+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(y-1)(z-1)=0\\(x+1)(y+1)(z+1)=0\end{cases}.$$

Trong ba số x, y, z phải có một số bằng 1 và một số bằng -1. Kết hợp với các PT (1), (2), (3), ta thấy trường hợp này hệ (I) vô nghiệm.

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (2; 2; 2)$. ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Tất cả các bạn giải bài này đều tìm ra đúng kết quả mặc dù lời giải của nhiều bạn chưa chặt chẽ. Ví dụ: Khi viết được hệ (II), các bạn đã lập luận như sau: Nếu $x > 2 \Rightarrow y < 2$ (do (1)) $\Rightarrow z > 2$ (do (2)) $\Rightarrow x < 2$ (do (3)), mâu thuẫn. Nếu $x < 2$ thì lập luận tương tự cũng dẫn đến mâu thuẫn. Từ đó suy ra $x = 2$; …

Phép suy luận này chưa chặt chẽ ở chỗ: Từ $x > 2$, do (1) suy ra: $(2-y)(y-1)^2>0$, nhưng không suy được $y < 2$, vì nếu $y = 1 < 2$ thì BĐT không đúng ; …

2) Trong trường hợp cả ba số x, y, z khác 2, để chứng minh hệ *(I)* vô nghiệm, ngoài cách kiểm tra trực tiếp như ở cách giải trên, cũng có thể dùng nguyên lý Dirichlet để đánh giá (trong ba số $x - 2$, $y - 2$, $z - 2$ luôn có hai số cùng dấu).

3) Các bạn sau có lời giải đúng, chặt chẽ:

Nam Định: *Đoàn Thị Nhài*, 11 Toán 1, *Trịnh Tuấn Giang*, 11 Toán 2, *Phạm Hồng Trường*, 10 Toán 2, *Lâm Vũ Tuấn*, 11 Anh 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** *Tạ Khánh Hà*, *Vũ Đức Văn*, 10 T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hải Dương:** *Lê Duy Dũng*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Tĩnh:** *Ngô*

Việt Hoàng, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Thuận:** *Bùi Nguyễn Nhật Tiên*, 10 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, TP. Phan Thiết; **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, AK11, THPT chuyên Quang Trung; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, THCS Lê Quý Đôn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/455. *Cho tam giác ABC. Gọi m_a, m_b, m_c là độ dài các đường các trung tuyến lần lượt ứng với các cạnh BC = a, CA = b, AB = c. Chứng minh rằng:*

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\sqrt{3}\left(m_a+m_b+m_c\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng công thức đường trung tuyến cho ΔABC ta có $4m_a^2=2(b^2+c^2)-a^2$. Từ đó, sử dụng BĐT *Cauchy* ta được

$$2(a^2+b^2+c^2)=4m_a^2+3a^2\geq 4\sqrt{3}.a.m_a$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{a}\geq 2\sqrt{3}.m_a \quad (1)$$

Tương tự: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{b}\geq 2\sqrt{3}.m_b$ (2)

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{c}\geq 2\sqrt{3}.m_c$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\sqrt{3}(m_a+m_b+m_c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}4m_a^2=3a^2\\4m_b^2=3b^2\\4m_c^2=3c^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b^2+c^2=2a^2\\c^2+a^2=2b^2\\a^2+b^2=2c^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c$$

hay tam giác ABC đều. ❒

➢***Nhận xét.*** Số lời giải gửi về Tòa soạn khá đông, tất cả đều giải đúng theo hướng sử dụng công thức đường trung tuyến và các *BĐT Cauchy, Bunyakovsky*. Những bạn sau có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Cao, Nguyễn Thành Long, Vương Tiến Đạt*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, *Trần Thiện Nam*, 11A1, THPT Ứng Hòa A, *Tạ Khánh Hà, Trần Bá Khôi*, 10 Toán 1, *Phạm Ngọc Khánh*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Vũ Bá Sang*, 11 Toán 1, *Nguyễn Thị Yên*, 10 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết, Nguyễn Hữu Huy, Hà Hữu Linh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thảo Chi, Nguyễn Hải Dương, Trần Quốc Lập, Nguyễn Hoàng Phi*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Lê Bảo Anh, Nguyễn Đức Thuận*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Phương Thanh*, 11A1, THPT Yên Phong Số 2; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Nam Định:** *Lâm Vũ Tuấn*, 11 Anh 1, *Nguyễn Hùng Cường*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Lê Trương Thái Bảo, Nguyễn Trọng Bằng*, 8A2, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Bùi Văn Bảo*, 10T1, *Hồ Xuân Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; **Hà Tĩnh:** *Ngô Việt Hoàng, Nguyễn Văn Thế*, 11A1, THPT chuyên Hà Tĩnh, *Trần Nguyễn Đức Thọ*, 10A1, THPT Nguyễn Thị Minh Khai, Đức Thọ; **Đà Nẵng:** *Trần Đức Thanh*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Trường Giang, Trần Văn Thiên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Hồ Minh Hoàng, Ngô Lê Phương Trinh, Nguyễn Huỳnh Huy Mân*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Tiến Phát*, 11A7, THPT Số 1 Đức Phổ; **Bình Phước:** *Bùi Công Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Quang Trung; **Bình Thuận:** *Tô Quốc Hưng, Bùi Nguyễn Nhật Tiên*, 10 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, TP. Phan Thiết; **Long An:** *Nguyễn Lộc Phúc, Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An, *Nguyễn Giáp Phương Duy*, 11A2, THPT Hậu Nghĩa; **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/455. *Xét tam giác nhọn ABC có các góc là A, B, C. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$M=\frac{\tan^2 A+\tan^2 B}{\tan^4 A+\tan^4 B}+\frac{\tan^2 B+\tan^2 C}{\tan^4 B+\tan^4 C}+\frac{\tan^2 C+\tan^2 A}{\tan^4 C+\tan^4 A}.$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng nếu *a, b* là các số thực dương thì $\dfrac{a^2+b^2}{a^4+b^4}\leq\dfrac{1}{ab}$ (1).

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow \left(a^2+b^2\right)ab \le a^4+b^4$

$$\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\ge 0.$$

Bất đẳng thức đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b$. Áp dụng (1), ta được :

$$M=\frac{\tan^2 A+\tan^2 B}{\tan^4 A+\tan^4 B}+\frac{\tan^2 B+\tan^2 C}{\tan^4 B+\tan^4 C}+\frac{\tan^2 C+\tan^2 A}{\tan^4 C+\tan^4 A}$$

$$\le \frac{1}{\tan A\tan B}+\frac{1}{\tan B\tan C}+\frac{1}{\tan C\tan A}.$$

Do đó $M\le \dfrac{\tan A+\tan B+\tan C}{\tan A\tan B\tan C}=1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\tan A=\tan B=\tan C \Leftrightarrow A=B=C.$$

Vậy $\max M=1$ khi tam giác ABC đều. ❐

➤*Nhận xét.* Trong bài toán ta đã sử dụng công thức

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C \quad (2).$$

Có thể chứng minh công thức trên như sau:

Với tam giác ABC không vuông, ta có

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\Rightarrow -\tan C=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

Suy ra (2). Cũng như cách giải trên, có thể tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=\frac{\tan^n A+\tan^n B}{\tan^{n+2} A+\tan^{n+2} B}+\frac{\tan^n B+\tan^n C}{\tan^{n+2} B+\tan^{n+2} C}+\frac{\tan^n C+\tan^n A}{\tan^{n+2} C+\tan^{n+2} A}$$

trong đó *A, B, C* là các góc của tam giác nhọn ; *n* là số nguyên dương bất kì.

Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Bình Thuận:** *Bùi Nguyễn Nhật Tiên, Tô Quốc Hưng*, 10 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, TP Phan Thiết; **Phú Yên:** *Ngô Lê Phương Trinh, Hồ Minh Hằng*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hòa; **Phú Thọ:** *Lê Bảo Anh, Võ Tuấn Dũng*, 10 toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì; **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 10 chuyên Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Bến Tre:** *Trần Thành Dương*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Linh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh;**Thanh Hóa:** *Nguyễn Ngọc Huy*, 10A2, THPT Lê Văn Hưu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Kim Hoàng*, 10A12, THPT Nguyễn Trãi, Ninh Đa, Ninh Hòa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T9/455. *Tìm hệ số của x^2 trong khai triển*

$$(1+x)(1+2x)(1+4x)\ldots(1+2^{2013}x)$$

Lời giải. Ta thấy hệ số của x^2 trong khai triển của đa thức $(1+x)(1+2x)(1+4x)...(1+2^{2013}.x)$ bằng

$$(2+2^2+...+2^{2013})+2(2^2+2^3+...+2^{2013})$$
$$+2^2(2^3+2^4+...+2^{2013})+...+2^{2012}.2^{2013}$$
$$=(2^{2014}-2)+2.(2^{2014}-2^2)+2^2.(2^{2014}-2^3)+...+2^{2012}.(2^{2014}-2^{2013})$$
$$=(1+2+2^2+...+2^{2012}).2^{2014}-(2+2.2^2+2^2.2^3+...+2^{2012}.2^{2013})$$
$$=(2^{2013}-1).2^{2014}-2(1+4+4^2+...+4^{2012})$$
$$=2^{4027}-2^{2014}-2.\frac{4^{2013}-1}{4-1}$$
$$=\frac{1}{3}.(3.2^{4027}-3.2^{2014}-2^{4027}+2)$$
$$=\frac{1}{3}.(2^{4028}-3.2^{2014}+2)=\frac{1}{3}.(2^{4028}+2)-2^{2014}.$$ ❐

➤***Nhận xét.*** Đây là bài toán tính hệ số của đa thức dạng đơn giản. Các bạn học sinh lớp 10 sau tham gia và có lời giải đúng: **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Nguyễn Phương Anh*, 10T2; *Trần Bá Khôi*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, *Lê Anh Thành*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Thanh Hóa:** *Vũ Duy Mạnh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Bình Thuận:** *Bùi Nguyễn Nhật Tiên*, 10T, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, TP. Phan Thiết; **Khánh Hòa:** *Hà Xuân Khang*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Nha Trang.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/455. *Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_n}$.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a_1+\dfrac{a_2^2}{2}+...+\dfrac{a_n^n}{n}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn). Áp dụng BĐT *Cauchy*, ta có $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$

$$=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$
$$\ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}=n^2$$

hay $a_1+a_2+\cdots+a_n\ge n$ (1)

Mặt khác, ta lại có

$$A = a_1 + \frac{a_2^2+1}{2} + \frac{a_3^3+2}{3} + \cdots + \frac{a_n^n+n-1}{n} - \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right) \quad (2)$$

Tiếp tục áp dụng BĐT *Cauchy* và sử dụng (1), ta thu được

$$a_1 + \frac{a_2^2+1}{2} + \frac{a_3^3+2}{3} + \cdots + \frac{a_n^n+n-1}{n} \ge a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n \quad (3)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1.$$

Từ (2) và (3) suy ra

$$A \ge n - \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Vậy $\min A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, đạt được khi

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1. \square$$

➤***Nhận xét.*** Đây là dạng toán cơ bản về áp dụng BĐT *Cauchy* quen biết nên có nhiều bạn giải được, trong đó có nhiều học sinh thuộc THCS. Đa số các bạn giải theo cách trình bày ở trên, một số khác sử dụng BĐT Bernoulli cũng cho lời giải đúng và ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Nghiêm Chi*, 11A1K10, THPT Yên Phong 2; **Bình Định:** *Lê Bá Thành*, 9A7, THCS Bình Định, **Bình Thuận:** *Nguyễn Trường Giang*, *Trần Văn Thiên*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đắk Lắk:** *Tô Quốc Hưng*, 10T, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, **Đà Nẵng:** *Lê Anh Tuấn*, 11CT, THPT chuyên Nguyễn Du, *Lý Phước Công*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đồng Nai:** *Ôn Từ Quốc Đạt*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Hải Dương:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11T2, THPT chuyên KHTN, *Phạm Ngọc Khánh*, 10T2, *Tô Khánh Hà*, *Trần Bá Khôi*, *Vũ Đức Văn*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP, *Đặng Thanh Tùng*, *Nguyễn Thành Long*,*Vương Tiến Đạt*, *Nguyễn Văn Cao*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Anh Triều*, 10T1, *Nguyễn Văn Thế* 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** *Chu Minh Huy*, 11T1, THPT chuyên Hưng Yên, *Nguyễn Mạnh Hiệp*, *Dương Hồng Sơn*, *Triệu Ninh Ngân*, *Nguyễn Việt Đức*, *Nguyễn Phúc Hoàng*, 10A9, *Lê Thị Thanh Lan*, 10A8, *Lê Ngọc Hoàng*, 11A8, THPT Dương Quảng Hàm, *Phạm Tiến Duật*, 10A1, THPT Trần Quang Khải, *Khoái Châu*, **Long An:** *Nguyễn Giáp Phương Duy*, 11A2, THPT Hậu Nghĩa, *Nguyễn Lộc Phúc*, 10T1, *Đặng Thành Trung*, 10T2, THPT chuyên Long An; **Khánh Hòa:** *Hà Xuân Khang*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Nam Định:** *Nguyễn Hùng Cường*, 11T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nghệ An:** *Nguyễn Phùng Thái Cường*, *Hồ Quang Phúc*, 10A1, THPT Thái Hòa, *Cao Hữu Đạt*, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Ninh Thuận:** *Trần Lê Xuân Trúc*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Thuận*, *Lê Bảo Anh*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Yên:** *Phạm Quốc Thắng*, *Phan Xuân Thành Lâm*, *Ngô Lê Phương Trinh*, *Hồ Minh Hoàng*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Tiến Phát*, 11A7, THPT 1 Đức Phổ, **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, **Thái Nguyên:** *Nguyễn Triều Minh*, 11T, THPT chuyên Thái Nguyên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, *Nguyễn Ngọc Huy*, 10A2, THPT Lê Văn Hưu, *Nguyễn Đình Lương*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Vĩnh Long:** *Lê Phan Nhật Duy*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Ngọc Hoa*, 8A1, THCS Sông Lô, *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên, *Nguyễn Hữu Hy*, *Đỗ Văn Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Yên Bái:** *Vũ Hồng Quân*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/455. *Tìm số thực k lớn nhất thỏa mãn điều kiện: Với 3 số thực a, b, c sao cho* $|a|+|b|+|c|<k$ *thì hệ bất phương trình sau vô nghiệm:*

$$\begin{cases} x^{16}+ax^9+bx^4+cx+15\le 0 & (1) \\ \left|x^{16}-x^9+1\right|+\left|x^4-x+1\right|\le 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. (Theo bạn *Trần Bá Khôi*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**).

Với $x<0$ hoặc $x>1$ thì $x^{16}-x^9>0$ và $x^4-x>0$ do đó $|x^{16}-x^9+1|+|x^4-x+1|>2$

Với $0\le x\le 1$ thì $1-x^9\ge 0, 1-x\ge 0$ nên

$|x^{16}-x^9+1|+|x^4-x+1|=x^{16}-x^9+1+x^4-x+1$ $=2+x^9(x^7-1)+x(x^3-1)\le 2.$ Vậy (2) có nghiệm $0\le x\le 1$. Giả sử x_0 là mọi nghiệm của hệ. Dễ thấy $x_0=0$ không thỏa mãn (1) do đó $0<x_0\le 1$ và $x_0^{16}+15\le -(ax_0^9+bx_0^4+cx_0)$ (3).

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$16x_0\le x_0^{16}+15=x_0^{16}+\underbrace{1+...+1}_{15\text{ số}}$ (4). Lại có

$-ax_0^9-bx_0^4-cx_0\le |a|x_0^9+|b|x_0^4+|c|x_0$

$\le (|a|+|b|+|c|)x_0$ (5).

Từ (3), (4) và (5) suy ra $|a|+|b|+|c|\ge 16\Rightarrow k>16.$

Thành thử nếu $k\le 16$ thì hệ vô nghiệm. Tiếp theo ta chứng tỏ nếu $k>16$ thì $\exists\, a, b, c\in\mathbb{R}$, $|a|+|b|+|c|<k$ sao cho hệ có nghiệm. Thật vậy chọn $a=0$, $b=0$, $c=-16$.

Ta có $|a|+|b|+|c|=16<k$ và hệ có nghiệm $x_0=1$.

Vậy số thực k lớn nhất thỏa mãn điều kiện bài toán là $k=16$. ❐

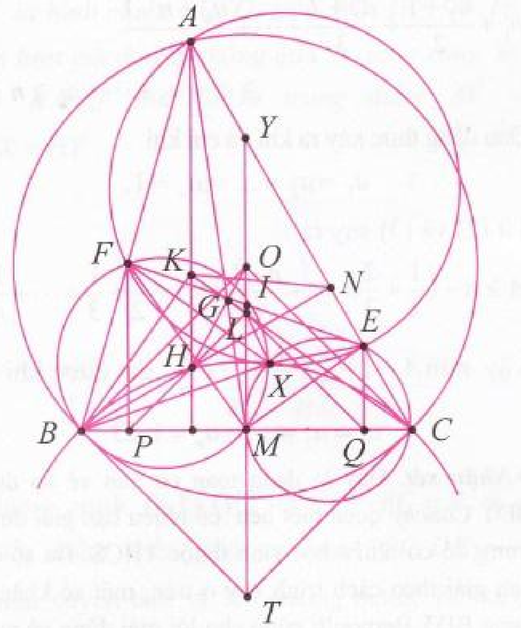
➤***Nhận xét.*** Bài này chỉ có một số ít bạn tham gia giải. Một số bạn cho đáp số đúng $k=16$ nhưng thiếu lập luận rằng với $k>16$ thì tồn tại a, b, c với $|a|+|b|+|c|<k$ và hệ đã cho nghiệm. Ngoài bạn *Trần Bá Khôi*, chỉ có bạn *Trần Văn Thiên*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định** có lời giải hoàn chỉnh (tuy hơi dài).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T12/455. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AD. Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. Trên đoạn thẳng AD lấy điểm K sao cho $\widehat{BKC}=90^{\circ}$. G là trọng tâm tam giác ABC, KG cắt OT tại L. Các điểm P, Q thuộc đoạn BC sao cho LP // OB, LQ // OC. Các điểm E, F lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho QE, PF cùng vuông góc với BC. Gọi (T) là đường tròn tâm T đi qua B, C. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tiếp xúc với (T).*

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Văn Thế*, 11T1, THPT chuyên **Hà Tĩnh**).

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; M, I theo thứ tự là trung điểm của BC, EF; N, Y theo thứ tự là giao điểm của BH, TO và AC; X là giao điểm thứ hai của các đường tròn (BMF), (CME).



Ta thấy $G=OH\cap MA$; M, I thuộc OT;

$\Delta AHN \backsim \Delta YCM$ (g.g).

Vì $OM \,//\, HA$; $LQ \,//\, OC$; $QE \,//\, MY$ nên

$$\frac{KA}{KH}=\frac{LM}{LO}=\frac{QM}{QC}=\frac{EY}{EC}.$$

Vậy $\Delta KHN \backsim \Delta ECM$ (g.g).

Từ đó, chú ý rằng tứ giác $BKNC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{KCB}=\widehat{KNH}=\widehat{EMC}$. Tương tự $\widehat{KBC}=\widehat{FMB}$.

Vậy $\widehat{FME}=180^{\circ}-\widehat{FMB}-\widehat{EMC}$

$=180^{\circ}-\widehat{KBC}-\widehat{KCB}=\widehat{BKC}=90^{\circ}.$

Dễ thấy $\widehat{FXE}=360^{\circ}-\widehat{FXM}-\widehat{EXM}$

$=(180-\widehat{FXM})+(180^{\circ}-\widehat{EXM})=\widehat{FBM}+\widehat{ECM}$

$=180-\widehat{FAE}$. Do đó tứ giác $AFXE$ nội tiếp (1).

Dễ thấy $\widehat{BXC}=360^{\circ}-\widehat{FXB}-\widehat{EXC}-\widehat{FXE}$

$= (180° - \widehat{FMB} - \widehat{EMC}) + (180° - \widehat{FXE})$

$= \widehat{FME} + \widehat{BAC} = 90° + \widehat{BAC}$

$= 180° - \dfrac{180° - 2\widehat{BAC}}{2} = 180° - \dfrac{\widehat{BTC}}{2}.$

Do đó X thuộc đường tròn (T) (2)

Chú ý rằng tứ giác $BFXM$ nội tiếp; $\widehat{EMF} = 90°$

$= \widehat{EQM}$; $EQ // IM; IM = IE = IF$, ta có

$\widehat{FXB} = \widehat{FMB} = \widehat{MEQ} = \widehat{EMI} = \widehat{IEM} = \widehat{IEX} + \widehat{MEX}$

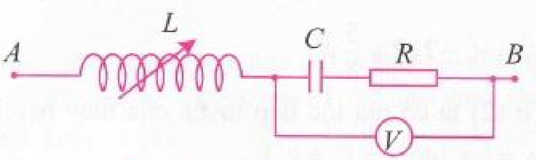
$= \widehat{FEX} + \widehat{MCX} = \widehat{FEX} + \widehat{BCX}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra các đường tròn (AEF), (T) tiếp xúc với nhau (tại X). ❒

➤***Nhận xét.*** Bài toán này tương đối khó, không nhiều bạn tham gia giải, một số bạn giải quá dài và trình bày quá cẩu thả. Xin nêu tên một số bạn có lời giải tốt: **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Ánh Triều*, 10T1, *Nguyễn Việt Hoàng*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Long An:** *Phạm Quốc Thắng*, *Võ Quốc Thịnh*, 10T1, THPT chuyên Long An; **Cần Thơ:** *Nguyễn Trần Hữu Thịnh*, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Hà Nội:** *Tạ Khánh Hà*, 10T1, *Phạm Ngọc Khánh*, 10T2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/455. *Cho đoạn mạch RLC như hình dưới.*



$u_{AB} = 100\sqrt{5}\cos(100\pi t)$ (V).

Biết vôn kế có điện trở vô cùng lớn, tụ điện có dung kháng lớn gấp 3 lần điện trở R.

a) Khi độ tự cảm có giá trị $L = L_1$ thì vôn kế chỉ giá trị U_1 và dòng điện trong mạch sớm pha φ_1 so với u_{AB}. Khi $L = L_2 = 2L_1$ thì vôn kế chỉ $U_2 = \dfrac{1}{2}U_1$ và dòng điện trong mạch trễ pha φ_2 so với u_{AB}.

– Tìm φ_1 và φ_2.

– Viết biểu thức $u_V(t)$ của điện áp giữa hai đầu vôn kế ứng với trường hợp $L = L_2$.

b) Biết $R = 20\ \Omega$, cho L biến thiên. Tìm giá trị $L = L_3$ để số chỉ của vôn kế đạt cực đại. Viết biểu thức $u_V(t)$ của điện áp giữa hai đầu vôn kế khi đó.

c) Vẫn giữ $R = 20\ \Omega$. Tìm giá trị của L để U_L đạt cực đại. Viết biểu thức $u_L(t)$ khi đó.

Lời giải. a) Khi $L = L_1$ thì

$$U_1 = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = I_1\sqrt{R^2 + 9R^2} = I_1 R\sqrt{10}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{Z_{L_1} - Z_C}{R} = \frac{Z_{L_1}}{R} - 3 < 0.$$

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + (Z_{L_1} - Z_C)^2}} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + (Z_{L_1} - 3R)^2}}$$

Khi $L = L_2 = 2L_1 \Rightarrow Z_{L_2} = 2Z_{L_1}$

$$U_2 = I_2\sqrt{R^2 + Z_C^2} = I_2 R\sqrt{10}$$

$$\tan\varphi_2 = \frac{Z_{L_2} - Z_C}{R} = \frac{2Z_{L_1}}{R} - 3 > 0.$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + (Z_{L_2} - Z_C)^2}} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + (2Z_{L_1} - 3R)^2}} \quad (6)$$

Theo đầu bài: $U_2 = \dfrac{1}{2}U_1 \Rightarrow I_2 = \dfrac{1}{2}I_1$. Từ (3) và (6) suy ra $\omega L_1 = \dfrac{5}{2}R$.

Thay $\omega L_1 = \dfrac{5}{2}R$ vào (2) và (5) ta tìm được:

$\tan\varphi_1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = -0,46$ rad;

$\tan\varphi_2 = 2 \Rightarrow \varphi_2 = 1,11$ rad

$U_V = I_2 Z_{RC} = 100\sqrt{5}$ (V);

$\tan\varphi_{u_V/u_{AB}} = -\dfrac{Z_C}{R} = -3 \Rightarrow \varphi_{u_V/i} = -1,25$ rad

$\Rightarrow \varphi_{u_V/u_{AB}} = -(1,11 + 1,25) = -2,36$ rad.

$\Rightarrow u_V = 100\sqrt{10}\cos(100\pi t - 2,36)$ (V).

b) Vì Z_{RC} không đổi nên $U_{V_{\max}}$ khi $I_{\max}$

$Z_{L_3} - Z_C = 3R = 60\ \Omega \Rightarrow L_3 = \dfrac{60}{100\pi} = 0,19$ (H).

Khi đó $U_V = I_{\max}.Z_{RC} = 500$ (V).

Khi có cộng hưởng thì i cùng pha với u_{AB}. Do vậy lúc này u_V trễ pha so với u_{AB} góc $|\varphi_V|$.

Suy ra biểu thức của $u_V(t)$ bây giờ là: $u_V(t) = 500\sqrt{2}\cos(100\pi t - 1{,}25)$ (V).

c) Ta có: $U_L = \frac{U_{AB}}{Z}.Z_{L_4} = \frac{U_{AB}.Z_{L_4}}{\sqrt{R^2 + (Z_{L_4} - Z_C)^2}}$

$$= \frac{U_{AB}}{\sqrt{\frac{R^2}{Z_{L_4}^2} + (1 - \frac{3R}{Z_{L_4}})^2}} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{\frac{10R^2}{Z_{L_4}} - \frac{6R}{Z_{L_4}} + 1}} = \frac{U_{AB}}{\sqrt{y}},$$

với $y = 10R^2x^2 - 6Rx + 1$ và $x = \frac{1}{Z_{L_4}}$

Suy ra để U_L đạt cực đại thì

$$x = \frac{6R}{20R^2} = \frac{3}{10R} \Rightarrow Z_{L_4} = \frac{10R}{3} = \frac{200}{3}\ (\Omega)$$

$$\Rightarrow L_4 = \frac{Z_{L_4}}{\omega} = \frac{2}{3\pi} \approx 0{,}21\ (\text{H}).$$

Thay giá trị của Z_{L_4} vào biểu thức của U_L ta tìm được $U_{L\max} = 500$ V.

Độ lệch pha giữa cường độ dòng điện I và điện áp u_{AB} lúc này được xác định:

$$\tan\varphi = \frac{Z_{L_4} - Z_C}{R} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = 0{,}32\ rad.$$

Vậy biểu thức của $u_L(t)$ là:

$$u_L = 500\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - 0{,}32 + \frac{\pi}{2}\right)\ (\text{V})$$

$$= 500\sqrt{2}\cos(100\pi t + 1{,}25)\ (\text{V}). \square$$

➤***Nhận xét***: Các bạn có lời giải đúng đề ra kì này: **Hưng Yên:** *Lê Ngọc Hoàng*, 11A8, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam*, 11 Lý, *Phan Văn Phúc*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đắc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghệ An:** *Hồ Thanh Tùng*, 12 C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn; **Quảng Ninh:** Vũ Hoàng Yến, 11A7, THPT Uông Bí.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/455. *Một máy bay bay theo phương ngang với vận tốc $v_0 = 320$km/h, bất ngờ đổi hướng và bắt đầu chuyển động lên trên theo cung tròn nằm trên mặt phẳng thẳng đứng. Vận tốc của máy bay lúc này thay đổi theo độ cao theo qui luật $v^2 = v^2 - 2gy$ và tại điểm cao nhất bằng $v_1 = 160$km/h. Gia tốc của máy bay bằng bao nhiêu tại điểm cao nhất và tại điểm vận tốc của nó hướng thẳng đứng lên trên?*

Lời giải. Gọi R là bán kính cung tròn quỹ đạo.

Tại điểm cao nhất, vận tốc của máy bay là v_1 :

$v_1^2 = v_0^2 - 2gR$, do $v_1 = \frac{v_0}{2}$ nên $R = \frac{3v_0^2}{16R}$ (1)

Đạo hàm theo thời gian hai vế hệ thức $v^2 = v_0^2 - 2gy$ ta được: $2v.a_t = -2g.v_y$ (2)

• Tại điểm cao nhất: $v_y = 0$ nên gia tốc tiếp tuyến $a_t = 0$; gia tốc pháp tuyến $a_n = \frac{v_1^2}{R} = \frac{4}{3}g$.

Gia tốc toàn phần tại điểm cao nhất là:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{4}{3}g.$$

• Tại điểm mà vận tốc của máy bay hướng thẳng đứng lên, vận tốc của máy bay là v_2

$$v_2^2 = v_0^2 - 2gR = \frac{5}{8}v_0^2.$$

Từ (2) ta có gia tốc tiếp tuyến của máy bay là $a_t = -g$ (do $v = v_2 = v_y$).

Gia tốc pháp tuyến của máy bay là

$$a_n = \frac{v_2^2}{R} = \frac{10}{3}g.$$

Gia tốc toàn phần tại điểm này là:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{109}}{3}g. \square$$

➤***Nhận xét***: Các bạn có lời giải đúng: **Nam Định:** *Phạm Ngọc Nam, Đỗ Thùy Trang*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Trần Bảo Trung*,12T1,THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

TIN VẮN

KỲ THI OLYMPIC TIN HỌC QUỐC TẾ 2015

Kỳ thi Olympic Tin học Quốc tế 2015 được tổ chức tại Kazakhstan năm nay được đánh giá là thành công nhất trong 15 năm qua của đoàn Việt Nam. Bốn học sinh tham gia đều được giải với 1 Huy chương Vàng, 3 Huy chương Bạc. Đoàn Việt Nam xếp thứ 8/84 quốc gia tham dự. Cả bốn em đều là học sinh của trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội: Huy chương Vàng thuộc về em *Phạm Văn Hạnh*, HS lớp 12; Ba huy chương Bạc thuộc về các em: *Phan Đức Nhật Minh*, HS lớp 11; *Nguyễn Việt Dũng*, HS lớp 12; *Nguyễn Tiến Trung Kiên*, HS lớp 12.

PGS *Phạm Bảo Sơn*, ĐHQG Hà Nội (Trưởng đoàn) cho biết, kỳ thi diễn ra trong hai ngày 28 và 30/7. Các thí sinh lập trình trên máy tính để giải quyết các bài toán. Mỗi ngày thi có 3 bài tập dành cho thí sinh với cấp độ dễ, vừa và khó. Trong 5 giờ, thí sinh phải viết các chương trình máy tính để giải quyết bài toán đưa ra. Trong thời gian làm bài, điểm số của thí sinh sẽ được cập nhật thường xuyên nhưng chỉ người ở bên ngoài phòng được biết. Kết quả cuối cùng là tổng điểm của 2 ngày thi. Đón đoàn học sinh vào chiều 3/8, Thứ trưởng Bộ GD&ĐT *Nguyễn Vinh Hiển* nhận định, với thành tích của đoàn học sinh Tin học, chúng ta đã khép lại mùa thi Quốc tế thắng lợi.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

TẠO ĐA GIÁC ĐỀU 12 CẠNH

Bạn *Minh* có một tấm bìa hình chữ nhật với chiều dài gấp ba lần chiều rộng. *Minh* muốn cắt tấm bìa thành các đa giác để ghép tất cả các đa giác đó lại (không chờm lên nhau) thành một đa giác đều 12 cạnh sao cho số mảnh bị cắt ra càng ít càng tốt. Bạn có thể giúp làm được điều đó không?

ĐAN QUỲNH (*Hà Nội*)

***PROBLEMS** ...(Tiếp theo trang 17)*

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/459. Solve the following inequation

$$\frac{2x^3+3x}{7-2x} > \sqrt{2-x}\,.$$

Problem T7/459. Given an acute and non-isosceles triangle ABC with the altitudes AH, BE, CF. Let I be the incenter of ABC (the center of the inscribed circle) and R be the circumradius of ABC (the radius of the circumscribed circle). Let M, N, and P respectively be the midpoints of BC, CA, and AB. Assume that K, J, and L respectively are the intersections between MI and AH, NI and BE, and PI and CF. Prove that $\frac{1}{HK}+\frac{1}{EJ}+\frac{1}{FL}>\frac{3}{R}$.

Problem T8/459. Let a, b, c be the lengths of three sides of a triangle whose perimeter is equal to 3. Find the minimum value of the expression

$$T=a^3+b^3+c^3+\sqrt{5}abc.$$

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T9/459. For every positive integer n prove that the following numbers are perfect square

$$10\left(\left[(4+\sqrt{15})^n\right]+1\right)\left(\left[(4+\sqrt{15})^{n+1}\right]+1\right)-60,$$

$$6\left(\left[(4+\sqrt{15})^n\right]+1\right)\left(\left[(4+\sqrt{15})^{n+1}\right]+1\right)-60,$$

$$15\left(\left[(4+\sqrt{15})^n\right]+1\right)^2-60,$$ where $[x]$ is the integral part of x.

Problem T10/459. Let $f(x)=x^3-3x^2+1$.

a) Find the number of different real solutions of the equation $f(f(x))=0$.

b) Let α be the maximal positive solution of $f(x)$. Prove that $\left[\alpha^{2020}\right]$ is divisible by 17 (notice that $[x]$ is the integer part of x).

Problem T11/459. Give the sequence (u_n) where $u_1=2, u_2=20, u_3=56,$ and $u_{n+3}=7u_{n+2}-11u_{n+1}+5u_n-3.2^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Find the remainder of the division u_{2011} by 2011.

Problem T12/459. Consider any triangle ABC and any line d. Let A_1, B_1, C_1 are the orthogonal projections of A, B, C onto d. It is a fact that the line through A_1 and perpendicular to BC, the line through B_1 and perpendicular to AC, and the line through C_1 and perpendicular to AB are concurrent at a point which is called the *orthogonal pole* of d with respect to ABC. Prove that for any triangle and any point P on its circumcircle, the Simson line corresponding to P bisects the line segment connecting P and the orthogonal pole of the Simson line with respect to the given triangle.

Translated by ***NGUYEN PHU HOANG LAN***
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

HÀM SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MỘT DẠNG BẤT ĐẲNG THỨC VÀ ỨNG DỤNG

ĐẶNG THANH HẢI
(GV THPT Triệu Quang Phục, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Trong quá trình giải toán về BĐT ta hay gặp dạng bài toán: "*Cho các số thực* $a_1, a_2 ..., a_n \in D$ *thỏa mãn* $g(a_1)+g(a_2)+...+g(a_n) \geq (\leq) n.g(\alpha)$ *với số thực* $\alpha \in D$. *Chứng minh rằng*:

$$f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n) \geq (\leq) n.f(\alpha)\text{"}$$

Đây là dạng toán thường gặp và học sinh cũng dễ dàng nhận diện khi gặp dạng BĐT này. Trên tạp chí TH&TT đã có những tác giả đưa ra một số phương pháp giải bài toán này, chẳng hạn như : "*Phương pháp tiếp tuyến*"; "*Phương pháp hệ phương trình đặc trưng*" và gần đây là " *Phương pháp dùng nghiệm bội*",...

Để làm phong phú thêm phương pháp giải dạng bài toán trên, sau đây tôi xin trình bày một phương pháp giải là: "*Phương pháp dùng hàm số đặc trưng*". Ta chia dạng bài toán trên thành 3 loại thường gặp để dễ nhận diện:

1. *Dạng bài toán thể hiện sẵn các hàm f(t) và g(t).*
2. *Dạng BĐT phải biến đổi để xuất hiện hàm f(t) và g(t).*
3. *Dạng toán với BĐT thuần nhất đồng bậc.*

Để giải chúng, ta thực hiện các bước sau:

***Bước 1**: Xác định điểm rơi (điểm xảy ra dấu bằng)*

- Với các bài toán dạng này thì dấu đẳng thức thường xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = \alpha$.
- Nếu dấu "=" xảy ra tại nhiều điểm thì tùy theo bài toán cần mà ta sẽ xác định điểm rơi chính (với bài toán cực trị đạt tại biên).

***Bước 2**: Khảo sát hàm số đặc trưng của bài toán*:

$$h(t) = f(t) - mg(t), \forall t \in D.$$

Ta cần biểu diễn $f(a_i)$ qua $g(a_i)$, $i=\overline{1,n}$ để sử dụng được giả thiết. Do vậy, xét hàm số $h(t) = f(t) - mg(t), \forall t \in D$. Số m được xác định sao cho $h(t)$ đạt cực tiểu tại $t_0 = \alpha$, thường thì $h'(\alpha)=0$, từ đó có $m = \dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$. Khảo sát hàm số $h(t)$ để đánh giá $f(t)$ thông qua hàm trung gian $g(t)$. (Việc chứng minh với dấu $\leq$ hoàn toàn tương tự với α là điểm cực đại của hàm số).

***Bước 3**: Xét sự biến thiên của hàm số đặc trưng trên miền D. Từ đó chứng minh được bài toán.*

MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

1. Dạng bài toán thể hiện sẵn các hàm f(t) và g(t)

Bài toán 1.1. (*MO - Hong Kong - 2005*). *Cho các số a, b, c, d dương có tổng bằng 1. Chứng minh*

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq (a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{8}.$$

Phân tích. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{4}$. Xét hàm $f(x)=6x^3-x^2; g(x)=x; \alpha=\dfrac{1}{4};$

$$f'(x)=18x^2-2x \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}; g'\left(\frac{1}{4}\right)=1.$$

Nên $m = \dfrac{f'\left(\frac{1}{4}\right)}{g'\left(\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{5}{8}$. Do đó hàm $h(t)$ cần xét sẽ là:

$$h(t)=6t^3-t^2-\frac{5t}{8} \text{ với } t \in (0;1).$$

Lời giải. Xét hàm số: $h(t)=6t^3-t^2-\dfrac{5t}{8}$ trên $(0;1)$.

Ta có $h'(t)=18t^2-2t-\dfrac{5}{8}=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{5}{36}$ (loại); $t=\dfrac{1}{4}$. Ta có bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{4}$		1
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta được: $h(t) \geq -\dfrac{1}{8}$ với $\forall t \in (0,1)$, tức là $6t^3 \geq t^2 + \dfrac{5}{8}t - \dfrac{1}{8}$. Thay t lần lượt bởi a,b,c,d rồi cộng các vế lại ta được:

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq (a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$+\frac{5}{8}(a+b+c+d)-\frac{4}{8}=a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}. \square$$

Bài toán 1.2. (ĐH khối A - 2003) *Cho x,y,z là ba số dương thỏa mãn: $x+y+z\leq 1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\geq\sqrt{82} \quad (1)$$

Phân tích. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Xét $g(t)=t$, $f(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}$. Ta có: $3g(\alpha)=1$ $\Rightarrow \alpha=\frac{1}{3}$, $g'\left(\frac{1}{3}\right)=1$, $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{40\sqrt{82}}{41}$ nên $m=\frac{f'\left(\frac{1}{3}\right)}{g'\left(\frac{1}{3}\right)}=-\frac{40\sqrt{82}}{41}$. Suy ra:

$$h(t)=f(t)+\frac{40\sqrt{82}}{41}g(t),\ t\in(0;1).$$

Lời giải. Xét hàm số $h(t)=\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}+\frac{40\sqrt{82}}{41}t$ với $t\in(0,1)$. Ta có:

$$h'(t)=\frac{t^4-1}{t^2\sqrt{t^4+1}}+\frac{40\sqrt{82}}{41}=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\in(0;1).$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	$\searrow$	$\frac{27\sqrt{82}}{41}$	$\nearrow$

Từ đó: $h(t)\geq\frac{27\sqrt{82}}{41}$, $\forall t\in(0;1)$

hay $\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}\geq-\frac{40\sqrt{82}}{41}t+\frac{27\sqrt{82}}{41}$. Vậy

$$\text{VT}(1)\geq-\frac{40\sqrt{82}}{41}(x+y+z)+\frac{27.3.\sqrt{82}}{41}\geq\sqrt{82}. \square$$

Bài toán 1.3. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c}-(a+b+c)$.*

Phân tích. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1\Rightarrow$ $\alpha=1$. Trong bài này: $g(t)=t^2$, $f(t)=\sqrt{3+t}-t$, $m=\frac{f'(1)}{g'(1)}=-\frac{3}{8}$. Hàm cần xét là

$$h(t)=\sqrt{3+t}-t+\frac{3}{8}t^2 \text{ với } t\in(0;3).$$

Lời giải. Xét hàm số $h(t)=\sqrt{3+t}-t+\frac{3}{8}t^2$ với $t\in(0;3)$. Ta có: $h'(t)=\frac{1}{2\sqrt{3+t}}+\frac{3}{4}t-1=0$

$$\Leftrightarrow t=1\in(0;3).$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	1	3
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	$\searrow$	$\frac{11}{8}$	$\nearrow$

Do đó: $h(t)=\sqrt{3+t}-t+\frac{3}{8}t^2\geq\frac{11}{8}$, $\forall t\in(0;3)$.

$$h(t)=\frac{11}{8}\Leftrightarrow t=1\Rightarrow P\geq 3.\frac{11}{8}-\frac{3}{8}\left(a^2+b^2+c^2\right)=3.$$

Vậy $\min P=3$ đạt được khi $a=b=c=1$. $\square$

Bài toán 1.4. *Với các số x, y, z dương thỏa mãn $x+y+z\leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{8-\sqrt{x}}+\frac{1}{8-\sqrt{y}}+\frac{1}{8-\sqrt{z}}.$$

Hướng dẫn. Xét hàm số $h(t)=\frac{1}{8-\sqrt{t}}-\frac{1}{144}t$ trên khoảng $(0;12)$. Lập bảng biến thiên ta suy ra: $h(t)\leq\frac{5}{36}$. Khi đó ta có:

$$P\leq\frac{1}{144}(x+y+z)+\frac{3.5}{36}\leq\frac{1}{12}+\frac{15}{36}=\frac{1}{2}.$$

$\max P=\frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=4$. $\square$

BÀI TẬP CÙNG DẠNG

1. Cho a,b,c dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Chứng minh rằng $\frac{2a+1}{\sqrt{3a+1}}+\frac{2b+1}{\sqrt{3b+1}}+\frac{2c+1}{\sqrt{3c+1}}\geq\frac{9}{2}$.

2. (*Học viện BCVT* - 2001) Chứng minh rằng với mọi a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ thì

$$\frac{1}{3^a}+\frac{1}{3^b}+\frac{1}{3^c}\geq 3\left(\frac{a}{3^a}+\frac{b}{3^b}+\frac{c}{3^c}\right).$$

3. (*MO - Rumania* - 2005) Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

4. Giả sử *a, b,c* là các số dương có tích bằng 1.

Chứng minh $\dfrac{1}{a^2-a+1}+\dfrac{1}{b^2-b+1}+\dfrac{1}{c^2-c+1}\ge 1.$

2. *Dạng bài toán phải biến đổi để xuất hiện hàm f(t) và g(t)*

Với dạng bài tập này học sinh cần linh hoạt, sáng tạo để biến đổi, đánh giá được BĐT, đưa về dạng đang xét.

Bài toán 2.1. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}}+\frac{b}{\sqrt{1+b}}+\frac{c}{\sqrt{1+c}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Phân tích. Giả thiết *a, b, c* là các số dương, tích $abc=1$ sẽ được đưa về đẳng thức đối xứng của tổng bằng cách lấy lôgarit nêpe hai vế rồi đặt $x=\ln a$, $y=\ln b$, $z=\ln c$. Xét hàm $g(t)=t$, $f(t)=\dfrac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$.

Ta có: $3g(\alpha)=0\Rightarrow\alpha=0$, $g'(0)=1$;

$$f'(t)=\frac{e^{2t}+2e^t}{2\sqrt{(1+e^t)^3}},\ f'(0)=\frac{3\sqrt{2}}{8};\ m=\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Do đó $h(t)=\dfrac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}t.$

Lời giải. Từ *a, b, c* dương, lấy lôgarit nêpe hai vế của $abc=1$ ta được $\ln a+\ln b+\ln c=0$. Đặt $\ln a=x$, $\ln b=y$, $\ln c=z$, ta có giả thiết: $x, y, z\in\mathbb{R}$ và $x+y+z=0$. BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{e^y}{\sqrt{1+e^y}}+\frac{e^z}{\sqrt{1+e^z}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}t$ thì

$$h'(t)=\frac{e^{2t}+2e^t}{2\sqrt{(1+e^t)^3}}-\frac{3\sqrt{2}}{8}=0\Leftrightarrow t=0.$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(t)$	$-$	0	$+$
$h(t)$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$

Từ bảng biến thiên ta được: $h(t)\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$ tức là: $\dfrac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}\ge\dfrac{3\sqrt{2}}{8}t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Thay *t* lần lượt bởi *x, y, z* rồi cộng các vế lại ta được:

$$\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{e^y}{\sqrt{1+e^y}}+\frac{e^z}{\sqrt{1+e^z}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{8}(x+y+z)+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=0$ hay $a=b=c=1$. ❑

Bài toán 2.2 . *Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn* $a+b+c=1$. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\ge\frac{9}{10}\quad(1).$$

Phân tích. Để đưa về dạng toán đang xét, ta sử dụng đánh giá $xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}, \forall x,y\ge 0$. Khi đó:

$$\text{VT}(1)=\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\ge\frac{a}{1+\frac{(b+c)^2}{4}}+\frac{b}{1+\frac{(a+c)^2}{4}}+\frac{c}{1+\frac{(a+b)^2}{2}}$$

$$=\frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5}.$$

Bài toán trở thành: Với *a, b, c* là các số dương thỏa mãn $a+b+c=1$, chứng minh rằng:

$$\frac{4a}{a^2-2a+5}+\frac{4b}{b^2-2b+5}+\frac{4c}{c^2-2c+5}\ge\frac{9}{10}\quad(2).$$ ❑

Nhận xét. Việc chứng minh (2) lúc này hết sức đơn giản. Bạn đọc hoàn toàn có thể làm được theo phương pháp đã trình bày.

BÀI TẬP CÙNG DẠNG

1. Cho *a, b, c* dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2. Cho *a, b ,c* dương và thỏa mãn: $a+b+c=9$. Tìm GTNN của $P=\dfrac{a^3+b^3}{ab+9}+\dfrac{b^3+c^3}{bc+9}+\dfrac{c^3+a^3}{ca+9}$.

3. Cho *a, b, c* dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

4. Cho a, b, c dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\le 1.$

3. Dạng toán với BĐT thuần nhất đồng bậc:

Bài toán 3.1: (*MO-USA*-2003) Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(2c+b+a)^2}{2c^2+(b+a)^2}\le 8 \quad (1)$$

Phân tích. BĐT là đối xứng thuần nhất bậc 2 nên có thể đặt $a+b+c=1$, $a,b,c\in(0;1)$ khi đó BĐT có dạng: $\frac{(a+1)^2}{3a^2-2a+1}+\frac{(b+1)^2}{3b^2-2b+1}+\frac{(c+1)^2}{3c^2-2c+1}\le 8$

$$\Leftrightarrow \frac{4a+1}{3a^2-2a+1}+\frac{4b+1}{3b^2-2b+1}+\frac{4c+1}{3c^2-2c+1}\le\frac{21}{2} \quad (2)$$

Đặt $f(t)=\frac{4t+1}{3t^2-2t+1}$; $f'(t)=\frac{-12t^2-6t+6}{(3t^2-2t+1)^2}$;

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=6$; $g(t)=t$; $\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow m=f'\left(\frac{1}{3}\right):g'\left(\frac{1}{3}\right)=6.$

Vậy hàm cần xét là: $h(t)=\frac{4t+1}{3t^2-2t+1}-6t.$

Lời giải. Xét hàm số: $h(t)=\frac{4t+1}{3t^2-2t+1}-6t$; $t\in(0;1)$. Ta có: $h'(t)=\frac{-12t^2-6t+6}{(3t^2-2t+1)^2}-6=0$

$\Leftrightarrow -2t^2-t+1=9t^4+4t^2+1-4t-12t^3+6t^2$

$\Leftrightarrow 3t^4-4t^3+4t^2-t=0\Leftrightarrow t=0$ (loại); $t=\frac{1}{3}$.

Ta có bảng biến thiên :

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$h'(t)$	$+$	0	$-$
$h(t)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$

Từ bảng biến thiên ta được: $h(t)\le\frac{3}{2}$, $\forall t\in(0;1)$ hay $\frac{4t+1}{3t^2-2t+1}\le 6t+\frac{3}{2}$ $\forall t\in(0;1)$. Thay t lần lượt bởi x, y, z. Ta được VT(2) $\le 6(x+y+z)+\frac{9}{2}=\frac{21}{2}$. ❑

Bài toán 3.2. (*MO – Japan* – 1997) *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{(-a+b+c)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(-b+a+c)^2}{b^2+(a+c)^2}+\frac{(-c+b+a)^2}{c^2+(b+a)^2}\ge\frac{3}{5}.$$

Phân tích. BĐT đối xứng đối với a, b, c nên có thể giả sử $a+b+c=1$; $a,b,c\in(0;1)$. Khi đó BĐT đã cho trở thành:

$$\frac{(1-2a)^2}{a^2+(1-a)^2}+\frac{(1-2b)^2}{b^2+(1-b)^2}+\frac{(1-2c)^2}{c^2+(1-c)^2}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2-2a+1}+\frac{1}{2b^2-2b+1}+\frac{1}{2c^2-2c+1}\le\frac{27}{5}.$$

$f(t)=\frac{1}{2t^2-2t+1}$; $g(t)=t$; $t\in(0;1)$;

$\alpha=\frac{1}{3}$; $f'(t)=\frac{-4t+2}{(2t^2-2t+1)^2}$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{54}{25}\Rightarrow$ hàm cần xét là $h(t)=\frac{1}{2t^2-2t+1}-\frac{54}{25}t$; khảo sát $h(t)$ trên $(0,1)$ thì $h(t)\le\frac{27}{25}\Rightarrow f(t)\le\frac{54t+27}{25}$

$$\Rightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{54}{25}(a+b+c)+\frac{3.27}{25}=\frac{27}{5}.$$

Từ đó ta dễ dàng suy ra lời giải của bài toán này.

Bài toán 3.3. *Cho a,b,c là ba số dương. Chứng minh rằng:* $\frac{a}{(c+b)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(a+b+c)}.$

Phân tích. BĐT đối xứng với a, b, c nên không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c=1$, $a,b,c\in(0;1)$.

BĐT trở thành: $\frac{a}{(1-a)^2}+\frac{b}{(1-b)^2}+\frac{c}{(1-c)^2}\ge\frac{9}{4}.$

Với $f(t)=\frac{t}{(1-t)^2}$; $g(t)=t$; $\alpha=\frac{1}{3}$; $f'(t)=\frac{1+t}{(1-t)^3}$;

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}\Rightarrow m=\frac{9}{2}$. Hàm số cần xét sẽ là $h(t)=\frac{t}{(1-t)^2}-\frac{9t}{2}$. Khảo sát sự biến thiên của $h(t)$ ta được $h(t)\ge-\frac{3}{4}$ hay $\frac{t}{(1-t)^2}\ge\frac{9t}{2}-\frac{3}{4}$ và lời giải của bài toán đã trở lên đơn giản.

BÀI TẬP CÙNG DẠNG

1. Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

2. Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

3. Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^3+c^3}+\frac{b^4}{c^3+a^3}+\frac{c^4}{a^3+b^3}\ge\frac{a+b+c}{2}.$$

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 459 (9.2015)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1. Đoàn Việt Nam tại Kỳ thi Olympic Tin học Quốc tế 2015.

Từ trái qua phải: Thầy *Phạm Bảo Sơn* (Trưởng đoàn), Em *Nguyễn Việt Dũng*, Em *Nguyễn Tiến Trung Kiên*, Em *Phan Đức Nhật Minh*, Em *Phạm Văn Hạnh*, Thầy *Nguyễn Đức Nghĩa* (Phó trưởng đoàn).

MỘT NỬA THẾ KỶ A0 TỔNG HỢP

PGS.TS.NGUT **Nguyễn Vũ Lương**
Hiệu trưởng nhà trường

Tập thể giáo viên A0 - Tổng hợp

Khối Chuyên Toán - Tin (A0), Trường Trung học Phổ thông chuyên Khoa học Tự nhiên, có tiền thân là Khối Phổ thông chuyên Toán, được thành lập tháng 9 năm 1965, theo quyết định của Cố Thủ tướng *Phạm Văn Đồng* để thành lập lớp Toán "*đặc biệt*" đặt tại Khoa Toán, Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội. Lớp có nhiệm vụ phát hiện, đào tạo, bồi dưỡng những học sinh năng khiếu Toán học, giáo dục phổ thông với chất lượng cao nhằm cung cấp những cán bộ khoa học kỹ thuật xuất sắc xây dựng và bảo vệ tổ quốc, tạo nguồn đào tạo đội ngũ những nhà khoa học tài năng cho đất nước sau này. Tới nay Khối A0 đã phát triển vượt bậc, trở thành một trung tâm đào tạo học sinh năng khiếu Toán - Tin hàng đầu Việt Nam.

Từ năm 1994 trên nền tảng đào tạo vững chắc về Toán, Khối được giao thêm nhiệm vụ đào tạo học sinh năng khiếu về Tin học cho đất nước trong thời kỳ phát triển như vũ bão của Tin học, và được đổi tên thành Khối Phổ thông chuyên Toán – Tin.
Đến năm 2010, Trường Trung học Phổ thông chuyên Khoa học Tự nhiên được thành lập, khi đó Khối trở thành bộ môn chuyên Toán - Tin của trường.

Từ khi thành lập đến nay, học sinh của Khối A0 đã đạt được 103 huy chương Olympic Quốc tế (Toán học: 68 Huy chương, Tin học: 35 Huy chương), trong đó: 30 Huy chương Vàng (HCV), 40 Huy chương Bạc (HCB), 33 Huy chương Đồng (HCĐ). Bên cạnh đó, trong kì thi Olympic Toán và khu vực Châu Á Thái Bình Dương học sinh của Khối đạt 2 HCV, 1 HCB, 6 HCĐ và 2 Bằng khen môn Toán (trong hai năm 1996, 2001) và 4 HCV, 6 HCB môn Tin học (từ năm 2012 đến 2015). Đặc biệt trong năm học 2014-2015 này, học sinh của Khối đã giành được 1 HCV, 1 HCB trong kì thi Olympic Toán học Quốc tế; đội tuyển Tin học thi Quốc tế của Việt Nam có 4 học sinh đều là của Khối và các em đã đạt được 1 HCV và 3 HCB, trong kì Olympic Tin học Khu vực Châu Á Thái Bình Dương học sinh của khối đạt được 3 HCV và 2 HCB. Khối có bề dày thành tích mà đến nay không một đơn vị đào tạo nào trong cả nước có thể đạt được.

Sự thành công của học sinh Khối chuyên Toán A0 Đại học Tổng hợp được xã hội ghi nhận. Một số lượng lớn học sinh của Khối đã trở thành các nhà khoa học nổi tiếng thế giới như GS. *Ngô Bảo Châu*, GS. *Đàm Thanh Sơn* và nhiều giáo sư tại các trường nổi tiếng khác; nhiều nhà lãnh đạo xuất sắc, nhiều doanh nhân thành đạt. Các thế hệ học sinh chuyên Toán – Tin đã đạt được nhiều thành công trong các lĩnh vực, đảm nhiệm nhiều vị trí quan trọng trong và ngoài nước, góp phần xây dựng và phát triển đất nước.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT9M5
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2015
Giá: 10.000 đồng
Mười nghìn đồng