https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

3 2011 Số 405

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn *Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre*

ĐOÀN THANH NIÊN CỘNG SẢN HỒ CHÍ MINH

26-3
1931-2011

Chào mừng 80 năm
THÀNH LẬP ĐOÀN TNCS HỒ CHÍ MINH

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trong chương trình Toán lớp 9 khi học phần đồ thị hàm số có một số bài tập liên quan đến giao điểm của đường thẳng (d): $y = ax + b$ và parabol (P): $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Nếu khéo léo sử dụng hệ thức Viète thì lời giải bài toán sẽ ngắn gọn, dễ hiểu hơn. Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu với các bạn thuật toán trên.

Sử dụng định lí VIÈTE để giải một số bài toán về hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$

CAO QUỐC CƯỜNG
(GV THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

★**Thí dụ 1.** *Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx - m + 1$ $(m \neq 0)$.*
Tìm m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải. PT hoành độ giao điểm giữa (P) và (d) là
$x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (*)

Có $\Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \ \forall m.$

Vậy PT(*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 hay (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B.
Theo hệ thức Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1x_2 = m - 1$.
$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$
$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m-1) = 4 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m \neq 0$). ❐

★**Thí dụ 2.** *Cho parabol (P): $y = ax^2$ $(a > 0)$ và đường thẳng (d): $2x - y - a^2 = 0$.*
a) Tìm a để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B.
b) Gọi x_A, x_B là hoành độ của hai điểm A, B. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A.x_B}.$$

Lời giải. a) PT hoành độ giao điểm giữa (P) và (d) là
$ax^2 = 2x - a^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^2 = 0$ (1)
Điều kiện cần và đủ để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B là PT(1) có hai nghiệm phân biệt $x_A, x_B \Leftrightarrow \Delta' = 1 - a^3 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$ (do $a > 0$).

b) Áp dụng hệ thức Viète cho PT(1) ta có

$$x_A + x_B = \frac{2}{a}; \ x_A.x_B = a.$$

Thay vào T thu được

$$T = \frac{4}{x_A + x_B} + \frac{1}{x_A.x_B} = 2a + \frac{1}{a}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương $2a$ và $\frac{1}{a}$, ta có $T \geq 2\sqrt{2a.\frac{1}{a}} = 2\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $2a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $2\sqrt{2}$ đạt được khi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ❐

★**Thí dụ 3.** *Viết phương trình các đường thẳng đi qua điểm I(0 ; 1) và cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho độ dài đoạn thẳng $MN = 2\sqrt{10}$.*

Lời giải. Vì đường thẳng $x = 0$ đi qua điểm $I(0 ; 1)$ tiếp xúc với parabol (P) tại điểm $O(0 ; 0)$ nên PT các đường thẳng thoả mãn đề bài là (d): $y = ax + 1$. PT hoành độ giao điểm giữa (d) và (P) là $x^2 = ax + 1 \Leftrightarrow x^2 - ax - 1 = 0$ (*)

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi PT (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta = a^2 + 4 > 0$ (luôn đúng). Khi đó toạ độ các giao điểm là $M(x_1 ; x_1^2)$, $N(x_2 ; x_2^2)$.

Ta có $MN = 2\sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \left((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right)\left(1 + (x_1 + x_2)^2\right) = 40 \quad (1)$$

Áp dụng hệ thức Viète cho PT(*), ta được

$$x_1 + x_2 = a; \ x_1x_2 = -1.$$

NGODUCTHODUONGMINHCHAU
DD: 0986885389

Thay vào (1), thu được $(a^2+4)(1+a^2)=40$
$\Leftrightarrow a^4+5a^2-36=0 \Leftrightarrow a=\pm 2.$
Vậy PT các đường thẳng cần lập là $y=2x+1$ và $y=-2x+1$. ❐

★**Thí dụ 4.** *Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P): $y=-\frac{1}{2}x^2$; điểm $I(0;-2)$ và điểm $M(m;0)$ (với m là tham số, $m\neq 0$). Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, I. Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với độ dài đoạn thẳng AB lớn hơn 4.*

Lời giải. PT đường thẳng (*d*) đi qua hai điểm $I(0;-2)$ và $M(m;0)$ là $y=\frac{2}{m}x-2$.

PT hoành độ giao điểm giữa (*d*) và (*P*) là

$$-\frac{1}{2}x^2=\frac{2}{m}x-2 \Leftrightarrow mx^2+4x-4m=0 \qquad (*)$$

Có $\Delta'=4+4m^2>0$ ($\forall m$). Vậy PT(*) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt, chứng tỏ (*d*) luôn cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt *A*, *B*. Khi đó, toạ độ các giao điểm *A*, *B* là $A\left(x_1;-\frac{x_1^2}{2}\right)$; $B\left(x_2;-\frac{x_2^2}{2}\right)$.

Từ đó

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+\frac{(x_1-x_2)^2(x_1+x_2)^2}{4}$$
$$=\left((x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right)\left(1+\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right) \qquad (1)$$

Áp dụng hệ thức Viète cho PT(*), ta có

$$x_1+x_2=-\frac{4}{m};\ x_1.x_2=-4.$$

Thay vào (1) thu được

$$AB^2=\left(\left(\frac{-4}{m}\right)^2-4.(-4)\right)\left(1+\frac{16}{m^2}\right)$$
$$=\left(\frac{16}{m^2}+16\right)\left(1+\frac{4}{m^2}\right)>16\ (\forall m).$$

Suy ra $AB>4$ (đpcm). ❐

★**Thí dụ 5.** *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho parabol (P): $y=-\frac{1}{2}x^2$. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm $I(0;-2)$ và có hệ số góc k.*

a) Viết phương trình đường thẳng (d). Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi k thay đổi.

b) Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A và B lên trục hoành. Chứng minh rằng tam giác IHK vuông tại I.

Lời giải. a) PT đường thẳng (*d*) có hệ số góc *k* và đi qua điểm $I(0;-2)$ là $y=kx-2$.
PT hoành độ giao điểm giữa (*d*) và (*P*) là

$$-\frac{1}{2}x^2=kx-2 \Leftrightarrow x^2+2kx-4=0 \qquad (*)$$

Có $\Delta'=k^2+4>0$ ($\forall k$). Vậy PT(*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Chứng tỏ (*d*) luôn cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt *A*, *B*.

b) Theo hệ thức Viète, ta có $x_1.x_2=-4$. Giả sử toạ độ các điểm *A*, *B* là $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

Vì *H*, *K* theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của *A*, *B* lên trục hoành nên toạ độ các điểm *H*, *K* là $H(x_1;0)$, $K(x_2;0)$.

Do đó $IH^2=x_1^2+4$; $IK^2=x_2^2+4$; $HK^2=(x_1-x_2)^2$.

Suy ra $IH^2+IK^2=x_1^2+x_2^2+8=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1-x_2)^2=HK^2$.

Chứng tỏ tam giác *IKH* vuông tại *I* (theo định lí Pythagore đảo). ❐

Cuối cùng mời các bạn cùng luyện tập thông qua các bài toán sau:

1. Cho parabol (*P*): $y=3x^2$ và đường thẳng (*d*): $y=2x-m+1$ ($m\neq 0$). Tìm các giá trị của *m* sao cho đường thẳng (*d*) cắt parabol (*P*) tại hai điểm phân biệt *A*, *B* có hoành độ x_1, x_2 thoả mãn $|x_1-x_2|=5$.

2. Cho parabol (*P*): $y=x^2$ và
đường thẳng (*d*) : $y=mx+4$ (*m* là tham số).

a) Chứng minh rằng đường thẳng (*d*) luôn cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt *A*, *B* với mọi giá trị của *m*.

b) Tìm các giá trị của *m* để đoạn thẳng *AB* có độ dài ngắn nhất.

3. Viết phương trình các đường thẳng đi qua điểm $I(0;-4)$ và cắt parabol $y=\frac{1}{4}x^2$ tại hai điểm phân biệt *M*, *N* sao cho độ dài đoạn thẳng $MN=3\sqrt{5}$.

4. Cho parabol (*P*): $y=x^2$ và
đường thẳng (*d*): $y=2x+m$ (*m* là tham số).

a) Tìm các giá trị của *m* để đường thẳng (*d*) cắt parabol (*P*) tại hai điểm phân biệt *A*, *B*.

b) Tìm toạ độ trung điểm *I* của đoạn thẳng *AB* theo tham số *m*.

Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA

NĂM HỌC 2010 – 2011

(Đề thi đã đăng trên THTT số 404, tháng 2 năm 2011)

Câu 1. a) Ta có $x^3+3x-140=0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+5x+28)=0 \Leftrightarrow x=5.$

b) Vì $P^3=140-3P \Leftrightarrow P^3+3P-140=0.$

Nên P là nghiệm của phương trình

$$x^3+3x-140=0.$$

Suy ra $P=5$.

Câu 2. a) Giả sử $E(0\,;\,y_0)$ là một điểm trên trục tung và $M\left(x;\frac{1}{4}x^2\right)\in(P)$. Gọi h là khoảng cách từ điểm M đến (d). Ta có $ME=h$

$$\Leftrightarrow x^2+\left(\frac{1}{4}x^2-y_0\right)^2=\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)^2, \forall x$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y_0\right)+y_0^2-1=0, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}y_0=0\\ y_0^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow y_0=1. \text{ Vậy } E(0\,;\,1).$$

b) Ta có

$$(a+b+c)^2=(a+(b+c))^2\ge 4a(b+c).$$

Do $a+b+c=1$ nên từ BĐT trên suy ra

$$1\ge 4a(b+c)\Leftrightarrow b+c\ge 4a(b+c)^2.$$

Lại có $(b+c)^2\ge 4bc$. Suy ra $b+c\ge 16abc$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{2}$; $b=c=\frac{1}{4}$.

Câu 3. *Trên THTT số 404 trang 4, ở **Câu 3** đã in nhầm giả thiết $x>0$, $y>0$. Xin sửa lại là $x>0$, $y<0$. Thành thật xin lỗi bạn đọc!*

Vì $\left|x+\frac{1}{y}\right|\ge x+\frac{1}{y}$ và $\left|\frac{10}{3}-x+y\right|\ge\frac{10}{3}-x+y.$

Nên $\left|x+\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{10}{3}-x+y\right|\ge\frac{10}{3}+y+\frac{1}{y}.$

Từ PT thứ nhất của hệ suy ra

$$\begin{cases}x+\frac{1}{y}\ge 0 & (1)\\ \frac{10}{3}-x+y\ge 0 & (2)\end{cases}$$

Do đó, ta có

$$\frac{10}{3}+y+\frac{1}{y}\ge 0\Leftrightarrow y^2+\frac{10}{3}y+1\le 0 \quad (3)$$

Do $x^2+y^2=\frac{82}{9}$, và $x>0$ nên

$$(2)\Leftrightarrow\left(\frac{10}{3}+y\right)^2\ge x^2\Leftrightarrow\left(\frac{10}{3}+y\right)^2+y^2\ge\frac{82}{9}$$

$$\Leftrightarrow y^2+\frac{10}{3}y+1\ge 0 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$y^2+\frac{10}{3}y+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-3\\ y=-\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

HPT có nghiệm $(x\,;\,y)$ là $\left(\frac{1}{3};-3\right)$ và $\left(3;-\frac{1}{3}\right)$.

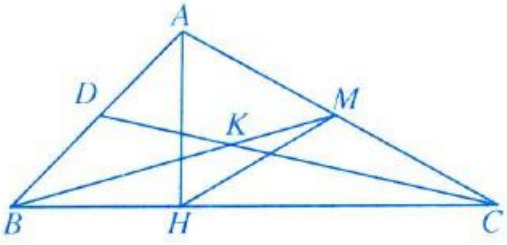
Câu 4.

a) Ta có $MH=MA=MC$, suy ra $\widehat{MHC}=\widehat{MCH}=2\widehat{BCK}$.

Do $KB=KC$ (giả thiết) nên $\widehat{KBC}=\widehat{KCB}$. Từ đó $\widehat{MHC}=2\widehat{KBC}$, mà $\widehat{MHC}=\widehat{KBC}+\widehat{HMB}$, suy ra $\widehat{KBC}=\widehat{HMB}$. Do đó tam giác HMB cân tại H, hay $MH=HB$.

Giả sử $HA>HB$, khi đó $\widehat{ABH}>\widehat{BAH}$ suy ra $\widehat{BAH}<45^\circ$ và $\widehat{ABH}>45^\circ$.

Vì $\widehat{BAH}+\widehat{CAH}=105^\circ$ nên $\widehat{CAH}>60^\circ$. Tam giác AMH cân tại M nên $\widehat{AHM}=\widehat{HAM}>60^\circ$. Suy ra $\widehat{AMH}<60^\circ$. Do đó $HA<MH=HB$



(mâu thuẫn). Tương tự, nếu $HA<HB$ ta cũng gặp điều mâu thuẫn. Vậy $HA=HB$.

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI

NĂM HỌC 2010 – 2011

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (2,5 *điểm*)

a) Thu gọn biểu thức

$$M=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{9}{\sqrt{x}}\right),$$

với $x>0;\ x\neq 9$.

b) Giải phương trình $\dfrac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}+x^2-16=0$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{y+1}=7\\ \dfrac{5}{x-1}-\dfrac{2}{y+1}=4.\end{cases}$

Câu 2. (2 *điểm*)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $n^3-n^2-7n+10$ là một số nguyên tố.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn phương trình $2010^x=2009^y+2008^z$.

Câu 3. (1,5 *điểm*) Cho phương trình

$$x^2-mx+m-1=0.$$

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Đặt $A=\dfrac{4x_1x_2+6}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}$.

Với giá trị nào của m thì A đạt giá trị nhỏ nhất ?

c) Tìm tất cả các số nguyên dương m để A nhận giá trị nguyên.

Câu 4. (2,5 *điểm*)

Cho tam giác ABC có $AC=3AB=3a$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $\widehat{ADB}=30^\circ$. Đường thẳng vuông góc với AD tại D cắt tia AB ở E và cắt cạnh AC ở F. Hạ EK vuông góc với $AC\,(K\in AC)$.

a) Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo a.

b) Chứng minh ba đường thẳng AD, BF và EK đồng quy.

Câu 5. (1,5 *điểm*)

a) Tam giác KLM có các đường phân giác trong là KN và LP cắt nhau tại Q $(N\in LM; P\in KM)$. Giả sử tứ giác $MNQP$ nội tiếp và $PN=2$. Tính số đo các góc và các cạnh của tam giác NPQ.

b) Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC}=108^\circ$. Tính tỉ số $\dfrac{BC}{AC}$.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)
sưu tầm và giới thiệu

---

b) Từ a) suy ra tam giác AHB vuông cân tại H nên $\widehat{BAH}=\widehat{ABH}=45^\circ$, suy ra $\widehat{HAC}=60^\circ$ và $\widehat{ACB}=30^\circ$.

Câu 5. a) Đặt $y=\dfrac{4x-1}{3}$, PT đã cho trở thành

$$\left[y+\frac{1}{2}\right]+[y]=\frac{4y-1}{3}.$$

Từ hệ thức $\left[y+\dfrac{1}{2}\right]=[2y]-[y]$,

suy ra $[2y]=\dfrac{4y-1}{3}$.

Đặt $t=\dfrac{4y-1}{3}$, $t\in\mathbb{Z}$ ta có $\left[\dfrac{3t+1}{2}\right]=t$

$\Rightarrow t\le\dfrac{3t+1}{2}<t+1\Leftrightarrow -1\le t<1$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=0\end{array}\right.$ (do $t\in\mathbb{Z}$).

ĐS. $x=-\dfrac{1}{8}; x=\dfrac{8}{16}$.

PHẠM NGỌC QUANG
(Sở GD&ĐT Thanh Hoá) sưu tầm và giới thiệu

Bài toán XÁC ĐỊNH TÂM HÌNH CẦU ngoại tiếp khối đa diện

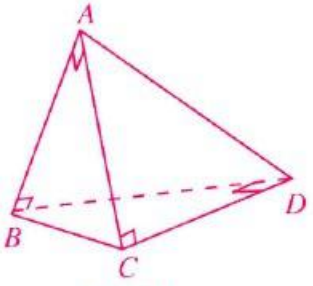
PHAN CUNG ĐỨC
(GV trường chuyên KHTN, ĐHKHTN Hà Nội)

Trong cuốn "Tuyển chọn theo chuyên đề chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học – Cao Đẳng môn Toán", tập 2, tác giả Phạm Thị Bạch Ngọc đã có bài giới thiệu bài toán hình cầu ngoại tiếp khối đa diện. Ở bài này, chúng tôi sẽ phân tích cách giải và đưa ra các thí dụ minh họa đối với từng trường hợp cụ thể của bài toán trên nhằm giúp các thí sinh giải quyết dễ dàng các bài tập về hình cầu ngoại tiếp.

❖**TRƯỜNG HỢP 1.** Nếu các đỉnh của khối đa diện đều nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc 90° (trừ các đỉnh trùng với A hoặc B) thì nó nội tiếp trong mặt cầu (S) có tâm O là trung điểm đoạn thẳng AB và bán kính $R = \dfrac{AB}{2}$.

★**Thí dụ 1.** *Cho tứ diện ABCD có bốn mặt là tam giác vuông và cạnh lớn nhất có độ dài bằng 2a. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp của tứ diện đó.*

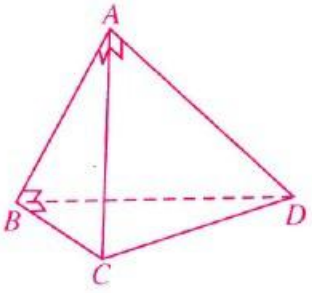
Lời giải. 1) Nếu mỗi đỉnh của tứ diện là đỉnh của một góc vuông, chẳng hạn như ở hình 1. Khi đó hai mặt cầu đường kính BC và AD đều ngoại tiếp tứ diện. Khả năng này không xảy ra.



Hình 1

2) Nếu có một đỉnh là đỉnh chung của ba góc vuông thì theo tính chất của tứ diện vuông, mặt đối diện với đỉnh đó phải là tam giác nhọn. Điều này trái với giả thiết.

3) Như vậy phải tồn tại một đỉnh là đỉnh chung của hai góc vuông. Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = 90^o$ khi đó các góc vuông còn lại được sắp xếp như ở hình 2. Nếu $\widehat{ABD} = 90^o$ thì do $CA \perp (ABD)$ nên $BD \perp (ABC)$, suy ra $\widehat{DBC} = 90^o$. Hai góc vuông còn lại phải có đỉnh là B.



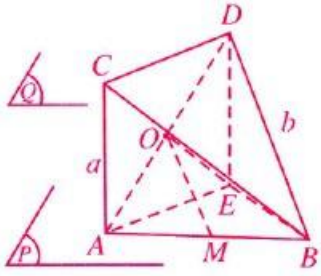
Hình 2

Từ đó ở trường hợp trên, dễ thấy CD là cạnh lớn nhất. Các đỉnh A, B đều nhìn đoạn CD dưới một góc 90°, nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là mặt cầu đường kính CD với bán kính $R = \dfrac{CD}{2} = a$.

Suy ra $V_{\text{cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi a^3$. ❐

★**Thí dụ 2.** *Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau có đường vuông góc chung là AB ($A \in a$, $B \in b$). Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với a. Mặt phẳng (Q) chuyển động song song với (P) và cắt a, b thứ tự tại C, D. Đường thẳng qua D, song song với a cắt (P) ở E. Chứng minh rằng khối đa diện ABCDE có mặt cầu ngoại tiếp và mặt cầu này luôn chứa một đường tròn cố định.*

Lời giải. Vì AB qua A và vuông góc với a nên $AB \in (P)$. Ta thấy $ACDE$ là hình chữ nhật. Các đỉnh B, C, E đều nhìn AD dưới một góc 90°, nên khối đa diện $ABCDE$ nội tiếp được trong mặt cầu tâm O, đường kính AD, kí hiệu là (S).



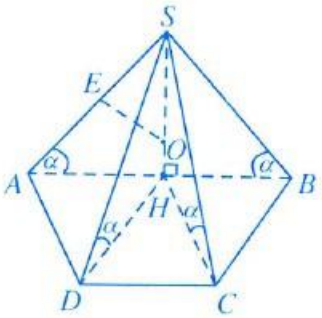
Hình 3

Gọi M là trung điểm đoạn AB thì điểm M cố định, $d \equiv MO$ là đường trung bình của tam giác ABD nên d cố định, điểm $O \in d$ cố định khi (Q) chuyển động song song với (P). Suy ra (S) đi qua hai điểm A, B cố định và có tâm O thuộc đường thẳng d cố định. Gọi (R) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với d thì (R) cố định. Mặt phẳng (R) cắt (S) theo đường tròn $(\mathscr{C})$ cố định là đường tròn đường kính AB. ❐

❖**TRƯỜNG HỢP 2.** Khi xác định tâm hình cầu ngoại tiếp của các khối đa diện có đáy (như khối chóp, chóp cụt, lăng trụ,...) mà không thỏa mãn trường hợp 1 thì phải dựng trục đường tròn ngoại tiếp đáy và mặt phẳng trung trực của cạnh bên. Tuy nhiên chúng ta không nên vội dựng mặt phẳng trung trực mà tùy theo từng dạng bài tập để đưa cách xác định tâm hình cầu ngoại tiếp ngắn gọn nhất. Dưới đây chúng ta phân tích một số dạng bài tập thường gặp trong các kì thi vào Đại học.

DẠNG 1. Như đã biết, hình chóp đều, hình chóp có các cạnh bên bằng nhau, hình chóp có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy luôn có đường cao là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó chúng có mặt cầu ngoại tiếp. Vì trục đường tròn ngoại tiếp đáy đồng phẳng với bất kì cạnh bên nào nên chúng ta chỉ việc chọn cạnh bên thuận lợi nhất ở hình vẽ để trong mặt phẳng tạo bởi cạnh bên đó và đường cao, tâm hình cầu ngoại tiếp là giao của đường trung trực của cạnh bên đó với đường cao của hình chóp.

★**Thí dụ 3.** *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB = 2a và BC = CD = DA = a. Các cạnh bên của chóp nghiêng đều trên đáy góc α. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp của hình chóp.*



Hình 4

Lời giải. Gọi H là trung điểm cạnh AB (h. 4) thì $HA = HB = HC = HD = a$, nên đường tròn $(H\ ;\ a)$ ngoại tiếp đáy. Ta thấy SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó trong mặt phẳng (SAH) đường trung trực của cạnh SA cắt SH tại O thì O là tâm hình cầu ngoại tiếp của hình chóp. Trong trường hợp này O cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Gọi R là bán kính hình cầu thì $R = OS$. Ta thấy $SA = SB = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

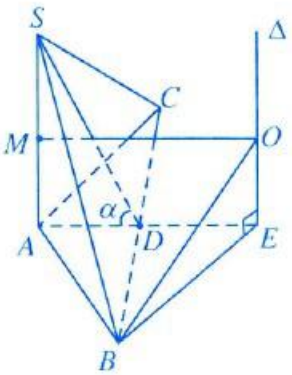
Từ đó dùng định lí sin đối với tam giác SAB, ta có

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha\cos\alpha} \Leftrightarrow R = \frac{a}{\sin 2\alpha}.$$

Vậy $V_{\text{cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}.\dfrac{a^3}{\sin^3 2\alpha}$. ❐

DẠNG 2. Xét hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy và đáy có trục đường tròn ngoại tiếp là Δ. Khi đó Δ song song với cạnh bên đó và chúng tạo thành mặt phẳng (P). Để xác định hình cầu ngoại tiếp của hình chóp thì trong (P), tâm O của hình cầu là giao của đường trung trực của cạnh bên đó và Δ. Dễ dàng tính được bán kính R của hình cầu theo định lí Pythagore.

★**Thí dụ 4.** *Cho hình chóp S.ABC có AB = AC = a, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc α. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp của hình chóp.*



Hình 5

Lời giải. Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC (h.5). Vì $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$ nên đường tròn $(E;\ a)$ ngoại tiếp đáy ABC. Từ giả thiết có $SA \perp (ABC)$. Suy ra đường thẳng Δ qua E, song song với SA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Trong mp(P) chứa SA và Δ, tâm O hình cầu ngoại tiếp của hình chóp là giao đường trung trực của SA với Δ. Gọi D là trung điểm cạnh BC thì $BC \perp (SAD) \Rightarrow \alpha = \widehat{SDA} \Rightarrow$

$SA = \dfrac{a}{2}\tan\alpha \Rightarrow OE = \dfrac{a}{4}\tan\alpha$. Do đó

$$R^2 = OB^2 = OE^2 + EB^2$$
$$= \frac{a^2}{16}\tan^2\alpha + a^2 = \frac{a^2}{16}(\tan^2\alpha + 16).$$

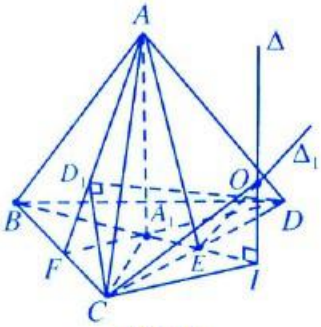
Vậy $V_{\text{cầu}} = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a}{4}\right)^3\left(\sqrt{\tan^2\alpha + 16}\right)^3$

$$= \frac{\pi a^3}{48}\left(\tan^2\alpha + 16\right)^{\frac{3}{2}}.\ ❐$$

DẠNG 3. Xét hình chóp với đáy có trục đường tròn ngoại tiếp là đường thẳng Δ, nhưng Δ không đồng phẳng với bất kì cạnh bên nào. Cũng đừng vội dựng mặt phẳng trung trực của một cạnh bên mà hãy bình tĩnh quan sát các mặt bên. Nếu xác định được trục đường tròn ngoại tiếp của một mặt bên thì giao điểm của nó với Δ chính là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp phải tìm.

★**Thí dụ 5.** *Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi A_1, D_1 là tâm các mặt (BCD), (ABC). Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện D_1A_1CD.*

Lời giải. Gọi I là điểm đối xứng của A_1 qua CD, E là trung điểm cạnh CD (h. 6). Xét hình chóp



Hình 6

$D_1.A_1CD$ có đáy là tam giác A_1CD với $A_1C = A_1D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{CA_1D} = 120^o$. Suy ra đường tròn $\left(I; \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ ngoại tiếp tam giác A_1CD. Đường thẳng Δ qua I song song với AA_1 là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1CD và thuộc mp(ABE). Xét mặt bên (D_1CD) có $\widehat{CD_1D} = 90^o$ và do $AB \perp CD_1$ và $AB \perp DD_1$ nên $AB \perp (B_1CD)$. Vậy đường thẳng Δ_1 qua E song song với AB là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác D_1CD. Do đó $\Delta_1 \cap \Delta = O$ là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện D_1A_1CD. Ta thấy

$IO = EI\tan\widehat{OEI} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{AA_1}{BA_1} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Suy ra

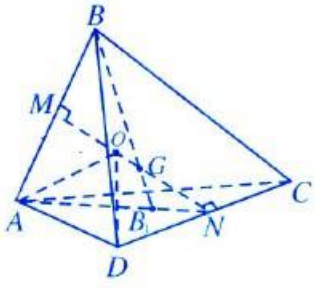
$R^2 = OC^2 = IO^2 + IC^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow$

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $V_{\text{cầu}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. ❐

❖**TRƯỜNG HỢP 3.** Để xác định tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có thể sử dụng thêm phương pháp *hai mặt phẳng trung trực*: Gọi (P_1), (P_2) là hai mặt phẳng trung trực của một cặp cạnh đối diện, chẳng hạn AB và CD. Xác định giao tuyến Δ của (P_1) và (P_2). Trên đường thẳng Δ ta tìm điểm O để $OB = OC$ thì O là tâm hình cầu ngoại tiếp của tứ diện.

★**Thí dụ 6.** *Cho tứ diện ABCD có AB = 2a, CD = 2b, khoảng cách giữa AB và CD bằng h, trọng tâm G của tứ diện thuộc đường vuông góc chung của AB và CD, (O; R) là hình cầu ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng* $R \ge \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + (a+b)^2}$.

Lời giải. (h. 7). Gọi MN là đường vuông góc chung của AB và CD $(M \in AB, N \in CD)$. Vì $G \in MN$ nên A, B_1, N thẳng hàng với B_1 trọng tâm tam giác ACD, nên N là trung điểm CD.



Hình 7

Tương tự M là trung điểm AB, do đó MN là giao tuyến của hai mặt phẳng trung trực của AB và CD. Suy ra $O \in MN$. Xác định O từ điều kiện $OA = OC$. Định hướng MN theo chiều $\overrightarrow{MN}$ và đặt $\overline{MO} = x$ thì $\overline{ON} = \overline{MN} - \overline{MO} = h - x$. Suy ra

$R^2 = OA^2 = OC^2 = x^2 + a^2 = (h-x)^2 + b^2$

$\Leftrightarrow x = \frac{h^2 + b^2 - a^2}{2h}$. Do đó

$R^2 = a^2 + \frac{1}{4h^2}\left(h^2 + b^2 - a^2\right)^2$

$\Leftrightarrow 4R^2h^2 = h^4 + 2\left(a^2 + b^2\right)h^2 + \left(a^2 - b^2\right)^2$

$\ge h^4 + (a+b)^2h^2 + (a^2 - b^2)^2 \ge h^4 + (a+b)^2h^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Do đó $4R^2 \ge h^2 + (a+b)^2$ (đpcm). ❐

BÀI TẬP

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với đáy lớn $AB = 2a$, đường cao $AD = CD = a$. SA vuông góc với đáy và (SBC) tạo với đáy góc α. E là trung điểm cạnh AB. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp các hình chóp $S.ADCE$, $S.ABC$ và $S.BCE$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. SH vuông góc với đáy, trong đó H là trung điểm cạnh AB. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp của hình chóp trong hai trường hợp:

a) Hình chóp có ba mặt bên là tam giác vuông.

b) Hình chóp có cạnh SC tạo với đáy và mặt (SAB) những góc bằng nhau.

Đọc lại cho đúng

• Ở số 403, trang 6, đề bài tính tích phân ở thí dụ 5 không có nghĩa. Xin chỉnh lại:

Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{2}-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x+3)(\sqrt{4x^2+12x+5})}$

(HD. Đặt $t = \sqrt{4x^2 + 12x + 5}$. Đáp số. $I = \frac{\pi}{48}$).

• Ở số 404, trang 6, lời giải thí dụ 2 không chính xác. Xin giải lại thí dụ 2 như sau:

Ta có $A = \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x(1-x)}} \ge 2\left(x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}\right), \forall x \in (0;1)$.

Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}$, với $x \in (0;1)$ có $f'(x) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\right)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên $(0;1)$ ta thấy $\min f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó $\min A = \sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 9x + 3$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của k để tồn tại hai tiếp tuyến với (C) phân biệt nhau và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó với (C) cắt các trục toạ độ Ox, Oy tương ứng ở A và B sao cho $OB = 2011.OA$.

Câu II. (2 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2. \end{cases}$$

2) Giải phương trình $2^{3x} + 3^{\frac{2}{x}} = 17$.

Câu III. (1 *điểm*)

Tính tích phân $I = \int_{-1}^{3} (x^3 - 3x^2 + 2)^{2011} dx$.

Câu IV. (1 *điểm*)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = a$ và $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với đáy một góc 60°. Biết rằng hình chiếu của đỉnh S trên mặt đáy thuộc cạnh BC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

Câu V. (1 *điểm*)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3y^3}{(x + yz)(y + zx)(z + xy)^2},$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + 1 = z$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC biết ba chân đường cao ứng với các đỉnh A, B, C lần lượt là $A'(1;1), B'(-2;3), C'(2;4)$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC.

2) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-7), B(-4;0;0), C(5;0;-1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 7 = 0$. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích tứ diện $MABC$ lớn nhất, nhỏ nhất.

Câu VIIa. (1 *điểm*)

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $2z + 3 - i$, biết rằng $|3z + i|^2 \le z\bar{z} + 9$.

B. Theo chương Nâng cao

Câu VI b. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $M(2;-1)$ và đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C_2) có bán kính bằng 4 và cắt (C_1) theo một dây cung qua M có độ dài nhỏ nhất.

2) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho tứ giác $ABCD$ với $A(1;2;1), C(2;4;-1)$. Hai đỉnh B, D thuộc đường thẳng $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ sao cho $BD = 4$. Gọi I là giao điểm hai đường chéo của tứ giác và biết rằng $S_{ABCD} = 2011.S_{IAD}$. Tính khoảng cách từ điểm D đến đường thẳng AC.

Câu VIIb. (1 *điểm*)

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z, biết rằng $|z + 2| + |\bar{z} - 2| = 6$.

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 5

Câu I. 1) *Bạn đọc tự giải.*

2) PT $x^3-3mx^2-1=0 \Leftrightarrow 3m=x-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$.

Xét hàm số $f(x)=x-\frac{1}{x^2}$.

Có $f'(x)=1+\frac{2}{x^3}$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{2}$.

Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)$, ta thấy PT có ba nghiệm phân biệt khi $m<-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. ❐

Câu II. 1) PT đã cho tương đương với

$4(\cos^3 x-\sin^3 x)-5(\cos x-\sin x)+1=0$

Đặt $t=\cos x-\sin x$ $(|t|\leq\sqrt{2})$, ta được PT $(t-1)(2t^2+2t+1)=0 \Leftrightarrow t=1$.

Đáp số. $x=2k\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

2) ĐK $-1\leq x;y\leq 3$. Trừ theo vế của PT thứ nhất cho PT thứ hai, ta được

$$(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}}+\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3-y}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=y$.

Thay vào PT thứ nhất trong hệ ta được

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=m.$$

Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$ suy ra $2\leq m\leq 2\sqrt{2}$. ❐

Câu III. $I=\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{3x+1}{x+1}}}$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{3x+1}{x+1}} \Rightarrow \frac{dx}{(x+1)^2}=t\,dt$;

$I=\int_1^{\sqrt{2}} dt=\sqrt{2}-1$. ❐

Câu IV. Ta có $SC\perp mp(AMN)$ nên $\widehat{ANM}=60^o$. Từ các kết quả

$\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}$; $\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}$;

$AB=a$; $AC=a\sqrt{2}$; $AM=AN.\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tìm được $SA=a$; $S_{AMN}=\frac{a^2}{4\sqrt{3}}$;

$SN=\frac{a}{\sqrt{3}}$; $V_{SAMN}=\frac{1}{3}SN.S_{AMN}=\frac{a^3}{36}$. ❐

Câu V. Ta có $2\geq\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}\Rightarrow x+y\geq 2$.

Từ đó suy ra $x^3+y^3\geq 2$; $x^2+y^2\geq 2$.

Chứng minh BĐT

$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\geq\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$,

từ đó suy ra

$P=\sqrt{x^6+3y^4}+\sqrt{y^6+3x^4}$

$\geq\sqrt{(x^3+y^3)^2+3(x^2+y^2)^2}\geq 4$.

Ta được $\min P=4$ khi $x=y=1$. ❐

Câu VI a. 1) Giả sử $A(a;0)$, $B(0;b)$, $(a>0$, $b>0)$. Khi đó, PT đường thẳng AB có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Điểm $M(1;2)\in AB$ nên $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$.

Áp dụng BĐT Cauchy có $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$,

suy ra $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\geq 4$. PT đường thẳng phải tìm là $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$. ❐

2) PT đường thẳng (d): $\begin{cases}x=3+t\\ y=1+2t\\ z=-t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Vì $M\in(d)$ nên $M(3+t;1+2t;-t)$.

Ta có $MA^2+MB^2=12t^2+24t+74$

$=12(t+1)^2+62\geq 62$.

Min$Q=62$, khi $t=-1$. *Đáp số.* $M(2;-1;1)$. ❐

(Xem tiếp trang 29)

HƯỚNG DẪN ÔN TẬP MÔN VẬT LÍ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2011

Chủ đề : DÒNG ĐIỆN XOAY CHIỀU

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV trường ĐHSP Hà Nội)

Theo Cấu trúc đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng năm 2001 môn Vật lí, phần chung của chủ đề ***Dòng điện xoay chiều*** theo chương trình chuẩn và chương trình nâng cao có 9 câu trắc nghiệm. Để làm tốt các câu trắc nghiệm của chủ đề này, thí sinh cần nắm vững những nội dung kiến thức sau đây: *Đại cương về dòng điện xoay chiều; Đoạn mạch xoay chiều chỉ có R, L, C và có R, L, C mắc nối tiếp, cộng hưởng điện; Công suất của dòng điện xoay chiều, hệ số công suất; Máy biến áp, truyền tải điện năng; Máy phát điện xoay chiều; Động cơ không đồng bộ ba pha.*

Đối với mỗi câu trắc nghiệm, thí sinh cần đọc kĩ phần dẫn và 4 phương án lựa chọn *A, B, C, D*; phải nhận xét, đánh giá ngay được những phương án sai dễ thấy để loại bỏ, đồng thời tập trung suy nghĩ vào các phương án còn lại xem phương án nào là đúng để lựa chọn. Nếu chưa làm được câu hỏi trước thì hãy tạm thời bỏ qua để làm câu sau, và cuối giờ sẽ quay lại các câu đã bỏ qua. Điều lưu ý là thí sinh không nên để trống (không trả lời) bất cứ một câu nào trong toàn bộ đề thi.

Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số câu trắc nghiệm về chủ đề này, đồng thời hướng dẫn cách lựa chọn phương án đúng.

CÂU 1. *Đặt hiệu điện thế $u = U_0 \sin \omega t$ vào hai đầu đoạn mạch R, L, C không phân nhánh. Biết điện trở thuần của mạch không đổi. Khi có hiện tượng cộng hưởng điện trong mạch, phát biểu nào sau đây* **sai**?

A. *Cường độ hiệu dụng của dòng điện trong mạch đạt giá trị lớn nhất.*

B. *Hiệu điện thế tức thời ở hai đầu đoạn mạch cùng pha với hiệu điện thế tức thời ở hai đầu điện trở R.*

C. *Cảm kháng và dung kháng của đoạn mạch bằng nhau.*

D. *Hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu điện trở R nhỏ hơn hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu đoạn mạch.*

Hướng dẫn. Khi có cộng hưởng thì $Z = R = Z_{min}$, suy ra $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{Z_{min}} = \frac{U}{R} = I_{max}$, suy ra **A** đúng.

Ta có $\tan\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = 0$, suy ra u cùng pha với i; nhưng i lại cùng pha với $u_R = iR$; vậy u cùng pha với u_R; (**B** đúng). Khi cộng hưởng thì $\omega L - \frac{1}{C\omega} = 0$, suy ra $Z_L = Z_C$, (**C** đúng). Vì $Z = R$ nên $U = IZ = IR = U_R$ (**D** sai).

Chọn **D**. ❐

CÂU 2. *Đoạn mạch điện xoay chiều AB chỉ chứa một trong các phần tử: điện trở thuần, cuộn dây thuần cảm hoặc tụ điện. Khi đặt hiệu điện thế $u = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ lên hai đầu A và B thì dòng điện trong mạch có biểu thức $i = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$. Đoạn mạch AB chứa*

A. *Cuộn dây thuần cảm.*

B. *Cuộn dây có điện trở thuần.*

C. *Điện trở thuần.*

D. *Tụ điện.*

Hướng dẫn. Muốn biết đoạn mạch *AB* chứa phần tử gì, ta phải tính độ lệch pha $(\Delta\varphi)$ giữa hiệu điện thế u của hai đầu đoạn mạch *AB* và cường độ dòng điện i chạy trong đoạn mạch này. Ta có $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$, suy ra đoạn mạch *AB* chứa cuộn dây thuần cảm; (**A** đúng).

Chọn **A**. ❐

CÂU 3. *Một máy biến thế dùng làm máy hạ thế gồm cuộn dây 100 vòng và cuộn dây 500 vòng. Bỏ qua mọi hao phí của máy biến thế. Khi nối hai đầu cuộn sơ cấp với hiệu điện thế*

$u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V) thì hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu cuộn thứ cấp bằng

A. 50V. **B.** 100V. **C.** 20V. **D.** 150V.

Hướng dẫn. Áp dụng công thức $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$. Ta có $N_1 = 500$ vòng, $N_2 = 100$ vòng, U_1 = 100V, suy ra $U_2 = \frac{N_2}{N_1}.U_1 = \frac{100}{500}.100 = 20$(V), **C** đúng.

Chọn **C.** ❐

CÂU 4. *Một đoạn mạch gồm cuộn dây thuần cảm mắc nối tiếp với điện trở thuần. Nếu đặt hiệu điện thế $u = 15\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V) vào hai đầu đoạn mạch thì hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây là 5V. Khi đó, hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu điện trở bằng*

A. $10\sqrt{2}$V. **B.** $10\sqrt{3}$V. **C.** $5\sqrt{2}$V. **D.** $5\sqrt{3}$V.

Hướng dẫn. Ta có $U^2 = U_R^2 + U_L^2$, suy ra $U_R^2 = U^2 - U_L^2$ hay $U_R = \sqrt{U^2 - U_L^2} = \sqrt{225 - 25} = 10\sqrt{2}$(V), **A** đúng.

Chọn **A.**

CÂU 5. *Đoạn mạch điện xoay chiều không phân nhánh gồm cuộn dây có độ tự cảm L, điện trở thuần R và tụ điện có điện dung C. Khi dòng điện có tần số góc là $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ chạy qua đoạn mạch thì hệ số công suất của đoạn mạch này*

A. *Bằng* 0.

B. *Phụ thuộc điện trở thuần của đoạn mạch.*

C. *Bằng* 1.

D. *Phụ thuộc tổng trở của đoạn mạch.*

Hướng dẫn. Hệ số công suất

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}}.$$

Ta có $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, suy ra $\omega^2 = \frac{1}{LC}$, do đó

$\omega L - \frac{1}{C\omega} = Z_L - Z_C = 0$. Vậy $\cos\varphi = 1$(**C** đúng).

Chọn **C.** ❐

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1. Đặt hiệu điện thế $u = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V) vào hai đầu đoạn mạch *R, L, C* không phân nhánh với *C, R* có độ lớn không đổi và $L = \frac{1}{\pi}$H. Khi đó hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu mỗi phần tử *R, L* và *C* có độ lớn như nhau. Công suất tiêu thụ của đoạn mạch là

A. 500W. **B.** 300W. **C.** 100W. **D.** 250W.

Câu 2. Đoạn mạch điện xoay chiều gồm biến trở *R*, cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm *L* và tụ điện có điện dung *C* mắc nối tiếp. Biết hiệu điện thế hiệu dụng hai đầu đoạn mạch là *U*, cảm kháng Z_L, dung kháng Z_C (với $Z_L \neq Z_C$) và tần số dòng điện trong mạch không đổi. Thay đổi *R* đến giá trị R_0 thì công suất tiêu thụ của đoạn mạch đạt giá trị cực đại $\mathscr{P}_m$, Khi đó

A. $R_0 = Z_L + Z_C$. **B.** $R_0 = |Z_L - Z_C|$.

C. $R_0 = \frac{Z_L^2}{Z_C}$. **D.** $R_0 = \frac{U^2}{\mathscr{P}_m}$.

Câu 3. Tại thời điểm *t*, điện áp $u = 200\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ (trong đó *u* tính bằng V, *t* tính bằng s) có giá trị $100\sqrt{2}$V và đang giảm. Sau thời điểm đó $\frac{1}{300}$s, điện áp này có giá trị là

A. $100\sqrt{3}$V. **B.** $\frac{200}{\sqrt{2}}$V.

C. $-200\sqrt{2}$V. **D.** $-100\sqrt{2}$V.

Câu 4. Một động cơ điện xoay chiều khi hoạt động bình thường với điện áp hiệu dụng 220V thì sinh ra công suất cơ học là 170W. Biết động cơ có hệ số công suất 0,85 và công suất tỏa nhiệt trên dây quấn động cơ là 17W. Bỏ qua các hao phí khác, cường độ dòng điện cực đại qua động cơ là

A. $\sqrt{2}$A. **B.** $2\sqrt{2}$A. **C.** 2A. **D.** $2\sqrt{3}$A.

Đáp án số báo kì trước:
Câu 1: D; Câu 2: B; Câu 3: D.

Trong bài viết này, chúng tôi phân loại các hệ thức lượng giác trong tam giác theo tiêu chí *biến đổi tuyến tính góc*. Nhờ phép biến đổi tuyến tính góc, ta có thể thấy nhiều hệ thức lượng giác thực chất là *các cặp bài trùng* (dễ dàng nhận được từ nhau qua phép biến đổi tuyến tính góc). Cũng nhờ phép biến đổi tuyến tính góc, có thể tạo và chứng minh nhiều hệ thức lượng giác mới từ các hệ thức trong tam giác đã biết.

Sáng tạo và chứng minh CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC NHỜ PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH GÓC

LÊ THỊ THU HUYỀN *(GV THPT Lê Viết Tạo, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)*
PHÙNG THỊ OANH *(GV Trường Phổ thông Vùng cao Việt Bắc, Thái Nguyên)*
TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học Việt Nam)*

Ý tưởng của phương pháp *Sử dụng phép biến đổi tuyến tính góc để tạo ra tam giác mới $A_1B_1C_1$ từ tam giác ABC. Áp dụng một hệ thức đã biết cho tam giác $A_1B_1C_1$, ta sẽ có một hệ thức mới cho tam giác ABC.*

Dạng tổng quát của biến đổi tuyến tính góc

$A_1 = k_{11}A + k_{12}B + k_{13}C + \lambda_1\pi;$

$B_1 = k_{21}A + k_{22}B + k_{23}C + \lambda_2\pi;$

$C_1 = k_{31}A + k_{32}B + k_{33}C + \lambda_3\pi;$

$A_1 + B_1 + C_1 = \pi;\ A_1 > 0,\ B_1 > 0,\ C_1 > 0.$ (*)

Hệ bốn phương trình và ba bất đẳng thức (*) chứa 12 hệ số $k_{ij};\lambda_i$, với $i, j = 1, 2, 3$. Do đó, bằng cách chọn các bộ hệ số, ta sẽ có rất nhiều phép biến đổi tuyến tính góc. Các phép biến đổi tuyến tính góc được khai thác trong bài này là

1) $A_1 = \dfrac{\pi - A}{2};\ B_1 = \dfrac{\pi - B}{2};\ C_1 = \dfrac{\pi - C}{2};$

2) $A_2 = \dfrac{A + 2B}{3};\ B_2 = \dfrac{B + 2C}{3};\ C_2 = \dfrac{C + 2A}{3};$

3) $A_3 = \dfrac{\pi + A}{4};\ B_3 = \dfrac{\pi + B}{4};\ C_3 = \dfrac{\pi + C}{4};$

4) $A_4 = \pi - 2A;\ B_4 = \pi - 2B;\ C_4 = \pi - 2C$ (với ABC là tam giác có ba góc nhọn);...

Dựa trên ý tưởng cơ bản của phép biến đổi tuyến tính góc, dưới đây ta sẽ đưa ra một số nhận xét rất đơn giản nhưng rất có lợi trong chứng minh các hệ thức lượng giác trong tam giác.

Mệnh đề 1. *Cho tam giác ABC. Với $n \geq 2$ thì*

$A_1 = \dfrac{B + (n-1)C}{n};\quad B_1 = \dfrac{C + (n-1)A}{n};$

$C_1 = \dfrac{A + (n-1)B}{n}$ *cũng là ba góc đều nhỏ hơn* $\dfrac{(n-1)\pi}{n}$ *của một tam giác.*

Chứng minh. Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên $0 < A, B, C < \pi$; $A + B + C = \pi$. Vậy

$$0 < A_1 = \frac{B + (n-1)C}{n} \leq \frac{(n-1)(B+C)}{n} < \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Tương tự $0 < B_1, C_1 < \dfrac{(n-1)\pi}{n}$. Hơn nữa $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$. Do đó A_1, B_1, C_1 là ba góc của một tam giác, với mỗi góc nhỏ hơn $\dfrac{(n-1)\pi}{n}$. □

Cho $n = 2$, từ Mệnh đề 1 ta có

Hệ quả 1.1. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì $A_2 = \dfrac{B+C}{2}$, $B_2 = \dfrac{C+A}{2}$, $C_2 = \dfrac{A+B}{2}$ cũng là ba góc của một tam giác.*

Nhận xét 1.1. Vì $\dfrac{B+C}{2} = \dfrac{\pi - A}{2}$ nên phép biến đổi $A_2 = \dfrac{B+C}{2}$, $B_2 = \dfrac{C+A}{2}$, $C_2 = \dfrac{A+B}{2}$

cũng chính là phép biến đổi tuyến tính góc $A_3 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_3 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_3 = \frac{\pi - C}{2}$.

Nhận xét 1.2. Vì $A_3 = \frac{\pi - A}{2}$ nên $\cos A_3 = \cos\frac{\pi - A}{2} = \sin\frac{A}{2}$. Áp dụng hệ thức đã biết chứa $\cos A_3$, $\cos B_3$, $\cos C_3$ cho tam giác $A_3B_3C_3$ với $A_3 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_3 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_3 = \frac{\pi - C}{2}$, ta sẽ suy ra một hệ thức chứa $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2}$ đúng cho tam giác ABC.

Tương tự cho $\sin A_3$, $\tan A_3$, $\cot A_3$ ta nhận được các hệ thức khác. Theo nhận xét này, ta có thể tạo ra một hệ thức trong tam giác từ một hệ thức đã biết mà không phải mất công biến đổi lượng giác. Thí dụ:

Bài 1.1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có*

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C \quad (1.1)$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \\
&= \frac{1+\cos 2A}{2} + \frac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C \\
&= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos C\cos(A+B) \\
&= 1 - \cos C\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right) \\
&= 1 - 2\cos C\cos A\cos B. \ \square
\end{aligned}$$

Bài 1.2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có*

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \quad (1.2)$$

Chứng minh. Áp dụng (1.1) cho tam giác $A_3B_3C_3$ với $A_3 = \frac{\pi - A}{2}$, $B_3 = \frac{\pi - B}{2}$, $C_3 = \frac{\pi - C}{2}$ ta được

$$\begin{aligned}
&\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - A_3\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - B_3\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - C_3\right) \\
&= \cos^2 A_3 + \cos^2 B_3 + \cos^2 C_3 \\
&= 1 - 2\cos A_3\cos B_3\cos C_3 = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.
\end{aligned}$$

Từ **Nhận xét 1.1** ta thấy, rất nhiều hệ thức lượng giác trong tam giác thực chất là *những cặp bài trùng* (giống nhau), chỉ cần chứng minh bài (.**1**), sẽ suy ra bài (.**2**) bằng biến đổi tuyến tính góc tương tự như chứng minh bài **1.2** ở trên. Thí dụ: Với mọi tam giác ABC ta luôn có

Bài 2.1. $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$.

Bài 2.2. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$.

Bài 3.1. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C$, và nếu ABC là tam giác có ba góc nhọn thì $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C \ge 3\sqrt{3}$.

Bài 3.2. $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}$.

Bài 4.1. $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4.2. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 5.1. $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$.

Bài 5.2. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

Bài 6.1. $0 < \sin A\sin B\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Bài 6.2. $0 < \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Bài 7.1. $1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

Bài 7.2. $1 < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$.

Bài 8.1. $2 < \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$.

Bài 8.2. $2 < \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \le \frac{9}{4}$.

Bài 9.1. $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$.

Bài 9.2. $\frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}} < 2$.

Từ **Mệnh đề 1** và **Bài 1.1** ta suy ra ngay hệ thức dưới đây mà không cần biến đổi lượng giác.

Bài 1.3. *Với mọi tam giác ABC và mọi* $n \ge 2$ *ta có*

$$\cos^2\frac{A+(n-1)B}{n} + \cos^2\frac{B+(n-1)C}{n} + \cos^2\frac{C+(n-1)A}{n}$$
$$= 1 - 2\cos\frac{A+(n-1)B}{n}\cos\frac{B+(n-1)C}{n}\cos\frac{C+(n-1)A}{n} \quad (1.3)$$

Cho $n = 4$, từ **Mệnh đề 1.1** ta có

Hệ quả 1.2. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì* $A_4=\frac{B+3C}{4}$, $B_4=\frac{C+3A}{4}$, $C_4=\frac{A+3B}{4}$ *cũng là ba góc của một tam giác.*

Nhận xét 1.2. Vì $A_4=\frac{B+3C}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{B-C+2A}{4}$

nên $\cos A_4=\sin\frac{B-C+2A}{4}$. Vậy, từ hệ thức chứa $\cos A_4$, $\cos B_4$, $\cos C_4$ ta có hệ thức chứa $\sin\frac{B-C+2A}{4}$, $\sin\frac{C-A+2B}{4}$, $\sin\frac{A-B+2C}{4}$.

Áp dụng (1.1) cho tam giác $A_4B_4C_4$ ta được

Bài 1.4. Trong mọi tam giác ABC ta có

$$\sin^2\frac{A-B+2C}{4}+\sin^2\frac{B-C+2A}{4}+\sin^2\frac{C-A+2B}{4}$$
$$=1-2\sin\frac{A-B+2C}{4}\sin\frac{B-C+2A}{4}\sin\frac{C-A+2B}{4} \quad (1.4)$$

Mệnh đề 2. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì* $A_5=\frac{\pi+(n-3)A}{n}$, $B_5=\frac{\pi+(n-3)B}{n}$, $C_5=\frac{\pi+(n-3)C}{n}$ *với mọi* $n\ge 4$ *cũng là ba góc đều nhỏ hơn* $\frac{(n-2)\pi}{n}$ *của một tam giác.*

Từ **Mệnh đề 2** và **Bài 1.1** ta lại có

Bài 1.5. *Với mọi tam giác ABC và mọi* $n\ge 4$ *ta có*

$$\cos^2\frac{\pi+(n-3)A}{n}+\cos^2\frac{\pi+(n-3)B}{n}+\cos^2\frac{\pi+(n-3)C}{n}$$
$$=1-2\cos\frac{\pi+(n-3)A}{n}\cos\frac{\pi+(n-3)B}{n}\cos\frac{\pi+(n-3)C}{n} \quad (1.5)$$

Hệ quả 2.1. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì* $A_6=\frac{\pi+A}{4}$, $B_6=\frac{\pi+B}{4}$, $C_6=\frac{\pi+C}{4}$ *cũng là ba góc nhọn của một tam giác.*

Bài 1.6. *Với mọi tam giác ABC ta có*

$$\cos^2\frac{\pi+A}{4}+\cos^2\frac{\pi+B}{4}+\cos^2\frac{\pi+C}{4}$$
$$=1-2\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi+B}{4}\cos\frac{\pi+C}{4} \quad (1.6)$$

Nhận xét 2.1. *Vì*

$$A_6=\frac{\pi+A}{4}=\frac{2\pi-(B+C)}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{4}$$

nên $A_6=\frac{\pi+A}{4}$, $B_6=\frac{\pi+B}{4}$, $C_6=\frac{\pi+C}{4}$

cũng chính là phép biến đổi tuyến tính góc

$A_7=\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{4}$, $B_7=\frac{\pi}{2}-\frac{C+A}{4}$, $C_7=\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}$.

Do $\cos A_7=\sin\frac{B+C}{4}$ *nên với mỗi hệ thức chứa côsin của ba góc* A_7, B_7, C_7 *của tam giác* $A_7B_7C_7$ *ta lại có một hệ thức chứa sin của ba góc* $\frac{A+B}{4}$, $\frac{B+C}{4}$, $\frac{C+A}{4}$ *của tam giác ABC.*

Bài 1.7. *Với mọi tam giác ABC ta có*

$$\sin^2\frac{A+B}{4}+\sin^2\frac{B+C}{4}+\sin^2\frac{C+A}{4}$$
$$=1-2\sin\frac{A+B}{4}\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4} \quad (1.7)$$

Chứng minh. Áp dụng (1.6) ta được

$$\sin^2\frac{A+B}{4}+\sin^2\frac{B+C}{4}+\sin^2\frac{C+A}{4}$$
$$=\cos^2\frac{\pi+C}{4}+\cos^2\frac{\pi+A}{4}+\cos^2\frac{\pi+B}{4}$$
$$=1-2\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi+B}{4}\cos\frac{\pi+C}{4}$$
$$=1-2\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}.$$

Kết luận. Từ **một** hệ thức lượng giác (1.1) ta có **sáu** hệ thức lượng giác mới (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) và (1.7). Các hệ thức này chứng minh rất đơn giản nhờ phép biến đổi tuyến tính góc, mà không cần biến đổi lượng giác. Hơn nữa, có thể tạo ra rất nhiều phép biến đổi tuyến tính góc khác bằng cách chọn các hệ số k_{ij}, λ_i, $i, j=1,2,3$ thỏa mãn hệ phương trình (*).

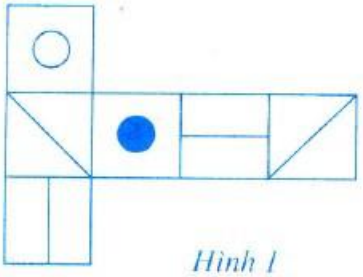
Hoàn toàn tương tự **Bài 1.1**, có thể tạo và chứng minh sáu hệ thức lượng giác mới từ một **Bài 2.1** (hoặc từ các **Bài 3.1** đến **Bài 9.1**). Vì đã có hàng trăm hệ thức lượng giác trong tam giác nên có thể sáng tạo và chứng minh rất nhiều hệ thức lượng giác khác.

(Kì sau đăng tiếp)

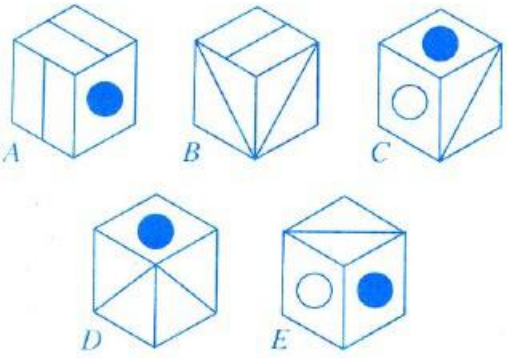
HÌNH LẬP PHƯƠNG NÀO ?

PHẠM QUỲNH
(*Công ty CP Sách Giáo dục tại TP. Hà Nội*)

Khi các hình vuông ở hình 1 được cuộn vào thành một hình lập phương, các hình lập phương nào ở hình 2 được tạo thành? Vì sao?



Hình 1



Hình 2

Giải đáp bài: Dòng chữ trên bưu thiếp

(Đề đăng trên THTT số 401, tháng 11 năm 2010)

• Thầy giáo dạy Tin học đã sử dụng Bảng mã hóa như sau:

A	**Ă**	**Â**	**B**	**C**	**D**	**Đ**	**E**	**Ê**	**G**	**H**	**I**	**K**	**L**	**M**
0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**
2	**3**	**5**	**7**	**1**	**3**	**7**	**9**	**3**	**9**	**1**	**7**	**1**	**3**	**7**

N	**O**	**Ô**	**Ơ**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**Ư**	**V**	**X**	**Y**
5	**5**	**6**	**6**	**7**	**7**	**7**	**8**	**8**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
3	**9**	**1**	**7**	**1**	**3**	**9**	**3**	**9**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**

ô trống	****	**?**	**~**	**/**	**•**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**4**	**6**	**8**	**9**

• Dòng chữ được mã hóa là

CHÚC CÔ GIÁO MẠNH KHỎE TƯƠI TRẺ HẠNH PHÚC

• Các bạn sau có lời giải tốt và đã phát hiện được trong bảng mã hóa ở cột thứ 5 từ trái sang thiếu kí tự $\frac{1}{1}$ (chữ *C*):

1) *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý, **Hà Nam**;
2) *Trần Thị Mỹ Ánh*, 11A1, THPT Phan Chu Trinh, **Phú Yên**;
3) *Trịnh Viết Đạt*, 10A10, THPT Xuân Mai, **Hà Nội**.

AN MINH

CÁC LỚP THCS

Bài T1/405 (Lớp 6). So sánh hai số

$$A = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$$

và $B = \frac{3951}{3950} + \frac{1}{5955} + \frac{1}{11730}$.

NGUYỄN TIÊN TIẾN
(GV THPT Gia Viễn B, Ninh Bình)

Bài T2/405. (Lớp 7). Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 96^\circ$. Lấy điểm M trong tam giác sao cho $\widehat{MBC} = 12^\circ$, $\widehat{MCB} = 24^\circ$. Chứng minh rằng $MA = MC$.

PHẠM HUY THÔNG
(Hà Nội)

Bài T3/405. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\}$, trong đó a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện

$$a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2.$$

TRẦN VĂN THƯƠNG
(GV THPT Trần Hưng Đạo, Bà Rịa – Vũng Tàu)

Bài T4/405. Giải phương trình

$$21x - 25 + 2\sqrt{x-2} = 19\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x+1}.$$

NGUYỄN TẤT THU
(GV THPT Lê Hồng Phong, Biên Hoà, Đồng Nai)

Bài T5/405. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{BAC} = 60^\circ$, AK là phân giác của góc BAC (K thuộc đường tròn (O)). Gọi F là trung điểm của AK, tia OF cắt đường cao CE của tam giác ABC tại H. Chứng minh rằng BH vuông góc với AC.

ĐINH CAO PHẠN
(Sở Giáo dục và Đào tạo Gia Lai)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/405. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(5a + \frac{2}{b+c}\right)^3 + \left(5b + \frac{2}{c+a}\right)^3 + \left(5c + \frac{2}{a+b}\right)^3$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

VŨ HỒNG PHONG
(GV THPT Tiên Du 1, Bắc Ninh)

Bài T7/405. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi OH là đường cao hạ từ đỉnh O của tứ diện và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $OH \le \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T8/405. a) Hãy tính số các hoán vị khác nhau của từ **TOANHOCTUOITRE**.
b) Hỏi rằng trong số các hoán vị ở a) có bao nhiêu hoán vị có cụm **TTT** (ba chữ **T** liền nhau)?
c) Hỏi có bao nhiêu hoán vị ở a) không có hai chữ **T** đứng cạnh nhau?

VŨ ĐÌNH HÒA
(GV Khoa Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/405. Giả sử k là số nguyên dương, α là số thực bất kì. Tìm giới hạn của dãy số (a_n) với

$$a_n = \frac{[1^k.\alpha] + [2^k.\alpha] + \ldots + [n^k.\alpha]}{n^{k+1}} \ (n = 1, 2, \ldots),$$ ở đây kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

TRẦN MINH HIỀN
(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T10/405. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:
i) f tăng thực sự;
ii) $f(f(n)) = 4n + 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;
iii) $f(f(n) - n) = 2n + 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/405. Có tồn tại số tự nhiên n ($n \geq 1$) sao cho đa thức

$$f(x) = 1 + 4x + 4x^2 + ... + 4x^{2n} \ (n \geq 2)$$

bằng bình phương của một đa thức khác hay không?

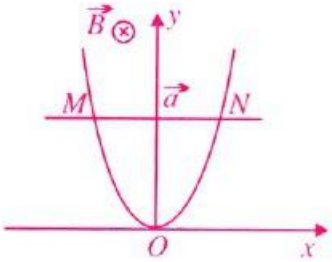
NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T12/405. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và A' là điểm cố định trên (O). P là điểm di chuyển trên BC, K thuộc AC sao cho PK luôn song song với một đường thẳng d cố định. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APK cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. AE cắt BC tại M. $A'P$ cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N. Chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

TRẦN QUANG HÙNG
(GV trường chuyên KHTN, ĐHKHTN Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/405. Một dây dẫn uốn cong theo đường parabol $y = \alpha x^2$ (α là hằng số dương), được đặt trong từ trường đều, cảm ứng từ B vuông góc mặt phẳng xOy và hướng vào trong (hình vẽ).



Tại thời điểm $t = 0$ (s), một thanh dẫn MN bắt đầu chuyển động tịnh tiến theo phương Oy từ gốc O với gia tốc không đổi a.

a) Tính *từ thông* qua diện tích mạch MON tại thời điểm t.

b) Suất điện động cảm ứng trong mạch theo tọa độ y và chiều của dòng điện cảm ứng trên cạnh MN.

LÊ THANH HOÀN
(SV lớp 03VL1A, ĐHKHTN, TP Hồ Chí Minh)

Bài L2/405. Một vật chuyển động với gia tốc không đổi có độ lớn $a = 5\text{m/s}^2$. Tại thời điểm $t_1 = 2$ (s) vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của vật hợp với nhau một góc $\alpha = 60^o$ và vận tốc có độ lớn $v_1 = 10$m/s. Hãy xác định:

a) Thời điểm mà vận tốc của vật có độ lớn nhỏ nhất. Tính độ lớn nhỏ nhất đó của vận tốc.

b) Khoảng cách giữa vị trí của vật ở thời điểm t_1 và thời điểm ban đầu $t = 0$ (s).

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/405 (For 6th grade). Which of the following two numbers is greater?

$$A = \frac{326}{1955} + \frac{988}{1975} + \frac{662}{1985}$$

and $B = \dfrac{3951}{3950} + \dfrac{1}{5955} + \dfrac{1}{11730}$.

T2/405. (For 7th grade). Let ABC be an isosceles triangle with $\widehat{BAC} = 96^o$. A point M is inside the triangle such that $\widehat{MBC} = 12^o$, $\widehat{MCB} = 24^o$. Prove that $MA = MC$.

T3/405. Find the maximum value of the expression $P = \max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\}$, where a, b, c are real numbers satisfying the condition

$$a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2.$$

T4/405. Solve the equation

$$21x - 25 + 2\sqrt{x-2} = 19\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x+1}.$$

T5/405. ABC is a triangle inscribed the circle (O) with $\widehat{BAC} = 60^o$, AK is the angle-bisector of $\widehat{BAC}$ (K is on the circle (O)). Let F be the midpoint of AK, the ray OF meets the altitude CE of triangle ABC at H. Prove that BH is perpendicular to AC.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/405. Find the minimum value of the expression

$$P = \left(5a + \frac{2}{b+c}\right)^3 + \left(5b + \frac{2}{c+a}\right)^3 + \left(5c + \frac{2}{a+b}\right)^3$$

where a, b, c are positive real numbers satisfying $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

(Xem tiếp trang 27)

★**Bài T1/401.** *Cho số tự nhiên n lớn hơn 11. Hỏi có tồn tại hay không số tự nhiên x sao cho $n^{2010} < x < n^{2011}$ và x có ít nhất 2011 chữ số tận cùng là 0?*

Lời giải. Do $n > 11$ nên

$$n^{2011} - n^{2010} = n^{2010}(n-1) > 11^{2010} \times 10 > 10^{2011},$$

nghĩa là có ít nhất 10^{2011} số tự nhiên liên tiếp nằm giữa hai số n^{2010} và n^{2011}. Trong 10^{2011} số tự nhiên liên tiếp đó có một số chia hết cho 10^{2011}, đó chính là số x cần tìm. ❐

➢Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn giải được bài này, nhưng một số bạn làm dài hoặc viết chưa chuẩn xác. Chú ý rằng trong 10^{2011} số tự nhiên liên tiếp có đúng một số chia hết cho 10^{2011}.

2) Các bạn sau có lời giải gọn:

Vĩnh Phúc: *Lê Huyền Trâm, Ngô Thị Phương Anh*, 6A1, THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Phát, Nguyễn Thị Bình, Cao Thị Linh, Ngô Thị Mai, Trần Thị Thúy An, Trần Minh Cường, Nguyễn Thị Ly*, 6C, *Cao Thanh Nam, Lưu Nhật Thông*, 6D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/401.** *Giả sử p là số nguyên tố, a và b là các số tự nhiên (a < b) thỏa mãn điều kiện: Tổng các phân số tối giản có mẫu số p nằm giữa a và b bằng 2011. Tìm các số p, a, b.*

Lời giải. Trước hết lưu ý rằng, tổng của k số tự nhiên đầu tiên là

$$1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

Mỗi phân số tối giản có giá trị nằm giữa a và b với mẫu số p sẽ có dạng $a+m+\frac{n}{p}$ với m, n là số tự nhiên thoả mãn $0 \le m \le b-a-1$; $1 \le n \le p-1$. Tương ứng với mỗi giá trị của m có $p-1$ giá trị của n và tương ứng với mỗi giá trị của n có $b-a$ giá trị của m. Do đó số phân số tối giản thoả mãn bài toán là $(b-a)(p-1)$.

Nên tổng của tất cả các phân số cần tính là

$$2011 = (b-a).\frac{1+2+...+(p-1)}{p}$$
$$+(b-a)(p-1)a+(p-1)(1+2+...+(b-a-1)) \qquad (2)$$

Áp dụng công thức (1), ta có

$$2011 = \frac{(b-a)(p-1)}{2} + (b-a)(p-1)a$$
$$+\frac{(p-1)(b-a-1)(b-a)}{2}$$
$$2011 = \frac{(b-a)(p-1)(b+a)}{2}$$

hay $(b-a)(p-1)(b+a) = 2.2011 \qquad (3)$

Do 2011 là số nguyên tố còn $b-a$, $b+a$ cùng tính chẵn lẻ và $b-a \le b+a$ nên

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=2011 \\ p-1=2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $p=3$; $a=1005$; $b=1006$. ❐

ACER VIET NAM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
Phối hợp tổ chức và trao giải thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khá hay. Điểm mấu chốt của lời giải là thấy được: Mỗi phân số tối giản mẫu số p có giá trị nằm giữa a và b có dạng $a+m+\frac{n}{p}$ với m, n là số tự nhiên thoả mãn $0 \le m \le b-a-1$; $1 \le n \le p-1$. Từ đó mới tính được tổng của chúng.

2) Các bạn sau đây có kết quả đúng:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Thị Thanh Hà, Nguyễn Hiền Linh*, 7A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, *Trương Thị Hoài Thu*, 7A, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Phạm Quang Toàn*, 6C, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T3/401.** *Cho a là số tự nhiên có n chữ số (viết trong hệ thập phân) và a^3 có m chữ số. Hỏi n + m có thể bằng 2011 được không?*

Lời giải. Giả sử tồn tại số tự nhiên a sao cho a và a^3 thứ tự có n và m chữ số và $n + m = 2011$. Khi đó ta có

$10^{n-1} \le a < 10^n$, $10^{m-1} \le a^3 < 10^m$.

Suy ra $10^{m+n-2} \le a^4 < 10^{m+n}$ hay $10^{2009} \le a^4 < 10^{2011}$.

Lại có $10^{2009} > \left(10^{502}\right)^4$, $10^{2011} < \left(10^{503}\right)^4$, suy ra $10^{502} < a < 10^{503}$. Do đó a có 503 chữ số, tức là $n = 503$, do đó $m = 1508$.

Chẳng hạn chọn $a = 3\underbrace{0...0}_{502\text{ chữ số }0}$ thì $a^3 = 27\underbrace{0...0}_{1506\text{ chữ số }0}$.

Rõ ràng số a có $n = 503$ chữ số, số a^3 có $m = 1508$ chữ số nên $n + m = 2011$.

Vậy tồn tại những số tự nhiên a thỏa mãn điều kiện của bài toán. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Có nhiều bạn chỉ suy luận số tự nhiên a cần có 503 chữ số đã vội kết luận sự tồn tại của số a mà không chỉ ra ví dụ cụ thể. Một số bạn đã suy luận sai. Từ $10^{2009} \le a^4 < 10^{2011}$ suy ra $a^4 = 10^{2010}$, $a^2 = 10^{1005}$ (điều này vô lí do $a \in \mathbb{N}$) dẫn đến kết luận sai là không tồn tại số tự nhiên a thỏa mãn đề bài.

Riêng bạn *Phạm Lan Hương*, 9A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc** đã bổ sung thêm điều kiện của bài toán: Tồn tại số tự nhiên a có n chữ số giống nhau (viết trong hệ thập phân) và a^3 có m chữ số sao cho $n + m = 2011$.

2) Ngoài bạn *Hương*, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Phạm Thị Khánh Linh*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Nhật Minh, Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 7A4, THCS Đống Đa; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 8A1, THCS Hồng Bàng; **Nghệ An:** *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đặng Thị Thu Thủy, Nguyễn Thị Hoài Anh*, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Bình:** *Hồ Đức Khánh*, 9A, THCS Quách Xuân Kỳ, Bố Trạch.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★**Bài T4/401.** *Giải phương trình*

$$x+y+z+\sqrt{xyz} = 2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}-2\right).$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

ĐK: $xyz \ge 0$, $xy \ge 0$, $yz \ge 0$, $zx \ge 0 \Rightarrow x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Theo nguyên tắc Dirichlet, tồn tại ít nhất hai trong ba số $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$ cùng lớn hơn hoặc bằng 2 hay cùng bé hơn hoặc bằng 2. Giả sử hai số đó là $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y}$, khi đó $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-2) \ge 0$.

PT đã cho tương đương với

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{z}-2)^2+\sqrt{z}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-2)=0 \quad (1)$$

Vì mỗi số hạng ở vế trái của (1) đều không âm, nên để có (1) thì phải có

$$\begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{y}\\ \sqrt{z}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-2)=0\\ \sqrt{z}-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}=\sqrt{z}=2$$

$\Leftrightarrow x = y = z = 4$.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất

$$(x\,;y\,;z) = (4;4;4). \ ❐$$

➢**Nhận xét.** 1) Có thể giải cách khác như sau:

ĐK: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. PT đã cho tương đương với

$$(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{y}-2)^2+(\sqrt{z}-2)^2+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{y}-2)(\sqrt{z}-2)=0 \quad (2)$$

Đặt $\sqrt{x}-2=a$, $\sqrt{y}-2=b$, $\sqrt{z}-2=c \Rightarrow a \ge -2$, $b \ge -2$, $c \ge -2$. Khi đó (2) có dạng $a^2+b^2+c^2+abc=0$ (3)

Xét ba trường hợp

a) $abc > 0$, khi đó $a^2+b^2+c^2+abc > 0$. Mâu thuẫn với (3), nên PT đã cho vô nghiệm.

b) $abc < 0$, khi đó tồn tại một thừa số âm, ta giả sử $a < 0$, $bc > 0$. Do $a \ge -2$ nên $a^2+b^2+c^2+abc \ge a^2+b^2-2bc+c^2$ $= a^2+(b-c)^2 > 0$, mâu thuẫn với (3).

c) $abc = 0$, từ (3) suy ra $a^2+b^2+c^2=0 \Rightarrow a=b=c=0$ $\Rightarrow x = y = z = 4$.

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y;z) = (4;4;4)$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

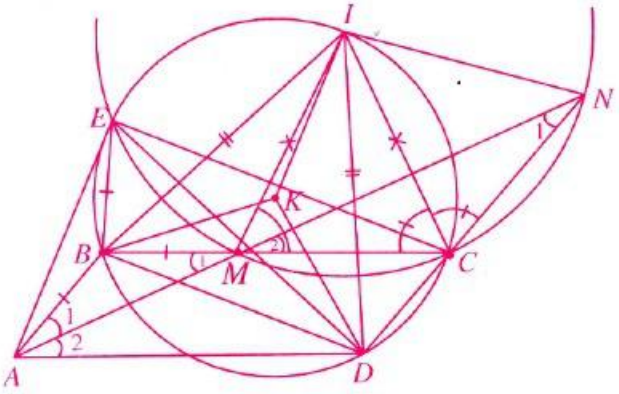
Vĩnh Phúc: *Phạm Lan Hương*, 9A, THCS Lập Thạch; **Hải Phòng:** *Lương Thế Sơn*, 8A1, THCS Hồng Bàng;

Nghệ An: *Trần Bảo Trung*, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, *Đậu Hồng Quân*, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Tất Khánh*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T5/401. *Cho hình bình hành ABCD. Tia phân giác góc BAD cắt các đường thẳng BC, DC lần lượt tại M, N. Gọi E là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và CMN. Tính số đo góc AEC.*

Lời giải



Gọi I, K lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác CMN và BCD. Dễ thấy $\widehat{A_1} = \widehat{M_1} (= \widehat{A_2})$ nên tam giác ABM cân tại B, suy ra $AB = BM$ hay $BM = DC$. Mà $\widehat{M_2} = \widehat{N_1} (= \widehat{A_1})$ nên tam giác CMN cân tại C, suy ra $CM = CN$. Mặt khác, $IM = IN$, do đó CI là đường trung trực của MN, nên CI cũng là phân giác của góc MCN, ta có $\widehat{ICM} = \widehat{ICN}$. Vì $IC = IM$ nên tam giác CIM cân tại I, ta có $\widehat{ICM} = \widehat{IMC}$. Do đó $\widehat{IMC} = \widehat{ICN}$, suy ra $\widehat{BMI} = \widehat{DCI}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau). Từ đó $\Delta BMI = \Delta DCI$ (c.g.c) $\Rightarrow IB = ID$. Vì đường tròn (K) đi qua B, D nên $KB = KD$. Suy ra IK là đường trung trực của BD, nên $IK \perp BD$ (1)

Ta lại có CE là dây cung chung của hai đường tròn (I), (K) nên $CE \perp IK$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $BD // CE$, do đó $BDCE$ là hình thang cân, nên $BC = DE$, $BE = CD$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $BC = AD$, $CD = AB$. Do đó $DA = DE$, $BA = BE$, nên DB là đường trung trực của AE, suy ra $BD \perp AE$. Vì $BD // CE$ nên $AE \perp CE$. Vậy $\widehat{AEC} = 90^\circ$. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Bài toán khá hay và có nhiều cách giải. Mấu chốt của bài toán là chứng minh AE vuông góc với BD. Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều cho kết quả đúng, chứng minh chặt chẽ. Một số bạn còn có nhận xét thêm là điểm I thuộc đường tròn (K), do $\widehat{MBI} = \widehat{CDI}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Lê Bích Ngọc*, 9A1, THCS Nguyễn Đăng Đạo, TP. Bắc Ninh; **Thái Bình:** *Hà Hoàng Anh, Nguyễn Bình Nguyên, Lê Văn Thắng*, 9A4, THCS Nguyễn Đức Cảnh, Thái Thụy; **Nghệ An:** *Trần Bảo Trung*, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, *Nguyễn Tất Khánh, Lê Hồng Đức*, 9B, THPT Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Nam:** *Lê Thế Hải Âu*, 9/7, THCS Lê Quý Đôn, Thăng Bình; **Đồng Nai:** *Lệnh Hồ Xung*, 6A1, THCS Lý Tự Trọng, Trảng Bom; **Đồng Tháp:** *Bùi Trần Hải Đăng*, 9A9, THCS Kim Đồng, TP. Cao Lãnh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T6/401. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$A = \frac{2}{|a-b|} + \frac{2}{|b-c|} + \frac{2}{|c-a|} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn hai điều kiện $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$.

Lời giải. Không giảm tính tổng quát có thể giả sử $a > b > c$. Khi đó ta có

$$A = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Sử dụng BĐT quen thuộc

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ge \frac{4}{m+n} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2}}, \ (m > 0, n > 0).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = n$. Ta có

$$A = 2\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c}\right) + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$\ge \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

$$\ge \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}}$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}} \quad (1)$$

Lại có

$$3(1-b)(1+3b) \le \frac{(3-3b+1+3b)^2}{4} = 4.$$

Suy ra $\sqrt{(1-b)(1+3b)} \le \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Kết hợp với BĐT (1) suy ra $A \geq 10\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a - b = b - c$, $3 - 3b = 1 + 3b$ và $a + b + c = 1$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{2+\sqrt{6}}{6}$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{2-\sqrt{6}}{6}$.

Vậy GTNN của A là $10\sqrt{6}$, đạt được khi và chỉ khi $a = \dfrac{2+\sqrt{6}}{6}$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{2-\sqrt{6}}{6}$ hoặc các hoán vị. ❐

➢ **Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài toán trên. Một số bạn khi nhận được đánh giá (1) đã sử dụng phương pháp khảo sát hàm số và cũng cho đáp số đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Phan Xuân Trường*, 11A, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vĩnh Tường; **Thanh Hoá:** *Lê Văn Huy*, 10A2, THPT Nông Cống I; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; *Hoàng Viết Ánh*, 12D, THPT Thanh Chương 3; **Quảng Trị:** *Nguyễn Anh Quốc*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Lương Khánh Lộc*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thống*, 10T1, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hoà; **Kiên Giang:** *Trương Hữu Vạn Lộc*, 10T2, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt, TP. Rạch Giá.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/401.** *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} 4 + 9.3^{x^2-2y} = \left(4 + 9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} & (1) \\ 4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{2y - 2x + 4} & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $y - x + 2 \geq 0$. Đặt $t = x^2 - 2y$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 4 + 3^{t+2} = (4 + 9^t).7^{2-t}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}} = \dfrac{4+3^{2t}}{7^{2t}} \Leftrightarrow f(t+2) = f(2t)$,

trong đó $f(x) = \dfrac{4+3^x}{7^x} = 4\left(\dfrac{1}{7}\right)^x + \left(\dfrac{3}{7}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$

là hàm số giảm (vì $0 < \dfrac{1}{7}; \dfrac{3}{7} < 1$).

Do đó $f(t+2) = f(2t) \Leftrightarrow t + 2 = 2t \Leftrightarrow t = 2$, tức là $x^2 - 2y = 2$. Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2y = x^2 - 2$. Thay vào phương trình (2) ta có

$4^x + 4 = 4x + 4\sqrt{x^2 - 2 - 2x + 4}$

$\Leftrightarrow 4^{x-1} = x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1}$

$\Leftrightarrow 4^s = s + \sqrt{s^2+1}$, trong đó $s = x - 1$

$\Leftrightarrow 4^{-s} = -s + \sqrt{s^2+1}$,

vì $4^s.4^{-s} = (s + \sqrt{s^2+1})(-s + \sqrt{s^2+1}) = 1$ (3)

Từ (3) ta có $4^s - 4^{-s} = 2s$.

Xét hàm số $g(s) = 4^s - 4^{-s} - 2s$, $s \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(s) = \ln 4.(4^s + 4^{-s}) - 2 > 0, \forall s \in \mathbb{R}$

(do $4^s + 4^{-s} \geq 2$), suy ra $g(s)$ là hàm số đồng biến. Chú ý $g(0) = 0$. Bởi vậy $s = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $g(s) = 0$. Do đó $s = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3), tức là $x - 1 = 0$. Suy ra nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$. ❐

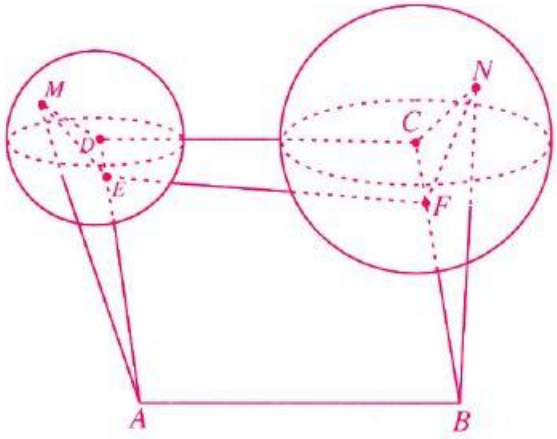
➢ **Nhận xét.** Đây là bài toán thuộc dạng cơ bản trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, các bạn sau có lời giải tốt:

Hưng Yên: *Trần Ngọc Tiến*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thái Bình:** *Nguyễn Quang Trọng*, 10A1, THPT Tây Tiền Hải, *Phan Thị Mai*, 12T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Ngọc*, 12A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân; **Nghệ An:** *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I, *Lê Thị Thảo*, 12A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu; **Đăk Lăk:** *Đinh Thị Kim Thoa*, 12A1, THPT Easup; **Đồng Nai:** *Phạm Văn Minh*, 10C1, THPT Xuân Lộc; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 11A1, THPT Phù Cát II; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thống*, 10 Tin, THPT Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ **Bài T8/401.** *Cho hình vuông ABCD cạnh 4a. M, N lần lượt là hai điểm nào đó trên các mặt cầu S(D ; a), S'(C ; 2a). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA + 2NB + 4MN.*

Lời giải. (Theo bạn *Võ Văn Huy*, $12A_1$, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, **Phú Yên**).



Trên đoạn AD, BC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $DE = \frac{1}{4}a$, $CF = a$. Ta có $\frac{MD}{DE} = \frac{AD}{DM} = 4$ suy ra $\Delta MDE \backsim \Delta ADM$ (c.g.c) $\Rightarrow MA = 4ME$.

Tương tự $\Delta NCF \backsim \Delta BCN$ (c.g.c) với tỉ số đồng dạng là $\frac{NB}{NF} = \frac{CN}{CF} = 2 \Rightarrow NB = 2NF$.

Từ đó, ta có

$MA + 2NB + 4MN = 4(ME + MN + NF)$

$\geq 4EF = a\sqrt{265}$.

Đẳng thức xảy ra khi M và N là giao điểm của đoạn thẳng EF với $S(D\,;\,a)$ và $S'(C\,;\,2a)$.

Vậy GTNN của biểu thức $MA+2NB+4MN$ là $a\sqrt{265}$, đạt được khi M, N lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng EF với $S(D\,;\,a)$ và $S'(C\,;\,2a)$. ❐

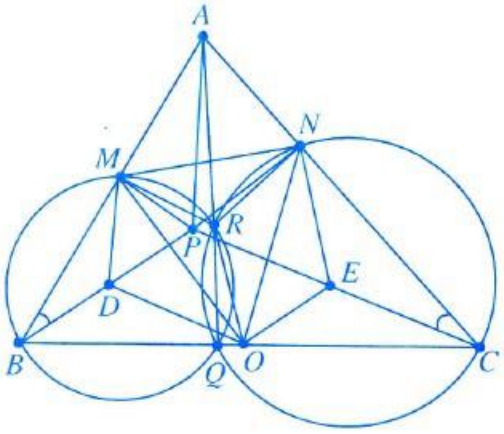
➢ **Nhận xét.** 1) Điều cốt yếu của bài toán này là xác định được các điểm E và F cố định để chuyển việc tìm Min $(MA+2NB+4MN)$ thành tìm Min $(ME+MN+NF)$, chính là bài toán quen thuộc về tìm GTNN của độ dài đường gấp khúc. Ở đây ta quy về tìm các điểm E, F sao cho $MA = 4ME$, $NB = 2NF$. Để xác định được vị trí của E, F, có thể dựa vào tam giác đồng dạng như bạn *Huy*, và cũng có thể dùng phương pháp vectơ. Nếu gọi P, Q là giao của $S(D\,;\,a)$ với đường thẳng DA (P nằm giữa D, A) thì tính được $\overrightarrow{MA} = \frac{5}{2}\overrightarrow{MP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$, lúc đó điểm E được xác định bởi $\overrightarrow{ME} = \frac{5}{8}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{8}\overrightarrow{MQ}$ (P, Q, A, E chính là hàng điểm điều hòa). Tương tự cho điểm F.

2) Xin tuyên dương bạn *Huy* vì chỉ có duy nhất bạn ấy làm đúng và cách trình bày rất ngắn gọn sáng sủa.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T9/401.** *Cho tam giác nhọn ABC với $AB \neq AC$. Từ điểm P nằm trong tam giác sao cho $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$, ta hạ các đường vuông góc PM và PN theo thứ tự xuống các cạnh AB và AC. Gọi O là trung điểm của BC. Phân giác các góc BAC và MON cắt nhau tại R. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác BMR và CNR có một điểm chung nằm trên đoạn BC.*

Lời giải. (Theo đa số các bạn)



Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của PB và PC. Khi đó ta có

$MD = OE = \frac{1}{2}PB$; $NE = OD = \frac{1}{2}PC$.

Lại có $\widehat{ODM} = 2\widehat{PBA} + \widehat{ODP} = 2\widehat{PCA} + \widehat{OEP} = \widehat{OEN}$. Từ đó $\Delta ODM = \Delta OEN$ (c.g.c), suy ra $OM = ON$, dẫn đến $RM = RN$. Gọi R' là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{MN}$ không chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Khi đó $R'M = R'N$ và $\widehat{R'AM} = \widehat{R'AN}$, suy ra $R \equiv R'$. Do đó năm điểm A, M, P, R, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AP. Gọi Q là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMR với cạnh BC. Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{QRN} &= 360^\circ - \widehat{MRN} - \widehat{MRQ}\\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) - (180^\circ - \widehat{ABC})\\ &= 180^\circ - \widehat{ACB}.\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $CNRQ$ nội tiếp. Ta có điều cần chứng minh. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Một số bạn sử dụng *định lí Miquel* cho ba đường tròn (AMN), (BMR) và (CNR) cũng đi đến kết luận của đề bài.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn:

Hải Phòng: *Phan Đức Minh*, 12A15, THPT Thái Phiên; **Phú Thọ:** *Đinh Anh Hoàng*, 10A1, THPT TTr. Lâm Thao; **Hải Dương:** *Nguyễn Viết An*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Trịnh Thị Việt Hà*, 10 Toán 2, *Đỗ Thị Thu Hiền*, 11 Toán 2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Nghệ An:** *Phạm Viết Quyền*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Trần Bảo Trung*, 9C, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, *Đậu Hồng Quân*, 9D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Văn Hoàng*, *Lê Đình Tuấn*, 11T7, THPT Đô Lương I; **Đà Nẵng:** *Lê Trần Nhạc Long*,

10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bình Định:** *Nguyễn Danh Nhân*, 11A1, THPT Phù Cát II; **Phú Yên:** *Võ Văn Huy*, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 10 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T10/401.** *Cho a là số thực dương tùy ý. Xét dãy số (x_n) $(n = 1, 2, ...)$ xác định bởi*

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = \frac{x_n\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}{x_n+1}$$

với mọi $n = 1, 2, ...$ (ở tử có n số 2).

Chứng minh rằng dãy số (x_n) $(n = 1, 2, ...)$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Anh Quang*, 11T1, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**).

Đặt $y_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$ (có n số 2). Dễ chứng minh bằng quy nạp rằng $y_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Thành thử

$$x_{n+1} = \frac{2x_n\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{x_n+1} \qquad (1)$$

Đặt $a_n = \frac{1}{x_n}$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} + \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} \qquad (2)$$

Lại đặt $b_n = \frac{4a_n}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$. Khi đó (2) trở thành

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.b_{n+1}}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.b_n}{4} + \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n + \frac{4}{\sin\frac{\pi}{2^n}} \qquad (3)$$

Chú ý rằng $\cot\frac{\pi}{2^{n+1}} - \cot\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$.

Từ (3) suy ra

$$b_{n+1} - 4\cot\frac{\pi}{2^{n+1}} = b_n - 4\cot\frac{\pi}{2^n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Suy ra $b_n - 4\cot\frac{\pi}{2^n} = b_1 - 4\cot\frac{\pi}{2} = b_1$.

Từ đó $b_n = b_1 + 4\cot\frac{\pi}{2^n}$. Thành thử

$$a_n = \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{4}.b_n = \frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{4}\left(b_1 + 4\cot\frac{\pi}{2^n}\right)$$

$$= \frac{b_1}{4}\sin\frac{\pi}{2^n} + \cos\frac{\pi}{2^n}.$$

Vậy $\lim a_n = \frac{b_1}{4}\lim\sin\frac{\pi}{2^n} + \lim\cos\frac{\pi}{2^n} = 1$.

Suy ra $\lim x_n = \frac{1}{\lim a_n} = 1$. ❐

➢ **Nhận xét.** Hầu hết các lời giải gửi đến đều không đúng (hoặc cho đáp số sai hoặc đáp số đúng nhưng lập luận chưa đúng hoặc sử dụng kiến thức đại học (định lí Stolz)). Chỉ duy nhất bạn *Quang* có lời giải đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T11/401.** *Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+f(y)) = f^4(y) + 4x^3f(y) + 6x^2f^2(y) + 4xf^3(y) + f(-x)$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn).

Viết điều kiện của bài toán dưới dạng

$$f(x+f(y)) - f(-x) = (x+f(y))^4 - x^4,\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Nếu $f(x) \equiv a$ thì từ (1) ta thu được $a = 0$ và $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn đề bài.

Xét trường hợp $f(x) \not\equiv 0$, tức tồn tại x_0 để $f(x_0) \neq 0$. Thế $y = x_0$ vào (1), ta thu được

$$f(x+f(x_0)) - f(-x) = (x+f(x_0))^4 - x^4, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Vế phải là đa thức bậc ba theo biến x nên nó là hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$. Vậy nên, vế trái cũng là hàm số có tập giá trị là $\mathbb{R}$ và với mọi $x \in \mathbb{R}$ đều tồn tại $u, v \in \mathbb{R}$ để $f(u) - f(v) = x$.

Thay $x = 0$ vào (1), ta được

$$f(f(y)) = (f(y))^4 + a, \forall y \in \mathbb{R} \qquad (3)$$

Tiếp tục thay x bởi $-f(x)$ vào (1), ta được

$$f(f(y)-f(x))-f(f(x))$$
$$=(f(y)-f(x))^4-(f(x))^4, \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$f(f(y)-f(x))$$
$$=(f(y)-f(x))^4+a, \forall x,y\in\mathbb{R}.$$ Suy ra

$$f(x)=f(f(u)-f(v))$$
$$=(f(u)-f(v))^4+a=x^4+a, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm số này thỏa mãn điều kiện đề bài.

Kết luận. Các hàm số cần tìm là $f(x)\equiv 0$ và $f(x)=x^4+a$, với $a\in\mathbb{R}$. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán phương trình hàm thuộc loại khó, tuy nhiều bạn gửi bài về tòa soạn nhưng đa số đều không có nghiệm $f(x)\equiv 0$ và không chỉ ra được tập giá trị của $f(x+f(x_0))-f(-x)$ là cả $\mathbb{R}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng:

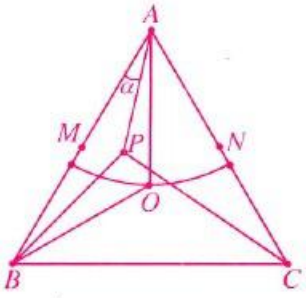
Hải Dương: *Nguyễn Viết An, Mạc Lưu Phong, Trần Quang Thanh*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Thắng*, 12T, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Ngãi:** Lương Khánh Lộc 11T1 THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thống*, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, *Võ Văn Huy*, 12A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T12/401.** *Cho tam giác đều ABC với bán kính đường tròn ngoại tiếp R và P là điểm nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng*

$$PA.PB.PC\le\frac{9}{8}R^3.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Khi đó $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Gọi Ω là phần *hình tròn* tâm A bán kính AO vẽ trong tam giác ABC.

Dễ thấy M, N thuộc Ω. Giả sử P thuộc Ω.

Ta có $PA\le OA=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Đặt $PA=m\left(m\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\right)$;

$\widehat{PAB}=\alpha$; $\widehat{PAC}=\frac{\pi}{3}-\alpha\left(\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\right)$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác PAB và PAC, ta có

$$PB^2=1+m^2-2m\cos\alpha;$$
$$PC^2=1+m^2-2m\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Suy ra $PB^2.PC^2$

$$=\left(1+m^2\right)^2-2m\left(1+m^2\right)\left(\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right)$$
$$+4m^2\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$
$$=\left(1+m^2\right)^2-4m\left(1+m^2\right)\cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$$
$$+2m^2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\right)$$
$$=\left(1+m^2\right)^2-2\sqrt{3}\,m\left(1+m^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$$
$$+2m^2\left(\frac{1}{2}+2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-1\right)$$
$$=4m^2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-2\sqrt{3}\,m\left(1+m^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$$
$$+m^4+m^2+1.$$

Đặt $x=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. Xét hàm bậc hai

$$f(x)=4m^2x^2-2\sqrt{3}\,m\left(1+m^2\right)x+m^4+m^2+1$$

xác định trên đoạn $\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$.

Ta có $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-f(1)$

$$=\left(2\sqrt{3}-3\right)m^3-m^2+\left(2\sqrt{3}-3\right)m\ge 0,$$

$\forall m\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Suy ra

$$\max_{x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]}f(x)=\max\left\{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),f(1)\right\}=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

NGODUCTHODUONGMINHCHAU
DD: 0986885389

Từ đó suy ra $PB^2.PC^2$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=0\\ \alpha=\frac{\pi}{3}\end{array}\right.$$

và giá trị lớn nhất đó bằng

$m^4-3m^3+4m^2-3m+1=(1-m)^2(m^2-m+1)$ (1)

Vậy khi P thuộc Ω, ta có

$PA^2.PB^2.PC^2\le m^2(1-m)^2(m^2-m+1)$

$=\left(m(1-m)\right)^2\left(1-m(1-m)\right)$.

Từ đó, chú ý rằng hàm bậc ba $g(x)=x^2(1-x)$ xác định trong đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\frac{1}{4}$ và vì $m(1-m)\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$ khi $m\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, suy ra $PA.PB.PC$ lớn nhất khi $m=\frac{1}{2}$ và giá trị lớn nhất đó là $\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{9}{8}R^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra, khi P thuộc Ω thì

$PA.PB.PC\le\frac{9}{8}R^3$.

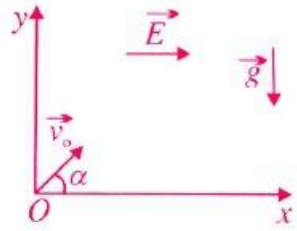
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hoặc P trùng M hoặc P trùng N. Vậy khi P nằm trong tam giác ABC thì $PA.PB.PC\le\frac{9}{8}R^3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P là trung điểm của một cạnh nào đó của tam giác ABC. ❐

➢ **Nhận xét.** Bài toán này khó nên ít bạn tham gia giải, các bạn sau có lời giải tương đối tốt:

Bắc Ninh: *Trương Gia Khang*, $10A_1$, THPT Thuận Thành 1; **Hà Nội:** *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quang, Phú Xuyên; **Nam Định:** *Phùng Mạnh Linh*, *Trần Thị Hồng Nhung*, 11T , THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nam:** *Nguyễn Chí Linh*, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; **Thanh Hoá:** *Lê Quang Lâm*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Duy Tùng*, $11A_{12}$, THPT Diễn Châu 2, *Trần Bảo Trung*, 9C , THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **TP Hồ Chí Minh:** *Vũ Huy Quân*, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Nai:** *Lệnh Hồ Xứng*, 6A1, THCS Lý Tự Trọng, Trảng Bom.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài L1/401.** *Trong không gian có điện trường đều $\vec{E}$ nằm ngang và trọng trường với gia tốc $\vec{g}$. Một quả cầu kim loại khối lượng m, mang điện tích q ($q>0$) được ném lên với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$ (hình vẽ). Hãy tìm góc ném α để vận tốc của quả cầu luôn tăng. Bỏ qua sức cản không khí.*



Lời giải. Theo phương Ox quả cầu chịu tác dụng của lực điện $\vec{F}=q\vec{E}$. Theo phương Oy có trọng lực $\vec{P}$ tác dụng.

Ở thời điểm t bất kì, thành phần vận tốc theo hai phương Ox và Oy lần lượt là

$v_x=v_{0x}+a_xt=v_0\cos\alpha+\frac{qE}{m}.t$,

$v_y=v_{0y}+a_yt=v_0\sin\alpha-gt$.

Vận tốc của quả cầu ở thời điểm t là

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

$$=\sqrt{\left(v_0\cos\alpha+\frac{qE}{m}.t\right)^2+\left(v_0\sin\alpha-gt\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{q^2E^2}{m^2}+g^2\right)t^2+2v_0\left(\frac{qE}{m}.\cos\alpha-g\sin\alpha\right)t+v_0^2}\quad(1)$$

Điều kiện để độ lớn vận tốc của quả cầu luôn tăng là $\frac{dv}{dt}\ge0$, với mọi $t\ge0$.

Lấy đạo hàm của v theo t rồi rút gọn ta thu được

$$\left(\frac{q^2E^2}{m^2}+g^2\right)t+v_0\left(\frac{qE}{m}\cos\alpha-g\sin\alpha\right)\ge0$$

với mọi $t\ge0$.

Từ đó suy ra

$$\frac{qE}{m}\cos\alpha-g\sin\alpha\ge0\Rightarrow\tan\alpha\le\frac{qE}{mg}.$$

Vậy góc ném α phải thỏa mãn điều kiện $0\le\alpha\le\alpha_0$ với $\tan\alpha_0=\frac{qE}{mg}$. ❐

➢**Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Bắc Ninh: *Lê Văn Mạnh*, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** *Phạm Thị Yến Nhi*, 10 Lý, THPT chuyên Nguyễn Trãi, *Vũ Toàn Thắng* 12A1 THPT Phả Lại, Chí Linh; **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** *Phạm Quốc Lâm, Lê Quang Trung*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Phan Thị Mai*, 12T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Bùi Thị Thúy*, 12A3, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân; *Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4, *Đoàn Văn Hiệp*, 11B1, THPT Triệu Sơn 4; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Sơn*, 11A1 THPT Diễn Châu 3, *Nguyễn Văn Hoàng*, 11T7, THPT Đô Lương I; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Viết Hùng*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★**Bài L2/401.** *Cho đoạn mạch RLC mắc nối tiếp như hình vẽ.*

Biết $R = 40\Omega$, ống dây có điện trở thuần $r = 10\Omega$ và hệ số tự cảm $L = \frac{1}{2\pi}$H, $u_{AB} = 50\sqrt{2}\cos(100\pi t)$V. Tụ điện có điện dung thay đổi được.

a) Tìm giá trị cực tiểu có thể đạt được của U_{AM} khi điện dung C của tụ điện thay đổi.

b) Vẽ dạng đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của U_{AM} theo Z_C.

Lời giải. a) *Xác định giá trị cực tiểu của U_{AM}*

Trước hết ta xác định hiệu điện thế U_{AM}

$$U_{AM} = I.Z_{AM}.$$

Ta có $I = \dfrac{U}{\sqrt{(r+R)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$;

$$Z_{AM} = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}.$$

Do đó $U_{AM} = \dfrac{U\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}{\sqrt{(r+R)^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$.

Từ đây suy ra $U_{AM} = \dfrac{U}{\sqrt{1 + \dfrac{R^2 + 2Rr}{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}}$.

Dễ dàng thấy rằng U_{AM} cực tiểu khi $Z_L = Z_C$.

Ta có $Z_L = L\omega = \dfrac{1}{2\pi}.100\pi = 50(\Omega)$.

Vậy khi $Z_L = Z_C = 50\Omega$ thì U_{AM} cực tiểu.

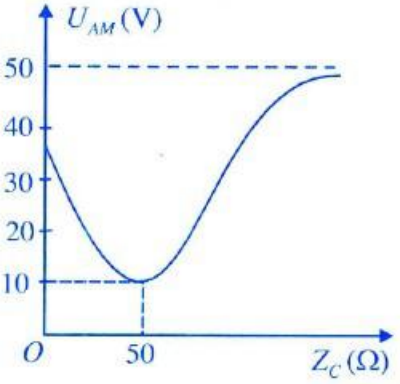
$$U_{AM\min} = \frac{U.r}{r+R} = \frac{50.10}{40+10} = 10(\text{V}).$$

b) *Vẽ đồ thị*

Khi $Z_C \to 0$ thì $U_{AM} \to 20\sqrt{2}$V.

Khi $Z_C \to +\infty$ thì $U_{AM} \to 50$V.

Đồ thị biểu diễn U_{AM} theo ZC như hình vẽ.



➢**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thái Nguyên: *Ngô Thượng Thủy*, 12A1, THPT Phổ Yên; **Bắc Ninh:** *Đào Thị Thùy Trang*, 12A1, THPT Tiên Du 1, *Lê Văn Mạnh*, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nội:** *Bùi Văn Tuấn*, THPT Ứng Hòa A; **Nam Định:** *Trần Quốc Đạt*, 12C3, *Vũ Bảo Chung*, 12C10, THPT Hải Hậu A; **Ninh Bình:** *Hoàng Tuấn Anh*, 12M, THPT Yên Khánh A; **Thái Bình:** *Phan Thị Mai*, 12T, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Trương Lê Văn*, A3K38, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Đức Lâm*, 12 Toán, THPT chuyên Quảng Trị; **TP. Hồ Chí Minh:** *Hoàng Nguyễn Nhật Anh*, 12A6, THPT Nguyễn Thượng Hiền.

NGUYỄN VĂN THUẬN

Đính chính cho mục ĐỀ RA KÌ NÀY.

1) Bài T4/403 bổ sung thêm giả thiết $x, y, z \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2) Bài T9/404 điều kiện về đẳng thức sửa thành

$$\frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} + \frac{2y^2 - 2y + 4}{y + \sqrt{y-2}} + \frac{3z^2 - 3z + 9}{z + \sqrt{z-3}} = 12.$$

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

T7/405. *OABC* is a trirectangular tetrahedron at vertex *O* *OH* is the altitude from *O* of tetrahedron. Let *R* be the circumradius of triangle *ABC*. Prove that $OH \le \frac{R\sqrt{2}}{2}$. When does equality occur?

T8/405. a) Find all distinct permutations of the word **TOANHOCTUOITRE**.

b) How many permutations are there that has three consecutive **T - TTT**?

c) How many permutations are there without adjacent **T**s?

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/405. Let k be a positive integer, α is an arbitrary real number. Find the limit of sequence (a_n) where

$$a_n = \frac{[1^k.\alpha]+[2^k.\alpha]+...+[n^k.\alpha]}{n^{k+1}} \quad (n=1, 2, ...),$$

here the notation $[x]$ is the largest integer that does not exceed x.

T10/405. Find all functions $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ which satisfy the following conditions

i) f is strictly increasing;

ii) $f(f(n)) = 4n+9$ for all $n \in \mathbb{N}^*$;

iii) $f(f(n)-n) = 2n+9$ for all $n \in \mathbb{N}^*$.

T11/405. Does there exist a positive integer $n \ge 2$ so that

$$f(x) = 1+4x+4x^2+...+4x^{2n},$$

is a perfect square polynomial?

T12/405. Let *ABC* be a triangle inscribed the circle (*O*) and *A'* is a fixed point on (*O*). *P* moves on *BC*, *K* belongs to *AC* so that *PK* is always parallel to a fixed line *d*. The circumcircle of triangle *APK* cuts the circle (*O*) at a second point *E*. *AE* cuts *BC* at *M*. *A'P* cuts the circle (*O*) at a second point *N*. Prove that the line *MN* passes through a fixed point.

Translated by LE MINH HA

Giới thiệu SÁCH

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sắp phát hành cuốn Phương trình nghiệm nguyên và kinh nghiệm giải của tác giả NGND Vũ Hữu Bình. Cuốn sách gồm 5 chương:

- **Một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên.**
- **Một số dạng phương trình nghiệm nguyên.**
- **Bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên.**
- **Phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học.**
- **Những phương trình nghiệm nguyên chưa có lời giải.**

Sách trình bày dễ hiểu, chặt chẽ, cùng những kinh nghiệm giải toán. Cuốn sách sẽ giúp bạn đọc rèn luyện phương pháp suy luận, kĩ năng giải toán và cảm nhận thêm vẻ đẹp của môn Toán.

Xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc.

THTT

Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ cho quý II năm 2011 và CÁC ẤN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các bưu điện trên cả nước

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC HÀ NỘI MỞ RỘNG

năm 2011

Ngày 20.2.2011 tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Kì thi Olympic Toán học Hà Nội mở rộng (HOMO) lần thứ VIII với sự tham gia của 102 em học sinh lớp 8 (Junior Level, sinh sau ngày 01.01.1997) và 97 em học sinh lớp 10 (Senior Level, sinh sau ngày 01.01.1995) từ các trường THCS và THPT thuộc 16 tỉnh, thành phố: Hà Nội, Hải Dương, Quảng Ninh, Bắc Giang, Hà Giang, Bắc Ninh, Hoà Bình, Lào Cai, Yên Bái, Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Thái Bình, Thái Nguyên, Hưng Yên, Điện Biên, Lạng Sơn. Kết quả của Kì thi ở Junior Level có: 6 giải Nhất (16-20 điểm), 13 giải Nhì (14-15 điểm), 19 giải Ba (10-13 điểm), 32 giải Khuyến khích (6-9 điểm); ở Senior Level có: 8 giải Nhất (18-20 điểm), 14 giải Nhì (15-17 điểm), 36 giải Ba (10-14 điểm), 19 giải Khuyến khích (7-9 điểm). Đặc biệt, em Phùng Đắc Vũ Anh (trường Hà Nội-Amsterdam) và em Hoàng Đỗ Kiên (Trường THPT chuyên Vĩnh Phúc) đã đoạt điểm tuyệt đối 20/20 ở Junior Level và Senior Level. Dựa vào kết quả của Kì thi này, Hội Toán học Hà Nội sẽ chọn ra 20 em ở Junior Level và 20 em ở Senior Level tham dự Kì thi Olympic Toán học Singapore mở rộng năm 2011.
Sau đây xin giới thiệu đề bài của Kì thi HOMO 2011.

Important:

Answer all 12 questions.

Enter your answers on the answer sheet provided.

For the multiple choice questions, enter only the letters (A, B, C, D or E) corresponding to the correct answers in the answer sheet.

No calculators are allowed.

SENIOR SECTION

Sunday, February 20, 2011 *08h45 – 11h45*

Multiple Choice Questions

Q1. An integer is called "octal" if it is divisible by 8 or if at least one of its digits is 8. How many integers between 1 and 100 are octal?

(A): 22; (B): 24 ; (C): 27; (D): 30; (E): 33.

Q2. What is the smallest number

(A):3 ; (B): $2^{\sqrt{2}}$; (C): $2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$;

(D): $2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{2}{3}}$; (E): $2^{\frac{5}{3}}$.

Q3. What is the largest integer less than to

$$\sqrt[3]{(2011)^3+3\times(2011)^2+4\times2011+5}?$$

(A): 2010 ; (B): 2011; (C): 2012;

(D): 2013 ; (E): None of the above.

Short Questions

Q4. Prove that $1+x+x^2+x^3+...+x^{2011}\geq 0$ for every $x\geq -1$.

Q5. Let a, b, c be positive integers such that $a+2b+3c=100$. Find the greatest value of $M=abc$.

Q6. Find all pairs (x, y) of real numbers satisfying the system

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^4-y^4=5x-3y. \end{cases}$$

Q7. How many positive integers a less than 100 such that $4a^2+3a+5$ is divisible by 6?

Q8. Find the minimum value of

$S=|x+1|+|x+5|+|x+14|+|x+97|+|x+1920|$.

Q9. For every pair of positive intergers (x, y) we define $f(x, y)$ as follows:

$f(x,1)=x$;

$f(x,y)=0$ if $y>x$;

$f(x+1,y)=y\big(f(x,y)+f(x,y-1)\big)$.

Evaluate $f(5 ; 5)$.

Q10. Two bisectors BD and CE of the triangle ABC intersect at O. Suppose that $BD.CE = 2BO.OC$. Denote by H the point in BC such that $OH\perp BC$. Prove that $AB.AC=2HB.HC$.

Q11. Consider a right-angle triangle ABC with $A=90^o$, $AB=c$ and $AC=b$. Let $P\in AC$ and $Q\in AB$ such that $\widehat{APQ}=\widehat{ABC}$ and $\widehat{AQP}=\widehat{ACB}$. Calculate $PQ+PE+QF$, where E and F are the projections of P and Q onto BC, respectively.

Q12. Suppose that $|ax^2+bx+c|\geq|x^2-1|$ for all real numbers x. Prove that $|b^2-4ac|\geq 4$.

JUNIOR SECTION

Sunday, February 20, 2011 *08h45 – 11h45*

The questions **Q3, Q8, Q10** *are the same as the questions* **Q3, Q8, Q10**, *respectively, in the Senior Section.*

Multiple Choice Quetions

Q1. Three lines are drawn in the plane. Which of the following could NOT be the total number of points of intersections?

(A): 0; (B): 1; (C): 2;

(D): 3; (E): They all could.

Q2. The last digit of the number $A=7^{2011}$ is

(A): 1; (B): 3; (C): 7;

(D): 9; (E): None of the above.

Q4. Among the four statements on real numbers below, how many of them are correct?

"If $a<b<0$ then $a<b^2$";
"If $0<a<b$ then $a<b^2$";
"If $a^3<b^3$ then $a<b$";
"If $a^2<b^2$ then $a<b$";
"If $|a|<|b|$ then $a<b$".

(A):0 ; (B) 1; (C): 2; (D): 3; (E): 4.

Short Questions

Q5. Let $M=7!\times 8!\times 9!\times 10!\times 11!\times 12!$.
How many factors of M are perfect squares?

Q6. Find all positive integers (m, n) such that
$$m^2+n^2+3=4(m+n).$$

Q7. Find all pairs (x, y) of real numbers satisfying the system
$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^4-y^4=8x-y. \end{cases}$$

Q9. Solve the equation
$$1+x+x^2+x^3+...+x^{2011}=0.$$

Q11. Given a quadrilateral $ABCD$ with $AB=BC=3$cm, $CD=4$cm, $DA=8$cm and $\widehat{DAB}+\widehat{ABC}=180^\circ$. Calculate the area of the quadrilateral.

Q12. Suppose that $a>0$, $b>0$ and $a+b\le 1$. Determine the minimum value of
$$M=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{ab+b^2}+\frac{1}{a^2+b^2}.$$

THANH LOAN
(*Nguồn: http://hms.org.vn*)

HƯỚNG DẪN GIẢI... *(Tiếp trang 9)*

Câu VIIa. BĐT đã cho tương đương với

$\ln x-\ln(4-x)-x<\ln y-\ln(4-y)-y$ (1)

Xét hàm số

$f(t)=\ln t-\ln(4-t)-t$ $(0<t<4)$.

$$f'(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}-1=\frac{(t-2)^2}{t(4-t)}\ge 0 \quad (0<t<4).$$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trong khoảng $(0;4)$. Từ đó suy ra BĐT (1). ❐

Câu VIb. 1) Giả sử vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC là $\overrightarrow{n_{AC}}=(a;b)$. Lại có

$\overrightarrow{n_{AB}}=(2;1)$, $\overrightarrow{n_{BC}}=(1;4)$; $B(1;-1)$;

$$\cos B=\cos C\Rightarrow\frac{\left|\overrightarrow{n_{AB}}.\overrightarrow{n_{BC}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{AB}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{BC}}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{n_{AC}}.\overrightarrow{n_{BC}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{AC}}\right|.\left|\overrightarrow{n_{BC}}\right|},$$

suy ra $31a^2-40a-44b^2=0$. Tìm được vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC

$\overrightarrow{n_{AC}}=(-22;31)$.

PT đường cao qua đỉnh B là $31x+22y-9=0$. ❐

2) Đường tròn (C) có tâm $I(4;2;1)$, bán kính $R=3$; có $\overrightarrow{u_d}=(2;-2;1)$. Giả sử $\overrightarrow{n_p}=(a;b;c)$;

$\overrightarrow{n_p}\perp\overrightarrow{u_d}\Rightarrow 2a-2b+c=0$ (1)

Điểm $A(1;-1;1)\in d\Rightarrow A\in(P)$, ta được PT $a(x-1)+b(y+1)+c(z-1)=0$; (P) tiếp xúc với (C) khi $d(I;P)=3\Leftrightarrow 2ab=c^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được phương trình của $(P_1):2x+y-2z+1=0$; $(P_2):x+2y+2z-1=0$.

Câu VIIb. Giả sử $z=x+yi$. Từ giả thiết có

$|x+1+(y-5)i|=|x+3-(y+1)i|\Leftrightarrow$

$(x+1)^2+(y-5)^2=(x+3)^2+(y+1)^2\Leftrightarrow x+3y=4$;

ta có $16=(x+3y)^2\le 10(x^2+y^2)=10|z|^2$.

Số phức có môđun nhỏ nhất là $z=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$. ❐

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Cho điểm lời giải

BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN

Trong giờ bài tập toán, thầy giáo gọi bạn *Khanh* lên bảng giải một bài tập về tìm giới hạn:

$$\text{Tìm } \lim \frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}.$$

Bạn *Khanh* đã trình bày lời giải đó như sau:

Ta có $\lim \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$

$$= \lim \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\frac{1}{n^2}+\lim\frac{2}{n^2}+\lim\frac{3}{n^2}+...+\lim\frac{n}{n^2}}{\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0.$$

Theo em, thầy giáo sẽ cho bạn *Khanh* mấy điểm? Lời giải của bạn như thế nào?

THÂN VĂN DỰ

(GV THPT Sơn Động số 3, Bắc Giang)

Giải đáp bài:

Đã đúng chưa?

(Đề đăng trên THTT số 398, tháng 8 năm 2010)

• Lời giải của bạn học sinh đó phạm sai lầm ở bước biến đổi sau:

$$\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=0 & (1)\\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Lưu ý rằng vế trái của (1) và (2) là hiệu hai vectơ nên vế phải của chúng cũng phải là một vectơ. Tuy nhiên, nếu sửa $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ hoặc $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ thì điều này cũng không thể suy ra từ $\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)=0$ được. Vì theo định nghĩa thì $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PQ}$ có phương vuông góc với nhau.

• *Bài giải được điều chỉnh lại như sau:*

Ta có $\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)-\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}\right)^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},$$

hay tứ giác *ABCD* là hình bình hành.

Các bạn sau có đáp án tốt hơn cả:

Hà Nam: *Nguyễn Đức Nam*, 10A5, THPT Duy Tiên B; **Thái Bình:** *Đinh Thị Nho*, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Sơn*, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Nai:** *Trần Hoàng Nhật Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa; **Bến Tre:** *Khổng Hữu Hiệp*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGỌC HIỂN

NGODUCTHODUONGMINHCHAU
DD: 0986885389

Năm thanh niên 2011

Năm 2011 được chọn là *NĂM THANH NIÊN* với các hoạt động chính theo chủ đề và ba ngày kỉ niệm liên quan tới thanh niên. Bạn hãy tìm từ ở cột màu sẫm trong ô chữ, biết rằng mỗi dòng chữ của ô chữ (theo thứ tự) được điền một cách hợp lí vào các phần để trống (...) trong chín câu dưới đây.

Cực trị năm Mèo

"Các bạn gọi Mèo là Tiểu Hổ,
Chẳng ai gọi Hổ là Đại Mèo"
Bé hồn nhiên hỏi mẹ,
Mắt mở tròn trong veo...

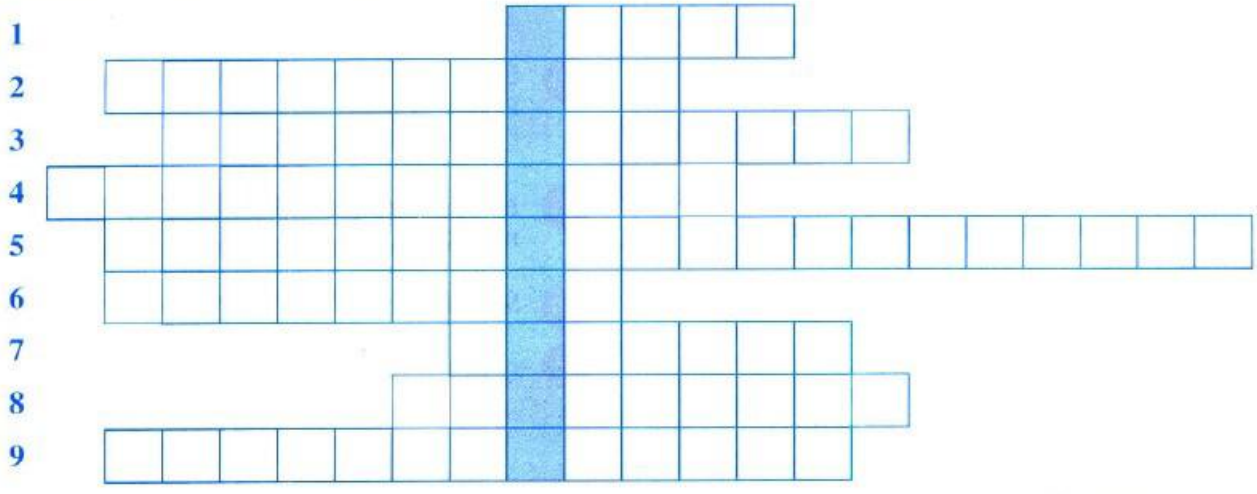
Cực trị của năm Mèo,
Bài toán hay đến lạ,
Lời giải sao khó quá!
Khảo sát năm nào đây?

Mèo dạy Hổ trèo cây,
Hổ dạy Mèo bắt Lợn,
Hổ nhìn cây mà ớn,
Mèo thấy Lợn bước theo...

Cực trị của năm Mèo,
Bài toán vui đến thế,
Min của hàm còn dễ,
Max cuộc đời khó ghê...

PHAN CUNG ĐỨC
(GV trường chuyên KHTN ĐHKHTN Hà Nội)

1. Lễ phát động ngày thanh niên hành động vì... có hoàn cảnh khó khăn (4.1.2011).
2. Lễ phát động ngày thanh niên hành động vì... (31.12.2010).
3. Ngày 26.3.1931 là ngày thành lập ... Cộng sản.
4. Ngày 15.5.1941 là ngày thành lập ... Tiền phong.
5. Ngày 15.10.1956 trở thành ngày truyền thống của ... Việt Nam.
6. Lễ phát động ngày thanh niên hành động vì ... (2.1.2011).
7. Lễ phát động ngày thanh niên ... tình nguyện (9.1.2011).
8. Lễ phát động ngày thanh niên hành động vì... của Tổ quốc.
9. Phương châm: Hành động vì một môi trường... cho tuổi trẻ.



VÂN KHANH

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 405 (3.2011)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập : TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC** ***Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* TRẦN HỮU NAM, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Cao Quốc Cường – Sử dụng định lí Viète để giải một số bài toán về hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

3 Hướng dẫn giải Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa, năm học 2010 – 2011.

4 Đề thi vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, năm học 2010 – 2011.

5 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Phan Cung Đức – Bài toán xác định tâm hình cầu ngoại tiếp khối đa diện.

8 **Thử sức trước kì thi** – ***Đề số 6.***

9 ***Hướng dẫn giải Đề số 5.***

10 Hướng dẫn ôn tập môn Vật lí thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2011.

12 **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**
Lê Thị Thu Huyền, Phùng Thị Oanh, Tạ Duy Phượng – Sáng tạo và chứng minh các hệ thức lượng giác trong tam giác nhờ phép biến đổi tuyến tính góc.

15 **Giải trí toán học – Math Recreation**

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/405 ..., T12/405, L1/405, L2/405.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 401.

28 Kì thi Olympic Toán học Hà Nội mở rộng năm 2011.

30 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**

31 **Câu lạc bộ – Math Club**

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH *Mĩ thuật :* MINH THƠ
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ *Chế bản :* NGUYỄN THỊ OANH

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

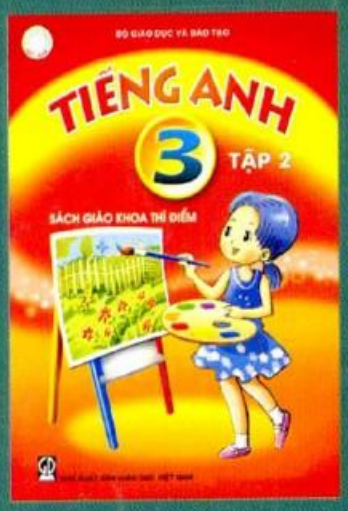
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
trân trọng giới thiệu đến bạn đọc
BỘ SÁCH GIÁO KHOA TIẾNG ANH TIỂU HỌC THÍ ĐIỂM

Bộ Sách giáo khoa Tiếng Anh 3, Tập 2 được Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam tổ chức biên soạn theo Chương trình thí điểm Tiếng Anh tiểu học do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành theo Quyết định số 3321/QĐ-BGDĐT ngày 12 tháng 8 năm 2010, trong đó tiếng Anh được dạy từ lớp 3 đến lớp 5.

Sách sẽ giúp các em học sinh bước đầu hình thành và phát triển năng lực giao tiếp bằng Tiếng Anh thông qua bốn kĩ năng: nghe, nói, đọc và viết; trong đó ưu tiên phát triển hai kĩ năng: nghe và nói.

Tác giả của bộ sách là các chuyên gia Tiếng Anh và giáo viên Tiếng Anh giỏi của Việt Nam hợp tác cùng Nhà xuất bản Macmillan Australia và Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Hiện nay, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam đã xuất bản đồng bộ 3 cuốn: Tiếng Anh 3, Tập 2, Sách giáo khoa thí điểm ; Sách giáo viên thí điểm ; Sách bài tập và các thiết bị dạy học như: đĩa Audio CD, bộ quân rối, bộ thẻ từ, bộ tranh, robot teacher,... Các thiết bị dạy học này rất thân thiện với giáo viên và học sinh Việt Nam sẽ hỗ trợ đắc lực cho giáo viên và học sinh trong việc dạy - học.



Bộ quân rối

Bộ tranh

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT03M1

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2011

Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng