BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

11
2001

SỐ 293 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Chào mừng ngày Nhà giáo Việt Nam 20-11

Trường THPT năng khiếu Hà Tĩnh

Tổ Toán của trường

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

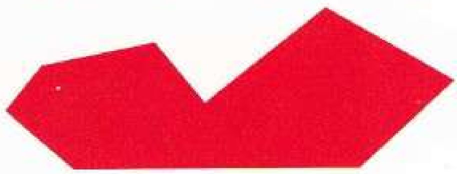
ĐO DIỆN TÍCH HÌNH ĐA GIÁC

Một thửa đất hình đa giác được vẽ trên bản đồ theo tỉ lệ xích 1 : 1000 như hình 1. Để đo diện tích hình đa giác, thông thường người ta phân chia đa giác thành các phần có hình tam giác, tứ giác để tính diện tích các phần rồi lấy tổng của chúng.

Dành cho bạn đọc

Tính diện tích thửa đất ở hình 1. Hãy chỉ ra cách đo diện tích hình đa giác sao cho càng ít phép đo độ dài, càng ít phép tính càng tốt.

Bạn nào có cách đo hay sẽ nhận được tặng phẩm.



Hình 1

Giải đáp : DỰNG ĐOẠN THẲNG BẰNG NỬA CHU VI ĐƯỜNG TRÒN

Các bạn đã đưa ra khá nhiều cách dựng khác nhau tương ứng với công thức tính gần đúng số π. Chẳng hạn x gần bằng số π với sai số Δx :

$x = \dfrac{22}{7} = 3 + \dfrac{1}{7} \approx 3{,}1428$ $(\Delta x = 0{,}0013)$; $x = 3 + \dfrac{\sqrt{2}}{10} \approx 3{,}14142$ $(\Delta x = 0{,}00018)$

Tuy nhiên dựng đoạn thẳng có số đo như trên đòi hỏi *khá nhiều thao tác* sử dụng thước, compa.

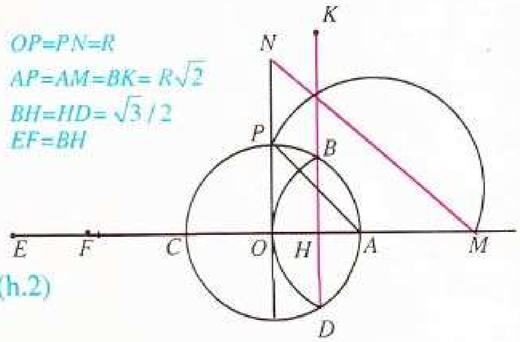
Xin nêu ra một số cách dựng ít thao tác hơn (coi $R = 1$)

Đa số các bạn dựng theo cách 1, cách 2, cách 3.

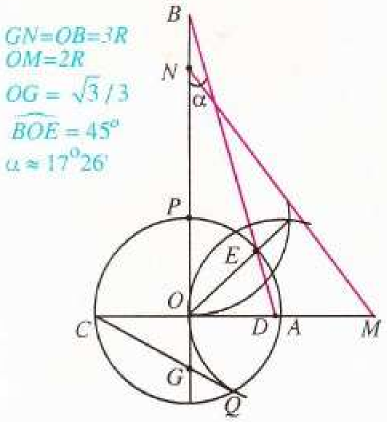
Cách 1. $AF = AE - BH = 4 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}1339$ $(\Delta_1 = 0{,}0077)$ (h.2)

Cách 2. $MN = \sqrt{2^2 + (1+\sqrt{2})^2} \approx 3{,}1350$ $(\Delta_2 = 0{,}0066)$ (h.2)

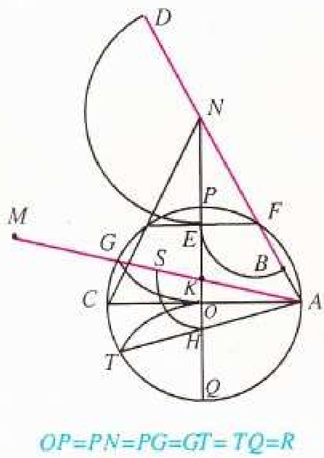
Cách 3. $DK = \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}1462$ $(\Delta_3 = 0{,}0047)$ (h.2)



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Cách 4. $BD = \dfrac{3}{\cos\alpha} \approx 3{,}14449$

$\Delta_4 = 0{,}0029)$ (h.3)

Cách 5. $AM = 2AS = 2(AK + KH)$

$= 4(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$\approx 3{,}14235$ $(\Delta_5 = 0{,}00076)$ (h.4)

Cách 6. $BD = BF + FN + ND =$

$= EF + FN + NE = \dfrac{9 + 3\sqrt{5}}{5}$

$\approx 3{,}14164$ $(\Delta_6 = 0{,}00005)$ (h.4)

Cách 7. $MN = \sqrt{2^2 + (3 - \sqrt{3}/3)^2} \approx 3{,}14153$

$(\Delta_7 = 0{,}00006)$ (h.3)

Xin gửi tặng phẩm cho các bạn :

1) *Nguyễn Văn Chinh*, 10A2, THPT-T ĐH Vinh, Nghệ An (cách 6)
2) *Nguyễn Đức Tiến*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc (cách 6)
3) *Chu Văn Phú*, 11E, THPT Quỳnh Lưu I, Nghệ An (cách 4)
4) *Trần Bình Minh*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái.

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 293 (11-2001)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648
Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

RÈN LUYỆN NĂNG LỰC TƯ DUY THÔNG QUA VIỆC KHAI THÁC CÁC BÀI TOÁN

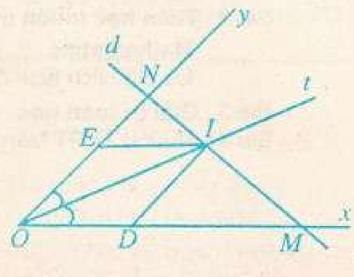
HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT NK Hà Tĩnh)

Việc tìm ra lời giải một bài toán nhiều khi không phải là quá khó, nhưng thực ra sau mỗi bài toán có biết bao điều lí thú. Nếu người thầy không biết khơi dậy ở học sinh óc tò mò, sự tìm tòi khám phá những gì ẩn sau mỗi bài toán mà chỉ giải xong bài toán là kết thúc thì việc dạy học trở nên nhạt nhẽo. Điều quan trọng là nếu sau mỗi bài toán tìm được một chuỗi bài toán liên quan từ dễ đến khó thì có thể rèn luyện năng lực tư duy sáng tạo cho học sinh, đồng thời kiến thức sẽ được mở rộng hơn, hệ thống hơn. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Bài toán 1. (bài toán gốc). *Cho góc xOy và một điểm I cố định trên tia phân giác Ot. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I, cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức* $\frac{1}{OM}+\frac{1}{ON}$ *là hằng số.*

Lời giải.

Dựng hình thoi $ODIE$ với D, E thuộc Ox, Oy tương ứng (h.1). Lúc đó các điểm D, E cố định và $OD = a$ không đổi.



Hình 1

Ta có

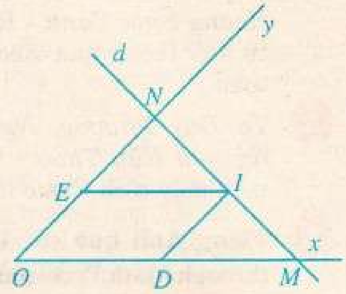
$$\frac{a}{OM}+\frac{a}{ON}=\frac{IE}{OM}+\frac{ID}{ON}=\frac{IN}{MN}+\frac{IM}{MN}=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM}+\frac{1}{ON}=\frac{1}{a} \text{ (đpcm).}$$

Ta có thể khái quát hóa bài toán khi xét điểm I nằm trong góc xOy.

Bài toán 2. *Cho góc xOy và một điểm I cố định nằm trong góc đó. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I, cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại M, N. Lấy điểm D, E trên các tia Ox, Oy sao cho ID//Oy và IE//Ox. Đặt OD = a, OE = b. Chứng minh rằng* $\frac{a}{OM}+\frac{b}{ON}=1$

Chú ý rằng D, E cố định nên a, b không đổi (h.2). Chứng minh tương tự bài toán 1.1.

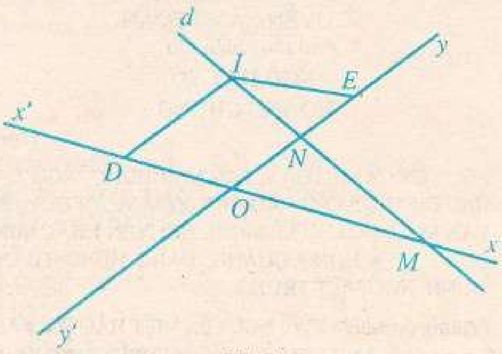


Hình 2

Tiếp tục cho điểm I chuyển từ miền trong góc xOy ra miền ngoài góc đó ta có bài toán sau.

Bài toán 3. *Cho hai đường thẳng x'x và y'y cắt nhau tại điểm O. Một điểm I cố định nằm ngoài các góc xOy, x'Oy'. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I, cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại M, N. Lấy các điểm D, E trên các đường thẳng x'x, y'y sao cho ID//y'y và IE//x'x. Đặt OD = a, OE = b. Chứng minh rằng* $\frac{a}{OM}-\frac{b}{ON}$ *luôn là hằng số.*

Chứng minh tương tự các bài toán trên, chú ý rằng (h.3) : nếu điểm I nằm trong góc $x'Oy$ thì



Hình 3

$\frac{a}{OM} - \frac{b}{ON} = -1$, còn nếu điểm I nằm trong góc y'Ox thì $\frac{a}{OM} - \frac{b}{ON} = 1$.

Một cách biến đổi bài toán là xét mệnh đề đảo của các bài toán 2 và 3. Để làm giảm mức độ phức tạp của giả thiết có thể chuyển việc xét biểu thức chứa 2 tham số a, b về biểu thức chứa một tham số $k = \frac{b}{a}$ như sau.

Bài toán 4. *Cho hai đường thẳng x'x và y'y cắt nhau tại điểm O. Đường thẳng d thay đổi cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại M, N. Nếu tồn tại số k sao cho* $\frac{1}{OM} + \frac{k}{ON}$ *luôn bằng một hằng số khác 0 thì đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Giả sử $\frac{1}{OM} + \frac{k}{ON} = \frac{1}{a}$

a) Xét trường hợp $k > 0$, lúc đó $a > 0$. Dựng điểm D trên tia Ox sao cho $OD = a$ thì $OD < OM$ (h.2). Kẻ $DI//Oy$ và cắt đoạn thẳng MN tại I. Lấy điểm E trên tia Oy sao cho $OE = ID$ thì $ODIE$ là hình bình hành. Chứng minh tương tự các bài toán 1, 2 ta có $\frac{OD}{OM} + \frac{OE}{ON} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OM} + \frac{OE}{OD.ON} = \frac{1}{OD}$. Từ đó và giả thiết suy ra $\frac{OE}{OD} = k \Rightarrow OE = k.OD = k.a > 0$. Vậy D, E đều là điểm cố định nên I là điểm cố định nằm trong góc xOy.

b) Với trường hợp $k < 0$. Cần xét $a > 0$ hoặc $a < 0$. Chứng minh dành cho bạn đọc.

c) Với $k = 0$ thì M là điểm cố định cần tìm.

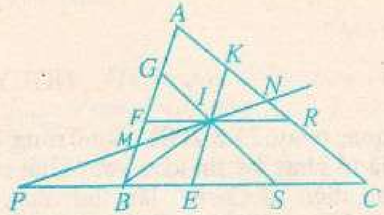
Chú ý rằng khi $\frac{1}{OM} + \frac{k}{ON} = 0$ thì $\frac{ON}{OM} = -k$ nên các đường thẳng d song song với nhau.

Ta lại có thể thay đổi giả thiết bằng cách xét một điểm cố định nằm trong 3 góc trong của một tam giác.

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua điểm I, cắt các cạnh AB, AC và tia CB lần lượt tại M, N và P. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau là không đổi :*

$$\frac{AB}{AM.BM} + \frac{AC}{AN.CN} - \frac{BC}{BP.CP}$$

Lời giải. Dựng các hình thoi $AGIK$, $BEIF$, $CRIS$ (h.4) Do $\widehat{BMP} = \widehat{FMI} > \widehat{MBI} = \widehat{IBE} = \widehat{BIF} > \widehat{FIM} = \widehat{BPM} \Rightarrow BP > BM$.



Hình 4

Đặt $AG = m$, $BE = p$, $CR = n$. Theo bài toán 2, 3 ta có

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{m}, \ \frac{1}{CN} + \frac{1}{CP} = \frac{1}{n}, \ \frac{1}{BM} - \frac{1}{BP} = \frac{1}{p}.$$

Cộng các hệ thức này theo từng vế rồi biến đổi ta có điều phải chứng minh.

Đặt biệt hóa bài toán 5 ta có bài toán 6.

Bài toán 6. *Với giả thiết của bài toán 5, trong tam giác ABC đều, cạnh bằng a, chứng minh rằng :*

a) $\frac{1}{AM.BM} + \frac{1}{AN.CN} - \frac{1}{BP.CP} = \frac{9}{a^2}$

b) $\frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IN^2} + \frac{1}{IP^2} = \frac{18}{a^2}$

tiếp tục phát triển các bài toán trên ta có :

Bài toán 7. *Cho hình bình hành ABCD. Đường thẳng d thay đổi, cắt các đoạn thẳng AB, AD, AC lần lượt tại các điểm M, N, P. Chứng minh rằng :* $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AN} = \frac{AC}{AP}$

Bài này dành cho bạn đọc tự giải. Mời các bạn tiếp tục khai thác thêm các bài toán mới.

CÙNG BẠN ĐỌC

Tạp chí THTT số 292 (10/2001) có in sót đôi chỗ, xin các bạn sửa lại

• Trong mục *Đề ra kì này*, cuối bài *T10/289* cần thêm câu : "trong đó *A*, *B* là các góc của tam giác *ABC*".

• Trong bài *Hai bài toán khó của một đề thi tuyển sinh Đại học*, khi bắt đầu chứng minh bất đẳng thức

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \qquad (4)$$

cần thêm câu :

"Thật vậy nếu một thừa số ở vế phải của (4) không dương thì hai thừa số còn lại phải dương nên (4) đúng. Ta xét trường hợp cả ba thừa số ở vế phải của (4) đều dương".

Thành thật xin lỗi các tác giả và bạn đọc".

THTT

CUỘC THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO LẦN THỨ NHẤT

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học)*
NGUYỄN THẾ THẠCH, NGUYỄN HỮU THẢO *(Vụ THPT)*

Vừa qua, ngày 23.8.2001, Vụ Trung học phổ thông đã tổ chức kỳ thi khu vực "Giải toán trên máy tính điện tử Casio" lần thứ nhất. Đây là một hình thức ngoại khóa mới, thu hút khá đông học sinh tham gia thi từ cấp trường, tỉnh đến cấp khu vực và góp phần nâng cao chất lượng học tập trong học sinh phổ thông. Dưới đây chúng tôi phân loại và giới thiệu một số bài trong các đề thi cho các lớp Phổ thông Trung học Cơ sở của kỳ thi này để bạn đọc tham khảo.

Dạng 1. Kiểm tra kỹ năng tính toán thực hành

Dạng đề thi này thường là các bài toán về tính giá trị của biểu thức, giải phương trình với các hệ số phức tạp,... nhằm kiểm tra kỹ năng sử dụng máy tính điện tử bỏ túi.

Thí dụ 1 (Lớp 6, 7, 8). Giải phương trình:

$$\left[\frac{(x-4\frac{1}{2}):0,003}{(3\frac{1}{20}-2,65)\times 4:\frac{1}{5}}-\frac{(0,3-\frac{3}{20})\times 1\frac{1}{2}}{(1,88+2\frac{3}{25})\times\frac{1}{8}}\right]:$$

$$:62\frac{1}{20}+17,81:0,0137=1301$$

Thí dụ 2 (Lớp 6, 7- Đề dự bị) Tính giá trị của biểu thức chứa các số thập phân vô hạn tuần hoàn: $D=0,3(4)+1,(62):14\frac{7}{11}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{0,8(5)}:\frac{90}{11}$.

Trong các kỳ thi cấp tỉnh, dạng bài thi này chiếm khoảng 70% số điểm. Theo chúng tôi, đối với kỳ thi cấp khu vực hoặc toàn quốc, dạng bài thi này chỉ nên chiếm 20% số điểm. Trong lần thi khu vực đầu tiên, dạng bài thi này chiếm khoảng 50% số điểm.

Dạng 2. Kết hợp giữa làm toán và làm tính

Một trong những yêu cầu của đề thi là thí sinh phải biết kết hợp nhuần nhuyễn kiến thức toán học với khả năng sử dụng thành thạo máy tính bỏ túi nhằm giải quyết trọn vẹn bài toán *có ý nghĩa và nội dung toán học*. Đây cũng là dạng bài thi đã được quan tâm đến, tuy chưa nhiều, trong trong các kỳ thi cấp tỉnh.

Thí dụ 3 (Lớp 8) Cho hình bình hành $ABCD$ có góc ở đỉnh A là góc tù. Kẻ hai đường cao AH và AK ($AH\perp BC; AK\perp CD$). Biết góc $HAK=\alpha$ và độ dài hai cạnh của hình bình hành $AB=a; AD=b$.

a) Tính AH và AK.

b) Tính tỉ số diện tích hình bình hành $ABCD$ và diện tích tam giác HAK.

c) Tính phần còn lại S của hình bình hành khi khoét đi tam giác HAK theo a, b, α.

d) Biết $\alpha=45^0 38'25''$, a = 29,1945cm ; b = 198,2001cm. Tính S.

Những bài thi dạng này không quá khó (so với đề thi học sinh giỏi toán), nhưng đòi hỏi suy luận toán học *trước khi tính toán* cao hơn đề thi tốt nghiệp Trung học Cơ sở.

Dạng 3. Sử dụng hợp lý máy tính

Một trong những yêu cầu của các kỳ thi giải toán trên máy tính là *khả năng sử dụng máy tính hợp lý*.

Thí dụ 4 (Lớp 6,7,8) Viết một quy trình bấm phím để tìm số dư khi chia 3523127 cho 2047. Số dư đó bằng bao nhiêu ?

Dạng bài này đã có trong một số sách hoặc một số đề thi cấp trường, cấp tỉnh. Cách giải khá đơn giản. Tuy nhiên, nhiều thí sinh đã dùng quy trình không hợp lý (phải ấn 1721 lần phím dấu $\boxed{=}$): 2047 $\boxed{-}$ $\boxed{-}$ 3523127 $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$ hoặc dùng quy trình sau: 3523127 $\boxed{\div}$ 2047 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{=}$ 1721.117245 $\boxed{-}$ 1721 $\boxed{=}$ 0.11724474 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ và đi đến đáp số chỉ là số gần đúng 239.9999828 (không phải số nguyên). Lý do là vì trước khi nhân, máy đã làm phép trừ 1721.117245 $\boxed{-}$ 1721 $\boxed{=}$ 0.11724474 và đã làm tròn. Kết quả của phép nhân chỉ là số gần đúng. Quy trình hợp lý là:

3523127 $\boxed{\div}$ 2047 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{=}$ 1721.117245 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ 3523127 $\boxed{-}$ 1721 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ 240

Thí dụ 5 (Lớp 6,7,8 - Đề dự bị) Lập quy trình ấn phím cho kết quả *dưới dạng phân số*:

$$M=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

Nếu ấn phím theo quy trình:

2 $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ 5 $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ thì đáp số sẽ là số thập phân gần đúng 0.624203822. Nếu khai báo các số đầu tiên dưới dạng phân số:

1 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{Min}}$ 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 5 $\boxed{+}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{=}$ thì sẽ được đáp số là $\frac{98}{157}$. Muốn đổi ra số thập phân chỉ cần ấn phím $\boxed{a^{b/c}}$ sẽ được kết quả: 0.624203822. Đòi hỏi kết quả cho dưới dạng phân số (số đúng) không chỉ yêu cầu học sinh biết sử dụng máy tính để *tính chính xác* mà còn do những yêu cầu của các bài toán thực tế. Thí dụ, để xác định tỉ số tốt nhất giữa số răng cưa của hai bánh xe trong đồng hồ, Huyghen đã áp dụng liên phân số. Rõ ràng phải tìm tỉ số này dưới dạng phân số vì số răng cưa phải là số tự nhiên.

(Kì sau đăng tiếp)

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 47

Problem. Prove that there are at most eight spheres touching the four planes which carry the faces of any tetrahedron.

Solution. Let T be a tetrahedron with faces F_i of area a_i for $i = 1,2,3,4$. If a sphere C of radius r touches all planes which enclose T, then the volume of T can be expressed in terms of the volumes of four pyramids, whose bases are the faces F_i of T and whose altitudes are of length r:

$$V_T=\frac{n_1ra_1}{3}+\frac{n_2ra_2}{3}+\frac{n_3ra_3}{3}+\frac{n_4ra_4}{3}$$
$$=\frac{r(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+n_4a_4)}{3}$$

where $n_1,n_2,n_3,n_4 \in \{1,-1\}$. There are $2^4 = 16$ combinations of n_1, n_2, n_3, n_4 leading to 16 corresponding expressions $r(n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 + n_4a_4)/3$. Not all of them represent the volume of T since the volume of T must be positive. If for a certain combination n_1, n_2, n_3, $n_4 \in \{1,-1\}$ we have

$$\frac{r(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+n_4a_4)}{3}>0$$

then the combination $-n_1,-n_2,-n_3,-n_4$ leads to the negative number

$$\frac{-r(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+n_4a_4)}{3}<0$$

which can not be the volume of T. Thus, at most $16/2 = 8$ combinations of n_1, n_2, n_3, $n_4 \in \{1,-1\}$ yield positive values for

$$\frac{r(n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+n_4a_4)}{3}$$

that is, there can be at most eight different spheres touching the planes of all faces of an arbitrary tetrahedron.

Từ mới:

sphere	= mặt cầu
touch	= chạm, tiếp xúc (động từ)
carry	= mang theo, chở theo (động từ)
face	= mặt
tetrahedron	= tứ diện
enclose	= chứa đựng, bao quanh (động từ)
volume	= thể tích
express	= diễn đạt, biểu diễn (động từ)
pyramid	= kim tự tháp, hình chóp
base	= đáy
altitude	= độ cao, chiều cao
combination	= tổ hợp
lead	= đưa đến, dẫn đến (động từ)
correspond	= tương thích, tương xứng (tính từ)
represent	= biểu diễn, đại diện (động từ)
certain	= nào đó (tính từ)
value	= giá trị

NGÔ VIỆT TRUNG

TỪ MỘT HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN LƯU
(Giáo viên THPT Năng khiếu Hà Tĩnh)

Trong sách giáo khoa Đại số và Giải tích lớp 11 có bài toán (BT) quen thuộc.

Bài toán 1: *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A\cos B\cos C = 1.$

Chứng minh BT1 dành cho bạn đọc

BT1 có cách phát biểu tương đương :

Bài toán 2: *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

Từ nhận xét :

ΔABC nhọn $\Leftrightarrow$ $\cos A\cos B\cos C > 0$

ΔABC vuông $\Leftrightarrow$ $\cos A\cos B\cos C = 0$

ΔABC tù $\Leftrightarrow$ $\cos A\cos B\cos C < 0$.

và các BT1, BT2 ta đi tới các BT3, BT4 hấp dẫn hơn.

Bài toán 3: *Chứng minh rằng:*

ΔABC *nhọn* $\Leftrightarrow \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C < 1$

ΔABC *vuông* $\Leftrightarrow \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C = 1$

ΔABC *tù* $\Leftrightarrow \cos^2A + \cos^2B + \cos^2C > 0.$

Bài toán 4: *Chứng minh rằng:*

ΔABC *nhọn* $\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$

ΔABC *vuông* $\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C = 2$

ΔABC *tù* $\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C < 2$

Từ các bài tập trên có thể phát triển thành những bài toán đặc sắc hơn.

Bài toán 5: *Chứng minh rằng:*

a) ΔABC *nhọn* $\Leftrightarrow a + b + c > 4R + 2r$

b) ΔABC *vuông* $\Leftrightarrow a + b + c = 4R + 2r$

c) ΔABC *tù* $\Leftrightarrow a + b + c < 4R + 2r$

Ta kí hiệu a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB tương ứng, R, r là độ dài các bán kính các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC .

Chứng minh: Ta chỉ chứng minh mệnh đề (a). Các mệnh đề (b), (c) được chứng minh tương tự.

Ta có: $a + b + c > 4R + 2r$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab) >$

$> 16R^2 + 16Rr + 4r^2$ (1)

Trong ΔABC ta luôn có đẳng thức :

$bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr$

$\Leftrightarrow 2(bc + ca + ab) =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 4r^2 + 16Rr$ (2)

Sử dụng (2) ta thấy (1) tương đương với:

$2(a^2+b^2+c^2) + 4r^2 + 16Rr > 16R^2 + 16Rr + 4r^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 > 2$

$\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > 2$ (3)

(3) xảy ra $\Leftrightarrow$ Δ ABC nhọn (theo BT4) (đpcm).

Dựa vào BT5 và đẳng thức quen thuộc:

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ ta suy ra BT6.

Bài toán 6: *Chứng minh rằng:*

ΔABC *nhọn* $\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C >$

$> 1 + \cos A + \cos B + \cos C$

ΔABC *vuông* $\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C =$

$= 1 + \cos A + \cos B + \cos C$

ΔABC *tù* $\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C <$

$< 1 + \cos A + \cos B + \cos C.$

Chứng minh BT6 dưới đây không cần thông qua BT5. Cũng như trên, ta chỉ chứng minh mệnh đề thứ nhất.

Ta có:

$\sin A + \sin B + \sin C > 1 + \cos A + \cos B + \cos C$

$\Leftrightarrow (\sin A - \cos A) + (\sin B - \cos B) + (\sin C - \cos C) > 1$

$\Leftrightarrow \sin(A - 45^0) + \sin(B - 45^0) + \sin(C - 45^0) - \sin 45^0 > 0$ (4)

Dựa vào hằng đẳng thức quen thuộc:

$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z) =$

$= 4\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{z+x}{2}\sin\frac{x+y}{2}$

Ta thấy (4) tương đương với:

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}-45^o\right)\sin\left(\frac{C+A}{2}-45^o\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{A+B}{2}-45^o\right)>0 \quad (5)$$

Nhận xét rằng trong ba thừa số ở vế trái của (5) không thể có hai số âm. Thật vậy, nếu trong ba số này có hai số âm, giả sử $\sin\left(\frac{B+C}{2}-45^o\right)$ và $\sin\left(\frac{C+A}{2}-45^o\right)$ đều âm, từ đó vì mỗi góc đó đều nhỏ hơn 45^o nên dễ dàng suy ra mỗi góc đó đều âm, từ đó :

$$\frac{A+B+2C}{2}-90^0<0$$

$\Rightarrow C<0$ (mâu thuẫn).

Nhờ nhận xét trên ta thấy (5) xảy ra khi và chỉ khi cả ba góc trong vế trái của (5) đều dương. Dễ dàng thấy điều này tương đương với Δ ABC nhọn (đpcm).

Nếu cứ tiếp tục suy diễn như vậy có thể chúng ta sẽ đạt được những kết quả sâu sắc hơn nữa.

Những suy diễn trên đây có lợi hay không ? Rất có lợi ! Để minh họa một cách cụ thể câu trả lời này, xin giới thiệu với bạn đọc một số đề thi đại học mà các kết quả ta đạt được trong quá trình suy diễn trên xuất hiện một cách cốt yếu khi giải các đề thi này.

Bài toán 7: (Đề thi vào ĐH Sư phạm Vinh – 1999)
Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng:
$\sin A+\sin B+\sin C>\cos A+\cos B+\cos C.$

BT7 chỉ là hệ quả của mệnh đề thứ nhất trong BT 6.

Bài toán 8: (Đề thi ĐH Ngoại thương – 2001)
Các góc của tam giác ABC thoả mãn điều kiện

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

BT8 được suy ra từ mệnh đề thứ hai trong BT6 với chú ý rằng:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$\cos A+\cos B+\cos C=$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Bài toán 9: (Đề thi ĐH Sư phạm Hà Nội 2–1999)
Cho tam giác ABC không tù. Chứng minh rằng:
$(\sin A)^{2\sin B}+(\sin B)^{2\sin C}+(\sin C)^{2\sin A}>2.$

Lời giải : Nếu ΔABC nhọn thì $0<\sin^2A<1$, $0<\sin^2B<1$ suy ra $(\sin^2 A)^{\sin B}>\sin A$ hay $(\sin A)^{2\sin B}>\sin^2 A$. Tương tự có $(\sin B)^{2\sin C}>\sin^2 B$, $(\sin C)^{2\sin A}>\sin^2 C$.

Từ đó $(\sin A)^{2\sin B}+(\sin B)^{2\sin C}+(\sin C)^{2\sin A}$ $>\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C.$

Từ đó và kết quả các BT1, BT4 có điều phải chứng minh.

• Nếu ΔABC vuông tại A thì

$(\sin A)^{2\sin B}+(\sin B)^{2\sin C}+(\sin C)^{2\sin A}$
$>1+\sin^2B+\sin^2C=1+\sin^2B+\sin^2B=2$

Bài toán 10 : (Đề thi ĐH Ngoại thương – 1997)
Tam giác ABC có các góc A, B nhọn và thoả mãn điều kiện:

$\sin^2A+\sin^2B=\sqrt[9]{\sin C}$

Tính góc C.

Lời giải: Ta có $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=$
$=\sin^2 C+\sqrt[9]{\sin C}\le 2$.

Từ đó và BT (4) với các góc A, B nhọn nên góc C không nhọn. Ta có $\sqrt{\sin C}\ge\sin^2 C$ (do $0<\sin C\le 1$). Từ đó và giả thiết suy ra $\sin^2A+\sin^2B\ge\sin^2C \Rightarrow a^2+b^2\ge c^2\Rightarrow$ góc C không tù. Vậy chỉ xảy ra góc C vuông.

Để kết thúc, xin nhắc lại rằng : mọi bài toán đều có cội nguồn của nó và nhiều khi cái cội nguồn ấy nằm ngay trong sách giáo khoa của các bạn.

Các bạn hãy tìm các bài toán có liên quan với các bài tập sau :

Bài 1: Cho tam giác ABC có

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C<2.$$

Chứng minh rằng:

$$\text{tg}A\,.\,\text{tg}B<1.$$

Bài 2: Tính các góc của tam giác ABC biết rằng: $\begin{cases}\cos A+\cos B+\cos C=\sqrt{2}\\ \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2\ \ge 1\end{cases}$

Bài 3: Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng:

$$1+\cos A\cos B\cos C\ge 9\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Cuối cùng, xin cảm ơn TS Nguyễn Minh Hà đã động viên và giúp đỡ tôi nhiều trong việc hoàn chỉnh bài viết này. /.

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2000-2001

Năm qua đông đảo bạn đọc đã tham gia Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên THTT. Nhiều bạn lớp 9, lớp 12 dù bận ôn thi vẫn tranh thủ viết bài dự thi, một số bạn lớp 6 cũng tham gia như bạn *Phạm Huy* (Tam Đảo, Tam Dương, Vĩnh Phúc), *Nguyễn Khánh Hội* (Yên Trị, Ý Yên, Nam Định), Số các bạn ở THCS dự thi tăng thêm nhiều. Các tỉnh, thành phố có nhiều bạn dự thi là : Hà Nội, Hải Phòng, Phú Thọ, Vĩnh Phúc, Yên Bái, Thái Nguyên, Hà Giang, Hà Tây, Hòa Bình, Bắc Ninh, Hải Dương, Hưng Yên, Hà Nam, Nam Định, Ninh Bình, Thanh Hóa, Nghệ An, Hà Tĩnh, Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên - Huế, Đà Nẵng, Quảng Nam, Quảng Ngãi, Bình Định, Phú Yên, Khánh Hòa, Gia Lai, Đắc Lắc, Đồng Nai, Tp. Hồ Chí Minh, Tiền Giang, Đồng Tháp, Bạc Liêu, Cần Thơ, Bến Tre...

Điểm của các bài được tính và trao giải theo từng lớp. Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải.

A - MÔN TOÁN

I- Giải xuất sắc (1 giải)

1) *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

II- Giải nhất (11 giải)

1) *Phạm Tuấn Anh*, 12T, PTNK, ĐHKHTN - ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

2) *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, THPT Amsterdam, Hà Nội

3) *Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT NK Nguyễn Trãi, Hải Dương

4) *Nguyễn Xuân Trường*, 11A, THPT chuyên Vĩnh Phúc

5) *Phạm Thành Trung*, 10T, THPT NK Nguyễn Trãi, Hải Dương.

6) *Trần Thanh Hải*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ.

7) *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, Hà Nội

8) *Nguyễn Tiến Dũng*, 9^2, THCS Mỹ Hóa, Tx. Bến Tre, Bến Tre

9) *Phạm Anh Minh*, 8A, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

10) *Trần Xuân Dũng*, 8A, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

11) *Nguyễn Thanh Tùng*, 7A1, THCS Láng Thượng, Đống Đa, Hà Nội

III- Giải nhì (16 giải)

1) *Nguyễn Dư Thái*, 12CT, PTCT-T, ĐHKH Huế, Thừa Thiên, Huế

2) *Lương Thế Nhân*, 12T, PTNK, ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh

3) *Phạm Văn Hùng*, 11A, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội

4) *Kim Đình Thái*, 11A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội

5) *Bùi Quang Nhã*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

6) *Nguyễn Thành Nam*, 10T, THPT NK Nguyễn Trãi, Hải Dương

7) *Trần Bình Minh* 10A1, THPT chuyên Yên Bái

8) *Dương Minh Sơn*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Tây

9) *Phạm Huy Hoàng*, 9^3, THCS Lê Quý Đôn, Hải Dương

10) *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc

11) *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, Hòa Bình.

12) *Nguyễn Đức Phương*, 8A, THNK Trần Phú, Hải Phòng

13) *Nguyễn Đức Tâm*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định

14) *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương

15) *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, Hưng Yên

16) *Ngô Thị Huyền Trang*, 7A1, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc

IV- Giải ba (22 giải)

1) *Lê Thị Khánh Hiền*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Khánh Hòa

2) *Bùi Văn Tùng*, 12B, THPT Trần Nhật Duật, Nam Định

3) *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình

4) *Phạm Đức Hiệp*, 11T, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

5) *Trần Thái An Nghĩa*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi

6) *Vũ Đình Đấu*, 11T, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

7) *Trần Anh Hoàng*, 11T, PTNK, ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh

8) *Nguyễn Trung Kiên*, 11, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội

9) *Lê Phương*, 10T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai

10) *Đinh Ngọc Thắng*, 10A, PTCT-T, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

11) *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, Hà Nam

12) *Ngô Huy Hoàng*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định

13) *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây

14) *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Việt Trì, Phú Thọ

15) *Kim Đình Trường*, 9B, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc

16) *Ngô Ngọc Khiêm*, 9^2, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn, Quảng Ngãi

17) *Phan Trung Kiên*, 8C, THCS Thị trấn Nam Đàn, Nghệ An

18) *Bùi Danh Nam*, 8C, THCS Thị trấn Nam Đàn, Nghệ An

19) *Trần Mạnh Cường*, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái, Yên Bái

20) *Phạm Duy Thành*, 8A, PTNK Trần Phú, Hải Phòng

21) *Nguyễn Lương Thùy Viên*, 7A, THCS chuyên Kon Tum

22) *Phạm Huy*, 6C, THCS Tam Đảo, Tam Dương, Vĩnh Phúc

V- Giải khuyến khích (28 giải)

1) *Lê Mạnh Hùng*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc

2) *Ngô Quốc Anh*, 12A, PTCT-T, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

3) *Nguyễn Công Thắng*, 11T, THPT Cao Lãnh, Đồng Tháp

4) *Nguyễn Tuấn Dương*, 11A1 Toán, PTCTT - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

5) *Nguyễn Văn Tâm*, 11/1, THPT Giá Rai, Bạc Liêu

6) *Đỗ Quang Trung*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương

7) *Nguyễn Thành Nhân*, 10T, PTNK, ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh

8) *Trần Võ Huy*, 10T, PTNK, ĐHKHTN -ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

9) *Phạm Văn Trung*, 10T, THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi

10) *Đặng Đình Khánh*, 10A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội.

11) *Nguyễn Quang Tùng*, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội

12) *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội

13) *Trần Trung Kiên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định

14) *Nguyễn Đình Dũng*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, Thanh Hóa

15) *Trương Nho Đại*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hóa

16) *Trần Minh Bình*, 9^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, Khánh Hòa

17) *Nguyễn Anh Tôn*, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên, Hà Nội

18) *Nguyễn Kim Duân*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa, Phú Yên

19) *Hoàng Minh Hải*, 9C, THCS Tam Đảo, Tam Dương, Vĩnh Phúc

20) *Lương Hữu Long*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định

21) *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định

22) *Vũ Minh Triều*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nghệ An

23) *Phạm Ngọc Lịch*, 8D, THCS Giao Hà, Giao Thủy, Nam Định

24) *Nguyễn Quang Vinh*, 8C, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình, Ninh Bình

25) *Nguyễn Đức Tâm*, 8C, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội

26) *Nguyễn Trường Thọ*, 8A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ

27) *Lê Văn Bắc*, 8A, THCS Quảng Lĩnh, Quảng Xương, Thanh Hóa

28) *Bùi Tuấn Anh*, 8A, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

B- MÔN VẬT LÝ

I- Giải nhất (1 giải)

1) *Trần Tất Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang

II- Giải nhì (3 giải)

1) *Hoàng Anh Vũ*, 12T, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ, Quảng Nam

2) *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

3) *Nguyễn Kim Huy*, 11 Lí, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai

III- Giải ba (6 giải)

1) *Hồ Viết Hùng*, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

2) *Châu Hoàng Huy*, 12T, THPT Tx. Cao Lãnh, Đồng Tháp

3) *Nguyễn Trung Hiếu*, 12C2, THPT chuyên Tuyên Quang

4) *Dương Quốc Huy*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc

5) *Nguyễn Duy Hưng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc

6) *Ma Nam*, 11 Lí, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa Đồng Nai

IV- Giải khuyến khích (7 giải)

1) *Lê Minh Nguyên*, 12A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

2) *Lê Ngọc Tuấn*, 12A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

3) *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc

4) *Vũ Quốc Huy*, 12 Lí, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

5) *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 11 Lí, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh

6) *Trần Đức Sinh*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định

7) *Trần Hữu Hiếu*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA THPT

NĂM HỌC 2000-2001 – BẢNG A

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ Trung học Phổ thông)

Ngày thi thứ nhất. (12/3/2001).

Bài 1: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và P_1P_2 là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó ($P_1 \in (O_1)$, $P_2 \in (O_2)$). Gọi M_1 và M_2 tương ứng là hình chiếu vuông góc của P_1 và P_2 trên đường thẳng O_1O_2. Đường thẳng AM_1 cắt (O_1) tại điểm thứ hai N_1, đường thẳng AM_2 cắt (O_2) tại điểm thứ hai N_2. Hãy chứng minh ba điểm N_1, B, N_2 thẳng hàng.

((O) kí hiệu đường tròn tâm O).

Bài 2: Cho số nguyên dương n và cho hai số nguyên nguyên tố cùng nhau a, b lớn hơn 1. Giả sử p, q là hai ước lẻ lớn hơn 1 của $a^{6^n} + b^{6^n}$. Hãy tìm số dư trong phép chia $p^{6^n} + q^{6^n}$ cho $6.(12)^n$.

Bài 3: Với mỗi cặp số thực (a, b), xét dãy số $\{x_n\}$, $n \in N$, được xác định bởi:

$x_0 = a$ và $x_{n+1} = x_n + b.\sin x_n$ với mọi $n \in N$.

1) Cho b = 1. Chứng minh rằng với mọi số thực a, dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$. Hãy tính giới hạn đó theo a.

2) Chứng minh rằng với mỗi số thực b > 2 cho trước, tồn tại số thực a sao cho dãy $\{x_n\}$ tương ứng không có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

(N là tập hợp các số tự nhiên).

Ngày thi thứ hai. (13/3/2001).

Bài 4: Xét các số thực dương x, y, z thoả mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le z < \min\{x\sqrt{2}, y\sqrt{3}\} \\ x + z\sqrt{3} \ge \sqrt{6} \\ y\sqrt{3} + z\sqrt{10} \ge 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{3}{z^2}$$

Bài 5: Cho hàm số $g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Hãy tìm tất cả các hàm số f(x) xác định, liên tục trên khoảng (–1; 1) và thoả mãn hệ thức

$$(1-x^2).f(g(x)) = (1+x^2)^2.f(x)$$

với mọi $x \in (-1; 1)$.

Bài 6: Cho số nguyên $n \ge 1$. Xét hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ của 2n số nguyên dương đầu tiên sao cho các số $|a_{i+1} - a_i|$, i = 1, 2, ..., 2n–1, đôi một khác nhau. Chứng minh rằng $a_1 - a_{2n} = n$ khi và chỉ khi $1 \le a_{2k} \le n$ với mọi k = 1, 2, ..., n.

ĐÁP ÁN

Bài 1. Xem Lời giải Bài 2 Bảng B. (T/c TH & TT số 292, tháng 10 / 2001).

Bài 2. Ta có các nhận xét sau:

+ *Nhận xét 1:* Nếu d là ước nguyên tố lẻ của $a^{6^n} + b^{6^n}$ thì $d \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

Chứng minh: Đặt $a^{6^n} + b^{6^n} = kd$, $k \in N^*$. Viết d dưới dạng $d = 2^m.v + 1$, trong đó $m \in N^*$ và v là số nguyên dương lẻ. Giả sử $m \le n$.

Vì (a, b) = 1 nên (a, d) = (b, d) = 1. Do đó, theo định lí Phecma nhỏ ta có.

$$\left(a^{3^n.2^{n-m}}\right)^{d-1} \equiv \left(b^{3^n.2^{n-m}}\right)^{d-1} \equiv 1 \pmod d$$

hay $\left(a^{6^n}\right)^v \equiv \left(b^{6^n}\right)^v \equiv 1 \pmod d$ (1)

Mặt khác $\left(a^{6^n}\right)^v = \left(kd - b^{6^n}\right)^v =$

$= td - \left(b^{6^n}\right)^v \equiv -\left(b^{6^n}\right)^v$ (mod d).

Kết hợp với (1) suy ra: $\left(b^{6^n}\right)^v \equiv -\left(b^{6^n}\right)^v \equiv 1$ (mod d). Mâu thuẫn nhận được cho thấy điều giả sử ban đầu là sai, nghĩa là ta phải có $m \ge n + 1$. Từ đó suy ra $d \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$.

+ *Nhận xét 2:* Nếu $x \equiv 1 \pmod{c^k}$ thì $x^{c^m} \equiv 1 \pmod{c^{m+k}}$.

Chứng minh: Từ giả thiết suy ra $x = t.c^k + 1$. Do đó

$$x^{c^m} = \left(t.c^k+1\right)^{c^m} = s.c^{m+k}+1 \equiv 1 (\bmod c^{m+k})$$

Trở lại bài toán. Vì p, q là các ước lẻ của $a^{6^n}+b^{6^n}$ nên từ Nhận xét 1 suy ra $p^{3^n} \equiv q^{3^n} \equiv 1$ (mod 2^{n+1}). Do đó, theo Nhận xét 2, ta có:

$$p^{6^n} \equiv q^{6^n} \equiv 1 \ (\bmod 2^{n+1}) \qquad (2)$$

Vì (a, b) = 1 nên $p^{6^n}+q^{6^n} \not\equiv 0$ (mod 3). Dẫn tới (p, 3) = (q, 3) = 1. Suy ra $p^{2^n} \equiv q^{2^n} \equiv 1$ (mod 3). Do đó, theo Nhận xét 2, ta có $p^{6^n} \equiv q^{6^n} \equiv 1$ (mod 3^{n+1}) (3)

Từ (2) và (3), do (2, 3) = 1, ta được $p^{6^n} \equiv q^{6^n} \equiv 1$ (mod $6.(12)^n$). Vì vậy:

$$p^{6^n}+q^{6^n} \equiv 2 \ (\bmod 6.(12)^n)$$

Bài 3. 1) Xem lời giải Bài 3 Bảng B. (T/c TH & TT số 292, tháng 10 / 2001).

2) Xét hàm số $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ta có: g(x) liên tục trên (0; π], g(π) = 0 và $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Vì vậy, từ $0 < 2/b < 1$ (do b > 2) suy ra $\exists a_0 \in (0;\pi)$ sao cho $2a_0 = b.\sin a_0$.

Chọn $a = \pi - a_0$. Dễ thấy, dãy $\{x_n\}$ tương ứng là dãy tuần hoàn chu kỳ 2; và vì thế nó không có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Bài 4. Từ điều kiện thứ nhất của đề bài suy ra:

$$\sqrt{2} \ge \frac{1}{z} > \frac{\sqrt{2}}{x} \Rightarrow \frac{1}{z^2} \le 2 \ \& \ \frac{z^2}{x^2} < \frac{1}{2}$$

Từ điều kiện thứ 2 của đề bài suy ra:

$$x^2+3z^2 \ge 3 \Rightarrow \frac{2}{3}+\frac{2z^2}{x^2} \ge \frac{2}{x^2}.$$

Do đó:
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2} = \frac{2}{x^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2} \le$$
$$\le \frac{2}{3}+\frac{2z^2}{x^2}+\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{z^2}{x^2}\right) \le$$
$$\le \frac{2}{3}+\frac{2z^2}{x^2}+2\left(1-\frac{z^2}{x^2}\right) = \frac{8}{3} \qquad (4)$$

Bằng cách tương tự, từ điều kiện thứ 1 và thứ 3 của đề bài ta chứng minh được:

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \le \frac{13}{5}. \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra:

$$P(x, y, z) = \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}+2\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right) \le$$
$$\le \frac{8}{3}+\frac{26}{5} = \frac{118}{15}.$$

Hơn nữa, từ các chứng minh trên dễ thấy:

$$P(x, y, z) = \frac{118}{15} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}};\ y = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \text{ và } z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dễ thấy các giá trị x, y, z nêu trên thoả mãn tất cả các điều kiện của đề bài. Vì vậy:

$\max P(x, y, z) = \frac{118}{15}$, đạt được khi và chỉ khi: $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ và $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 5. Viết lại hệ thức của đề bài dưới dạng:

$$\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} f(g(x)) = (1-x^2).f(x) \ \forall x\in(-1;1) \quad (6)$$

Đặt $\varphi(x) = (1-x^2)f(x)$, $x\in(-1;1)$. Khi đó, f(x) liên tục trên (−1; 1) và thỏa mãn (6) khi và chỉ khi φ(x) liên tục trên (−1;1) và thỏa mãn hệ thức:

$$\varphi(g(x)) = \varphi(x) \quad \forall x\in(-1;1). \qquad (7)$$

Dễ thấy $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x\in(0;+\infty)$, là một song ánh từ (0; + ∞) đến (−1; 1). Do vậy có thể viết lại (7) dưới dạng: $\varphi(g(\frac{1-x}{1+x})) = \varphi(\frac{1-x}{1+x})$ $\forall x\in(0;+\infty)$, hay:

$$\varphi\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \quad \forall x\in(0;+\infty) \quad (8)$$

Xét hàm số: $h(x) = \varphi(\frac{1-x}{1+x})$, $x\in(0;+\infty)$. Khi đó, φ(x) liên tục trên (−1; 1) và thỏa mãn (8) khi và chỉ khi h(x) liên tục trên (0; + ∞) và thỏa mãn hệ thức:

$$h(x^2) = h(x) \quad \forall x\in(0;+\infty) \qquad (9)$$

Từ (9), bằng phương pháp qui nạp theo n∈N, dễ dàng chứng minh được:

$$h(x) = h(\sqrt[2^n]{x}) \quad \forall x\in(0;+\infty) \quad \forall n\in N.$$

Từ đó, do $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2^n]{x} = 1$ và do h(x) liên tục trên (0; + ∞), suy ra: $h(x) = h(1)\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Dẫn tới: $\varphi(x) \equiv const$ $\forall x\in(-1;1)$. Vì vậy:

$$f(x) = \frac{a}{1-x^2} \quad \forall x\in(-1;1),$$

trong đó a∈R tùy ý.

Dễ thấy các hàm số f(x) xác định ở trên thoả mãn tất cả các yêu cầu của đề bài, và vì thế chúng là tất cả các hàm số cần tìm.

(Xem tiếp trang 22)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/293. Cho các số tự nhiên n và k thỏa mãn các điều kiện : $n = \overline{ab}$ với $a + b = 10$ và số thập phân (hữu hạn hay vô hạn) $\frac{k}{n} = 0, a_1a_2a_3...$ có mọi chữ số a_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ đều khác 0. Chứng minh rằng hai chữ số thập phân kề nhau bất kì a_i , a_{i+1} không thể bằng nhau

NGUYỄN VĂN HIỂN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T2/293. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện :

$xyz = 2$ và $xy + yz + zx < \sqrt[3]{2}(x + y + z)$.

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z có một và chỉ một số lớn hơn $\sqrt[3]{2}$.

TRẦN HỒNG SƠN
(GV THPT bán công Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T3/293. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}}$ trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn : $x + y + z = 2001$.

NGUYỄN MINH PHƯƠNG
(Việt Trì - Phú Thọ)

Bài T4/293. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng qua M cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Chứng minh rằng

$$S_{MBD} . S_{MCE} \le \frac{1}{64} S^2_{ABC} .$$

Xác định vị trí của M để đẳng thức xảy ra.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T5/293. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp và G là trọng tâm. Biết rằng $AI \perp IG$. Chứng minh :

$$AB + AC > 2BC.$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/293. Tìm tất cả các giá trị nguyên của biểu thức $\frac{12 - 6x}{16x^4 - 219x + 249}$ trong đó x là biến số thực.

HOÀNG HOA TRẠI
(GV THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Bài T7/293. Xét dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi :

$$u_1 = a > 0,\ u_{n+1} = u_n + \left[\sqrt{u_n}\right] - \left[\frac{u_n}{3}\right]$$

với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

(kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn và tìm giới hạn đó.

ĐOÀN KIM SANG
(GV THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái)

Bài T8/293. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k^2} C_{2n}^{n+k} < 0$$

trong đó C_n^m là tổ hợp chập m của n.

ĐÀM VĂN NHỈ
(GV CĐSP, Thái Bình)

Bài T9/293. Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M, N. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM}$$

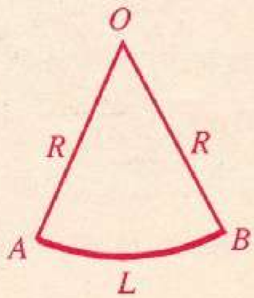
HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT NK Hà Tĩnh)

Bài T10/293. Cho tứ diện $ABCD$ với tam diện vuông đỉnh A. Xác định vị trí điểm M để biểu thức sau là nhỏ nhất :

$$\sqrt{3}MA + MB + MC + MD$$

NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCT-T ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ



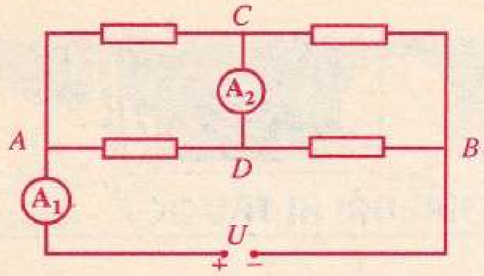
Bài L1/293. Một vật AB khối lượng M, đồng chất, tiết diện đều, có dạng một cung tròn chiều dài L, bán kính cung tròn là R, vật được treo vào điểm O cố định nhờ 2 sợi dây nhẹ OA và OB cùng chiều dài bằng R (hình vẽ). Kích thích cho vật dao động nhỏ trong mặt phẳng thẳng đứng.

Chứng minh vật dao động điều hòa.

Tính chu kì dao động. Bỏ qua ma sát.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/293. Bốn điện trở có giá trị 1, 2, 3, 4(Ω) được mắc vào sơ đồ mạch điện (chưa rõ vị trí) như hình bên. Biết $U = 10(V)$. Ampe kế A_2 chỉ $2(A)$. Xác định số chỉ Ampe kế A_1 biết số này là số nguyên. Bỏ qua điện trở các Ampe kế.



NGUYỄN THANH NHÀN
(GV THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/293. Let n and k be natural numbers satisfying the conditions : $n = \overline{ab}$ with $a + b = 10$ and the decimal fraction (finite or infinite) $\frac{k}{n} = 0, 0, a_1a_2a_3...$ has all digits $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3, ...$). Prove that for every $i = 1, 2, 3, ...,$ the consecutive digits a_i , a_{i+1} are distinct.

T2/293. The real numbers x, y, z satisfy the conditions : $xyz = 2$ and $xy + yz + zx < \sqrt[3]{2}(x+y+z)$. Prove that among x, y, z there exists one and only one number greater than $\sqrt[3]{2}$.

T3/293. Find the least value of the expression
$$\frac{x^{20}}{y^{11}}+\frac{y^{20}}{z^{11}}+\frac{z^{20}}{x^{11}}$$
where x, y, z are positive numbers satisfying $x + y + z = 2001$.

T4/293. Let M be a point inside the triangle ABC. A line passing through M cuts the sides AB, AC respectively at D, E. Prove that
$$S_{MBD} . S_{MCE} \leq \frac{1}{64} S^2_{ABC} .$$
Determine the position of M so that equality occurs.

T5/293. Let ABC be a triangle with incenter I and centroid G. Suppose that $AI \perp IG$. Prove that $AB + AC > 2BC$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/293. Find all integral values of the expression $\frac{12-6x}{16x^4-219x+249}$
where x is a real variable.

T7/293. Consider the sequence of numbers (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ defined by : $u_1 = a > 0,$
$$u_{n+1}=u_n+\left[\sqrt{u_n}\right]-\left[\frac{u_n}{3}\right] \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$
where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x. Prove that the sequence has a limit and find this limit.

T8/293. Prove that
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k^2}C_{2n}^{n+k} < 0$$
where C_n^m are the binomial coefficients.

T9/293. Let ABC be a triangle and BE, CF be its two interior angled-bisectors. The rays EF, FE cut the circumcircle of ABC respectively at M, N. Prove that
$$\frac{1}{BM}+\frac{1}{CN}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CM}$$

T10/293. Let $ABCD$ be a tetrahedron, right at A. Determine the position of the point M so that the expression $\sqrt{3}MA + MB + MC + MD$ attains its least value.

Bài T1/289. *Tìm mọi số nguyên n thỏa mãn*

$$(n+5)^2 = (4(n-2))^3 \qquad (*)$$

Lời giải. Vế trái của (*) không âm nên $n \geq 2$, nhưng $n = 2$ không thỏa mãn. Vậy $n > 2$.

Ta có $(n+5)^2 = 64(n-2)^3 \geq 64(n-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n+5 \geq 8(n-2) \Rightarrow 7n \leq 21 \Rightarrow n \leq 3$.

Vậy chỉ có thể $n = 3$.

Thử lại $n = 3$ thỏa mãn (*) và đó là nghiệm duy nhất.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn biến đổi (*) tương đương với $(n-3)(64n^2 - 193n + 179) = 0$ mà $64n^2 - 193n + 179 = 0$ vô nghiệm nên (*) có *nghiệm thực* duy nhất là $n = 3$.

• Một số bạn có nhận xét $n + 5$ chia hết cho 8, đặt $n = 8t + 3$, thay vào (*) để suy ra $k = 0$.

• Một số bạn khác khi giải đã sử dụng mệnh đề sau : Nếu các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^2 = b^3$ thì tồn tại số nguyên dương c để $a = c^3$, $b = c^2$.

2) Các bạn sau có lời giải gọn :

Thái Nguyên: *Vũ Việt Cường*, 9A1, THCS Độc Lập, *Trần Đức Phong*, 9A1, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Trung Kiên*, 8A1, *Trần Trọng Nam*, 8A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh; *Trần Hữu Hiếu*, 9A, THCS Thị trấn Sông Thao, **Vĩnh Phúc :** *Đào Thị Hưng*, 9B, THCS Yên Lạc; **Bắc Giang:** *Đào Tuấn Anh*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Tx. Bắc Giang ; **Bắc Ninh :** *Lưu Thị Thu Trang*, 8A, *Nghiêm Văn Thơ*, 9B, THCS Yên Phong; **Hà Nội :** *Phạm Hoàng Lê*, 9B, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hà Tây:** *Cấn Văn Bằng*, 8A, *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 9A, THCS Thạch Thất, *Nguyễn Hoàng Giang*, 9K, THCS Lê Lợi, Hà Đông, *Lê Quang Tùng*, THCS Thường Tín ; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thành*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; *Vũ Duy Thành*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý ; *Đặng Minh Phương*, 9B, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm ; **Hải Dương:** *Kiều Thanh Bình*, 7A1, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc; **Hải Phòng:** *Phạm Thị Thu Thủy*, 9A, THNK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Lê Tuấn Hưng*, 9B, THCS Nguyễn Chích, *Nguyễn Tuấn Nam*, *Nguyễn Hùng Phong*, 8A, *Lê Ngọc Tuấn*, 7B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Trần Mạnh Tuấn*, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, *Lê Thị Hà*, 9C, THCS Trần Phú, Nông Cống; **Nghệ An:** *Đậu Minh Hoàng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Lê Nam Trường*, 8/1, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh ; *Trần Minh Quý*, 9I, THCS Bắc Hồng, Hồng Lĩnh; *Trần Anh Tài*, 8A, THCS Kỳ Tiến, Kỳ Anh.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/289. *Giải phương trình*

$$x^2 + \sqrt{2-x} = 2x^2.\sqrt{2-x}$$

Lời giải. (của nhiều bạn). Điều kiện: $x \leq 2$ (1)

Đặt $y = \sqrt{2-x}$ $(y \geq 0)$, ta có $x = 2 - y^2$ và thu được phương trình tương đương với phương trình ban đầu :

$$(2-y^2)^2 + y = 2y(2-y^2)^2 \qquad (2)$$

Ta có thể biến đổi (2) tương đương như sau :

$(2) \Leftrightarrow 4 - 7y - 4y^2 + 8y^3 + y^4 - 2y^5 = 0$

$\Leftrightarrow (1-y)(2y^4 + y^3 - 7y^2 - 3y + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (1-y)(y^2 + y - 1)(2y^2 - y - 4) = 0$

Phương trình này cho ta ba nghiệm không âm là $y_1 = 1$, $y_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $y_3 = \dfrac{\sqrt{33}+1}{8}$ và do đó phương trình đã cho có ba nghiệm thỏa mãn (1) là

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, x_3 = -\frac{\sqrt{33}+1}{8}.$$

Nhận xét. 1) Nhiều bạn biến đổi phương trình ban đầu tương đương với $x^2 = \sqrt{2-x}\ (2x^2 - 1)$ rồi bình phương hai vế dẫn đến

$$(x-1)(x^2-x-1)(4x^2+x-2) = 0$$

Tuy nhiên lúc đó cần đặt thêm điều kiện $2x^2 \geq 1$ (3) và khi tìm được nghiệm cần thử lại các điều kiện (1), (3).

2) Tuy bài này không khó nhưng có đến nửa số bạn gửi bài giải sai (nhiều nghiệm không đúng hoặc không tìm đủ nghiệm của bài toán). Trong số những bạn tìm đúng nghiệm có hơn nửa số bạn giải không biện luận điều kiện của nghiệm bài toán trong lúc biến đổi không tương đương (chẳng hạn khi bình phương hai vế của phương trình). Những bạn sau đây có lời giải chính xác và đầy đủ :

Hải Phòng: *Nguyễn Đức Phương*, *Trần Xuân Dũng*, *Phạm Duy Thành*, *Vương Anh Quyền*, 9A, THNK Trần Phú ; **Nam Định:** *Đoàn Duy Thuyết*, *Phạm Kim Hùng* và *Dương Đỗ Nhuận*, 8A2 và *Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 8A6, THCS Lương Thế Vinh, *Phạm Duy Hiển* và *Trần Đăng Ngọc*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Quảng Bình:** *Nguyễn Tiến Hải*, 9A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Nghệ An:** *Đặng Bảo Đức*, 8E, THCS Đặng Thai Mai, *Đậu Minh Hoàng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương; **Thanh Hóa:** *Đỗ Dương Tùng*, 8B, THCS Trần Mai Ninh, *Lê Thị Hồng Hiệp*, 8C, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đức Giang*, 9B, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ ; **Quảng Ngãi:** *Bùi Lê Trọng Thanh*, 8C1, THCS Nguyễn Nghiêm; **Quảng Ninh:** *Lê Thanh Tùng*, 9A, THCS Trưng Vương, Uông Bí; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Minh Quang*, 9A1, THCS Chu Văn An; **Bắc Giang:** *Đặng Huy Hoàng*, 9A, THCS Lê Quý Đôn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/289. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau, trong đó* x *là số thực :*

$$\frac{(x^2+1)^{2001}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{3}\right)...\left(x^2+\frac{1}{2001}\right)(x^2+1.2.3...2001)}$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh : "Với các số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ thì :

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$$
$$\geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}".$$

Thật vậy : Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số ta có :

$$\frac{a_1}{a_1+b_1}+...+\frac{a_n}{a_n+b_n}$$
$$\geq n\sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}}$$
$$\frac{b_1}{a_1+b_1}+...+\frac{b_n}{a_n+b_n}$$
$$\geq n\sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}}$$

Cộng từng vế của hai bất đẳng thức trên suy ra đpcm.

Gọi biểu thức đã cho là F. Áp dụng đối với : $a_1 = b_2 = ... = a_{2001} = x^2$ và $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_2 = \frac{1}{3}$; ...; $b_{2000} = \frac{1}{2001}$; $b_{2001} = 2001!$ thì

$$x^2+1 \leq$$
$$\leq \sqrt[2001]{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{3}\right)...\left(x^2+\frac{1}{2001}\right)\left(x^2+2001!\right)}$$
$$\Rightarrow F \leq 1.$$

Với $x = 0$ thì $F = 1$, nên F đạt giá trị lớn nhất bằng 1.

Nhận xét. 1) Các bạn đã đưa ra và chứng minh nhiều bất đẳng thức để áp dụng giải bài toán này. Chẳng hạn :

+ Nếu $a \geq 0$; $n \in N$ và $n \geq 2$ thì

$$(2a+1)(3a+1)...(na+1)(n!+a) \geq n!(a+1)^n$$

+ Với $a_i \geq b_i > 0$ hoặc $0 < a_i \leq b_i$ và $n \in N$ thì

$$\left(x^2+\frac{a_1}{b_1}\right)\left(x^2+\frac{a_2}{b_2}\right)...\left(x^2+\frac{a_n}{b_n}\right)\left(x^2+\frac{b_1b_2...b_n}{a_1a_2...a_n}\right)$$
$$\geq (x^2+1)^{n+1}$$

+ Với $0 < m < 1 < n$ thì

$$(x^2+m)(x^2+n) \geq (x^2+1)(x^2+mn).$$

2) Nhiều bạn đã chứng minh $F \leq 1$ bằng phương pháp quy nạp toán học.

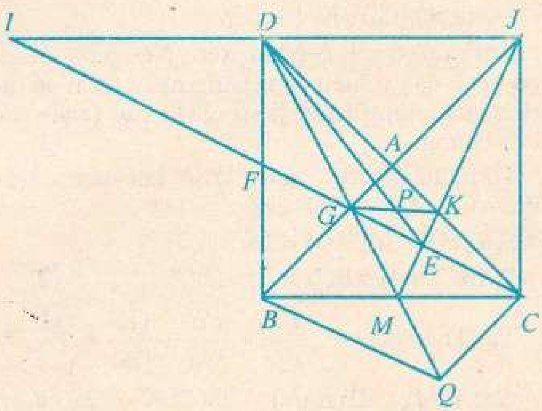
3) Tất cả các bạn đều làm đúng. Xin khen ngợi các bạn đã nêu ra bài toán tổng quát tốt : *Vũ Thị Lê Vi*, 9A, THCS Hội Yên, Hải Lăng, **Quảng Trị**; *Nguyễn Trung Kiên A*, 8A1 và *Nguyễn Trường Thọ*, 8A2, THCS Giấy Phong Châu, **Phú Thọ**; *Võ Thông Thái*, 8^3, trường cấp 2–3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**; *Phạm Trọng Quỳnh*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Bá Thành*, 9B, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương**; *Nguyễn Chí Linh*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa** ; *Lê Duy Phương*, 9B, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**, *Lê Thị Phượng*, 9A, THCS Thư Phú, Thường Tín, **Hà Tây**...

LTN

Bài T4/289. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, G là điểm trên cạnh AB sao cho GB = 2GA. Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D. Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K. Gọi P là giao điểm của DE và GK. Chứng minh rằng :*

a) DE = BC ; *b) PG = PE.*

Lời giải. Lấy Q là điểm đối xứng với G qua M. Ta có tứ giác $BQCG$ là hình bình hành. Suy



ra $CQ // AB$. Mà $AG = \frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}QC$ nên AG là đường trung bình của ΔDQC. Do đó A là trung điểm của DC và G là trọng tâm của ΔBCD. Gọi J là điểm đối xứng của B qua A thì $BCJD$ là hình vuông. Đường thẳng CG cắt BD và đường thẳng JD lần lượt tại F và I. Dễ thấy F là trung điểm của BD, từ đó suy ra $BC = DI = DJ$.

Mặt khác hai tam giác vuông JMC và CFB bằng nhau. Suy ra $MJ \perp FC$. Do đó M, E, J thẳng hàng.

Vậy ΔIEJ vuông ở E có D là trung điểm của IJ nên $ID = DJ = DE$. Suy ra $DE = BC$ (a).

Hơn nữa K là trọng tâm của ΔBCJ nên $AK = \frac{1}{2}KC$. Vậy $GK // BC // IJ$. Theo định lí Talét ta có

$$\frac{GP}{ID}=\frac{EP}{ED}=\frac{PK}{DJ}.$$

Từ đó $PG = PK$. Suy ra $PG = PK = PE$ (b)

(a) và (b) là đpcm.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Lại Trường Xuân*, 8A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Thị Thu Hiền*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** *Nguyễn Đức Phương*, 9A, THNK Trần Phú; **Nam Định :** *Đoàn Duy Thuyết*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hà Nội :** *Nguyễn Phương Hiền*, 7K, THCS Trưng Vương; **Nghệ An :** *Ngô Phú Anh Tuấn*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/289. *Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC, P là giao điểm của AN và BM, Q là giao điểm của DN và CM. Chứng minh rằng :*

$$\frac{PA}{PN}+\frac{PB}{PM}+\frac{QC}{QM}+\frac{QD}{QN}\geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

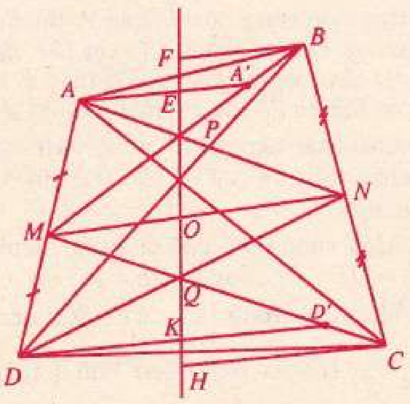
Lời giải. *Cách 1.* Nhận xét : Nếu hai tam giác có cạnh đáy (chiều cao) bằng nhau thì tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số chiều cao (cạnh đáy) của chúng (1)

Từ nhận xét trên và do M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC ta có :

$$S(BAD)+S(CAD)=2S(NAD)$$
$$S(ABC)+S(DBC)=2S(MBC) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có : $\frac{PA}{PN}+\frac{PB}{PM}+\frac{QC}{QM}+\frac{QD}{QN}=$

$$=\frac{2S(ABM)}{2S(NBM)}+\frac{2S(BAN)}{2S(MAN)}+\frac{2S(CDN)}{2S(MDN)}+\frac{2S(DCM)}{2S(NCM)}$$
$$=\frac{S(BAD)}{S(MBC)}+\frac{S(ABC)}{S(NAD)}+\frac{S(DBC)}{S(NAD)}+\frac{S(CAD)}{S(MBC)}$$



$$=2\left(\frac{S(NAD)}{S(MBC)}+\frac{S(MBC)}{S(NAD)}\right)\geq 4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow S(NAD)=S(MBC)\Leftrightarrow$ $2S(NAM)=2S(MBN)$ và $2S(NDM)=2S(MCN)$ $\Leftrightarrow AB//MN$ và $MN//CD \Leftrightarrow AB//CD$

Cách 2. MN cắt PQ tại điểm O. Các đường thẳng qua A, B, C, D song song với MN lần lượt cắt đường thẳng PQ tại E, F, H, K. Sử dụng định lí Talét ta có :

$$\frac{PQ}{PN}+\frac{PB}{PM}+\frac{QC}{QM}+\frac{QD}{QN}$$
$$=\frac{AE}{ON}+\frac{BF}{OM}+\frac{CH}{OM}+\frac{DK}{ON}$$
$$=\frac{AE+DK}{ON}+\frac{BF+CH}{OM}$$
$$=\frac{2.OM}{ON}+\frac{2.ON}{OM}=2\left(\frac{OM}{ON}+\frac{ON}{OM}\right)\geq 4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow OM=ON\Leftrightarrow AE=EA'$ và $DK=KD'\Leftrightarrow EA'+KD'=BF+CH\Leftrightarrow B\equiv A'$ và $C\equiv D'\Leftrightarrow AB//CD//MN$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn giải đúng bài này, tuy nhiên một số bạn lập luận dài dòng, các bạn *Đỗ Việt Cường*, 9D, THCS Việt Trì, **Phú Thọ** và *Nguyễn Duy Mạnh*, 7/3 THCS Lê Quý Đôn, Tp. **Hải Dương** đã chứng minh bài toán sau, từ đó có thể tổng quát hóa đề ra.

Bài toán: Gọi D là điểm thuộc cạnh BC của ΔABC sao cho $\frac{DB}{DC}=\frac{m}{n}$. Đường thẳng bất kì cắt AB, AC, AD theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng :

$$\frac{mAC}{AN}+\frac{nAB}{AM}=\frac{(m+n)AD}{AP}$$

2) Hoan nghênh các bạn lớp 8 có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Nguyễn Trung Kiên*, 8A1, *Nguyễn Trường Thọ*, 8A2, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh; **Hải Dương :** *Lê Đình Huy*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Hà Nam:** *Trần Phan Bình*, 8B, THCS Trần Phú, Phủ Lý, **Nam Định :** *Phạm Kim Hùng*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Nguyễn Quốc Khánh*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định; **Thanh Hóa :** *Trịnh Thành Đông*, 8A, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc; **Hà Tĩnh:** *Lê Hoàng Bảo*, 8G, THCS Kỳ Anh, *Trần Anh Tài*, 8A, THCS Kỳ Tiến, Kỳ Anh; **Đà Nẵng:** *Trần Duy Sơn*, 8/2, THCS Nguyễn Khuyến; **Phú Yên:** *Huỳnh Thị Thùy Lam*, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** *Lê Đăng Khoa*, 8/16, THCS Thái Nguyên, Nha Trang.

VIỆT HẢI

Bài T6/289. *Cho các số nguyên dương a_1, a_2, ..., a_n $(n\geq 2)$ lớn hơn 1. Đặt tích*

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^2-1)=A$$

Biết rằng tổng $\sum_{i=1}^{n} \frac{A}{(a_i^2-1)(a_i+1)}$ *là một số tự nhiên. Chứng minh rằng số* $\frac{A}{(a_i^2-1)(a_i+1)}$ *cũng là số tự nhiên với mỗi* $i = 1, 2, ..., n$.

Lời giải. Đặt $x_i = \frac{A}{(a_i^2-1)(a_i+1)}$, ($i$ = 1, 2, ..., n) và với $k = 1, 2, ..., n$

$S_k = \sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n} x_{i_1}.x_{i_2}...x_{i_k}$ (tức là S_k là tổng các tích bậc k của các số $x_1, x_2, ..., x_n$).

Do $A^2 = \prod_{i=1}^{n}(a_i^2-1)^2$ chia hết cho $\prod_{i=1}^{n}((a_i^2-1)(a_i+1))$ nên $S_k \in Z$ với mọi $k = 2, 3, ..., n$ và theo giả thiết $S_1 \in Z$.

Bởi vậy $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) =$
$= x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - ... + (-1)^n S_n$

là một đa thức với hệ số nguyên, đa thức này có hệ số cao nhất bằng 1. Do đó theo một tính chất quen thuộc của đa thức : tất cả các nghiệm hữu tỉ của đa thức này là các số nguyên, tức là $x_i \in Z$ $(\forall i, 1 \le i \le n)$.

Chú ý : $a_i > 1$ $(\forall i, 1 \le i \le n)$, nên $x_i \in N^*$ $(\forall i, 1 \le i \le n)$ (đpcm).

Nhận xét. Một số ít bạn giải bài toán này bằng cách khác : so sánh số mũ đối với số nguyên tố p, hoặc quy nạp theo n với nhận xét "nếu a, b là các số hữu tỉ mà cả hai tổng $a+b$ và tích $a.b$ là các số nguyên thì suy ra a và b là các số nguyên". Các bạn sau có lời giải gọn gàng : **Nam Định :** *Đặng Thế Cường*, 10A12, THPT Phạm Văn Nghị ; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Tùng*, 10T, THPT Amsterdam; *Nguyễn Hoàng Tùng*, 10D1, THPT Chu Văn An ; *Lê Bảo Khánh, Vũ Đình Thế*, 10A, PTCT, ĐHKHTN ; **Hà Tây:** *Đỗ Văn Tiệp*, 10T1, THPT Nguyễn Huệ; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 9/3 THCS Lê Quý Đôn, *Phạm Tuấn Thành*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** *Lê Văn Bắc*, 9A, THCS Quảng Lĩnh, *Mai Quang Thành*, 10T1, *Phạm Lương Anh Ngọc*, 10T2, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An:** *Đậu Minh Hoàng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương ; *Đặng Duy Phú*, 10A, PTCT, ĐH Vinh; **Quảng Ngãi:** *Ngô Ngọc Khiêm*, 9_2, THCS Nguyễn Tự Tân; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tiến Việt*, 9^{13}, THCS Thái Nguyên, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/289. *Giải phương trình*

$$3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$$

Lời giải. (Theo bạn *Nguyễn Văn Thắng* và *Trần Thái An Nghĩa*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** và nhiều bạn khác).

Ta giải bài toán tổng quát sau :

"Cho $b > a > 1$. Giải phương trình

$$a^x + b^{x^2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^{x^2} \quad (*)"$$

Nhận xét 1: (*) có nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Nhận xét 2: Hàm số $f(x) = x^{\alpha^2} - x^{\alpha}$ đồng biến trong khoảng $(1, +\infty)$ với α nằm ngoài $[0, 1]$ và nghịch biến trong khoảng $(1, +\infty)$ khi $\alpha \in (0, 1)$

Thật vậy, $f'(x) = \alpha^2x^{\alpha^2-1} - \alpha x^{\alpha-1} > 0$ khi $\alpha < 0$ hoặc $\alpha > 1$ và $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\left(\alpha x^{\alpha^2-\alpha} - 1\right) < 0$ khi $0 < \alpha < 1$.

Nhận xét 3. Hàm số $g(t) = t^x$ có $g'(t) = xt^{x-1}$; $g''(t) = x(x-1)t^{x-2}$ nên $g''(t) > 0$ trong $(1, +\infty)$ với $x \notin [0, 1]$ và $g''(t) < 0$ trong $(1, +\infty)$ với $x \in (0, 1)$. Do đó với $t > 1$ thì $g(t)$ là hàm số lõm khi $x \notin [0, 1]$ và $g(t)$ là hàm số lồi khi $x \in (0, 1)$.

Theo các nhận xét trên, với x nằm ngoài $[0, 1]$ thì

$$a^x + b^{x^2} = \frac{1}{2}(a^x + b^x) + \frac{1}{2}\left(a^{x^2} + b^{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(b^{x^2} - b^x\right) - \frac{1}{2}\left(a^{x^2} - a^x\right) > \left(\frac{a+b}{2}\right)^x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^{x^2}$$

Với $x \in (0, 1)$ thì :

$$a^x + b^{x^2} = \frac{1}{2}(a^x + b^x) + \frac{1}{2}\left(a^{x^2} + b^{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(b^{x^2} - b^x\right) - \frac{1}{2}\left(a^{x^2} - a^x\right) < \left(\frac{a+b}{2}\right)^x + \left(\frac{a+b}{2}\right)^{x^2}$$

Kết luận : Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Nhận xét. Một số bạn giải bằng bất đẳng thức Bernoulli. Các bạn sau đây có lời giải đúng

Bình Định: *Trần Ngọc Quang*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Bắc Ninh :** *Lại Đắc Khải, Nguyễn Văn Thảo*, 11T, THPT chuyên Hàn Thuyên ; **Hà Nội:** *Phạm Văn Hùng*, 11A1, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Đức Nhật*, 12B, *Nguyễn Hữu Thuần*, 11A, ĐHKHTN ; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Hiển*, 10T, THPT Lê Hồng Phong, *Trần Anh Hoàng*, 12T, ĐHQG tp HCM ; **Phú**

Yên: *Phạm Thành Nam*, 12T2, THPT Lương Văn Chánh ; **Hải Phòng :** *Lương Minh Hảo*, 12T, THPT Trần Phú ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Trường*, *Nguyễn Văn Giáp*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Thanh Hóa:** *Đặng Trọng Nam*, 11T2, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An:** *Phan Tuấn Linh*, 11A, ĐH Vinh; **Quảng Trị:** *Hồng Ngọc Bình*, 12A, THPT Lê Quý Đôn ; **Bến Tre:** *Văn Đỗ Phúc Anh*, 11/6, THPT Nguyễn Đình Chiểu; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, *Nguyễn Tiết Việt*, 9B, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hòa Bình:** *Nguyễn Thái Ngọc*, *Nguyễn Lâm Tuyền*, *Giang Sơn Đạt*, *Đinh Duy Hiển*, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Ninh Bình:** *Trịnh Thùy Nhung*, 11T, THPT Lương Văn Tụy; **Hải Dương :** *Đoàn Văn Tuyển*, 12A5, THPT Hồng Quang; **Hà Tĩnh:** *Phan Thị Phương Thảo*, 12A1, THPT Minh Khai; **Hà Nam :** *Vũ Quang Mạnh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, Hà Nam.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/289. *Cho hai dãy số dương (x_n), (y_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ được xác định bởi :*

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Tìm giới hạn của dãy (x_n) và dãy (y_n) .

Lời giải. *Cách 1.* (của bạn *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, **Hòa Bình** và *Nguyễn Văn Thảo*, 11, THPT Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**)

Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$x_n^2 + y_n^2 = 1 \qquad (1)$$

Thật vậy với $n = 1$ hệ thức (1) đúng. Giả sử đúng với $n = k$. Khi đó : $1 = x_k^2 + y_k^2$

$$= \left(x_{k+1}(4y_{k+1} - 1)\right)^2 + \left(y_{k+1}(1 - 4x_{k+1}^2)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 - 1\right)\left(16x_{k+1}^2 y_{k+1}^2 + 1\right) = 0$$

Vậy $x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2 = 1$.

Mặt khác do $x_n > 0$ và $y_n > 0$ với mọi n nên

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} > y_n > \ldots > y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Do đó $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} < x_n$ (vì $y_{n+1} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

Dãy (x_n) giảm và bị chặn $(0 < x_n)$ nên tồn tại $\lim x_n = \alpha$. Dãy (y_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 nên tồn tại $\lim y_n = \beta$.

Từ hệ thức truy hồi cho $n \to \infty$ ta được

$$\alpha = \frac{\alpha}{4\beta^2 - 1}$$

Nếu $\alpha \neq 0$ thì $\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ song điều này trái với (2).

Vậy $\alpha = 0$. Vì $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ nên $\beta = 1$.

Cách 2. (của đa số các bạn). Sau chứng minh được $x_n^2 + y_n^2 = 1$ (1) ta đặt $x_n = \sin\alpha_n$, $y_n = \cos\alpha_n$ và từ hệ thức truy hồi suy ra $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{3}$.

Do đó $x_n = \sin\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$, $y_n = \cos\dfrac{\pi}{4.3^{n-1}}$.

Suy ra $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 1$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phan Thành Nam*, 11T, THPT chuyên **Phú Yên**; *Nguyễn Văn Tâm*, 11, THPT Gia Rai, **Bạc Liêu**; *Vũ Văn Dương*, *Hà Hữu Cao Trình*, 11 PTNK Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Trần Anh Hoàng*, 12T, PTNK ĐHKHTN – ĐHQG **Tp. Hồ Chí Minh** ; *Nguyễn Huy Giang*, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; *Hoàng Chí Thực*, 10, THPT HànThuyên, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Thành Khang*, 11B, THPT Hàm Rồng, **Thanh Hóa** ; *Lê Thái Hà*, THPT Nguyễn Đức Cảnh, **Thái Bình** ; *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, THPT Sa Đéc, **Đồng Tháp** ; *Nguyễn Xuân Trường*, 12A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ;

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/289. *Trên mặt phẳng cho tam giác ABC và một đường thẳng d. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của A, B, C trên đường thẳng d. Gọi A_2, B_2, C_2 là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên đường thẳng BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.*

Lời giải. (của nhiều bạn)

Trước hết ta cần hai bổ đề sau :

Bổ đề 1: Cho tam giác *ABC*. *H* là một điểm trên đường thẳng *BC*. Khi đó :

$$AH \perp BC \Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$$

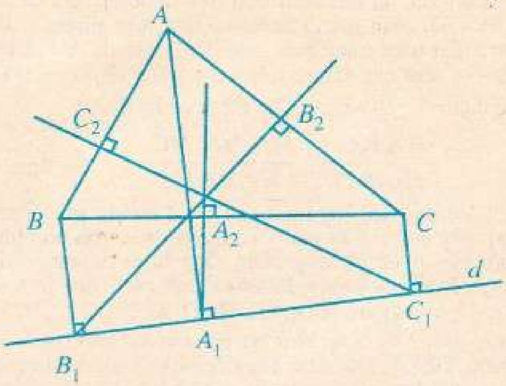
Bổ đề 2: Cho tam giác *ABC*. Các điểm *A'*, *B'*, *C'* lần lượt thuộc các đường thẳng *BC*, *CA*, *AB*. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C lần lượt đi qua *A'*, *B'*, *C'* và lần lượt vuông góc với *BC*, *CA*, *AB*. Khi đó :

Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy

$$\Leftrightarrow (A'B^2 - A'C^2) + (B'C^2 - B'A^2) + (C'A^2 - C'B^2) = 0$$

Hai bổ đề trên rất quen thuộc và việc chứng minh chúng khá đơn giản nên dành cho bạn đọc.

Trở lại bài toán ta đang quan tâm



Theo bổ đề 1, ta có :

$$(A_2B^2 - A_2C^2) + (B_2C^2 - B_2A^2) + (C_2A^2 - C_2B^2)$$
$$= (A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2)$$
$$= (C_1A^2 - B_1A^2) + (A_1B^2 - C_1B^2) + (B_1C^2 - A_1C^2)$$
$$= (C_1A_1^2 - B_1A_1^2) + (A_1B_1^2 - C_1B_1^2) + (B_1C_1^2 - A_1C_1^2)$$
$$= 0$$

Theo bổ đề 2 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy

Nhận xét: 1) Đây là một bài toán dễ và khá quen thuộc, rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng.

2) Bổ đề 2 thường được gọi là định lí Cacnô (nhà toán học Pháp), rất có lợi trong việc chứng minh sự đồng quy của ba đường thẳng

3) Bài toán này có thể mở rộng sang không gian cho tứ diện được hay không ? Đây là một câu hỏi rất thú vị. Mời các bạn cùng quan tâm.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/289. *Cho tứ diện ABCD nội tiếp một mặt cầu tâm O. Gọi M là một điểm nằm trong tứ diện. Các tia AM, BM, CM, DM cắt mặt cầu lần nữa ở các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng.*

Chứng minh rằng :

$$\frac{V(A_1B_1C_1D_1)}{V(ABCD)} = \frac{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1}{MA.MB.MC.MD} \quad (*)$$

trong đó kí hiệu V(XYZT) là thể tích khối tứ diện XYZT.

Lời giải 1. (*Hà Hữu Cao Trình*, 11T, THPT NK Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** và nhiều bạn khác).

Kí hiệu độ dài các cạnh của hai tứ diện $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$ (cũng nội tiếp mặt cầu (O)) như sau : $BC = a$, $DA = a'$; $CA = b$; $DB = b'$; $AB = c$, $DC = c'$; $B_1C_1 = a_1$; $D_1A_1 = a'_1$; $C_1A_1 = b_1$; $D_1B_1 = b'_1$; $A_1B_1 = c_1$; $D_1C_1 = c'_1$.

Thế thì ta có một kết quả quen thuộc (chẳng hạn, đã nêu trong tạp chí THTT số 282 (tháng 12/2000) :

• Tồn tại các tam giác $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}_1$ có độ dài các cạnh tương ứng là aa', bb', cc' và $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$.

• Gọi S và S_1 lần lượt là diện tích các tam giác $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}_1$ thì ta có : $S = 6VR$ và $S_1 = 6V_1R$ (Công thức Crelle), trong đó V và V_1 lần lượt là thể tích các tứ diện $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$, còn R là bán kính mặt cầu (O) ngoại tiếp hai tứ diện đó.

Từ đó suy ra : $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{S_1}{S}$ (1)

Bởi vậy, để thiết lập hệ thức (*), ta cần tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S}$

Dễ thấy $\Delta MB_1C_1 \backsim \Delta MCB$, từ đó ta được :

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{MB_1}{MC} = \frac{MC_1}{MB} \Rightarrow \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{MB_1.MC_1}{MB.MC}$$

Cũng vậy, từ $\Delta MD_1A_1 \backsim \Delta MAD \Rightarrow$

$$\frac{a'^2_1}{a'^2} = \frac{MA_1.MD_1}{MA.MD}$$

Từ hai đẳng thức này, ta được :

$$\frac{a_1^2a'^2_1}{a^2a'^2} = \frac{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1}{MA.MB.MC.MD}$$

hay là : $\dfrac{a_1a'_1}{aa'} = k$, trong đó :

$$\frac{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1}{MA.MB.MC.MD} = k^2 \quad (2)$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$\frac{a_1a'_1}{aa'} = \frac{b_1b'_1}{bb'} = \frac{c_1c'_1}{cc'} \ (= k)$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\mathcal{T}_1$ đồng dạng với $\mathcal{T}$ theo tỉ số đồng dạng k, do đó :

$$\frac{S_1}{S} = k^2 \quad (3)$$

Từ (1), (3) và (2) ta được hệ thức (*) cần tìm.

Lời giải 2. (*Nguyễn Xuân Trường*, 12A$_1$, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** và nhiều bạn khác).

Kí hiệu thể tích các hình chóp tam giác $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ và $MB_1C_1D_1$, $MC_1D_1A_1$, $MD_1A_1B_1$, $MA_1B_1C_1$ lần lượt là α, β, γ, δ; α_1, β_1, γ_1, δ_1. Thế thì ta có các hệ thức vectơ sau đây:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = \vec{0} \quad (4)$$

Lại vì M là điểm chung của các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 và DD_1 nên $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{MA}{MA_1}\overrightarrow{MA_1}$ (do $\overrightarrow{MA_1}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MA}$) và cũng có các đẳng thức tương tự, biểu diễn $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$ theo $\overrightarrow{MB_1}$, $\overrightarrow{MC_1}$, $\overrightarrow{MD_1}$. Thay vào (4) ta được :

$$\alpha\frac{MA}{MA_1}\overrightarrow{MA_1} + \beta\frac{MB}{MB_1}\overrightarrow{MB_1} + \gamma\frac{MC}{MD_1}\overrightarrow{MD_1} = \vec{0}$$

Hệ thức này chứng tỏ rằng điểm M cũng nằm trong tứ diện $A_1B_1C_1D_1$, và do đó, ta có hệ thức:

$$\alpha_1\overrightarrow{MA_1} + \beta_1\overrightarrow{MB_1} + \gamma_1\overrightarrow{MC_1} + \delta_1\overrightarrow{MD_1} = \vec{0} \quad (5)$$

(trong đó $\alpha_1 = \alpha\dfrac{MA}{MA_1}, \ldots, \delta_1 = \delta\dfrac{MD}{MD_1}$)

Đồng thời ta cũng có các hệ thức (vì M nằm trong cả hai tứ diện $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$)

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = V$; $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = V_1$

trong đó $V = v(ABCD)$ và $V_1 = v(A_1B_1C_1D_1)$

Đặt $\lambda = \dfrac{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1}{MA.MB.MC.MD}$;

$$p = MA.MA_1 = MB.MB_1 = MC.MC_1 =$$
$$= MD.MD_1 = R^2 - OM^2 = -\mathscr{P}M/(O) \quad (6)$$

Thế thì ta có :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{v(MB_1C_1D_1)}{v(MBCD)} = \frac{MB_1.MC_1.MD_1}{MB.MC.MD} = \frac{\lambda}{p}MA^2$$

hay là : $\alpha_1 = \dfrac{\lambda}{p}\alpha MA^2$

và các hệ thức tương tự cho β_1, γ_1 và δ_1.

Từ đó suy ra :

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = V_1$$
$$= \frac{\lambda}{p}(\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \lambda MC^2 + \delta MD^2) \quad (7)$$

Bởi vậy, để thiết lập hệ thức (*), ta cần tính vế phải của (7). Ta có :

$$\alpha OA^2 = \alpha\overrightarrow{OA}^2 = \alpha(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA})^2 = \alpha OM^2 + \alpha MA^2 + 2\alpha\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{MA}$$

Suy ra : $\alpha MA^2 = \alpha(R^2 - OM^2) - 2\overrightarrow{OM}.\alpha\overrightarrow{MA}$

và các hệ thức tương tự cho βMB^2, γMC^2, δMD^2. Từ đó, cộng theo từng vế các đẳng thức này và đối chiếu với (4) và (5); (6) ta được:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \delta MD^2 = Vp \quad (8)$$

Cuối cùng, từ (6), (7) và (8) ta thu được hệ thức (*) cần tìm.

Nhận xét. 1) Bài toán trên đây được tác giả đề xuất từ một bài toán tương tự trong hình học phẳng : M là một điểm nằm trong tam giác ABC; các tia AM, BM và CM lần lượt cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ở các điểm A_1, B_1 và C_1. Thế thì ta có hệ thức :

$$\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{MA_1.MB_1.MC_1}{MA.MB.MC}$$

2) Về cơ bản, bài toán này có 2 hướng giải như đã trình bày ở trên. Lời giải 1 có thể là ngắn gọn hơn (được trình bày bằng phương pháp tổng hợp) nhưng phải sử dụng công thức Crelle. Bạn nào chưa biết công thức này có thể tìm thấy trong tạp chí THTT số 282 (12–2000).

Lời giải 2 sử dụng phương pháp véctơ trên cơ sở thiết lập hệ thức (4) ; hệ thức này cũng đã được sử dụng rộng rãi và đã được chứng minh, nên ở đây không nhắc lại chứng minh đó. Việc thiết lập hệ thức (8) chính là chứng minh lại công thức Lagrange sau đây :

$\varphi(0) = \varphi(M) + (\sum\alpha).OM^2$, cụ thể là : với mọi điểm O thì $\alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 + \delta OD^2 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)OM^2 + \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \delta MC^2$

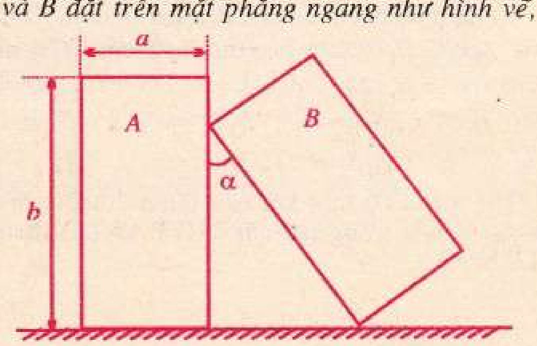
Xem O là tâm mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$, ta thu được (8) như đã chỉ ra ở trên.

3) Ngoài 2 bạn đã được nêu tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội : *Nguyễn Chí Hiệp*, 10A2, *Phạm Văn Hùng*, *Kim Đình Thái*, 11A1, PTCT–T, ĐHSP Hà Nội ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Tuấn Hương*, 11A2, THPT Việt Yên; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Thái Nguyên:** *Đặng Quang Hưng*, 11T, THPT chuyên ; **Hải Dương :** *Đồng Quang Điệp*, *Nguyễn Ánh Ngọc*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hà Tây:** *Phạm Quang Phương*, 11A6, THPT Tùng Thiện, Sơn Tây ; *Nguyễn Tiến Yết*, 11T1, THPT Nguyễn Huệ ; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy; *Nguyễn Lâm Tuyền*, 11T và *Nguyễn Thái Ngọc*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Nam Định:** *Bùi Văn Tùng*, 12B, THPT Trần Nhật Duật, Tp. Nam Định ; **Ninh Bình:** *Trần Minh Mẫn*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa:** *Mai Quang Thành*, 10T1, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Phạm Trung Hiếu*, 12A1, PTCT–T, ĐH Vinh ; **Quảng Bình:** *Lê Nguyên Hồng*, 11T, THPT NK tỉnh Quảng Bình ; **Quảng Trị:** *Phan Quốc Hưng*, 12B, THPT Hải Lăng; **Tp. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Khắc Anh*, 12T, *Trần Anh Hoàng*, 12T; *Trần Võ Huy*, 11T, PTNK, ĐHQG Tp. HCM; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Trần Quang Vinh*, 12T2, THPT Lê Quý Đôn.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

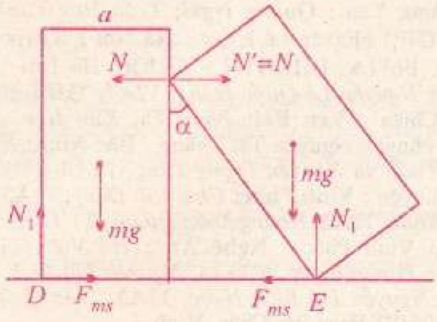
Bài L1/289. *Hai khối gỗ hình hộp giống nhau A và B đặt trên mặt phẳng ngang như hình vẽ,*



góc giữa 2 mặt bên là α. Hệ số ma sát trượt giữa 2 khối và mặt phẳng ngang đều là k.

Tìm điều kiện của α theo a, b và k để hệ cân bằng (bỏ qua ma sát giữa hai khối)

Lời giải. Các lực tác dụng vào mỗi vật như trên hình dưới. Điều kiện cân bằng của hệ :



1) $N_1 = mg$; $N = F_{ms}$; $F_{ms} \le kN_1$.

2) Xét vật B, chọn trục quay đi qua E :

$$Nb\cos\alpha = \frac{1}{2}(b\sin\alpha - a\cos\alpha)mg$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{2}\left(\mathrm{tg}\alpha - \frac{a}{b}\right) = F_{ms} \le kmg$$

$$\Rightarrow \alpha \le \mathrm{arctg}\left(\frac{a}{b} + 2k\right) \quad (1)$$

Mặt khác phải có : $N \ge 0 \Rightarrow \alpha \ge \mathrm{arctg}\frac{a}{b}$ (2)

3) Xét vật A, chọn trục quay đi qua D, vật A sẽ đổ sang trái nếu $Nb\cos\alpha > \frac{1}{2}mga$. Do đó để A đứng yên phải có : $Nb\cos\alpha \le \frac{1}{2}mga \Leftrightarrow$

$$\frac{mg}{2}(b\sin\alpha - a\cos\alpha) \le mg \Leftrightarrow \alpha \le 2\mathrm{arctg}\frac{a}{b} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) rút ra :

$$\mathrm{arctg}\frac{a}{b} \le \alpha \le \min\left\{2\mathrm{arctg}\frac{a}{b}, \mathrm{arctg}\left(\frac{a}{b} + 2k\right)\right\}$$

Nhận xét. Chỉ có em *Trần Quang Vũ*, 11A7, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An) có đáp số đúng và đầy đủ. Các em có lời giải và đáp số gần đầy đủ :

Bắc Giang : *Trần Hải Linh*, 11B, THPT Ngô Sĩ Liên; **Hải Dương :** *Đoàn Văn Tuyển*, 12A5, THPT Hồng Quang ; **Đồng Nai:** *Ma Nam*, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa **Nam Định :** *Nguyễn Tuấn Anh*, 10 Toán 1, THPT Lê Hồng Phong ; **Nghệ An :** *Phạm Cung Sơn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Quảng Ngãi:** *Đỗ Tấn Tài*, 11 Lí, *Nguyễn Văn Thắng*, 10T, THPT Lê Khiết ; **Vĩnh Phúc :** *Chu Anh Dũng*, *Lương Anh Tài*, 11A3, *Hoàng Xuân Quang*, 11A1, *Kiều Ngọc Thanh*, 11B3, *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

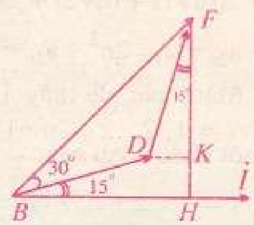
Bài L2/289. *Một mạch điện xoay chiều như sơ đồ dưới. Trong mỗi hộp X và Y chỉ có một linh kiện hoặc là điện trở, hoặc là cuộn cảm hoặc là tụ điện. Ampe kế nhiệt A trỏ 1 ampe,* $U_{BD}=U_{DF}=10V$; $U_{BF} = 10\sqrt{3}$ V. *Công suất tiêu thụ của đoạn mạch BF là* $P = 5\sqrt{6}$ W. *Hãy xác định linh kiện trong X và Y và độ lớn của các đại lượng đặc trưng của các linh kiện đó. Cho biết tần số dòng điện xoay chiều là* $f = 50Hz$.

Lời giải. Hệ số công suất toàn mạch $\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{5\sqrt{6}}{10.\sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow U_{BF}$ có thể sớm hoặc trễ pha góc $\frac{\pi}{4}$ so với i.

Trường hợp 1: U_{BF} sớm pha góc $\frac{\pi}{4}$ so với i.

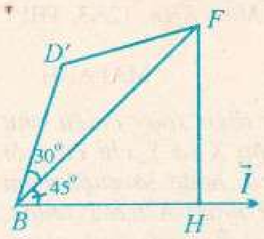
Ta có giản đồ véctơ như trên hình 1, 2 ($\overrightarrow{BF}$ biểu diễn U_{BF}, $\overrightarrow{BD}$ biểu diễn U_{BD} và $\overrightarrow{DF}$ biểu diễn U_{DF}). Vì $U_{BD} = U_{DF}$ và $U_{BF} = U_{BD}\sqrt{3}$ nên tam giác DBF là tam giác cân và góc $\widehat{FBD} = \widehat{DFB} = 30°$. Ở đây có 2 trường hợp :

a) U_{BD} trễ pha hơn U_{BF} góc 30° (hình 1), nghĩa là U_{BD} sớm pha hơn i góc $\varphi_X = \varphi - 30° = 15°$. Như vậy X là một cuộn cảm có tổng trở Z_X, điện trở thuần R_X và độ tự cảm L_X. Ta có : $Z_X = \frac{U_{BD}}{I} = 10\Omega \Rightarrow R_X = Z_X\cos\varphi_X \approx 9{,}66\ \Omega$, và $Z_{LX} = R_X\sin\varphi_X \approx 2{,}59\Omega \Rightarrow L_X \approx 8{,}24$mH. Ngoài ra, vì lí do đối xứng nên $\widehat{DFH} = 15° \Rightarrow U_{DF}$ sớm pha góc $\varphi_Y = 90° - 15° = 75°$ so với i ; như vậy Y là một cuộn cảm. Dễ dàng thấy rằng : $R_Y = Z_{LX} \approx 2{,}59\Omega$, và $Z_{LY} = R_X \approx 9{,}66\Omega \Rightarrow L_Y \approx 30{,}7$mH.

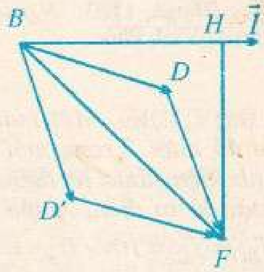


Hình 1

b) U_{BD} sớm pha hơn U_{BF} góc 30° (hình 2). Lập luận tương tự tìm được : X là một cuộn cảm



Hình 2



Hình 3

có $R'_X \approx 2{,}59\Omega$, $L'_X \approx 30{,}7$mH, và Y là một cuộn cảm có $R'_Y \approx 9{,}66\Omega$, $L'_Y \approx 8{,}24$mH.

Trường hợp 2:

U_{BF} trễ pha góc $\frac{\pi}{4}$ so với i (hình 3). Khi đó U_{BD} và U_{DF} cũng trễ pha hơn i (góc 15° và góc 75°).

Như vậy trong mỗi hộp phải chứa ít ra là một tụ điện và một điện trở ; trường hợp này không phù hợp với đề bài. Như vậy bài toán chỉ có 2 cặp nghiệm như trường hợp 1.

Nhận xét. Các em có lập luận chặt chẽ và đáp số đúng : **Đà Nẵng:** *Lê Anh Vũ*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Hưng Yên:** *Bùi Mạnh Linh*, 12 Lí, THPT NK Hưng Yên ; **Quảng Ngãi:** *Trần Huy Thuận*, 12 L-H, THPT chuyên Lê Khiết ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hữu Thuần*, Bo11A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Tiền Giang:** *Nguyễn Lê Quốc Dũng*, 12A7, THPT Nguyễn Đình Chiểu ; **Yên Bái:** *Phan Thị Kim Hoa*, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Tuấn* và *Nguyễn Trọng Tùng*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc:** *Chu Anh Dũng*, 11A3, *Trần Minh Khuê*, 12A3, *Hoàng Xuân Quang*, 11 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Nghệ An :** *Hồ Việt Hùng* và *Nguyễn Đình Quang*, K28 Lí, *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 10A3, *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 11A3, *Trần QuangVũ*, 11A7, THPT Phan Bội Châu, Vinh.

MAI ANH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI... *(Tiếp trang 11)*

Bài 6. a/ *Điều kiện đủ.* Vì $1 \le a_{2k} \le n$ $\forall k = 1, 2, \dots, n$ nên:

$$T = \sum_{i=1}^{2n-1} |a_{i+1} - a_i|$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_2 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$= 2(a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}) - 2(a_2+a_4+\dots+a_{2n}) + a_{2n} - a_1$$

$$= 2[(n+1) + (n+2) + \dots + 2n] - 2(1 + 2 + \dots + n)$$

$$+ a_{2n} - a_1 = 2n^2 + a_{2n} - a_1 \quad (10)$$

Mặt khác, dễ thấy $1 \le |a_{i+1} - a_i| \le 2n-1$ ($\forall i = 1, 2, \dots, 2n-1$) và do $|a_{i+1} - a_i|$ đôi một khác nhau nên:

$$T = 1 + 2 + \dots + (2n-1) = 2n^2 - n. \quad (11)$$

Từ (10) và (11) ta được: $a_1 - a_{2n} = n$. (Đpcm).

b/ *Điều kiện cần.* Từ các giả thiết ta có:

$$T_0 = \sum_{i=1}^{2n-1} |a_{i+1} - a_i| + a_1 - a_{2n} =$$

$$= n(2n-1) + n = 2n^2. \quad (12)$$

Mặt khác, sau khi khai triển dấu giá trị tuyệt đối ở các số hạng của T_0 ta có thể viết T_0 dưới dạng: $T_0 = \sum_{i=1}^{2n} \delta_i a_i$, trong đó: $\delta_i \in \{-2, 0, 2\}$ $\forall i = 1, 2, \dots, 2n$.

Dễ thấy dãy $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}$ có các tính chất sau:

i) $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{2n} = 0$;

ii) Nếu trong dãy $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{2n}$ ta xóa đi tất cả các số 0 và đồng thời giữ nguyên vị trí của các số khác 0 thì sẽ nhận được một dãy mà ở đó các số -2 và 2 nằm xen kẽ nhau.

Kí hiệu $b_1, b_2, \dots, b_n$ (tương ứng, $t_1, t_2, \dots, t_n$) lần lượt, theo thứ tự xuất hiện trong hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$, là các số không vượt quá n (tương ứng, *vượt quá n*) trong hoán vị ấy. Từ i) ta được:

$$T_0 = \sum_{i=1}^{2n} \delta_i (a_i - n) \le$$

$$\le 2\sum_{i=1}^{n} (t_i - n) - 2\sum_{i=1}^{n} (b_i - n) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} t_i - 2\sum_{i=1}^{n} b_i = 2n^2 = T_0 \quad \text{(theo (12))}.$$

Từ đó suy ra ta phải có $\delta_i = 2$ với mọi i mà $a_i > n$ và đồng thời $\delta_i = -2$ với mọi i mà $a_i \le n$ (*).

Do $a_1 - a_{2n} = n$ nên $a_{2n} \le n$. Suy ra $\delta_{2n} = -2$. Vì thế, theo ii), ta có $\delta_{2k} = -2$ $\forall k = 1, 2, \dots, n$. Do vậy, theo (*), ta phải có:

$1 \le a_{2k} \le n$ $\forall k = 1, 2, \dots, n$. (Đpcm).

BẠN CÓ BIẾT

Số π trong kim tự tháp Khéops

NGUYỄN ĐĂNG TIẾN
(Viện Khoa học Giáo dục)

Kim tự tháp Kêốp (Khéops) là một trong 7 kì quan trên thế giới. Tháp được xây vào khoảng năm 2789 TCN, cao gần 150m, rộng gần 5 vạn rưỡi mét vuông, nặng 6 triệu tấn.

Theo sự khảo sát của nhà thiên văn học Piazzi-Smith, tháp Kêốp nền chân hình vuông, mỗi cạnh đo được 232,805m, chiều cao là 148,208m.

Nhà bác học Ấn Độ Aryabhatta tính rằng kim tự tháp Kêốp được xây dựng bằng 2.300.000 khối đa hoa, mỗi khối nặng 2520kg. Riêng chân tháp, mỗi tảng đá lớn tới $26m^3$ với trọng lượng 55 tấn.

Aryabhatta cũng tìm ra số π với trị số 3,1416.

Vào thế kỉ III trước công nguyên, nhà trắc địa học trứ danh người Hy Lạp là Ácsimét (Archimède), sau khi tính chu vi đa giác đều 96 cạnh nội tiếp đường tròn đã đi đến kết luận rằng : Tỉ lệ của chu vi đường tròn đối với đường kính của nó ước chừng :

$$3\frac{10}{71} < \frac{\text{chu vi đường tròn}}{\text{đường kính}} < 3\frac{10}{70}$$

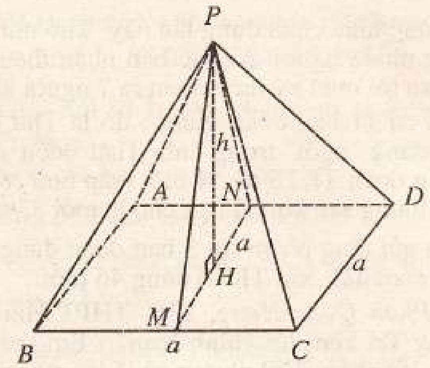
Tỉ lệ đó, Ácsimét gọi là số Pi (π) là chữ cái đầu tiên của chữ Hy Lạp là Périphéria (nghĩa là vòng tròn)

Tìm ra số π là một quá trình lâu dài và khó khăn, vậy mà người ta cũng thấy nó xuất hiện qua việc tính kích thước của kim tự tháp Kêốp bằng cách sau đây :

Lấy chu vi đáy tháp $4.BC = 4a$ chia cho 2 lần chiều cao $h = PH$ của tháp :

$$\frac{4a}{2h} = \frac{232,805 \times 4}{148,208 \times 2} \approx 3,1416...$$

Chú ý rằng nếu lấy diện tích của đáy tháp $ABCD$ chia cho diện tích hình tam giác đứng PMN (xem hình vẽ) ta cũng được kết quả trên :



$$\frac{a^2}{a(h/2)} = \frac{2a}{h}$$

Quả là điều kì diệu, phải không các bạn.

Đón đọc

THTT SỐ 294 (12/2001)

- *Tích ngoài của hai vectơ là gì và ứng dụng nó để giải các bài toán hình học như thế nào ?*
- Có thể sử dụng định nghĩa của đạo hàm để tìm giới hạn của hàm số không ?
- Bạn có biết cách khai thác các tiềm năng của máy tính điện tử bỏ túi để giải các bài toán số học ?

Các vấn đề trên sẽ được giải đáp ở THTT số tới cùng các chuyên mục thường kì hấp dẫn như : Toán học muôn màu, *Giải trí toán học, Đoán người qua ảnh*...

THTT

Kết quả

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỶ

Không hiểu chân dung lần này "khó nhìn" hay giống nhiều người mà các bạn nhận diện nhầm loạn xạ tới mức kỷ lục : đoán ra 7 người khác.

Chỉ có 11 bạn đoán đúng : đó là Thư kí Tòa soạn đang "ngồi" trong ảnh. Thật buồn sao khi có bạn đoán TKTS đã 54 tuổi (sắp hưu rồi ?) và cũng mừng sao khi có bạn cho là mới 33 tuổi.

Xin gửi tặng phẩm tới 5 bạn đoán đúng : Ảnh chụp năm nay, khi TKTS đúng 46 tuổi.

1) *Phan Quốc Hưng*, 12B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị kèm lời "bình loạn" : Em thấy thầy nhiều lần (báo, TV) nhưng có lẽ lần này thì thầy "phong độ" hơn cả.

2) *Nguyễn Hoài Anh*, Khoa Giáo dục Tiểu học, ĐHSP Huế (Toán Tuổi *t*rẻ *t*rân *t*rọng "*t*reo" *t*ên, *t*rao *t*hưởng, *t*rang *t*rải *t*iền *t*em *t*hư).

3) *Nguyễn Minh Tuấn*, 12B8, THPT Đào Duy Từ, Tp. Thanh Hóa.

4) *Trần Minh*, 10, THPT Hải Lăng, Quảng Trị

5) *Trần Trung*, 7B, THCS Thuận Thành, Bắc Ninh với lời khen : "Chú Nhất vẫn béo khỏe, vui vẻ như vậy !".

Cảm ơn các bạn và mong các bạn tiếp tục tham gia cuộc thi (chỉ còn 2 cuộc nữa thôi !).

CLB

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

. . . .

Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

Kết quả : "PHẢI CHĂNG KẾT QUẢ ĐÚNG RỒI ?"

Bạn *Nguyễn Đào Duy*, 11A2, THPT Nguyễn Huệ Tx. Tuy Hòa, Phú Yên tỏ ra là "bác sĩ" có trình độ khám bệnh "kĩ" nhất :

Bài toán yêu cầu tìm $M \in (d)$ để ΔMAB cân phải xét 3 trường hợp tam giác cân lần lượt tại M, A, B. Ngay trong trường hợp ΔMAB cân đỉnh M thì $MA = MB$ mới chỉ là điều kiện, chứ chưa đủ ! Thấy ngay điểm $M\ (1; -1)$ chính là trung điểm của AB nên không thỏa mãn bài toán. Bởi vậy lời giải đã cho vừa thiếu, vừa sai.

Các bạn khác tìm ra tất cả 5 điểm M thỏa mãn bài toán đều bị thừa $M\ (1; -1)$.

Ngoài bạn Duy, xin gửi tặng phẩm tới các bạn : *Lê Ngọc Hùng*, 11A12, THPT Hồng Quang, Hải Dương; *Nguyễn Trường Thanh*, 10 chuyên toán, Quốc học Huế; *Nguyễn Ngọc Tuấn*, cùng các bạn 12 Lý và *Nguyễn Duy Kiên*, 12 Toán, THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh, *Trần Thu Trang*, 12A, THPT Chu Văn An, Lạng Sơn ; *Hoàng Hải Dương*, 9A, THCS Thắng Lợi, Văn Giang, Hưng Yên; *Hoàng Tiến Trung*, 10 Toán THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị; *Trần Bình Minh*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái.

Cảm ơn các bạn và mong rằng các "bác sĩ" ngày càng nâng cao tay nghề.

KIHIVI

BẠN PHẢI ... "RA TAY" KHÔNG ?

Trong một cuốn sách Số học dùng để bồi dưỡng học sinh giỏi THCS của các tác giả T.C.T và N.H.T có bài toán :

Chứng minh rằng $7^{7^{7^7}} - 7^{7^7}$ chia hết cho 10.

Cuốn sách cho hai lời giải :

Cách 1: Đặt $\left(7^7\right)^7 = a$ như vậy

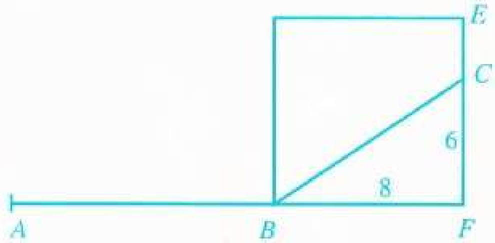
Giải trí TOÁN HỌC

Kết quả :

TÌM ĐƯỜNG NGẮN NHẤT

Rất nhiều bạn cho chú kiến bò mỏi cẳng để đến được với giọt mật. Chỉ có bạn *Nguyễn Minh Anh*, 12A1, THPT Tĩnh Gia I, Thanh Hóa là biện luận theo 2 trường hợp : Giọt mật nằm ngoài cốc hoặc nằm trong cốc.

1) Giọt mật nằm ngoài cốc



abc cba xgd.

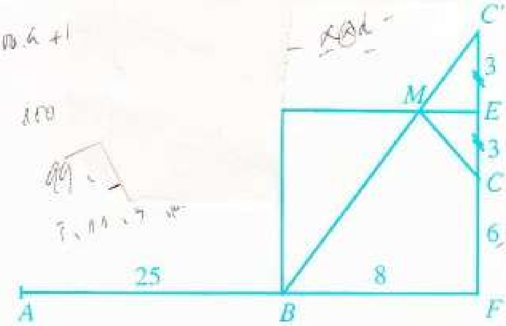
Ta khai triển hình trụ và thấy ngay hành trình ngắn nhất của chú kiến là

$$AB + BC = 25 + \sqrt{8^2 + 6^2} = 35 \text{ (cm)}$$

2) Giọt mật nằm trong cốc

Ta vẫn khai triển hình trụ, nhưng chú kiến phải bò lên miệng cốc để bò vào trong nên hành trình ngắn nhất là

$$AB + BM + MC = 25 + \sqrt{8^2 + 12^2} = $$
$$= 25 + 4\sqrt{13} \text{ (cm)}.$$



Xin trao tặng phẩm cho bạn Minh Anh.

Lưu ý : Nếu nhìn kĩ hình vẽ các bạn sẽ thấy giọt mật ở bên trong cốc, thế mà hầu hết lại nhìn ra bên ngoài.

LTN

GIÁ TRỊ CỦA HIỆU ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

Long đề nghị Thăng dùng khăn bịt kín mắt của Long, sau đó Thăng hãy viết lên bảng một số có ba chữ số mà Thăng thích và nhớ rằng chữ số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị phải khác nhau. Sau đó Thăng viết các chữ số đó theo thứ tự ngược để được số mới và Thăng hãy tìm hiệu của hai số đó. Thăng đã làm xong yêu cầu của Long, Long đề nghị Thăng cho biết chữ số hàng đơn vị của hiệu. Nghe xong, Long đến bảng và viết đúng hiệu này mà mắt Long vẫn còn bịt kín mới "tài".

Các bạn có biết "bí quyết" nào giúp Long làm được điều này không ?

☛ $$\left\{\left[\left(7^7\right)^7\right]^7\right\}^7 = \left(a^7\right)^7 = a^{49}$$

Bài toán đưa về chứng minh $(a^{49} - a) \vdots 10$.

Ta có $a^{49} - a = a(a^{48} - 1) =$

$= a(a^4 - 1)[(a^4)^{11} + ... + 1] = a(a^4 - 1).M.$

Rõ ràng $a(a^4 - 1)$ là số chẵn nên chia hết cho 2, mặt khác $a(a^4 - 1) \vdots 5$. Do $(2, 5) = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Cách 2. Bài toán chứng minh xong nếu ta chỉ ra được $\left\{\left[\left(7^7\right)^7\right]^7\right\}^7$ và 7^{7^7} có số tận cùng giống nhau.

Thật vậy xét số tận cùng $t(x)$ của x với x là lũy thừa của 7.

x	7^1	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7
$t(x)$	7	9	3	1	7	9	3

Ta lại xét chữ số tận cùng của lũy thừa của 3.

x	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7
$t(x)$	3	9	7	1	3	9	7

Vậy số : 7^7 và $\left(7^7\right)^7$ có chữ số tận cùng là 7.

Tương tự ta suy ra chữ số tận cùng của

$$\left\{\left[\left(7^7\right)^7\right]^7\right\}^7 \text{ cũng là } 7 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Cả 2 cách chứng minh đều ngắn gọn.

Nhưng có điều gì làm bạn phải ... "ra tay" không ?

ĐÀO DUY HẢO
(K24D – Toán – ĐHSP Hà Nội 2

TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU HÀ TĨNH

Nhà giáo ưu tú - Hiệu trưởng
NGUYỄN ĐĂNG ÁI

Trường THPT Năng khiếu Hà Tĩnh được thành lập sau ngày tỉnh Hà Tĩnh được tách ra từ tỉnh Nghệ Tĩnh (10/1991). Ngày 15/11/1991 là ngày khai giảng đầu tiên và từ đó ngày 15/11 trở thành ngày truyền thống của trường.

Năm học đầu tiên trường có 6 lớp chuyên Văn, Toán (2 lớp 8, 2 lớp 9, 2 lớp 10) với 150 học sinh. Đến nay trường có 15 lớp THPT với các hệ chuyên Toán, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Tiếng Anh.

Những năm học đầu, trường phải nhờ phòng học của các trường bạn. Từ năm học 1994-1995, trường được tiếp nhận cơ sở cũ của trường THSP Hà Tĩnh, đến nay cơ ngơi của trường cơ bản bảo đảm cho hoạt động dạy và học : trường có phòng vi tính, các phòng thí nghiệm Lý - Hóa - Sinh, có thiết bị nghe nhìn của phòng học tiếng và các hoạt động ngoại khóa.

Năm học 2001-2002 trường có 15 lớp với 523 học sinh, 47 cán bộ giáo viên, trong đó 6 giáo viên có trình độ Thạc sĩ.

Thành tích nổi bật trong 10 năm qua:

Không ngừng nâng cao chất lượng giáo dục toàn diện và chất lượng học sinh giỏi, thực sự là trường chất lượng cao.

- Tốt nghiệp THPT hàng năm : 100%. Năm học 2000-2001 đạt 50% loại giỏi.
- Trúng tuyển vào Đại học hàng năm là 94%, có nhiều năm đạt 100%.
- Thi học sinh giỏi Quốc gia đạt 278 giải, trong đó có 3 giải nhất, 27 giải nhì, 122 giải ba, 126 giải khuyến khích. Có 1 huy chương vàng Olympic Toán Đông Nam Á.

Nữ sinh Trịnh Kim Chi, lớp 12 Toán (1997-1998) đạt huy chương vàng cá nhân và đồng đội kì thi Olympic Toán Đông Nam Á lần thứ nhất (SEAMO'98) tại Malaysia. Phan Mạnh Tân, lớp 12 Toán (2000-2001) vô địch toàn quốc cuộc thi kiến thức dành cho học sinh THPT "Đường lên đỉnh Olympia" lần 2.

Đội tuyển "7 sắc cầu vồng" đạt giải nhất khu vực Bắc Trung bộ và đạt giải khuyến khích cuộc thi chung kết toàn quốc năm 1997.

Học sinh của trường tích cực tham gia viết bài cho Toán học và Tuổi trẻ, Hoa học trò, Tiền phong, tạp chí Tin học nhà trường, các báo và tạp chí địa phương.

Trường chăm lo xây dựng đội ngũ giáo viên tốt về đạo đức, giỏi về chuyên môn. Tập thể cán bộ giáo viên đoàn kết, yêu nghề, dám chấp nhận khó khăn, nhiệt tình trong chuyên môn, say mê nghiên cứu khoa học. Nhiều giáo viên là cộng tác viên lâu năm của báo Toán học và Tuổi trẻ.

Toàn trường có 26 giáo viên giỏi và chiến sĩ thi đua cấp tỉnh, có 2 Nhà giáo Ưu tú. 6 năm liên tục trường đạt danh hiệu *Trường tiên tiến xuất sắc* và năm học 2000-2001 là lá cờ đầu khối trường THPT tỉnh Hà Tĩnh.

Tháng 11 năm 2000 nhà trường được Chủ tịch nước tặng *Huân chương Lao động hạng Ba*.

Chặng đường mười năm dù sao cũng chỉ mới là một sự tự khẳng định. Trường THPT Năng khiếu Hà Tĩnh quyết tâm thi đua dạy tốt, học tốt, không ngừng vươn lên để xứng đáng là địa chỉ tin cậy của phụ huynh và học sinh tỉnh Hà Tĩnh.

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT95M1

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2001

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng