BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

12
2001

SỐ 294 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Chúc mừng
Nhà giáo nhân dân
GS. TSKH NGUYỄN CẢNH TOÀN
75 tuổi.

HS Nguyễn Thành Nhân cùng cô giáo

HS Vũ Ngọc Minh

Hội đồng giáo viên khối Phổ thông chuyên Toán - Tin trường ĐH Sư phạm HN

CHÚC MỪNG NHÀ GIÁO NHÂN DÂN GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN TRÒN 75 TUỔI

Năm nay, NGND GS. TSKH Nguyễn Cảnh Toàn, Tổng biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ của chúng ta tròn 75 tuổi.

Giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn sinh ngày 28-9-1926 ở xã Đông Sơn, huyện Đô Lương, tỉnh Nghệ An trong một gia đình có truyền thống gia phong, hiếu học, thuộc một vùng đất địa linh nhân kiệt.

Năm 1947 khi mới 21 tuổi ông đã bước vào ngành giáo dục, dạy toán năm thứ ba trung học chuyên khoa Huỳnh Thúc Kháng, 4 năm sau từ hè 1951 dạy toán ở hai trường Khoa học cơ bản và Sư phạm cao cấp trung ương, sau đó từ 1954 ở trường ĐH Khoa học rồi ĐH Sư phạm Hà Nội. Ông được bổ nhiệm làm Chủ nhiệm khoa Toán từ 1958 đến 1966 tiếp đó làm Hiệu trưởng trường ĐH Sư phạm Hà Nội trong 10 năm từ 1966 đến 1976. Từ 1976 đến 1989 ông giữ chức Thứ trưởng Bộ Giáo dục.

Giáo sư là một trong những người sáng lập Hội Toán học Việt Nam (giữ chức Phó Chủ tịch kiêm Tổng thư kí thời kì đầu) và Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, giữ trọng trách Tổng biên tập từ ngày thành lập (1964) đến nay.

Do những cống hiến to lớn của ông, GS. Nguyễn Cảnh Toàn đã được Nhà nước ta phong tặng danh hiệu cao quý *Nhà giáo nhân dân* (1988) và đã được trao tặng *2 Huân chương Kháng chiến*, hạng Nhất và hạng Nhì ; *2 Huân chương Lao động*, hạng Nhất và hạng Ba, Huy chương *Vì sự nghiệp giáo dục*. Đoàn TNCS Hồ Chí Minh tặng ông Huy chương *Vì thế hệ trẻ*. Trung tâm tiểu sử quốc tế (IBC) tặng ông Bằng *Danh dự rạng rỡ* và huân chương *Hữu nghị quốc tế*.

GS Nguyễn Cảnh Toàn đã nêu một tấm gương sáng ngời về tự học cho các bạn trẻ chúng ta. Phong trào giảng dạy và học tập theo phong cách mới do ông phát động từ trường ĐHSP đã làm biến chuyển mạnh mẽ và sâu sắc nề nếp giảng dạy, bồi dưỡng chuyên môn, nghiên cứu khoa học và học tập của thầy và trò ; đồng thời mọi thành viên trong trường ý thức được phương châm giáo dục *biến quá trình đào tạo thành quá trình tự đào tạo* do ông đề xướng. Chính qua việc đào sâu, khai thác nội dung giảng dạy cho sinh viên, ông đã tự mình tìm tòi phát hiện được đề tài nghiên cứu và đã hoàn toàn độc lập nghiên cứu, hoàn chỉnh cả hai đề tài luận án PTS và TS (nay gọi là TS và TSKH). Sau giáo sư Lê Văn Thiêm thì đây là những luận án TS và TSKH về toán học đầu tiên của người Việt Nam, tự làm ra ở trong nước và bảo vệ thành công ở nước ngoài (1958 và 1963 ở Liên Xô). Sau luận án TSKH *Lý thuyết đối hợp bộ n*, sáu năm sau ông còn phát minh một lý thuyết hình học mới (1969) và đến 1999 ông viết thành cuốn sách chuyên khảo *Hình học siêu phi Ơclit* bằng tiếng Anh (Ultra Non Euclidian Geometry). Cho đến nay, GS đã cho xuất bản được 26 cuốn sách thuộc đủ loại giáo khoa, tham khảo, chuyên khảo và phổ biến khoa học về Toán học cho nhiều đối tượng độc giả khác nhau từ phổ thông đến đại học và sau đại học. Ngoài gần 50 bài viết cho tạp chí THTT của chúng ta, GS còn viết trên 400 bài cho 15 tờ báo và tạp chí khác, kể cả tạp chí Văn Nghệ.

Mới đây, vào tháng 10/2001, nhân dịp kỉ niệm 50 năm ngày thành lập Trường ĐHSP Hà Nội và tròn 50 năm giảng dạy đại học của GS, trường ĐHSP Hà Nội phối hợp với Trung tâm văn hóa ngôn ngữ Đông Tây được Bộ Văn hóa - Thông tin cho phép xuất bản bộ sách *Tuyển tập tác phẩm* của GS. về giáo dục (không bao gồm sách, giáo trình và công trình nghiên cứu Toán học). Tuyển tập tác phẩm của GS gồm hai tập, tổng cộng gần hai nghìn trang chia ra thành 6 chương được sắp xếp theo các chủ đề một cách có hệ thống. Nội dung tuyển tập đưa vào những bài viết và những tác phẩm chọn lọc của GS về giáo dục nói chung và giáo dục toán học nói riêng.

Nhà toán học Nguyễn Cảnh Toàn là một nhà quản lí giáo dục và một nhà sư phạm lớn của đất nước ta.

Giới thiệu với bạn đọc *Tuyển tập Tác phẩm* của GS Nguyễn Cảnh Toàn là biểu hiện tấm lòng của chúng tôi chúc mừng GS nhân dịp GS tròn 75 tuổi, tròn 50 năm giảng dạy ĐH và 37 năm làm Tổng biên tập tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*.

Nhân dịp này, chúng tôi những thế hệ học trò của GS và toàn thể độc giả trẻ tuổi cũng như lớn tuổi của tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* kính chúc GS dồi dào sức khỏe, mãi mãi tươi trẻ và hạnh phúc trong cuộc sống để tiếp tục đóng góp nhiều hơn nữa cho sự nghiệp giáo dục và khoa học của nước nhà.

PGS. TS NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
Thay mặt Hội đồng biên tập
Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 294 (12-2001)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648
Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1 (ảnh nhỏ) :
- Vũ Ngọc Minh, HC Vàng Toán quốc tế 2001
- Nguyễn Thành Nhân, giải Nhất Tin học quốc gia 2001 cùng cô giáo Trần Thị Xuyến.

Bìa 3 : **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 4 : 35 năm Khối Phổ thông chuyên Toán Tin - Đại học Sư phạm Hà Nội

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HẰNG ĐẲNG THỨC

ĐOÀN QUANG VỤ
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Chúng ta biết hằng đẳng thức quen thuộc

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - ac - bc)$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

Hệ quả: Nếu $a+b+c = 0$ thì

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \qquad (*)$$

Trên THTT số 272 (2/2000) đã nêu một số bài tập vận dụng hằng đẳng thức này trong bài *Một hằng đẳng thức đẹp*. Bài viết này xin nêu tiếp ứng dụng của hệ quả (*) vào việc giải một số bài toán khác mà trong giả thiết có tổng ba số hạng bằng 0 (hoặc phải làm xuất hiện giả thiết này), còn trong kết luận có mặt tổng các lũy thừa bậc 3 của mỗi số hạng ở giả thiết, hoặc tích của ba số hạng đó.

Bài toán 1. Cho $xy + yz + zx = 0$ và $xyz \neq 0$ hãy tính $A = \dfrac{yz}{x^2} + \dfrac{zx}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2}$

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0$ nên theo (*) ta có $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{1}{z^3} = \dfrac{3}{xyz}$

Từ đó

$$A = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3} = xyz\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) = 3$$

Bài toán 2. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$$

Lời giải. Áp dụng (*) có

$(x+1) + (x+2) + (x+3) =$
$= 3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\Leftrightarrow 3(x+2) = 3\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\Leftrightarrow (x+2)[(x+2)^2 - (x+1)(x+3)] = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$. Phương trình có nghiệm $x = -2$.

Bài toán 3. Cho x, y, z nguyên thỏa mãn điều kiện $x + y + z = (x-y)(y-z)(z-x)$

Chứng minh rằng :

$M = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ chia hết cho 81.

Lời giải. Vì $(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$ nên theo (*) ta có :

$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$

Xét 3 số dư của phép chia x, y, z cho 3.

a) Nếu cả 3 số dư là khác nhau (là 0, 1, 2) thì $(x+y+z) \vdots 3$ khi đó $(x-y)(y-z)(z-x)$ không chia hết cho 3, trái với giả thiết.

b) Nếu có 2 số dư bằng nhau thì $x + y + z$ không chia hết cho 3 trong khi đó một trong ba hiệu : $(x-y)$; $(y-z)$; $(z-x)$ chia hết cho 3, trái với giả thiết.

c) Vậy chỉ còn trường hợp cả 3 số x, y, z đều có cùng số dư khi chia cho 3.

Lúc đó $3(x-y)(y-z)(z-x) \vdots 3.3.3.3$ nên M chia hết cho 81.

Bài toán 4. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình sau :

$$\text{(I)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ (x-1)^3 + (2y-3)^3 + (3z-2)^3 = 18 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + (2y-3) + (3z-2) = 0 \\ (x-3)^3 + (2y-3)^3 + (3z-2)^3 = 18 \end{cases}$$

Áp dụng (*) ta có hệ :

$$\text{(II)} \begin{cases} (x-1) + (2y-3) + (3z-2) = 0 \\ (x-1)(2y-3)(3z-2) = 6 \end{cases}$$

Vì x, y, z nguyên nên $x-1$; $2y-3$; $3z-2$ nguyên. Do đó giá trị tuyệt đối của mỗi số $(x-1)$, $(2y-3)$, $(3z-2)$ đều là ước của 6, nghĩa là thuộc tập hợp $\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm6\}$. Từ đó để $3z-2$ nguyên thì chỉ có thể $3z-2 = 1$ hoặc $3z-2 = -2$.

a) Với $3z-2 = 1$ thay vào hệ (II) được hệ :

$$\begin{cases} (x-1) + (2y-3) = -1 \\ (x-1)(2y-3) = 6 \end{cases}$$

Vậy $(x-1)$; $(2y-3)$ là nghiệm của phương trình $t^2+t+6=0$.

Phương trình này vô nghiệm.

b) Với $3z-2=-2$ thay vào hệ (II) được hệ :

$$\begin{cases}(x-1)+(2y-3)=2\\(x-1)(2y-3)=-3\end{cases}$$

Vậy $x-1$; $2y-3$ là nghiệm của phương trình $t^2-2t-3=0$.

Phương trình này có 2 nghiệm $t_1=-1$; $t_2=3$

Kết hợp với phương trình $3z-2=-2$ suy ra hệ phương trình (I) có 2 nghiệm nguyên (x, y, z) là $(0, 3, 0)$; $(4, 1, 0)$.

Bài toán 5. Tìm công thức tính nhanh tổng sau theo số tự nhiên k :

$$S = 1.2.3+3.4.7+7.8.15+...+$$
$$=(2^k-1)(2^{k+1}-1)$$

Lời giải. Vì $(2^k-1)+2^k+(1-2^{k+1})=0$ nên theo (*) có

$$(2^k-1)^3+(2^k)^3-(2^{k+1}-1)^3$$
$$=-3(2^k-1)2^k(2^{k+1}-1)$$

Từ đó

$$-3S=(-3)1.2.3+(-3).3.4.7+$$
$$+(-3).7.8.15+...+(-3)(2^k-1)2^k(2^{k+1}-1)$$
$$\Rightarrow -3S=(1+2^3-3^3)+(3^3+4^3-7^3)+$$
$$+(7^3+8^3-15^3)+...+(2^k-1)^3+2^{3k}-$$
$$-(2^{k+1}-1)^3$$
$$\Rightarrow -3S=1+2^3+4^3+8^3+...+2^{3k}-$$
$$-(2^{k+1}-1)^3 \qquad (1)$$
$$\Rightarrow 24S=-2^3-4^3-8^3-...-2^{3k}-2^{3k+3}+$$
$$+8(2^{k+1}-1)^3 \qquad (2)$$

Cộng theo từng vế (1) và (2) được

$$21S=1-2^{3k+3}+7(2^{k+1}-1)^3$$
$$\Rightarrow S=\frac{2(8^{k+1}-1)}{7}-2^{k+1}(2^{k+1}-1)$$

Các bạn hãy tiếp tục khai thác những ứng dụng lí thú khác của hằng đẳng thức đẹp trên và hệ quả của nó, và bắt đầu bằng các bài tập dưới đây.

Bài tập 1. Giải phương trình

$$(ax+b)^3+(bx+a)^3=(a+b)^3(x+1)^3$$

với ẩn x và $ab(a+b)\neq 0$

Bài tập 2. Cho $a+b+c=0$ $(a.b.c\neq 0)$

Tính :

$$M=[ab(a-b)+bc(b-c)+ac(c-a)]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{ab(a-b)}+\frac{1}{bc(b-c)}+\frac{1}{ca(c-a)}\right]$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 48

Problem. In how many ways can a quarter be changed into dimes, nickels, and pennies.

Solution. In changing the quarter we can use either 2 dimes or 1 dime or no dimes.

If two dimes are used, then the change can be completed by either a nickel or by 5 pennies. Thus we get 2 possibilities in this case.

If one dime is used, the remaining 15 cents must be made up out of nickels and pennies. This can be done by using either 3, 2, 1 or no nickels, where the remainder is made up of pennies. Hence we have 4 possibilities involving no dimes.

Finally, if no dimes are involved, we can use either 5, 4, 3, 2, 1 or no nickels, where the remainder consists of pennies. So we have 6 possibilities involving no dimes.

Therefore, the total number of ways of changing a quarter is $2+4+6=12$.

Từ mới:

quarter = một phần tư, đồng tiền 25 xu
change = đổi, thay đổi (động từ)
dime = đồng tiền 10 xu
nickel = đồng tiền 5 xu
penny = đồng tiền 1 xu (1/100 bảng Anh)
use = sử dụng, dùng (động từ)
complete = kết thúc, hoàn thành (động từ)
possibility = khả năng, cách
remaining = còn lại, sót lại (tính từ)
cent = xu (1/100 một đô la)
make up = lập thành, cấu tạo (động từ)
remainder = phần còn lại
involve = dính dáng (động từ)
total = toàn bộ, tổng số (tính từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

CUỘC THI GIẢI TOÁN... *(Tiếp trang 8)*

Đôi điều kết luận: Một số bài trên đây trong số các đề thi của kỳ thi khu vực "Giải toán trên máy tính Casio" lần thứ nhất cho thấy, máy tính bỏ túi không chỉ là một công cụ đắc lực trợ giúp tính toán (các dạng toán 1 và 2), mà còn là công cụ hữu hiệu trong mở rộng kiến thức toán học (số Fibonacci, liên phân số, số thập phân vô hạn tuần hoàn, phương pháp lặp,...) cũng như hình thành các tố chất của một kỹ sư tương lai trong thời đại thông tin (tư duy thuật toán, các quy trình và thao tác nghiêm ngặt trong tính toán, các khái niệm về trao đổi thông tin vào - ra,...). Hy vọng rằng các kỳ thi tương tự sẽ được tổ chức thường xuyên hơn, góp phần nâng cao chất lượng học tập và đa dạng hóa các hoạt động ngoại khóa toán học trong nhà trường.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN ĐHSP HÀ NỘI

KHỐI A - NĂM HỌC 2001-2002

Câu I. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$, ($m$ là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 1$.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó đến đường thẳng $x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Câu II. 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm (x, y) thỏa mãn điều kiện $x \geq 4$.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} \leq a \end{cases}$$

2. Giải phương trình :

$$3^x + 5^x = 6x + 2$$

Câu III.

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{3\cos^4 x + 4\sin^2 x}{3\sin^4 x + 2\cos^2 x}$$

2. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} = \frac{1}{2\cos A \cos B \cos C}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Câu IV. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ (AC là đường chéo) và $ABEF$ (AE là đường chéo) không cùng nằm trong một mặt phẳng và thỏa mãn các điều kiện : $AB = a$; $AD = AF = a\sqrt{2}$; đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BF. Gọi HK là đường vuông góc chung của AC và BF (H thuộc AC, K thuộc BF).

1. Gọi I là giao điểm của đường thẳng DF với mặt phẳng chứa AC và song song với BF. Tính tỉ số $\dfrac{DI}{DF}$.

2. Tính độ dài đoạn HK.

3. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABHK$.

Câu V. Trong khai triển của $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x\right)^{10}$ thành đa thức

$a_0 + a_1x + ... + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$, $(a_k \in R)$

hãy tìm hệ số a_k lớn nhất $(0 \leq k \leq 10)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2}$ có 2 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm $\Leftrightarrow m < 3/2$ (*)

Các điểm cực đại, cực tiểu $A_1(x_1, y_1)$ và $A_2(x_2, y_2)$ có x_1, x_2 là 2 nghiệm của $x^2 + 2x + 2m - 2 = 0$ và có

$y_1 = 2x_1 + 2m$, $y_2 = 2x_2 + 2m$. Khoảng cách từ A_1 và A_2 tới đường thẳng $x + y + 2 = 0$ sẽ bằng nhau $\Leftrightarrow |x_1 + y_1 + 2| = |x_2 + y_2 + 2|$

$\Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2|$

$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) = -(4m + 4)$

$\Leftrightarrow 3.(-2) = -(4m + 4) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ (thỏa mãn (*))

Câu II. 1) Đặt $\sqrt{x} = t$ thì điều kiện $x \geq 4$ $\Leftrightarrow$ $t \geq 2$ và phương trình thứ nhất trở thành

$$t + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = t^2 - 6t + 9 \\ 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Bất phương trình thứ hai trở thành

$$\sqrt{t^2 + 5} + \sqrt{t^2 - 6t + 12} \leq a \qquad (1)$$

Hệ đã cho sẽ có nghiệm thỏa mãn điều kiện $x \geq 4$ khi và chỉ khi (1) có nghiệm $t \in [2; 3] \Leftrightarrow$ $\min\limits_{2 \leq t \leq 3} f(t) \leq a$, trong đó

$$f(t) = \sqrt{t^2 + 5} + \sqrt{t^2 - 6t + 12}$$

Ta có $f'(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 5}} + \dfrac{t-3}{\sqrt{t^2 - 6t + 12}}$;

$f'(t) = 0$ với $t_1 = \dfrac{15 - \sqrt{135}}{2}$ và $t_2 = \dfrac{15 + \sqrt{135}}{2}$.

Chú ý rằng $t_1 < 2 < 3 < t_2$ và $f'(t) > 0$ với mọi $t \in (t_1, t_2)$ nên $f(x)$ đồng biến trong $[2, 3]$. Từ đó $\min\limits_{2 \leq t \leq 3} f(t) = f(2) = 5$ với $x = 4, y = 1$.

Đáp số : $a \geq 5$.

2) $3^x + 5^x = 6x + 2 \Leftrightarrow 3^x + 5^x - 6x - 2 = 0$

Xét $f(x) = 3^x + 5^x - 6x - 2$. Ta có

$f'(x) = 3^x.\ln 3 + 5^x.\ln 5 - 6$ là hàm số liên tục, đồng biến trên toàn trục số, có $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -6$, do đó phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_o. Từ đó $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty\ ;\ x_o)$ và đồng biến trong khoảng $(x_o\ ;\ +\infty)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm. Mặt khác, dễ thấy $f(0) = 0$ và $f(1) = 0$ nên $x = 0$ và $x = 1$ là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

Đáp số: $x = 0, x = 1$.

Câu III: 1) Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \leq t \leq 1$ thì

$$y = \frac{3t^2 - 2t + 3}{3t^2 - 2t + 2} = 1 + \frac{1}{3t^2 - 2t + 2}$$

có $y'(t) = \dfrac{-(6t-2)}{(3t^2 - 2t + 2)^2}$

t	0		1/3		1
y'	+	+	0	−	−
y	3/2	↗	8/5	↘	4/3

Vậy $\max y = 8/5$ và $\min y = \dfrac{4}{3}$.

2) Từ giả thiết suy ra tam giác ABC nhọn. Áp dụng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ được

$$\frac{1}{\sin^2 2A} + \frac{1}{\sin^2 2B} + \frac{1}{\sin^2 2C} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sin 2A \sin 2B} + \frac{1}{\sin 2B \sin 2C} + \frac{1}{\sin 2C \sin 2A}$$

$$= \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C}$$

$$= \frac{4 \sin A \sin B \sin C}{\sin 2A \sin 2B \sin 2C} = \frac{1}{2 \cos A \cos B \cos C}$$

Từ giả thiết suy ra trong biến đổi trên phải luôn xảy ra dấu đẳng thức, tức là

$$\sin^2 2A = \sin^2 2B = \sin^2 2C$$

$\Rightarrow \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C$ (do ΔABC nhọn $\Rightarrow$ $2A, 2B, 2C \in (0; \pi)$).

$\Rightarrow A = B = C$ (do ΔABC nhọn $\Rightarrow$ $\cos A$, $\cos B$, $\cos C \neq 0$) $\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Câu IV: Chọn hệ tọa độ Đềcác vuông góc trong không gian sao cho $A(0; 0; 0)$, $D(0; a\sqrt{2}; 0)$, $B(0; 0; a)$, $F(x; y; 0)$ với $x > 0$ và $x^2 + y^2 = AF^2 = 2a^2$. Có $\overrightarrow{AC} = (0; a\sqrt{2}; 0)$, $\overrightarrow{BF} = (x; y; -a)$

nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, từ đó $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $F\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}; \dfrac{a\sqrt{6}}{2}; 0\right)$

1) I là điểm thuộc đường thẳng DF sao cho mặt phẳng (ACI) song song với BF, tức vectơ vuông góc với $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CI}$ phải vuông góc với $\overrightarrow{BF}$. Đặt $\overrightarrow{DI} = t.\overrightarrow{DF}$ thì $\overrightarrow{CI} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}t; -t; -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AC} = a(0; \sqrt{2}; 1)$ nên một vectơ khác $\vec{0}$ vuông góc với hai vectơ đó là $(-2+t;\ \sqrt{3}t;\ -\sqrt{6}t)$. Vectơ này vuông góc với $\overrightarrow{BF} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}; 1; -\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DF} \Rightarrow \dfrac{DI}{DF} = \dfrac{1}{2}$

2) Đặt $\overrightarrow{AH} = u\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BK} = v\overrightarrow{BF}$ thì $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{AH}$ song song với vectơ $\left(\dfrac{v\sqrt{6}}{2}; \dfrac{v\sqrt{2}}{2} - u\sqrt{2}; -u + 1 - v\right)$. Đường thẳng HK là đường vuông góc chung của AC, BF khi và chỉ khi có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1/3 \\ v = 1/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}(0; \sqrt{2}; 1) \\ \overrightarrow{AK} = \dfrac{a}{6}(\sqrt{6}; \sqrt{2}; 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{HK} = \frac{a}{6}(\sqrt{6}; -\sqrt{2}; 2)$$

Vậy $\overrightarrow{HK}^2 = \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3) Đã có $\overrightarrow{AB} = a(0; 0; 1)$; $\overrightarrow{AH} = \dfrac{a}{3}(0; \sqrt{2}; 1)$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{a}{6}(\sqrt{6}; \sqrt{2}; 4)$, $\overrightarrow{HK} = \dfrac{a}{6}(\sqrt{6}; -\sqrt{2}; 2)$, $\overrightarrow{BH} = \dfrac{a}{3}(0; \sqrt{2}; -2)$ nên

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}]\ .\ \overrightarrow{AK}\right| = \frac{a^3.\sqrt{3}}{3}$$

(Xem tiếp trang 7)

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

DÙNG ĐẠO HÀM ĐỂ TÍNH GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

NGUYỄN VĂN KIÊN

(GV THPT Nguyễn Huệ – Thừa Thiên Huế)

Bài toán tính giới hạn của hàm số thường gặp trong các kì thi tuyển sinh Đại học. Học sinh thường sử dụng các phương pháp khử dạng vô định đã học trong chương trình Giải tích lớp 11 như : *Nhóm số hạng làm xuất hiện nhân tử* hoặc *Đổi biến số để đưa về bài toán quen thuộc* hoặc *Dùng phương pháp gọi số hạng vắng* (Xem THTT số 262 (4/1999) và kết hợp sử dụng các định lí giới hạn về hàm số lượng giác, mũ, lôgarit trong chương trình Giải tích lớp 12.

Ngoài ra, còn một phương pháp khác mà SGK không đề cập đến, đó là dùng định nghĩa đạo hàm để tính giới hạn, phương pháp này dùng được cho một lớp bài toán khá rộng trong chương trình. Xin đưa ra và phân tích một số bài tập minh họa cho phương pháp này.

Bài toán 1: Tính giới hạn :

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$$

(ĐHTC–Kế toán, Hà Nội, 2001)

Lời giải. Đặt $f(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}$

$\Rightarrow f(1)=0$

Tính $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}}-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}$

$\Rightarrow f'(1)=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{5}{12}$

Suy ra

$$L=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\frac{f'(1)}{2}=\frac{-5}{24}$$

Nhận xét. Nếu dùng phương pháp gọi số hạng vắng để khử dạng vô định, ta đi đến 2 bài toán mới nhưng lời giải dài dòng

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}+\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$$

Bài toán 2. Tính giới hạn

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$$

(ĐHQG Hà Nội, 2000)

Lời giải. Đặt $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}$

$\Rightarrow f(0)=0$

Ta viết lại $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{\sin x}{x}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, suy ra $L=f'(0)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}-\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\Rightarrow f'(0)=1.$

Vậy $L=1$.

Nhận xét. Nếu sử dụng phương pháp gọi số hạng vắng, ta có bài toán mới khá phức tạp :

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2x+1}-1)+(1-\sqrt[3]{x^2+1})}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}$$

Bài toán 3: Tính giới hạn :

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}+\sin x}{\sqrt{3x+4}-2-x}$$

(ĐH GTVT, 1998)

Lời giải. Đặt $f(x)=1-\sqrt{2x+1}+\sin x$

$\Rightarrow f(0)=0$ và $f'(0)=0$

$g(x)=\sqrt{3x+4}-2-x\Rightarrow g(0)=0$ và $g'(0)=-\dfrac{1}{4}$

Ta viết lại :

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=0$$

Nhận xét. Nếu sử dụng biểu thức liên hợp ta có cách giải phải biến đổi dài dòng :

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin^2 x+2\sin x-2x+1)(\sqrt{3x+4}+2+x)}{(1+\sin x+\sqrt{2x+1})[3x+4+(2+x)^2]}$$

Bài toán 4. Tính giới hạn

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}$$

(ĐH Hàng Hải, Tp. HCM, 1999)

Lời giải. Đặt $f(x)=e^{\sin 2x}-e^{\sin x}\Rightarrow f(0)=0$

Ta viết lại :

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x-0}}{\dfrac{\sin x}{x}}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ suy ra : $L = f'(0) = 1$

Nhận xét: Có thể giải cách khác :

$$L = \lim_{x\to 0}\left(2\cos x\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x} - \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right)$$

Dùng định lí : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$ cũng đi đến kết quả $L = 1$.

Bài toán 5. Tính : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$

Lời giải. Đặt $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1 \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$g(x) = 2\sin^2 x - 1 \Rightarrow g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

Suy ra : $L = \dfrac{f'(\pi/4)}{f'(\pi/4)} = \dfrac{2/3}{2} = \dfrac{1}{3}$

Nhận xét: Nếu sử dụng biểu thức liên hợp kết hợp biến đổi lượng giác sẽ dài dòng.

Bài toán 6: Tính giới hạn :

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2001)\sqrt[9]{1-5x}-2001}{x}$$

Lời giải. Đặt $f(x) = (x^2+2001)\sqrt[9]{1-5x}-2001$

Lại có : $f(0) = 0$.

$$f'(x) = 2x\sqrt[9]{1-5x} - \frac{5(2001+x^2)}{9\sqrt[9]{(1-5x)^8}}$$

Ta có :

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = \frac{-5(2001)}{9}$$

Nhận xét: Nếu bài toán trên không dùng định nghĩa đạo hàm ta viết lại :

$$L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(x^2+2001)(\sqrt[9]{1-5x}-1)}{x} + x\right] \quad (1)$$

Ta phải chứng minh bài toán quen thuộc sau đây :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}\right] = \frac{a}{n}$$

bằng cách đặt $t = \sqrt[n]{1+ax}$. Từ đó áp dụng vào (1) để có kết quả. Thật khó khăn phải không các bạn !

BÀI TẬP THAM KHẢO

Tính các giới hạn sau :

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a}$ $(a > 0)$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2} - \cos x}{x^2}$ (ĐHSP Hà Nội II - 2000)

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x)}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ (ĐH Thủy Lợi-2001)

LTS : Tòa soạn nhận được bài viết của bạn *Nguyễn Văn Thưởng*, đội 5, Thạch Thán, Quốc Oai, Hà Tây có cùng nội dung trên. Xin cảm ơn sự cộng tác của bạn.

ĐỀ THI TUYỂN SINH *(Tiếp trang 5)*

$S(AHK) = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AK}]\right| = \dfrac{a^2}{6} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{BH}]\right|$
$= S(BHK)$

$S(ABH) = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}]\right| = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK}]\right|$
$= S(ABK)$

từ đó $S_{tp} = \dfrac{a^2.(1+\sqrt{2})}{3}$ và $r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{2})}$

Câu V: $a_{k-1} \le a_k \Leftrightarrow C_{10}^{k-1}.2^{k-1} \le C_{10}^{k}.2^k$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(k-1)!(11-k)!} \le \dfrac{2}{k!(10-k)!}$

$\Leftrightarrow k \le 2(11-k) \Leftrightarrow k \le \dfrac{22}{3}$

Vậy a_7 là hệ số lớn nhất :

$a_7 = \dfrac{1}{3^{10}}.C_{10}^{7}.2^7$

Hướng dẫn giải :
DOÃN MINH CƯỜNG

CUỘC THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO

LẦN THỨ NHẤT

(Tiếp theo kì trước)

TẠ DUY PHƯỢNG *(Viện Toán học)*
NGUYỄN THẾ THẠCH, NGUYỄN HỮU THẢO *(Vụ THPT)*

Dạng 4. Khai thác tiềm năng của máy tính điện tử bỏ túi

Kỳ thi này là một thử thách khả năng *sử dụng sáng tạo thế mạnh của máy tính bỏ túi* trong giải quyết các bài toán có *nội dung và ý nghĩa toán học*. Theo chúng tôi, đó cũng là mục đích và ý nghĩa lâu dài của các cuộc thi giải toán trên máy *tính bỏ túi*.

Thí dụ 6 (Lớp 6,7,8). Cho dãy số $u_1 = 144$; $u_2 = 233$;...; $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ với $n \geq 2$.

a) Hãy lập một quy trình bấm phím để tính u_{n+1}.

b) Tính u_{12}, u_{37}, u_{38} và u_{39}.

Đây chính là dãy số Fibonacci (dãy số Lucas), xuất phát từ bài toán "thỏ đẻ con" với nhiều tính chất toán học sâu sắc liên quan đến nhiều ứng dụng thực tế thú vị. Quy trình bấm phím rất đơn giản: 144 $\boxed{M+}$ 233 và lặp lại dãy phím $\boxed{M+}$ $\boxed{+}$ $\boxed{MR}$ đã được giới thiệu trên báo Toán học và Tuổi trẻ. Dùng công thức số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci trong dạng căn thức thì sẽ được đáp số là những số gần đúng (số thỏ không phải là số nguyên!). Đây chính là điểm mạnh của máy tính (khả năng tính toán chuẩn xác theo thuật toán và chương trình) so với các phương pháp toán học khác (thí dụ, so với tính toán theo công thức có chứa căn thức,...). Số thí sinh làm được bài này không nhiều.

Thí dụ 7 (Lớp 8 - Đề dự bị) . Cho dãy số $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 1}{3}$ với mọi $n \geq 1$.

a) Hãy lập quy trình bấm phím để tính x_{n+1}.

b) Tính x_{30}; x_{31}; x_{32}.

Bài toán yêu cầu xây dựng một *quá trình lặp* trên máy tính bỏ túi. Quá trình lặp thường xuyên có mặt trong các chương trình tính toán cũng như trong lập trình để giải quyết các bài toán trên máy tính. Nó đặc biệt được sử dụng nhiều trong các bài toán giải phương trình, tìm giới hạn, tìm giao điểm của hai đường cong,... Dãy lặp như sau:

Khai báo 1 $\boxed{a^{b/c}}$ 2 và lặp lại dãy phím: $\boxed{SHIFT}$ $\boxed{x^y}$ 3 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$

Sau 10 bước ta đi đến $x_n = x_{n+1} = ... = 0{,}347296255$

Nếu nhìn từ góc độ phương trình, đây chính là quá trình lặp tìm nghiệm gần đúng $x \approx 0{,}347296255$ (chính xác đến 10 chữ số thập phân) của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Phương trình này không giải được bằng các biến đổi đại số. Nếu dùng công thức Cardano thì cũng chỉ tìm được nghiệm gần đúng qua các biểu thức chứa căn cồng kềnh. Thí dụ này (và các bài tập khác về thực hiện phương pháp lặp trên máy tính bỏ túi) minh họa khá rõ nét ưu điểm của phương pháp lặp và các phương pháp giải gần đúng phương trình nhờ máy tính điện tử bỏ túi.

Máy tính bỏ túi cũng cho phép học sinh thấy rõ hơn mối quan hệ giữa các kiến thức toán học có vẻ khác biệt nhau cũng như các giá trị ứng dụng thực tiễn của chúng.

Thí dụ 8 (Lớp 6,7,8). Lập quy trình tính giá trị của liên phân số M và tính $\pi - M$:

$$M = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

Quy trình:

1 $\boxed{a^{b/c}}$ 292 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 15 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{+}$ 7 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\div}$ 1 $\boxed{=}$

$\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ 3.141592653 $\boxed{-}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{=}$ 0.000000001.

Điều thú vị là: Liên phân số trên biểu diễn số π chính xác đến 9 chữ số thập phân:

$$\pi - M = 0.000000001.$$

Dạng 5. Vui với máy tính. Máy tính và các bài toán thực tế

Vì đây là kỳ thi nghiêng về ngoại khóa, cho nên cần có những bài thi mang tính thực tế và vui, nhưng vẫn có thể chứa nhiều kiến thức toán học bổ ích.

Thí dụ 9 (Lớp 6,7,8) Hãy viết quy trình bấm phím biểu diễn các số 23; 8; 2001 (23.8.2001 là ngày thi) chỉ bằng các số 2 và các phím $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{=}$.

Thí dụ 10 (Lớp 6,7,8 - Đề dự bị) Hãy dùng *đúng năm phím chữ số 2* và các phím $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{[(}$ $\boxed{)]}$ $\boxed{=}$ để được kết quả là các số từ 1 đến 10.

(Xem tiếp trang 3)

TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối PTCTT, ĐHSP Hà Nội)

Cùng với tích vô hướng, tích ngoài của hai vectơ cũng là một trong các nội dung quy định đối với cuộc thi học sinh giỏi toán quốc gia (công văn 11636/THPT). Tuy nhiên, vấn đề này vẫn được coi là mới lạ đối với nhiều giáo viên và học sinh chuyên toán. Vì lẽ đó, bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc những tính chất cơ bản của tích ngoài cũng như những kỹ thuật quan trọng nhất để giải một bài toán bằng tích ngoài. Hy vọng rằng nó sẽ có ích đối với các bạn đồng nghiệp và các em học sinh trong việc giảng dạy và học tập.

Trong toàn bộ bài viết này, mặt phẳng mà ta xét đã được định hướng. Theo quy ước thông thường, hướng dương ngược với hướng quay của kim đồng hồ, hướng âm trùng với hướng quay của kim đồng hồ.

Ta kí hiệu $(\vec{a},\vec{b})$ là góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

I. Định nghĩa và tính chất của tích ngoài.

1. Định nghĩa. Tích ngoài của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là một số, ký hiệu là $\vec{a} \wedge \vec{b}$ và xác định như sau:

Nếu $\left[\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{0}\\ \vec{b}=\vec{0}\end{array}\right.$ thì $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$

Nếu $\begin{cases}\vec{a}\neq\vec{0}\\ \vec{b}\neq\vec{0}\end{cases}$ thì $\vec{a}\wedge\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Từ định nghĩa trên ta có ngay hệ quả hiển nhiên:

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0}$

2. Tính chất

a. Biểu thức tọa độ của tích ngoài

Để có thể chứng minh được các tính chất của tích ngoài trước hết ta cần định lý sau:

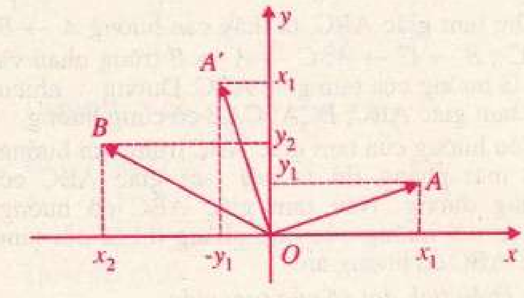
Định lý 1. Trên mặt phẳng toạ độ cho hai vectơ $\vec{a}=(x_1,y_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2)$. Khi đó:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Chứng minh: Lấy các điểm A, B sao cho: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (h.1). Lấy điểm A' sao cho:

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) = 90^o\\ |\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}|\end{cases}$$

Đặt $\vec{a'} = \overrightarrow{OA'}$. Ta có:



Hình 1

$(\vec{a},\vec{b}) \equiv (\vec{a},\vec{a'}) + (\vec{a'},\vec{b}) \equiv$

$\equiv 90^o + (\vec{a'},\vec{b})$ (mod 360^o)

$\Rightarrow \sin(\vec{a},\vec{b}) = \cos(\vec{a'},\vec{b})$ (1)

Mặt khác: $(Ox,\vec{a'}) \equiv (Ox,\vec{a}) + (\vec{a},\vec{a'})$

$\equiv (Ox,\vec{a}) + 90^o$ (mod 360^o). Từ đó:

$$\begin{cases}|\vec{a'}|\cos(Ox,\vec{a'}) = -|\vec{a}|\sin(Ox,\vec{a}) = -y_1\\ |\vec{a'}|\sin(Ox,\vec{a'}) = |\vec{a'}|\cos(Ox,\vec{a}) = x_1\end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{a'} = (-y_1, x_1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\vec{a}\wedge\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a'}||\vec{b}|\cos(\vec{a'},\vec{b})$

$= \vec{a'}.\vec{b} = (-y_1,x_1)(x_2,y_2) = x_1y_2 - x_2y_1$.

Nhận xét: (2) sẽ được chứng minh đơn giản hơn nếu ta dùng phép quay vectơ.

b. Tính chất. Tích ngoài của hai vectơ có ba tính chất cơ bản sau đây:

i) $\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{b}\wedge\vec{a}$ (phản giao hoán).

ii) $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{c}$ (phân phối)

iii) $(k\vec{a})\wedge(t\vec{b}) = (kt)(\vec{a}\wedge\vec{b})$.

Chứng minh.

i) $\vec{a}\wedge\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}) = -|\vec{b}||\vec{a}|\sin(\vec{b},\vec{a})$ $= -\vec{b}\wedge\vec{a}$

ii) Giả sử $\vec{a} = (x_1, y_1)$; $\vec{b} = (x_2, y_2)$; $\vec{c} = (x_3, y_3)$, ta có:

$\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c}) = (x_1,y_1)\wedge(x_2+x_3, y_2+y_3)$

$= x_1(y_2+y_3) - (x_2+x_3)y_1$.

$= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_1y_3 - x_3y_1) = \vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{c}$

iii) Giả sử $\vec{a} = (x_1, y_1)$; $\vec{b} = (x_2, y_2)$, ta có:

$(k\vec{a})\wedge(t\vec{b}) = (kx_1,ky_1)\wedge(tx_2,ty_2) =$

$= ktx_1y_2 - ktx_2y_1$

$= kt(x_1y_2 - x_2y_1) = (kt)(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

II. Hướng và diện tích đại số của tam giác.

1. Hướng của tam giác.

Cho tam giác ABC, ta thấy các hướng $A \to B \to C$; $B \to C \to A$; $C \to A \to B$ trùng nhau và gọi là hướng của tam giác ABC. Đương nhiên các tam giác ABC; BCA; CAB có cùng hướng.

Nếu hướng của tam giác ABC trùng với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác ABC có hướng dương. Nếu tam giác ABC có hướng ngược với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác ABC có hướng âm.

2. Diện tích đại số của tam giác

a. Tam giác suy biến.

Theo định nghĩa thông thường, ba đỉnh của một tam giác phải là ba điểm không thẳng hàng. Tuy nhiên, khi xét các bài toán về diện tích, yêu cầu này đôi khi trở nên không cần thiết mà còn gây trở ngại cho việc làm toán. Vì vậy, ta đưa ra khái niệm tam giác suy biến, tức là tam giác mà ba đỉnh của nó là ba điểm thẳng hàng. Để cho thuận tiện, trong bài viết này, ta sử dụng cụm từ "*tam giác*" chung cho cả hai trường hợp tam giác không suy biến hoặc suy biến.

b. Diện tích đại số của tam giác

Diện tích đại số của tam giác ABC là một số đại số (có thể dương, âm hoặc bằng không), ký hiệu là S [ABC] và xác định như sau:

$$S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Từ định nghĩa trên, ta có ngay hệ quả: $S[ABC] = S[BCA] = S[CAB]$.

Ta chỉ cần chứng minh đẳng thức thứ nhất :

$$S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BA})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = S[BCA].$$

c. Mối liên hệ giữa diện tích đại số và diện tích hình học của tam giác.

Khái niệm *diện tích hình học* chính là khái niệm *diện tích* mà ta vẫn hiểu theo nghĩa thông thường, lúc đó không xét hướng của tam giác và số đo diện tích luôn là dương. Kí hiệu diện tích hình học của tam giác ABC (cũng như mở rộng cho đa giác) là $S(ABC)$, lúc đó $S(ABC) = S(BCD) = S(ACB)$.

Tuy nhiên khi cần phân biệt khái niệm diện tích và diện tích đại số thì người ta thường thay từ "diện tích" bởi cụm từ "diện tích hình học". Đối với một tam giác có hướng thì diện tích đại số và diện tích hình học của nó được liên hệ bởi định lí sau đây.

Định lí 2:

1) Nếu tam giác ABC có hướng dương thì: $S[ABC] = S(ABC)$.

2) Nếu tam giác ABC có hướng âm thì: $S[ABC] = -S(ABC)$.

Chứng minh:

1) $S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\overline{AB.AC}$

$= \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = S(ABC)$

2) $S[ABC] = -S[ACB] = -S(ACB) = -S(ABC)$

Hệ quả: Trên mặt phẳng toạ độ cho tam giác ABC. Biết rằng $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$. Khi đó: $S(ABC) = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|$.

d. Tính chất: Diện tích đại số của tam giác có hai tính chất cơ bản sau:

i) Cho tam giác ABC, với mỗi điểm M ta có: $S[ABC] = S[MAB] + S[MBC] + S[MCA]$ (hệ thức Salo về diện tích)

ii) Cho tam giác ABC, với mỗi điểm M thuộc đường thẳng BC ta có :

$$S[ABC] = S[MAB] + S[MCA] = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}$$

Chứng minh:

i) $S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \wedge (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA})$

$= S[MAB] + S[MBC] + S[MCA]$.

ii) $M \in BC$ thì $S[MBC] = 0$ nên $S[ABC] = S[MAB] + S[MCA]$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{MA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}$.

Đẳng thức $S[ABC] = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}$ chính là sự mở rộng kết quả cơ bản đối với diện tích hình học của tam giác:

$$S(ABC) = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}BC.MA\sin(BC, MA)$$

III. Hướng và diện tích đại số của đa giác lồi:

Có thể mở rộng khái niệm hướng và diện tích đại số từ tam giác đến đa giác lồi. Với sự mở rộng này, khái niệm tích ngoài trở nên có hiệu lực hơn nhiều trong việc giải các bài toán hình học.

<u>*a. Định nghĩa*</u>:

Diện tích đại số của đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ là một số, kí hiệu là $S[A_1A_2...A_n]$ và được định nghĩa như sau :

Nếu $A_1A_2...A_n$ có hướng dương (trùng với hướng của mặt phẳng) thì:

$$S[A_1A_2...A_n] = S(A_1A_2...A_n).$$

Nếu $A_1A_2...A_n$ có hướng âm (ngược với hướng của mặt phẳng) thì:

$$S[A_1A_2...A_n] = - S(A_1A_2...A_n).$$

Từ định nghĩa trên, dễ thấy :

$$S[A_1A_2...A_{n-1}A_n] =$$
$$= S[A_2A_3...A_nA_1]... = S[A_nA_1...A_{n-2}A_{n-1}].$$

Định lý sau đây rất quan trọng. Nó cho phép ta khai triển diện tích đại số của một đa giác lồi thành tổng các diện tích đại số của các tam giác và thường được gọi là hệ thức Salơ tổng quát về diện tích.

b) <u>Định lí 3</u>: Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$, với mỗi điểm M ta có:

$$S[A_1A_2...A_n] =$$
$$= S[MA_1A_2] + S[MA_2A_3] + ... + S[MA_nA_1].$$

Chứng minh: Định lí được chứng minh bằng phương pháp qui nạp và dành cho bạn đọc.

IV. Mối liên hệ giữa độ dài đại số và diện tích đại số.

Hai định lí quan trọng dưới đây. cho ta thấy mối liên hệ giữa khái niệm độ dài đại số và khái niệm diện tích đại số, đồng thời chúng cũng chính là sự mở rộng các kết quả quen biết về mối liên hệ giữa khái niệm độ dài hình học và khái niệm diện tích hình học.

<u>Định lí 4</u>: Cho tam giác ABC. Các điểm B', C' nằm trên đường thẳng BC. Ta có:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{S[ABC]}{S[AB'C']}.$$

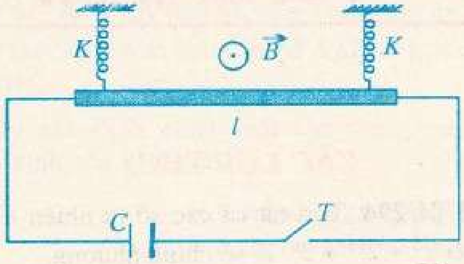
Chứng minh: Gọi $\vec{e}$ là véc tơ chỉ phương của trục BC, lấy *M* trên đường thẳng BC, ta có :

$$\frac{S[ABC]}{S[AB'C']} = \frac{\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{B'C'}\wedge\overrightarrow{MA}} = \frac{\overline{BC}(\vec{e}\wedge\overrightarrow{MA})}{\overline{B'C'}(\vec{e}\wedge\overrightarrow{MA})} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

(Xem tiếp trang 23)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC *(Tiếp theo trang 21)*

Bài L2/290. *Một vật dẫn thẳng, mảnh, độ dài l, khối lượng m được treo nằm ngang vào giá cách điện nhờ 2 lò xo giống nhau có độ cứng ,*



trong một từ trường đều có cảm ứng từ $\vec{B}$ hướng theo phương ngang như trên hình vẽ. Đóng khóa T, tụ điện có điện dung C (ban đầu đã được tích điện đến hiệu điện thế U) phóng điện qua vật dẫn. Sau đó xuất hiện sự dao động của vật dẫn.

Tính biên độ dao động của vật dẫn. Giả thiết thời gian phóng điện của tụ điện rất nhỏ so với chu kì dao động của vật dẫn. Bỏ qua khối lượng các lò xo và mọi lực cản vật dẫn.

Lời giải. Khi đóng khóa *T*, tụ điện phóng điện qua vật dẫn, vật dẫn sẽ chịu tác dụng một lực từ có phương thẳng đứng, tức là gây ra sự biến thiên động lượng của vật. Vì thời gian tụ phóng điện rất nhỏ so với chu kì dao động của vật, do đó có thể xem rằng vật dẫn được truyền xung lượng $p = mv$ ở vị trí cân bằng. Áp dụng định luật II Niutơn : $\Delta p = f.\Delta t \Rightarrow m.\Delta v = IBl\Delta t = Bl\Delta q \Rightarrow p = mv = \Sigma\Delta p = \Sigma Bl\Delta q = Bl\Sigma\Delta q = Blq = BlCU$ với $q = CU$ là toàn bộ điện lượng truyền qua vật dẫn (cũng chính là điện tích ban đầu của tụ điện). Như vậy ở vị trí cân bằng vật được truyền một vận tốc theo phương thẳng đứng là $v = \frac{BlCU}{m}$. Dễ dàng chứng minh được vật dẫn sẽ dao động điều hòa. Kí hiệu *A* là biên độ dao động của vật, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{KA^2}{2}.2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{2K}}.v = \frac{BlCU}{\sqrt{2Km}}$$

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng : **Bình Thuận:** *Nguyễn Minh Hải*, 11A1, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Phan Thiết; **Phú Thọ :** *Vũ Quốc Hiển*, 11B, THPT chuyên Hùng Vương ; **Nam Định :** *Nguyễn Tuấn Anh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Quảng Ngãi:** *Lê Trung Tín*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Hà Nội :** *Nguyễn An Huy*, 12D1, THPT Chu Văn An ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Xuân Đức*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Trọng Vượng* và *Nguyễn Viết Trường*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Văn Hùng, Tạ Thị Dự, Nguyễn Trọng Tuấn Anh*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc

MAI ANH

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/294. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương.

NGUYỄN MẠNH THẮNG
(GV THCS Yên Phú, Yên Mô, Ninh Bình)

Bài T2/294. Tính giá trị biểu thức

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$$

trong đó a là nghiệm dương của phương trình $4x^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2} = 0$.

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/294. Gọi x là số lớn nhất trong ba số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{x}{y} + \sqrt{1+\dfrac{y}{z}} + \sqrt[3]{1+\dfrac{z}{x}}$

TRƯƠNG NGỌC ĐẮC
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T4/294. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là điểm nào đó trên cạnh AC (M khác A, C). Đường thẳng BM cắt đường tròn lần nữa tại N. Đường thẳng qua A vuông góc với AB và đường thẳng qua N vuông góc với NC cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng đường thẳng QM luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cạnh AC.

PHÙNG TRỌNG THỰC
(GV THPT Lương Yên, Phú Yên)

Bài T5/294. Gọi A và B là các giao điểm của hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R'. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn này tiếp xúc với đường tròn tâm O và tâm O' lần lượt tại T và T'. Chứng minh rằng điểm B là trọng tâm của tam giác ATT' khi và chỉ khi

$$OO' = \frac{\sqrt{3}}{2}(R+R')$$

TRẦN XUÂN BANG
(GV THPT BC Đồng Hới, Quảng Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/294. Cho số nguyên tố p lớn hơn 3. Chứng minh rằng $C_{2001p^2-1}^{p-1} - 1$ chia hết cho p^4, trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n.

LÊ QUANG NẪM
(SV ĐHKHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T7/294. Dãy số (a_n) $(n = 1, 2, 3,...)$ được xác định bởi : $a_n = \dfrac{1}{n^2.(n+2)\sqrt{n+1}}$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Chứng minh rằng : $a_1 + a_2 + ... + a_n < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ với mỗi $n = 2, 3, ...$

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV CLC K49 khoa Toán – Tin ĐHSP Hà Nội)

Bài T8/294. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a(x^2 + y^2) + z^2$, trong đó a là hằng số thực dương và x, y, z là các biến số thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$.

VŨ TRÍ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T9/294. Cho đường tròn tâm O bán kính R và số tự nhiên lẻ n. Tìm vị trí n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ trên đường tròn sao cho tổng các đoạn thẳng $A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n + A_nA_1$ đạt giá trị lớn nhất.

VŨ HUY HOÀNG
(SV ĐHSP Hà Nội)

Bài T10/294. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC. Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn đi qua M, N cắt các cạnh SA và BC theo thứ tự tại P và Q (P, Q không trùng với các đỉnh).

a) Chứng minh rằng $\dfrac{AP}{BQ} = \dfrac{b}{a}$

b) Xác định tỉ số $\dfrac{AP}{AS}$ sao cho thiết diện $MPNQ$ có diện tích nhỏ nhất.

NGUYỄN PHÚ SƠN
(GV THPT Yên Lạc I, Vĩnh Phúc)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/294. Cho đoạn mạch RLC mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu của nó hiệu điện thế xoay chiều $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$, trong đó U không đổi còn ω có thể thay đổi. Khi $\omega = \omega_1$ và $\omega = \omega_2 < \omega_1$ thì các dòng điện tương ứng đi trong mạch là i_1 và i_2 có cùng cường độ hiệu dụng ($I_1 = I_2$) và i_1 lệch pha với i_2 một góc 2α.

1) Tìm $\omega = \omega_3$ (theo ω_1 và ω_2) để cường độ dòng điện hiệu dụng qua mạch là cực đại ($I_3 = I_{max}$)

2) Tính L và C theo R, α, ω_1, ω_2 và theo R=300Ω, ω_1=200π rad/s, ω_2=50π rad/s, α=π/4.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/294. Một người nhìn một vật ở phía sau người đó một khoảng cách d = 5m qua kính mắt. Khi đó người ấy trông thấy 2 ảnh của vật : một ở khoảng cách d_1 = 5m, một ở khoảng cách d_2 = 5/7 m. Quay mặt về phía vật người ấy nhìn thấy qua kính mắt ảnh của nó ở khoảng cách d_3 = 2,5m.

Hãy xác định chiết suất của thủy tinh làm thấu kính của kính mắt.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/294. Find all natural numbers n such that $2^8 + 2^{11} + 2^n$ is a perfect square.

T2/294. Find the value of the expression

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$$

where a be the positive root of the equation $4x^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2} = 0$.

T3/294. Find the least value of the expression $\frac{x}{y} + \sqrt{1+\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}$ where x be the greatest number among three arbitrary positive numbers x, y, z.

T4/294. Let ABC be a triangle inscribed in a circle with center O. Let M be an arbitrary point on the side AC (M distinct from A, C). The line BM cuts the circle again at N. Let Q be the point of intersection of the line passing through A, perpendicular to AB and the line passing through N, perpendicular to NC.

Prove that the line QM passes through a fixed point when M moves on the side AC.

T5/294. Let A and B be the points of intersection of the circle with center O, radius R and the circle with center O', radius R'. A common tangent of these circles touches the circle with center O at T and touches the circle with center O' at T'. Prove that B is the centroid of triangle ATT' if and only if $OO' = \frac{\sqrt{3}}{2}(R+R')$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/294. Let p a prime number greater than 3. Prove that $C^{p-1}_{2001p^2-1} - 1$ is divisible by p^4 (C^k_n is the combination number).

T7/294. The sequence of numbers (a_n), (n = 1, 2, 3,...) is defined by : $a_n = \frac{1}{n^2(n+2)\sqrt{n+1}}$ for every n = 1, 2, 3, ... Prove that

$$a_1 + a_2 + ... + a_n < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

for every n = 2, 3, ...

T8/294. Find the least value of the expression $a(x^2 + y^2) + z^2$, where a is a given positive constant and x, y, z are variable real numbers satisfying $xy + yz + zx = 1$.

T9/294. Let be given a circle with center O and radius R and an odd natural number n. Find the position of n points $A_1, A_2, ..., A_n$ on the circle so that the sum $A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n + A_nA_1$ attains its greatest value.

T10/294. Let $SABCD$ be a regular triangular pyramid with base edge $AB = a$ and lateral edge $SA = b$. Let M and N be respectively the midpoints of the sides AB and SC. A variable plane passing through M, N cuts the sides SA and BC respectively at P and Q (P, Q do not coincide with the vertices).

i) Prove that $\frac{AP}{BQ} = \frac{b}{a}$

ii) Determine the ratio $\frac{AP}{AS}$ so that the area of the section $MPNQ$ attains its least value.

Bài T1/290. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.*

Lời giải. của *Nguyễn Đức Phương*, 9A, NK Trần Phú, **Hải Phòng**

Theo đề bài $a + b^2 = k(a^2b - 1)$ $(k \in N^*)$

$\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b) \Leftrightarrow a + k = mb$ (1)

với số nguyên m mà $m + b = ka^2$ (2)

Từ (1), (2) có $(m-1)(b-1) = mb - b - m + 1$

$= a + k - ka^2 + 1$ hay

$(m-1)(b-1) = (a+1)(k+1-ka)$ (3)

Vì $m > 0$ theo (1) nên $(m-1)(b-1) \geq 0$, từ (3) suy ra $k+1-ka \geq 0 \Rightarrow k + 1 \geq ka$

$$\Rightarrow 1 \geq k(a-1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k(a-1) = 0 \\ k(a-1) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2, k = 1 \end{array}\right.$$

– Nếu $a = 1$ từ (3) suy ra $(m-1)(b-1) = 2$ nên chỉ có thể $b = 2$ hoặc $b = 3$. Ta có nghiệm (a, b) là $(1, 2)$ và $(1, 3)$

– Nếu $a = 2, k = 1$ ta có $(m-1)(b-1) = 0$

Khi $m = 1$ từ (1) suy ra $(a, b) = (2, 3)$

Khi $b = 1 \Rightarrow (a, b) = (2, 1)$

Thử lại các cặp số (a, b) thỏa mãn đề bài là :

$(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1)$

Nhận xét. Ngoài bạn Phương, các bạn tìm được đúng 4 cặp số nêu trên : **Hòa Bình**: *Nguyễn Trần Hoàng*, $9A_1$, THCS Sông Đà ; **Phú Thọ**: *Nguyễn Trường Thọ*, 9A, THCS Giấy – Phong Châu, Phù Ninh; **Hải Phòng**: *Nguyễn Vũ Lân*, 8A, NK Trần Phú ; **Hải Dương**: *Lê Đình Huy*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Hưng Yên**: *Doãn Thị Kim Huế*, 8C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Nam Định**: *Dương Đỗ Nhuận*, $9A^2$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; *Phạm Duy Hiển*, *Nguyễn Quốc Khánh*, $9A_7$, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/290. *Cho n $(n \geq 2)$ số $a_1, a_2, ..., a_n$ sao cho $0 \leq a_i \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1}{a_2a_3...a_n + 1} + \frac{a_2}{a_1a_3...a_n + 1} + ... + \frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1} + 1} \leq n - 1.$$

Lời giải. Do $0 \leq a_i \leq 1$, ta có

$a_1a_2 ... a_{i-1}a_{i+1} ... a_n + 1 \geq a_1a_2 ... a_n + 1,$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $a_i = 1$ hoặc có $a_j = 0$ với $i \neq j$. Do đó

$$\frac{a_1}{a_2a_3...a_n + 1} + \frac{a_2}{a_1a_3...a_n + 1} + ... + \frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1} + 1} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1a_2...a_n + 1} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{a_1a_2...a_n + 1} \quad (1)$$

Với $0 \leq a, b \leq 1$, ta có $0 \leq (1 - a)(1 - b)$ và do đó $a + b \leq 1 + ab$, với đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = 1$ hoặc $b = 1$. Sử dụng bất đẳng thức này ta có

$$a_1 + a_2 \leq 1 + a_1a_2$$
$$a_3 + a_1a_2 \leq 1 + a_1a_2a_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n + a_1a_2 ... a_{n-1} \leq 1 + a_1a_2 ... a_n$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên, chú ý rằng $n \geq 2$ ta nhận được $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq (n-1) + a_1a_2 ... a_n \leq (n-1)(1 + a_1a_2...a_n)$ (2)

Thay bất đẳng thức (2) vào (1), ta thu được

$$\frac{a_1}{a_2a_3...a_n + 1} + \frac{a_2}{a_1a_3...a_n + 1} + ... + \frac{a_n}{a_1a_2...a_{n-1} + 1} \leq n - 1$$

Đẳng thức xảy ra chỉ với $n-1$ số bằng 1 và 1 số bằng 0 trong n số $a_1, a_2, ... a_n$ khi $n > 2$, và trong trường hợp $n = 2$ còn có đẳng thức với $a_1 = a_2 = 1$ đpcm.

Nhận xét. Phần nhiều các bạn gửi bài giải đúng bài toán này. Nhiều bạn không nêu điều iện xảy ra đẳng thức, đại đa số các bạn quên điều kiện bổ sung khi $n = 2$. Một số bạn nêu bài toán tổng quát nhưng giải chưa thật chặt chẽ. Giải đầy đủ nhất là bạn Tạ Bảo Trung, 9A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An**.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/290. *Xét đa thức biến số thực*

$F(x, y, z, t) = 9(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2t^2 + t^2x^2) + 6xz(y^2 + t^2) - 6yt(x^2 + z^2) - 4xyzt.$

a) Hãy phân tích đa thức F thành tích của hai đa thức bậc hai.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức F khi $xy + zt = 1$.

Lời giải. a) Hầu hết các bạn đều dễ dàng viết được

$F(x, y, z, t) = (3x^2 + 3y^2 + 2xz)(3y^2 + 3t^2 - 2ty)$

b) Có nhiều cách đánh giá $F(x, y, z, t)$

Cách 1:

$F(x, y, z, t) =$

$$= 4\left[(x+z)^2 + \frac{(x-z)^2}{2}\right]\left[\frac{(y+t)^2}{2} + (y-t)^2\right]$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta có

$$F(x,y,z,t) \geq 4\left[\frac{(x+z))(y+t)}{\sqrt{2}} + \frac{(x-z)(y-t)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$= 2(xy+xt+yz+zt+xy-xt-zy+zt)^2$

$= 2(2xy + 2zt)^2 = 8(xy+zt)^2 = 8$

Cách 2.

$F(x, y, z, t) = (3yz + xy - zt - 3xt)^2 + 8(xy+zt)^2 \geq 8$

* Có thể chỉ ra giá trị của x, y, z, t thỏa mãn $xy + zt = 1$ để đẳng thức xảy ra, chẳng hạn : $x = 1$; $y = 1$; $z = 0$ và $t = \frac{1}{3}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của $F(x, y, z, t)$ là 8.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn không chỉ ra các giá trị cụ thể của x, y, z, t để $F(x, y, z, t) = 8$, như vậy chưa kết luận được về giá trị nhỏ nhất của $F(x, y, z, t)$.

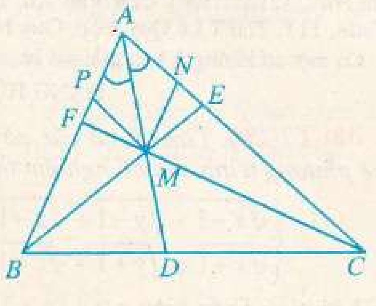
2) Các bạn có lời giải tốt là : *Nguyễn Đức Phương, Bùi Tuấn Anh, Trần Xuân Dũng*, 9A, NK Trần Phú, *Bùi Lê Linh*, 7C[1], THCS Trần Phú, Q. Lê Chân, **Hải Phòng;** *Nguyễn Quốc Khánh, Nguyễn Đức Tân*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**; *Trần Mạnh Tuấn*, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Thọ Khiêm*, 9A, THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc ; *Dương Đỗ Nhuận*, 9A$_2$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** ; *Quách Thanh Sơn*, 9B, THCS Võ Thị Sáu, Vụ Bản, Lạc Sơn, **Hòa Bình**; *Nguyễn Trường Thọ*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ** ; ...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/290. *Gọi M là điểm nằm trên phân giác trong AD của tam giác ABC (M khác A, D). Tia BM cắt cạnh AC tại E, tia CM cắt cạnh AB tại F. Chứng minh rằng nếu*

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2} \text{ thì } \Delta ABC \text{ cân.}$$

Lời giải. *Cách 1.* Từ M kẻ $MN \parallel AB$ ($N \in AC$) và $MP \parallel AC$ ($P \in AB$). Do AD là đường phân giác nên $APMN$ là hình thoi.



Áp dụng định lí Talet có :

$\frac{MP}{AE} = \frac{BP}{BA}$, mà $BP = AB - AP = AB - MP$ nên

$$\frac{MP}{AE} = 1 - \frac{MP}{AB} \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AE} = \frac{1}{MP} \quad (1)$$

Tương tự ta có : $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{AN}$ (2)

Từ (1) và (2) có

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AE} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} \quad (3)$$

Theo giả thiết

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AF^2} \quad (4)$$

Với các số dương x, y, z, t thỏa mãn $x + y = z+t$ và $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ dễ dàng suy ra $2xy = 2zt$ nên $(x-y)^2 = (z-t)^2$.

Áp dụng điều này vào (3), (4) được

$$\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AE}\right)^2 = \left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{AF}\right)^2 \quad (5)$$

Nếu $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AE} = \frac{1}{AF} - \frac{1}{AC} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$ nhưng điều này không xảy ra vì $AE < AC$ và $AF < AB$.

Vậy từ (5) có $\frac{1}{AB} - \frac{1}{AE} = \frac{1}{AC} - \frac{1}{AF}$ (6)

Từ (6) và (3) rút ra $AB = AC$

Cách 2. Áp dụng công thức tính diện tích tam giác $2S(ABC) = AB.AC.\sin A$

Đặt $\sin A = x$, $\sin\frac{A}{2} = y$ ta có :

$AB.AE.x = 2S(ABE) = 2S(ABM) + 2S(AEM)$

$= AM.AB.y + AM.AE.y$

$= AM.y(AB + AE)$.

hay $\frac{AB + AE}{AB.AE} = \frac{x}{AM.y}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AE} = \frac{x}{AM.y} \quad (7)$$

Tương tự $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AF} = \frac{x}{AM.y}$ (8)

Từ (7), (8) suy ra $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AE} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AF}$ (3)

Ta lập luận tiếp như ở cách 1.

Nhận xét. Đa số các bạn đều giải đúng bài này nhưng phải sử dụng định lí Xêva hoặc Mênêlaut.

Các bạn sau có cách giải trực tiếp :

Phú Thọ: *Nguyễn Bá Gia*, 9A, THCS Tam NHông ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Xuân Dũng, Phạm Thị Thu Thủy*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định:** *Nguyễn Quốc Khánh*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh

NGUYỄN VIỆT HẢI

Bài T5/290. *Cho tam giác ABC nội tiếp một đường tròn. Đường phân giác trong AD và trung tuyến AM theo thứ tự cắt đường tròn lần nữa tại P và Q. Hãy so sánh DP và MQ.*

Lời giải.

1) Nếu $AB = AC$ dễ thấy $DP = MQ$

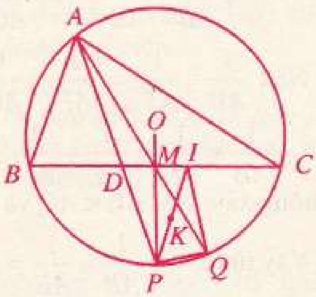
2) Nếu $AB \neq AC$ thì D, M phân biệt. Lấy I đối xứng với D qua M và gọi K là trung điểm PI.

Ta có $\widehat{PAB} = \widehat{PAC}$ nên suy ra $PM \perp BC$.

Mặt khác

$$\widehat{MQP} = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{ABP} = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{AB} + \text{sđ}\widehat{CP})$$

$= \widehat{CDP} = \widehat{DIP}$



Do đó tứ giác $PMIQ$ nội tiếp. Từ $\widehat{PMI} = 90^o$ ta có $\widehat{PQI} = 90^o$. Vì thế $PD = PI = MK + KQ \geq MQ$. Nếu $PI = MQ$ thì $MIQP$ là hình chữ nhật tức $PQ \perp PM$. Điều này không xảy ra.

Vậy : $DP = MQ$ nếu $AB = AC$

$DP > MQ$ nếu $AB \neq AC$

Nhận xét. 1) Có thể dùng kết quả của bài toán con bướm để chứng minh bài toán này.

2. Các bạn có lời giải tốt : *Phạm Thị Thu Thủy*, 9A, NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Phạm Kim Hùng*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** ; *Trần Văn Dũng*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An** ; *Trần Duy Sơn*, 8^2, THCS Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/290. *Cho số nguyên dương n. Tính số các số nguyên dương không lớn hơn n(n+1)(n+2) mà không chia hết cho các số n, n+1, n+2.*

Lời giải. (của bạn *Hà Hữu Cao Trình*, 11, PTNK Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** và *Nguyễn Duy Thành*, 11 chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**)

Kí hiệu : $S = \{1, 2, ..., n(n+1)(n+2)\}$

$A_1 = \{k \in S \mid k \vdots n\}$, $A_2 = \{k \in S \mid k \vdots (n+1)\}$ và $A_3 = \{k \in S \mid k \vdots (n+2)\}$. Số cần tìm bằng $|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Ta có

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ (1)

Ta có $|A_1| = (n+1)(n+2)$, $|A_2| = n(n+2)$, $|A_3| = n(n+1)$.

Nhận xét rằng

$$\begin{cases} k \vdots a \\ k \vdots b \end{cases} \Leftrightarrow k \vdots \text{BCNN}[a, b] \Leftrightarrow k \vdots \frac{ab}{\text{UCLN}l(a,b)}$$

Vậy $|A_1 \cap A_2| = n+2$, $|A_2 \cap A_3| = n$.

Để tính $|A_1 \cap A_3|$ và $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ ta xét các trường hợp sau :

1) Nếu n lẻ. Khi đó $(n, n+2) = 1 \Rightarrow k \in A_1 \cap A_3 \Leftrightarrow k \vdots n(n+2) \Rightarrow |A_1 \cap A_3| = n + 1$

Tương tự $k \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \Leftrightarrow k \vdots n(n+1)(n+2) \Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$

2) Nếu n chẵn : Khi đó $(n, n+2) = 2$. Vậy $k \in A_1 \cap A_3 \Leftrightarrow k \vdots \dfrac{n(n+2)}{2} \Rightarrow |A_1 \cap A_3| = 2(n+1)$;

$k \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \Leftrightarrow k \vdots \dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$

$\Rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2$

Từ đó ta thay vào công thức (1) ở trên và tìm được $|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \begin{cases} n^3 - n & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ n^3 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Bá Gia*, 9A, Tam Nông, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T,. Sa Đec, **Đồng Tháp** ; *Phạm Sử Tiến Trình*, chuyên Lê Quý Đôn, Bà Rịa – Vũng Tàu, *Nguyễn Cảnh Lâm*, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**; *Phạm Ngọc Hưng*, $11A_2$, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái** ; *Nguyễn Thị Thùy Trang*, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương** ; *Cao Việt Dũng*, 12 chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Dương Hoài Sơn*, 12A, THPT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**; *Phạm Văn Hùng*, $11A_1$, PTCT, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn An Huy*, $12D_1$, THPT Chu Văn An, **Hà Nội** ; *Âu Thế Tuấn*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, **Bình Định.**

Có một số không ít bạn giải sai bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/290. *Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực x, y, z :*

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = a - 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = a + 1 \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$.

Hệ phương trình trên tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1})+(\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1})=2a\\(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})+(\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1})+(\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1})=2\end{cases}$$

Đặt $u = \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$; $v = \sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}$, $s = \sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}$.

Do $x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$ nên $u \ge \sqrt{2}$, $v \ge \sqrt{2}$, $s \ge \sqrt{2}$. Ngược lại nếu $u \ge \sqrt{2}$, $v \ge \sqrt{2}$, $s \ge \sqrt{2}$ ta có

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2}{u}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}\left(u+\frac{2}{u}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(u^2+\frac{4}{u^2}\right) \ge 1,$$

tương tự đối với y, z.

Do đó bài toán của ta đưa về bài toán tương đương : Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm $u \ge \sqrt{2}$, $v \ge \sqrt{2}$, $s \ge \sqrt{2}$:

$$\begin{cases}u+v+s=2a\\ \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}+\dfrac{1}{s}=1\end{cases} \quad (1)$$

Điều kiện cần: Giả sử hệ phương trình (1) có nghiệm. Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có

$$2a = (u+v+s)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{s}\right) \ge 9 \Rightarrow a \ge \frac{9}{2}.$$

Điều kiện đủ. Giả sử $a \ge \frac{9}{2}$. Chúng ta sẽ chứng minh hệ phương trình (1) có nghiệm. Lấy $s = 3$ (thỏa mãn $s \ge \sqrt{2}$). Khi đó (1) tương đương với

$$\begin{cases}u+v=2a-3\\ u.v=\dfrac{3(2a-3)}{2}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow u, v$ là hai nghiệm của tam thức bậc hai :

$$t^2-(2a-3)t+\frac{3(2a-3)}{2}$$

$$\Rightarrow u, v = \frac{2a-3 \pm \sqrt{(2a-3)(2a-9)}}{2}$$

Chú ý : Đặt $h = 2a-9 \ge 0$

$\Rightarrow (h+6-2\sqrt{2})^2 > (h+3)^2 > h(h+6)$

Tức là $(2a-3) - 2\sqrt{2} > \sqrt{(2a-3)(2a-9)}$

$\Rightarrow u > \sqrt{2}$, $v > \sqrt{2}$.

Như vậy hệ phương trình (1) có nghiệm $u \ge \sqrt{2}$, $v \ge \sqrt{2}$, $s \ge \sqrt{2}$.

Tóm lại : các số thực a cần tìm là tất cả các số thực $a \ge \frac{9}{2}$.

Nhận xét. 1) Tòa soạn nhận được lời giải của 65 bạn, tất cả các bạn đều giải đúng. Một số bạn đã phát biểu và giải bài toán tổng quát : "Cho các số thực dương b, c và số tự nhiên $n \ge 2$. Tìm tất cả các số thực a sao cho hệ phương trình sau có nghiệm thực $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases}\sqrt{x_1-b}+\sqrt{x_2-b}+...+\sqrt{x_n-b}=a-c\\ \sqrt{x_1+b}+\sqrt{x_2+b}+...+\sqrt{x_n+b}=a+c\end{cases}$$

Phương pháp giải vẫn như cách giải trên.

2. Các bạn sau có lời giải tốt : **Hòa Bình:** *Hà Hữu Cao Trình*, 11T ; *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Ninh Bình:** *Trần Minh Mẫn*, 11T, THPT Lương Văn Tụy; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Thắng*, *Nguyễn Duy Thành*, *Phạm Văn Trung*, 11T, THPT Lê Khiết; **Phú Yên:** *Phan Thành Nam*, $11T_2$, THPT chuyên Lương Văn Chánh, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/290. *Tìm tất cả các hàm số thực f(x), g(x) thỏa mãn f(x) – f(y) = cos(x+y).g(x–y) (1) với mọi số thực x, y.*

Lời giải. (của đa số các bạn)

Thay $y = \frac{\pi}{2} - x$ vào (1) ta được $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = f(x)$ $\forall x \in R$. Cũng từ (1) ta có :

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - f(x) = \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin 2x.g\left(\frac{\pi}{2}\right), \forall x \in R.$$

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - f(x) = f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$= \cos\pi.g(2x) = -g(2x) \quad \forall x \in R$$

Suy ra $g(x) = a\sin x$ với $a = g\left(\frac{\pi}{2}\right) \in R$.

Thay $y = 0$ vào (1) ta được $f(x) - f(0) = \cos x.g(x) = \frac{1}{2}a\sin 2x$

Vậy $f(x) = \frac{a}{2}\sin 2x + b$ với $b = f(0) \in R$.

Thử lại ta thấy cặp hàm $f(x) = \frac{a}{2}\sin 2x + b$, $g(x) = a\sin x$ ($a, b \in R$ tùy ý) thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Đây là một bài toán về phương trình hàm dạng đơn giản. Các bạn gửi bài đến đều có lời giải đúng (trên 100).

Hòa Bình: Nguyễn Lâm Tuyền, Cao Thanh Cường, Nguyễn Thái Ngọc và Vũ Văn Dương, Hà Hữu Cao Trình, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Hà Nội :** Nguyễn Đức Nhật, 12B Toán, Vũ Đình Quang, Lê Hùng Việt Bảo và Phạm Minh Tuấn, 10A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Phú Thọ :** Hoàng Ngọc Minh, 11A, THPT Hùng Vương; **Nam Định :** Nguyễn Đức Tâm. 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nguyễn Anh Thái, 11 chuyên, Phạm Đức Tuệ, 10 chuyên , THPT Lê Hồng Phong ; **Thanh Hóa :** Lê Minh Tú, C1, trường Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, Hoàng Kiên Trung và Nghiêm Hồng Giang, 11T$_1$, Đặng Trọng Nam và Triết Minh Thắng, 11T$_2$, Nguyễn Minh Công, 12T, THPT Lam Sơn, Lê Văn Dương, 12A1, THPT Hậu Lộc I, Nguyễn Thanh Khang, 12 C, THPT Hàm Rồng ; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Văn Thắng, Phạm Văn Trung và Nguyễn Duy Thành, 11T, Phạm Tấn Độ, 10T$_1$, Nguyễn Huy Cung, 11T$_2$, THPT chuyên Lê Khiết ; **Quảng Nam:** Lê Quốc Thành, 12/1, THPT Nguyễn Duy Hiệu ; **Đà Nẵng:** Nguyễn Đình Minh, 11/21 Phan Châu Trinh ; **Tp. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Hoàng Hiểu, 11CT, Lâm Trí Hiếu, 12CT, THPT Lê Hồng Phong ; **Nghệ An :** Phạm Quang Cường, 12A$_1$, Nguyễn Danh Tuấn, 11A$_1$, THPT Phan Bội Châu, Đậu Minh Hoàng, 10A$_1$, Phạm Trung Hiếu, 12A$_1$, Trần Quang Vũ, 11A$_7$, Đặng Duy Phú, 11A, ĐH Vinh ; **Vĩnh Phúc :** Hà Anh Tuấn, Nguyễn XuânTường, Cao Việt Dũng, 12A$_1$, Trần Bá Bách, 12A$_2$, Lê Văn Quỳnh, 11A$_3$, Nguyễn Duy Hưng, 11B$_2$, Vũ Nhật Huy, 11A, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Dương :** Nguyễn Anh Nguyên và Phạm Văn Hùng, 12T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Trần Thị Thu Hà, 12A, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang, Trần Hưng Hải, 12C$_2$, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Hà Tây:** Dương Hoài Sơn, 12T$_1$, THPT Nguyễn Huệ, Phạm Quang Phương, 12A$_6$, Tùng Thiện; **Quảng Trị:** Trần Tiến Hoàng và Hồng Ngọc Bình, 12T, Nguyễn Hải Duyên, 11T THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Khánh Hòa:** Trần Minh Bình, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đồng Tháp:** Nguyễn Võ Vĩnh Lộc, 11T, THPT Sa Đéc ; **Bắc Giang :** Lê Quang Huấn, 10A$_2$, THPT Việt Yên I; **Ninh Bình:** Trịnh Thùy Nhung, 11T, THPT Lương Văn Tụy ; **Bình Định:** Trần Ngọc Trung, 11T, Nguyễn Hoài Phương, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Bắc Ninh :** Nguyễn Văn Thảo và Trần Kiều Hưng, 11T, THPT chuyên Hàn Thuyên ; **Quảng Ninh:** Đàm Quang Tuấn, 11T, THPT chuyên Hạ Long ; **Tiền Giang:** Nguyễn Tuấn Ngọc, 12T, THPT chuyên Tiền Giang ; **Phú Yên:** Ngô Thanh Nguyên, 10T$_1$, THPT Lương Văn Chánh ; **Bạc Liêu:** Nguyễn Văn Tâm, 12$_1$, THPT Giá Rai, Tx. Bạc Liêu ; Nguyễn Hải Long, 12T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/290. *Cho ΔABC nhọn. Gọi I và r là tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\geq\frac{1}{3R}+\frac{4}{3r} \qquad (*)$$

Lời giải. (của *Hoàng Ngọc Minh*, 11A$_1$, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**). Trong tam giác *ABC* ta có các hệ thức sau :

$$r = IA\sin\frac{A}{2} = IB\sin\frac{B}{2} = IC\sin\frac{C}{2} =$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A \geq B \geq C$ thì $A \geq \frac{\pi}{3}$ (1')

Từ các hệ thức (1) suy ra BĐT (*) cần tìm tương đương với BĐT sau :

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\geq$$

$$\geq\frac{4}{3}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \qquad (**)$$

hay là : $$\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}\geq$$

$$\geq\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)$$

hay là $$\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{2}\geq$$

$$\geq\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sin\frac{A}{2}\left(2\cos^2\frac{B-C}{4}-1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

Từ đó suy ra :

$$(**)\Leftrightarrow 4\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{B-C}{4}-6\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$-2\sin^2\frac{A}{2}-5\sin\frac{A}{2}+4\leq 0$$

Bây giờ ta đặt $\cos\frac{B-C}{4}=x$ và xét hàm số :

$$f(x)=4\sin\frac{A}{2}x^2-6\sin\frac{\pi-A}{4}x-2\sin^2\frac{A}{2}-$$

$$-5\sin\frac{A}{2}+4\ ; \qquad (2)$$

Vì $0\leq\frac{B-C}{4}<\frac{B}{4}<\frac{\pi-A}{4}\leq\frac{\pi}{6}$ nên :

$$1\geq\cos\frac{B-C}{4}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{3}{4} \qquad (2')$$

Và do đó, $f(x)$ xác định trên đoạn (nửa mở) $\left(\frac{3}{4},1\right]$. Ta có : $f'(x)=8\left(\sin\frac{A}{2}x-\frac{3}{4}\sin\frac{\pi-A}{4}\right)$

Từ giả thiết (1'), ta được :

$0 < \dfrac{\pi - A}{4} \le \dfrac{A}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, và do đó :

$\sin\dfrac{A}{2} \ge \sin\dfrac{\pi - A}{4}$ nên :

$f'(x) > 0$ trong $\left(\dfrac{3}{4}, 1\right]$; (2")

Từ (2') và (2") suy ra :

$f(x) = f\left(\cos\dfrac{B-C}{4}\right) \le f(1);$ (3)

Tiếp theo, ta chứng minh $f(1) \le 0$.

Thật vậy, ta có :

$f(1) = -2\sin^2\dfrac{A}{2} - \sin\dfrac{A}{2} - 6\sin\dfrac{\pi - A}{4} + 4$

$= \cos A - 1 - \sin\dfrac{A}{2} - 6\sin\dfrac{\pi - A}{4} + 4$

$= 3 - \left[\sin\dfrac{A}{2} - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - A\right)\right] - 6\sin\dfrac{\pi - A}{4}$

$= 3 - 2\cos\dfrac{\pi - A}{4}\cos\dfrac{3(\pi - A)}{4} - 6\sin\dfrac{\pi - A}{4}$

Đặt $t = \dfrac{\pi - A}{4}$ thì $t \in \left(\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ và :

$f(1) = 3 - 2\cos t\cos 3t - 6\sin t$
$= 3 - 2\cos t(4\cos^3 t - 3\cos t) - 6\sin t$
$= 3 - 2\cos^2 t(4\cos^2 t - 3) - 6\sin t$
$= 3 - 2(1 - \sin^2 t)(1 - 4\sin^2 t) - 6\sin t$
$= -(8\sin^4 t - 10\sin^2 t + 6\sin t - 1)$
$= -(2\sin t - 1)^2(2\sin^2 t + 2\sin t - 1)$
$= -(2\sin t - 1)^2(2\sin t - \cos 2t)$

Do $\dfrac{\pi}{8} < t \le \dfrac{\pi}{6}$ nên

$2\sin t > 2\sin\dfrac{\pi}{8} > 2\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > \cos 2t$

nghĩa là : $2\sin t - \cos 2t > 0$.

Từ đó suy ra : $f(1) \le 0$; đpcm.

Vậy BĐT (**) và do đó, BĐT (*) được chứng minh.

Cũng dễ thấy rằng đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi :

$\sin t = \dfrac{1}{2}$ (với $\dfrac{\pi}{8} < t \le \dfrac{\pi}{6}$)

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{3} \ge B \ge C$

Vậy $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$, và ABC là một tam giác đều.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đều chuyển BĐT (*) cần tìm về dạng BĐT (**) mà Jack Garfulkel đã nêu ra (THTT đã giới thiệu trong số 287, tháng 5/2001). Trong số này, phần đông các bạn đã sử dụng phương pháp giải tích mà tác giả bài toán đã đề cập đến trong THTT số 291. Tuy nhiên, nhiều bạn lập luận chưa thật chặt chẽ.

2) Cũng có không ít bạn sử dụng biến đổi lượng giác và các BĐT lượng giác hoặc BĐT hình học liên quan đến hình tam giác để giải bài toán này. Đáng tiếc, hầu hết các bạn đều không thành công chủ yếu là vì không nắm vững kiến thức cơ bản về tính chất của BĐT. Một số bạn chỉ chứng minh được BĐT khác, yếu hơn BĐT (*). Chẳng hạn, bạn *Lê Ngọc Thành*, 11A2, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Can Lộc, Hà Tĩnh) đã chứng minh đúng BĐT : $IA + IB + IC \le \sqrt{bc + ca + ab}$, trong đó a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC, từ đó suy ra BĐT sau : $\dfrac{1}{IA} + \dfrac{1}{IB} + \dfrac{1}{IC} \ge \dfrac{9}{3R} = \dfrac{3}{R}$ (*)'

BĐT này đúng nhưng từ đó lại ngộ nhận rằng

$\dfrac{3}{R} \ge \dfrac{1}{3R} + \dfrac{4}{3r}$!!! (sau khi đã chứng minh $R \ge 2r$)

3) Các bạn *Phạm Văn Trung*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết ; *Ngô Ngọc Khiêm*B1, THPT Trần Quốc Tuấn, Quảng Ngãi đã đưa ra lời giải ngắn gọn nhất của BĐT (**) mà chỉ sử dụng các biến đổi lượng giác tương đương nhưng phải thêm điều kiện là các góc ΔABC không nhỏ hơn $\pi/4$. Cách giải tóm tắt như sau :

Bổ đề. Nếu ABC là một tam giác nhọn có các góc không nhỏ hơn $\dfrac{\pi}{4}$, ta có BĐT

$3(\cos A + \cos B + \cos C) \ge 4(1 + \cos A\cos B\cos C)$ (***)

Thật vậy, giả sử $\dfrac{\pi}{4} \le A \le \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow (1 + \cos A)^2 < 3$ suy ra $2\sin^2\dfrac{A}{2} + 2\sin\dfrac{A}{2} - 1 > 0$.

Từ đó ta được :

$\left(2\sin^2\dfrac{A}{2} + 2\sin\dfrac{A}{2} - 1\right)\left(2\sin\dfrac{A}{2} - 1\right)^2 \ge 0$; (i)

(i) $\Leftrightarrow 3\cos A + 6\sin\dfrac{A}{2} - 4\cos A\sin^2\dfrac{A}{2} \ge 4$ (ii)

Mặt khác, $|B - C| < \dfrac{\pi}{2}$ nên ta được :

$4\cos A\left(1 + \cos\dfrac{B-C}{2}\right) > 2\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 3 \ge 6\sin\dfrac{A}{2}$,

và do đó :

$4\cos A\left(1 + \cos\dfrac{B-C}{2}\right)\left(1 - \cos\dfrac{B-C}{2}\right) \ge$

$\ge 6\sin\dfrac{A}{2}\left(1 - \cos\dfrac{B-C}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 4\cos A\left(\sin^2\dfrac{A}{2}-\cos B\cos C\right)\geq$

$\geq 6\sin\dfrac{A}{2}-3(\cos B+\cos C)$

$\Leftrightarrow 3(\cos B+\cos C)-6\sin\dfrac{A}{2}+4\cos A\sin^2\dfrac{A}{2}\geq$

$\geq 4\cos A\cos B\cos C$ (iii)

Cộng theo từng vế (ii) và (iii) ta được BĐT (***) cần tìm, đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra ở (***) khi và chỉ khi tam giác ABC là đều $\left(A=\dfrac{\pi}{3},\ B=C\right)$.

Bây giờ, trở lại bài toán ban đầu. Áp dụng bổ đề trên ta dễ dàng suy ra rằng nếu tam giác ABC là nhọn và có các góc $\geq\dfrac{\pi}{4}$ thì tam giác $A'B'C'$ có các góc $A'=\dfrac{1}{2}(\pi-A)$, $B'=\dfrac{1}{2}(\pi-B)$, $C'=\dfrac{1}{2}(\pi-C)$ cũng là nhọn và đều $\geq\dfrac{\pi}{4}$, và do đó ta có BĐT :

$$3(\cos A'+\cos B'+\cos C')\geq 4+4\cos A'\cos B'\cos C'$$

Từ đó, ta trực tiếp thu được BĐT (**) cần tìm và do đó (*) được chứng minh.

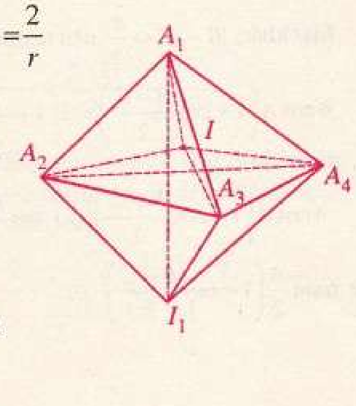
4) Ngoài các bạn được nêu tên ở trên, các bạn sau cũng có lời giải tốt :

Hà Nội : *Nguyễn Mạnh Long*, 12N, THPT Thăng Long; **Bắc Ninh:** *Ngô Quý Hoàn*, 11A1, THPT Yên Phong I, **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Trường*, $12A_1$, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hòa Bình:** *Nguyễn Lâm Tuyển*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa :** *Lê Minh Tú*, C_1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa ; **Quảng Trị:** *Hồng Ngọc Bình*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Đông Hà ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết./.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/290. *Xét tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi r, r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và mặt cầu bàng tiếp các góc tam diện đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 tương ứng. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r}$$



Lời giải. (của bạn *Võ Duy Phúc*, 12T, THPT Cao Lãnh, **Đồng Tháp**).

Ta kí hiệu $V(.)$ là thể tích. Gọi I, I_1, I_2, I_3, I_4 là tâm mặt cầu nội tiếp và tâm mặt cầu bàng tiếp các góc tam diện đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 tương ứng. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 của tứ diện. Ta có

$$3V(A_1A_2A_3A_4)=3V(IA_2A_3A_4)+3V(IA_3A_4A_1)+$$
$$+3V(IA_4A_1A_2)+3V(IA_1A_2A_3)$$
$$=r.S_1+r.S_2+r.S_3+r.S_4$$
$$=r(S_1+S_2+S_3+S_4) \quad (1)$$

Mặt khác

$$3V(A_1A_2A_3A_4)=-3V(I_1A_2A_3A_4)+3V(I_1A_3A_4A_1)$$
$$+3V(I_1A_4A_1A_2)+3V(I_1A_1A_2A_3)$$
$$=-r_1.S_1+r_1.S_2+r_1.S_3+r_1.S_4$$
$$=r_1(-S_1+S_2+S_3+S_4) \quad (2)$$

Từ (1), (2), suy ra :

$$r(S_1+S_2+S_3+S_4)=r_1(-S_1+S_2+S_3+S_4)$$
$$\Rightarrow \frac{r}{r_1}=\frac{-S_1+S_2+S_3+S_4}{S_1+S_2+S_3+S_4} \quad (\alpha)$$

Tương tự như vậy ta có :

$$\frac{r}{r_2}=\frac{S_1-S_2+S_3+S_4}{S_1+S_2+S_3+S_4} \quad (\beta)$$
$$\frac{r}{r_3}=\frac{S_1+S_2-S_3+S_4}{S_1+S_2+S_3+S_4} \quad (\gamma)$$
$$\frac{r}{r_4}=\frac{S_1+S_2+S_3-S_4}{S_1+S_2+S_3+S_4} \quad (\delta)$$

Cộng theo từng vế của các đẳng thức (α), (β), (γ), (δ) ta có :

$$\frac{r}{r_1}+\frac{r}{r_2}+\frac{r}{r_3}+\frac{r}{r_4}=\frac{2(S_1+S_2+S_3+S_4)}{S_1+S_2+S_3+S_4}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{2}{r}$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều giải đúng. Bạn *Đậu Tuấn Trung*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** còn nhận xét bài toán này đã có trong cuốn "Các bài toán hình học không gian" của các tác giả Praxôlôp và Sarưgin.

2) Đây là bài toán khó trình bày. Nhiều bạn trình bày quá dài hoặc quá ngắn. Cách trình bày trên đây của bạn Phú là gọn gàng, đủ ý, đủ lời.

3) Nhiều bạn có nhận xét đúng.Bài toán trên là sự mở rộng không gian của một kết quả quen thuộc trong tam giác.

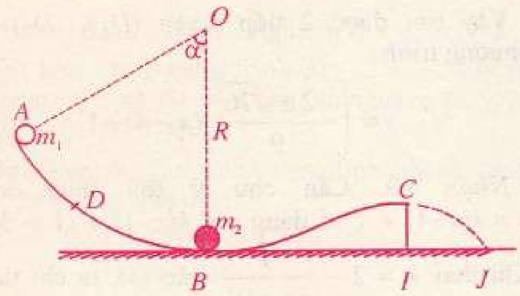
4) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt: **Hải Phòng:** *Nguyễn Đức Phương*, 9A, THPT NK Trần Phú; **Vĩnh Phúc :** *Trần Bá Bách*, 12A, *Nguyễn Xuân Trường*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, $11A_1$, THPT chuyên Hùng Vương; **Hải**

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bắc Ninh : *Phạm Thái Sơn*, 10T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Văn Thọ*, 12I, THPT Ba Đình, Nga Sơn ; **ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội :** *Lê Bảo Khánh*, 10A Toán.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/290. *Một máng ABCI nằm trong mặt phẳng thẳng đứng có cấu tạo như hình vẽ : B và I ở trên mặt đất nằm ngang ; phần AB có dạng cung tròn tâm O, bán kính OA = OB = R = 2m, và OB vuông góc với mặt đất tại B ; ∠AOB = α = 60°, tiếp tuyến tại C với phần BC có phương song song với mặt đất ; CI = h = 0,4m và có phương vuông góc với mặt đất. Hòn bi 2 khối lượng m_2 ban đầu nằm yên tại B. Hòn bi 1 khối lượng $m_1 = \dfrac{m_2}{2}$ trượt từ A với vận tốc ban đầu v_o theo máng AB tới va chạm đàn hồi xuyên tâm với hòn bi 2. Sau va chạm, m_1 giật lùi lại đến vị trí D ở chính giữa AB, sau đó trượt xuống đến B rồi dừng lại tại B, còn m_2 thì đi lên theo máng BC, sau đó rời máng tại C với tầm xa lớn nhất bằng IJ. Cho biết : trên phần AB hệ số ma sát giữa hòn bi và máng là k, còn trên phần BC không có ma sát. Hãy tính v_o và k. Lấy $g = 10m/s^2$.*



Lời giải. Kí hiệu v, v_1 tương ứng là vận tốc của m_1 ngay trước và sau khi va chạm với m_2; còn v_2, v_C tương ứng là vận tốc của m_2 ngay sau va chạm với m_1 và khi rời máng. Vì m_2 bay ra từ C như vật ném ngang nên $IJ = v_C\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ với

$v_C = \sqrt{v_2^2 - 2gh}$ (định luật bảo toàn cơ năng) ⇒

$IJ = \dfrac{1}{g}\sqrt{2gh(v_2^2 - 2gh)}$. Ta thấy IJ đạt trị số cực đại khi $v_2 = \sqrt{4gh} = 4$m/s.

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn động năng khi m_1 va chạm m_2 :

$$m_1v = m_1v_1 + m_2v_2\ ;\ \frac{m_1v^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2m_2^2}{2}.$$

Giải ra ta được : $v = 6$m/s ; $v_1 = -2$m/s, có nghĩa là m_1 giật lùi lại. Dễ dàng chứng minh rằng độ lớn của công của lực ma sát khi $m_1$chuyển động trên cung AB và BD là :

$$A_{AB} = km_1g.NB = km_1gR\sin\alpha \ (1)$$

$$A_{BD} = km_1g.DH = km_1gR\sin\frac{\alpha}{2} \ (2)$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$$\frac{m_1v_1}{2} = 2A_{BD}\ ;$$

$$\frac{m_1v_o^2}{2} + m_1gR(1-\cos\alpha) = \frac{m_1v^2}{2} + A_{AB} \ (3)$$

Từ (1), (2) và (3), thay số tìm được : $k = 0,1$; $v_o = 4,4$m/s.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng :

Yên Bái : *Phan Thị Kim Hoa*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Quảng Ngãi:** *Bùi Minh Tú*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Bắc Giang :** *Trần Hải Linh*, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, *Chu Anh Dũng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc , *Trần Văn Dũng*, 10A4, THPT Xuân Hòa, Mê Linh ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Văn Tý*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ;

MAI ANH

(Xem tiếp trang 11)

TIN BUỒN

Tòa soạn tạp chí Toán học và Tuổi trẻ vô cùng thương tiếc báo tin

Thạc sĩ LÊ DUY NINH

Sinh ngày : 30.4.1965

Quê quán : Yên Phong, Bắc Ninh

Trưởng Bộ môn Phương pháp giảng dạy Toán, khoa Toán, trường ĐHSP Hà Nội 2 đã mất ngày 18.11.2001 tại Bắc Ninh do tai nạn giao thông.

Tòa soạn xin chia buồn cùng gia đình và nhà trường.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN KHI KHÔNG DÙNG PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM KÉP

NGUYỄN VĂN QUÝ
(GV THPT Bến Tre, tỉnh Bến Tre)

LTS: *Theo quy định của Bộ GD–ĐT kể từ năm học 2000–**2001 không được dùng phương pháp nghiệm kép** để giải quyết các bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc của 2 đồ thị. Để giải các bài toán dạng này ta cần dùng kết quả sau :*

Đồ thị của (C) : y = f(x) tiếp xúc với đồ thị của y = g(x) ⇔ Hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ *có nghiệm.*

*Thực tế cho thấy nhiều giáo viên và học sinh rất lúng túng khi giải các bài toán về tiếp tuyến trong chương trình thi đại học mà trước đây được giải bằng phương pháp nghiệm kép. **Diễn đàn dạy học toán** xin giới thiệu bài viết này nhằm tháo gỡ khó khăn hiện nay ở các trường phổ thông, rất mong các bạn trao đổi thêm.*

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, biết tiếp tuyến đi qua $A(4; 1)$.

Giải: $y = 2x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

Đường thẳng (D) đi qua A với hệ số góc k có phương trình : $y = k(x - 4) + 1$

(D) tiếp xúc (C) ⇔ Hệ (I) sau có nghiệm :

$$\text{(I)} \begin{cases} 2x - 1 + \dfrac{1}{x-1} = k(x-1) + 1 - 3k & (1) \\ 2 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 + \dfrac{1}{x-1} = 2(x-1) - \dfrac{1}{x-1} + 1 - 3k \\ k = 2 - \dfrac{1}{(x-1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{3k}{2} \\ k = 2 - \dfrac{9k^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{3k}{2} \\ 9k^2 + 4k - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{3k}{2} \\ k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{76}}{9} \end{cases}$$

Vậy tìm được 2 tiếp tuyến (D_1), (D_2) có phương trình :

$$y = \left(\frac{-2 \pm \sqrt{76}}{9}\right)(x - 4) + 1$$

Nhận xét. Cần chú ý thủ thuật viết $y = k(x-4) + 1$ về dạng $y = k(x-1) + (1 - 3k)$. Khi thay $k = 2 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$ vào (1), ta chỉ thay vào $k(x-1)$ và không thay vào $(1 - 3k)$.

Ví dụ 2: Tìm quỹ tích các điểm M trong mặt phẳng sao cho từ M có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số :

$y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ và 2 tiếp tuyến ấy vuông góc.

Giải: $y = x + 2 + \dfrac{1}{x+1}$. Giả sử đường thẳng (D) đi qua $M(a; b)$ có hệ số góc k, thì phương trình của (D) có dạng :

$y = k(x-a) + b$

$\Leftrightarrow y = k(x+1) + b - (a+1)k$

(D) tiếp xúc (C) ⇔ Hệ (II) sau có nghiệm :

$$\text{(II)} \begin{cases} x + 2 + \dfrac{1}{x+1} = k(x+1) + b - (a+1)k \\ k = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 + \dfrac{1}{x+1} = x + 1 - \dfrac{1}{x+1} + b - (a+1)k \\ k = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(b-1) - (a+1)k}{2} \\ k = 1 - \dfrac{[(b-1) - (a+1)k]^2}{4} \end{cases}$$

Đặt $f(k) = (a+1)^2k^2 + 2[2-(a+1)(b-1)]k + (b-1)^2 - 4$.

Yêu cầu bài toán dẫn đến phương trình $f(k) = 0$ có 2 nghiệm k_1, k_2 khác $\dfrac{b-1}{a+1}$ và $k_1.k_2 = -1$, nghĩa là

$$\begin{cases} a \neq -1 \\ f\left(\dfrac{b-1}{a+1}\right) = \dfrac{4(b-1)}{a+1} - 4 \neq 0 \\ k_1k_2 = \dfrac{(b-1)^2-4}{(a+1)^2} = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ b \neq a+2 \\ (a+1)^2 + (b-1)^2 = 4 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích các điểm M là đường tròn (T) có tâm I (–1; 1) (I là tâm đối xứng của (C)) bán kính $R = 2$, bỏ đi 4 điểm, đó là các giao điểm của (T) với 2 đường tiệm cận của (C) là $x = -1$, $y = x + 2$.

Nhận xét: Nếu ta tịnh tiến theo $\overrightarrow{OI}$ với I (–1; 1) thì phương trình của (C) trong hệ tọa độ IXY là $Y = X + \dfrac{1}{X}$ và giải theo phương pháp trên thì việc tính toán sẽ gọn hơn.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đồ thị (P_1) và (P_2) sau :

$(P_1) : y = x^2 - 5x + 6$ và $(P_2) : y = -x^2 - x - 14$

Giải: Xét đồ thị (D) của $y = ax + b$ và đồ thị (P) của $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$

(D) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow$ Hệ (III) sau có nghiệm

$$\text{(III)} \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = ax + b \\ 2\alpha x + \beta = a \end{cases}$$

$$\text{(III)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-\beta}{2\alpha} \\ \alpha\left(\dfrac{a-\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(\dfrac{a-\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = a\left(\dfrac{a-\beta}{2\alpha}\right) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a-\beta}{2\alpha} \\ (\beta-a)^2 - 4\alpha(\gamma - b) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Vậy (*) là điều kiện để (D) tiếp xúc (P). Áp dụng kết quả (*) có : Đường thẳng (D) là tiếp tuyến chung của (P_1) và (P_2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-5-a)^2 - 4(6-b) = 0 \\ (-1-a)^2 + 4(-14-b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+10a+4b+1=0 \\ a^2+2a-4b-55=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+10a+4b+1=0 \\ a^2+6a-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, b=-10 \\ a=-9, b=2 \end{array}\right.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến chung (D_1) và (D_2) với phương trình $y = 3x - 10$ và $y = -9x + 2$.

Nhận xét. Hệ thức (*) chính là điều kiện để phương trình :

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = ax + b$ có nghiệm kép.

TÍCH NGOÀI ... *(Tiếp trang 11)*

Định lí 5: Cho tam giác ABC và điểm O. Giả sử các đường thẳng AO và BC cắt nhau tại điểm M (khác B, C). Ta có:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{S[OBA]}{S[OCA]}$$

Chứng minh: Gọi $\vec{e}$ là véc tơ chỉ phương của trục BC, ta có:

$$\frac{S[OBA]}{S[OCA]} = \frac{S[BAO]}{S[CAO]} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{MC}} = \frac{\overline{MB}(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{e})}{\overline{MC}(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{e})} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$$

Kết quả sau có thể coi là hệ quả trực tiếp của định lý 4 và cũng có thể coi là hệ quả trực tiếp của định lý 5.

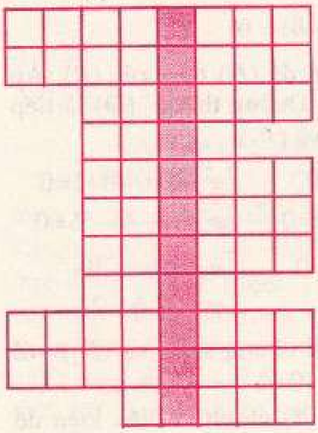
Hệ quả: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên đường thẳng BC. Ta có:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{S[MBA]}{S[MCA]}.$$

(Kỳ sau đăng tiếp)

Ô CHỮ MỪNG XUÂN

Bạn có giải hết được ô chữ này và đoán ra hàng dọc là gì không ? 5 tặng phẩm dành trao cho 5 bạn giải đúng và gửi bài về nhanh nhất.



1) Một loại khối có trục đối xứng.
2) Có độ lớn là 90°
3) Có dưới, có trên
4) Kết quả phép cộng
5) Hãy so sánh 2002 với 2001
6) Điều cần quan tâm khi giải phương trình
7) Một thừa số của tích
8) Nằm cao hơn số đi cùng
9) Điểm B của $\overrightarrow{AB}$
10) Giao của 3 đường đặc biệt trong tam giác
11) Chiếu vuông góc một điểm lên các trục sẽ thấy.

NGỌC MAI

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng
ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?
Họ và tên :
. . . .
Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

Kết quả

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỶ

Chỉ có 5 bạn nhận ra TS. Lê Hải Khôi, nhưng lại có 2 bạn chỉ cho rằng ảnh đó chụp khi TS chưa đến 30 tuổi. Thật sự là "người trong ảnh" có trẻ nhiều so với tuổi nhưng nào trẻ đến thế ?

Xin trao tặng phẩm cho 2 bạn đoán chính xác 100% là ảnh chụp khi "người trong ảnh" đúng 42 tuổi.

1) *Nguyễn Minh Tuấn*, 12B8, THPT Đào Duy Từ, Tp. Thanh Hóa ;

2) *Phạm Hoàng Cơ*, 280A Diên Hồng, Tp. Quy Nhơn, Bình Định

Nào ! Các bạn hãy thật tỉnh, thật sáng suốt tham gia cuộc thi cuối cùng trong năm 2001.

CLB

Kết quả

LỜI GIẢI NGẮN GỌN

Tất cả các bạn đều phát hiện ra không tồn tại a, b, c để $P = \frac{8\sqrt{5}}{25}$.

Đây là sai lầm thường mắc khi dùng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức. Một nguyên nhân xa hơn là nhiều bạn không hiểu đúng ý nghĩa của dấu "≥" và dấu "≤". Không phải khi nào viết "≥" cũng có thể xảy ra đẳng thức "=". Có thể viết 2 ≥ 1 là đúng, nhưng không thể có 2 = 1!

Lời giải đúng như sau

$$1+\frac{a}{5b}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{a}{5b} \geq \frac{6}{5}\sqrt[6]{\frac{a}{b}} \quad (1)$$

Tương tự :

$$1+\frac{b}{5c} \geq \frac{6}{5}\sqrt[6]{\frac{b}{c}} \quad (2) ; \quad 1+\frac{c}{5a} \geq \frac{6}{5}\sqrt[6]{\frac{c}{a}} \quad (3)$$

Nhân theo từng vế của (1), (2), (3) ta có :

$$P \geq \frac{216}{125}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{5b}=\frac{b}{5c}=\frac{c}{5a}=\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow a = b = c$. Do đó P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{216}{125}$.

Chú ý : Có nhiều cách chứng minh $P \geq \frac{216}{125}$

Chẳng hạn :

$$P = 1+\frac{1}{5}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{1}{25}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{125} \geq$$

$$\geq 1+\frac{1}{5}.3+\frac{1}{25}.3+\frac{1}{125}=\frac{216}{125}$$

KIHIVI xin bốc thăm để chọn ra các "bác sĩ may mắn" hơn : *Tạ Hùng Cường*, 11B2, THPT chuyên Tuyên Quang, *Lê Hoàng Phước*, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; *Quế Anh Lê*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh, Nghệ An ; *Phạm Trần Thiên*, 9_2, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn, Quảng Ngãi; *Lê Tôn Khánh*, 8A12, THCS Lê Hồng Phong, Quy Nhơn, Bình Định.

Cảm ơn các bạn

KIHIVI

CÓ SAO $M = \frac{1}{2}$?

Trong quyển sách "Toán nâng cao Đại số 9" của các tác giả V.H.B và T.T có bài toán :

Cho $M = \sqrt{x^2-4x+9}+\sqrt{x^2-4x+8}$

Tính giá trị của biểu thức M biết rằng

$$\sqrt{x^2-4x+9}+\sqrt{x^2-4x+8} = 2$$

Giải : Vì $x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2 + 5 > 0$ và $x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2 + 4 > 0$ nên $M > 0$ và xác định với mọi x.

Ta có $M + 2 = 2\sqrt{x^2-4x+9}$

$\Leftrightarrow M^2 + 4M + 4 = 4(x^2 - 4x + 9)$ (1)

$M - 2 = 2\sqrt{x^2-4x+8}$

$\Leftrightarrow M^2 - 4M + 4 = 4(x^2 - 4x + 8)$ (2)

Trừ từng vế các đẳng thức (1) và (2) ta được

$8M = 4 \Leftrightarrow M = \frac{1}{2}$

Bình luận : Nhưng ... dễ thấy rằng

$$\sqrt{x^2-4x+9}+\sqrt{x^2-4x+8} \geq$$

$$\geq \sqrt{x^2-4x+9}-\sqrt{x^2-4x+8} = 2$$

Cớ sao $M = \frac{1}{2}$?

Bạn có biết M phải là bao nhiêu không ?

RUY TÂN

(Quận Tân Bình - Tp. Hồ Chí Minh)

Nhắn tin :

Các bạn đoạt giải các cuộc thi trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm 2001 hãy mau gửi địa chỉ mới nhất của mình về Tòa soạn.

KẾT QUẢ HAI CHIẾC ĐỒNG HỒ

Nếu gọi x là số phút đồng hồ của Minh chạy nhanh trong 1 ngày thì đồng hồ của Tuấn chạy nhanh $x + 0,5$ phút trong 1 ngày.

12 giờ trưa chủ nhật, cả hai đồng hồ chỉ đúng, Tuấn vặn đồng hồ chậm lại 3 phút, Minh vặn chậm lại 2 phút. Do đó nếu sau y ngày đồng hồ của Tuấn chỉ đúng thì sau y+1 ngày đồng hồ của Minh sẽ chỉ đúng. Ta có hệ

$$\begin{cases} y(x+0,5)=3 \\ (y+1)x=2 \end{cases}$$

Từ đó sẽ có : $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (x = -2 không thỏa mãn).

Suy ra : đồng hồ của Minh chạy nhanh $\frac{1}{2}$ phút một ngày và chỉ đúng lúc 12 giờ trưa thứ năm ; đồng hồ của Tuấn chạy nhanh 1 phút một ngày và chỉ đúng lúc 12 giờ trưa thứ tư.

Xin trao tặng phẩm cho các bạn giải được nhiều cách và trình bày tốt : *Nguyễn Thị Hà Trang*, 7A, THCS Ninh Ích, Ninh Hòa, Khánh Hòa ; *Đỗ Dương Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; *Đào Quang Hòa*, Giáo viên THPT Dân tộc nội trú Đăk Hà, Kon Tum.

Chú ý. Một số bạn giải rất tốt nhưng lại quên không ghi họ, tên và địa chỉ nên... tiếc quá, không gửi tặng phẩm được.

LTN

THIẾT LẬP ĐƯỜNG BAY

Có 10 thành phố $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$. Hai thành phố được gọi là có đường bay trực tiếp nếu như máy bay có thể đi từ thành phố này đến thẳng thành phố kia và ngược lại. Bạn hãy tìm cách thiết lập các đường bay giữa các thành phố trên sao cho :

1) Mỗi thành phố có đường bay trực tiếp đến 3 thành phố khác.

2) Nếu hai thành phố, chẳng hạn A và B, không có đường bay trực tiếp, thì có thành phố thứ ba, chẳng hạn là C, sao cho có đường bay trực tiếp giữa A và C, giữa B và C.

LÊ QUANG NẪM

(ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

35 NĂM KHỐI PHỔ THÔNG CHUYÊN TOÁN TIN - ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

Năm học 1966-1967 khối Phổ thông chuyên Toán (PTCT) thuộc khoa Toán trường ĐHSP Hà Nội được thành lập. Khóa học đầu tiên gồm 33 học sinh được tập trung tại huyện Phủ Cừ tỉnh Hải Hưng cũ (nay là tỉnh Hưng Yên) sau chuyển về xã Viên Nội huyện Ứng Hòa tỉnh Hà Tây.

Từ năm học 1995-1996 khối PTCT tuyển thêm một lớp chuyên Tin và trở thành khối Phổ thông chuyên Toán Tin (PTCTT) của trường ĐHSP Hà Nội.

Hiện nay 2/3 số giáo viên toán của khối PTCTT đã có bằng Thạc sĩ trở lên trong đó có 1 TSKH, 2 TS, 2 nghiên cứu sinh.

Những thành tích trong đào tạo và nghiên cứu khoa học

• Đã đào tạo 35 khóa trong đó 32 khóa đã tốt nghiệp với 1150 học sinh. Từ 1990 đến nay có 889 học sinh ra trường. Năm học này có 230 học sinh chuyên Toán, 125 học sinh chuyên Tin học.

• Hàng năm hầu hết học sinh PTCTT đều đỗ vào các trường Đại học với kết quả cao. Năm nào cũng có một số học sinh đạt thủ khoa, có năm 3-4 học sinh đạt thủ khoa của 2 hoặc 3 trường đại học.

• Trong 12 khóa đào tạo đầu tiên (khoảng 250 học sinh) đã có hơn 100 học sinh bảo vệ xong luận án Tiến sĩ ở độ tuổi 27 đến 40 tuổi, trong đó có hơn 10 người đã được phong học hàm giáo sư và phó giáo sư.

Những học sinh PTCTT ĐHSP Hà Nội trưởng thành hầu hết là những cán bộ nghiên cứu có uy tín ở các Viện nghiên cứu khoa học thuộc các lĩnh vực Toán, Vật lý, Năng lượng, Tin học, Sinh vật học..., cán bộ giảng dạy ở các trường Đại học trong và ngoài nước hoặc THPT. Một số cựu học sinh đã trở thành những chuyên gia về kinh tế, những nhà doanh nghiệp giỏi.

• Bình quân mỗi năm đạt 6 giải học sinh giỏi Toán quốc gia và 6 học sinh giỏi Tin quốc gia. Từ năm 1974 năm nào khối PTCTT ĐHSP Hà Nội cũng có học sinh tham dự đội tuyển Toán quốc gia thi Olympic Toán quốc tế. Tổng số đã đạt 32 giải học sinh giỏi Toán và Tin quốc tế trong đó có 6 giải nhất, 16 giải nhì, 10 giải ba, đặc biệt có 1 giải Toán quốc tế với số điểm tối đa.

• Tổ Toán của khối PTCTT đã xây dựng chương trình Toán THPT cho chuyên Toán, đã viết được toàn bộ giáo trình và một số sách Toán dùng cho chuyên Toán.

• Khối PTCTT ĐHSP Hà Nội đã phối hợp với khoa Toán - Tin tổ chức một tủ sách Toán trong thư viện khoa Toán - Tin để phục vụ cho nhu cầu học tập, nghiên cứu khoa học của học sinh và giáo viên.

• Khối PTCTT ĐHSP HN đã được Nhà nước tặng thưởng một *Huân chương Lao động hạng ba*, một *Huân chương Lao động hạng nhì*.

Khối PTCTT ĐHSP Hà Nội là một trong những cơ sở phát hiện, bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán - Tin có chất lượng cao, có uy tín trong ngành giáo dục và toàn xã hội.

Các thế hệ Ban phụ trách khối PTCTT-ĐHSP Hà Nội

Từ trái qua phải : Doãn Minh Cường, Nguyễn Huy Đoan, Lê Thị Châm, Phan Văn Viện, Nguyễn An Nghi

ISN : 0866-0853 | Chế bản tại Tòa soạn
Chỉ số : 12884 | In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ | Giá : 3000đ
Mã số : 8BT96M1 | In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2001 | Ba nghìn đồng