ThS. VÕ GIANG GIAI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
Đại Số Tổ Hợp

(Tái bản lần thứ 2)

12

- DÙNG CHO HỌC SINH 12
- ÔN THI TÚ TÀI VÀ CÁC KÌ THI QUỐC GIA

ĐHQG Hà Nội NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. VÕ GIANG GIAI

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN
ĐẠI SỐ TỔ HỢP 12

DÙNG CHO HỌC SINH LỚP 12

LUYỆN THI TÚ TÀI

- **BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI**
- **GIỚI THIỆU CÁC ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM**

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ TỔ HỢP

* Tóm tắt lí thuyết
* Tính toán và rút gọn biểu thức
* Giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

1. *Quy tắc nhân*

Một công việc được tiến hành qua n giai đoạn :

+ Giai đoạn 1 : có m_1 cách thực hiện
+ Giai đoạn 2 : có m_2 cách thực hiện

. . . .

+ Giai đoạn n : có m_n cách thực hiện

Như vậy có tất cả : $m_1 . m_2 . \ldots . m_n$ cách để thực hiện toàn bộ công việc.

Ví dụ : Có hai phái đoàn, phái đoàn I có 9 người và phái đoàn II có 11 người, mỗi người của phái đoàn này bắt tay tất cả các người của phái đoàn kia (và ngược lại).

Khi đó theo quy tắc nhân, ta có tất cả :

$$9 \times 11 = 99 \text{ cái (bắt tay)}$$

2. *Chỉnh hợp* (không lặp)

Cho một tập hợp n phần tử khác nhau. Chỉnh hợp chập k từ n phần tử $(1 \le k \le n)$ là một *nhóm có thứ tự* gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Kí hiệu : A_n^k : số lượng chỉnh hợp chập k từ n phần tử.

Công thức :
$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Chứng minh : Để có một chỉnh hợp chập k ta có thể chọn phần tử thứ nhất n cách, sau đó phần tử thứ hai theo sau (n – 1) cách ... phần tử thứ k là n – (k – 1) cách. Suy ra có :

$$n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ (cách)}$$

Nhận xét :

Hai chỉnh hợp khác nhau khi :

+ Có ít nhất một phần tử khác nhau
+ Hoặc có ít nhất một thứ tự sắp xếp khác nhau

Ví dụ : Có bao nhiêu cách sắp 3 người vào một cái ghế dài 6 chỗ ngồi ?

Ta nhận thấy sắp 3 người vào một cái ghế dài 6 chỗ ngồi, tức là lấy 3 vị trí trong 6 vị trí (có kể thứ tự). Vậy mỗi cách sắp xếp là một chỉnh hợp chập 3 từ 6 phần tử, nên số cách sắp là :

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6.5.4 = 120 \text{ (cách khác nhau)}$$

3. *Chỉnh hợp lặp*

Cho một tập hợp có n phần tử khác nhau. Chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử là *một nhóm có thứ tự* gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho, mỗi phần tử có thể xuất hiện 1, hoặc 2 ... hoặc k lần trong nhóm được tạo thành (k có thể ≥ n hoặc k ≤ n).

Kí hiệu : $\overline{A}_n^k$: Số chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử

Công thức : $\boxed{\overline{A}_n^k = n^k}$

Chứng minh : Để có một chỉnh hợp lặp chập k (từ n phần tử), ta có thể chọn phần tử thứ nhất n cách, sau đó phần tử thứ hai theo sau n cách ..... phần tử thứ k cũng n cách. Vậy ta có tất cả :

$$\overline{A}_n^k = \underbrace{n.n\ldots n}_{k \text{ lần}} = n^k \quad \text{(cách khác nhau)}$$

Ví dụ : Mỗi vé số Đồng Nai có 6 chữ số. Hỏi mỗi đợt phát hành có bao nhiêu vé tất cả ?

Ta nhận thấy :

+ Mỗi vé số là một nhóm có thứ tự gồm 6 chữ số lấy từ tập hợp 10 phần tử {0, 1, ..., 9}.
+ Mỗi chữ số có thể xuất hiện nhiều lần trong một nhóm (tối đa là sáu lần) vì vậy mỗi vé số được xem là một chỉnh hợp lặp chập 6 từ 10 phần tử.

Số vé số phát hành mỗi đợt là : $\overline{A}_{10}^6 = 10^6$ vé

4. *Hoán vị*

Cho tập hợp có n phần tử khác nhau. Hoán vị n phần tử là *một nhóm có thứ tự* gồm đủ n phần tử đã cho.

Như vậy :

+ Mỗi hoán vị là sự thay đổi chỗ các phần tử trong tập hợp.
+ Hoán vị n phần tử là chỉnh hợp (không lặp) chập n từ n phần tử.

Kí hiệu : P_n : Số hoán vị n phần tử.

Công thức : $$\boxed{P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!}$$

Ví dụ : Có mấy cách sắp xếp khác nhau 4 người vào một bàn ăn có bốn chỗ ngồi ? Ta thấy mỗi cách sắp xếp 4 người vào 1 bàn (4 chỗ) là 1 hoán vị của 4 phần tử. Như vậy số cách sắp xếp trên là :

$P_4 = 4! = 2.3.4 = 24$ (cách sắp xếp khác nhau)

5. *Tổ hợp*

Cho tập hợp n phần tử khác nhau.

Tổ hợp chập k từ n phần tử $(0 \le k \le n)$ một nhóm *không phân biệt thứ tự* gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho.

Kí hiệu : C_n^k : Số tổ hợp chập k từ n phần tử

Công thức : $$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Chứng minh : Các chỉnh hợp nếu chỉ khác về thứ tự sắp xếp thì được coi như cùng 1 tổ hợp. Khi đó, ta suy ra : nếu đem mỗi tổ hợp chập k này hoán vị theo mọi cách sẽ được k! chỉnh hợp chập k, tức là :

$$K!\,C_n^k = A_n^k \Leftrightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \text{(ĐPCM)}$$

Ví dụ : Một hộp có 10 viên bi (đỏ và đen). Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi để kiểm tra (bi đỏ và bi đen) thì có mấy cách lấy ra 4 viên ?

Lấy 4 viên ngẫu nhiên để kiểm tra (đỏ và đen). không quan tâm đến thứ tự các bi đó, nên đó là một tổ hợp chập 4 của 10 phần tử. Vậy số cách chọn 4 viên trong 10 viên là :

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = 210 \text{ (cách khác nhau)}$$

Tính chất cơ bản của tổ hợp :

a) $C_n^k = C_n^{n-k}$	$(0 \le k \le n)$
b) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$	$(1 \le k \le n-1)$

Chứng minh :

a) Ta có : $C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!} = C_n^k$

b) Cũng từ định nghĩa :

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}.\frac{n}{(n-k).k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM).}$$

6. ***Nhị thức Newton*** (với $a, b \in R$, $1 \le n \in Z$)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}.b^k \qquad ((1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k.b^{n-k} = C_n^o a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^n b^m$$

$$= C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + ... + C_n^o b^n$$

Chứng minh : Ta chứng minh nhị thức bằng nguyên lí quy nạp :

* $n = 1$: Đẳng thức (1) luôn đúng

* $n = m$: Giả sử (1) đúng tức là : $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k}.b^k$

* $n = m + 1$: Ta có :

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m.(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k}.b^k\right)(a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}$$

$$= C_m^o a^{m+1} + C_m^1 a^m b + ... + C_m^m ab^m$$

$$+ C_m^o a^m b + C_m^1 a^{m-1} b^2 + ... + C_n^n a l b^{nm+1}$$

Vì : $\begin{cases} C^o_m = C^o_{m+1} = C^m_m = C^{m+1}_{m+1} = 1 \\ C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1} (1 \le k \le n-1) \end{cases}$

Suy ra :

$$\begin{aligned}(a+b)^{m+1} &= C^o_{m+1}a^{m+1} + (C^o_m + C^1_m)a^m b + \ldots + C^{m+1}_{m+1}b^{m+1} \\ &= C^o_{m+1} + a^{m+1} + C^1_{m+1}a^m b + \ldots + C^{m+1}_{m+1}b^{m+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} C^k_m a^{m+1-k} b^k\end{aligned}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp (1) đúng.

7. *Một số công thức khác*

* *Quy ước :* $0! = 1! = 1$
* *Kí hiệu :* $(2n)!! = 2.4.6 \ldots (2n)$

  $(2n+1)!! = 1.3.5 \ldots (2n+1)$
* *Các tính chất :*

  a) $(n+1)! = n!(n+1)$

  b) $\dfrac{n!}{k!} = (k+1)(k+2) \ldots n$ (với $k \le n$)
* ***Giới thiệu tam giác Pascal :***

Nhờ tính chất $C^k_n = C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1}$ ta có thể lần lượt tính được các hệ số của nhị thức Newton $(a+b)^n$ dưới một dãy tam giác, gọi là tam giác Pascal

Dòng

n = 0 ⟵	1
n = 1 ⟵	1 1
n = 2 ⟵	1 2 1
n = 3 ⟵	1 3 3 1
n = 4 ⟵	1 4 6 4 1
n = 5 ⟵	1 5 10 10 5 1
n = 6 ⟵	1 6 15 20 15 6 1
n = 7 ⟵	1 7 21 35 35 21 7 1

. . . .

$(a + b)^0 = 1$ (với $a + b \neq 0$)

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

. . . .

* **Chú ý :** *Trong dòng thứ n (n = 0, 1, 2 ...) của bảy tam giác Pascal dưới đây, có các hệ số của sự khai triển $(a + b)^n$, trừ hệ số hai đầu bằng 1, còn mỗi hệ số khác đều bằng tổng hai hệ số tương ứng dòng trên.*

Ví dụ : (n = 5) ⟵		1	5	10	10	5	1
	1	1+5	5+10	10+10	10+5	5+1	1
	=	=	=	=	=	=	=
(n = 6) ⟵	1	6	15	20	15	6	1

B. TÍNH TOÁN VÀ RÚT GỌN MỘT BIỂU THỨC

Phần này chủ yếu xoay quanh "mối liên hệ" các công thức P_n, A_n^k, C_n^k .... dưới những biến đổi đơn giản.

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = \dfrac{A_7^6 + A_7^5}{A_7^4} + C_{2006}^{2006}$ **b)** $B = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{7!4!}{101}\left(\dfrac{8!}{3!5!} - \dfrac{9!}{2!7!}\right)$

Giải

a) Ta có : $A_7^6 = \dfrac{7!}{(7-6)!} = 7!$

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = \frac{7!}{2}$$

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{6}$$

$$C_{2006}^{2006} = 1$$

Suy ra : $A = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{6}} + 1 = 9 + 1 = 10.$

b) Nhân phối hợp vào ta có :

$$B = \frac{3}{2}\left(\frac{7!}{5!}.\frac{4!}{3!}.\frac{8!}{10!} - \frac{7!}{7!}.\frac{9!}{10!}.\frac{4!}{2!}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{42.4}{9.10} - \frac{3.4}{10}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{28}{15} - \frac{6}{5}\right) = \frac{3}{2}.\frac{10}{5} = 1.$$

Bài 2. Rút gọn biểu thức : $C = \frac{5!xa!}{(a-1)a \times (a-2)!4!} + 6!$ $(2 \le a \in Z)$.

Giải

Ta có : $5! = 4!5$

$a! = (a-2)!(a-1)a$

Suy ra : $C = \frac{4!.5}{(a-1)a}.\frac{(a-2)!(a-1)a}{(a-2)!4!} + 6! = 5 + 320 = 725.$

Bài 3. Tính giá trị các biểu thức sau :

a) $D = \frac{2001!}{2000!-1999!}.\frac{1999}{2001} + 0!$ **b)** $E = \frac{39A_{45}^{10}}{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}} + 5!$

Giải

a) Ta có : $2001! = 1999!.2000.2001$

$2000! = 1999!.2000$

Suy ra : $D = \frac{1999!.2000.2001}{1999!.2000 - 1999!}.\frac{1999}{2001} + 1$

$$= \frac{2000.2001}{2000-1}.\frac{1999}{2001} + 1 = 2000 + 1 = 2001.$$

b) Ta có : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $(k \le n)$, suy ra :

$$E = \frac{39.\frac{1}{39!}}{\frac{1}{35!} + \frac{1}{38!}} + 5! = \frac{39}{38.39 + 39} + 5!$$

$$= 120 + \frac{39}{39^2} = \frac{1}{39} + 120 = \frac{4681}{39}.$$

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau :

a) $Q = \frac{A_5^2}{2.P_2} + \frac{A_{10}^5}{14P_5}$ **b)** $R = A_5^2\left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1}\right)$

Giải

a) Ta có : $Q = \dfrac{5!}{3!}\cdot\dfrac{1}{2.2!} + \dfrac{10!}{5!}\cdot\dfrac{1}{14.5!} = 5 + \dfrac{6.7.8.9.10}{14.2.3.4.5} = 5 + 18 = 23$

b) $R = \dfrac{5!}{3!}\left(\dfrac{5!}{5!} + \dfrac{4!2!}{5!} + \dfrac{3!3!}{5!} + \dfrac{2!4!}{5!}\right)$

$= 20\left(1 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{5}\right) = 20 + 8 + 6 + 8 = 42.$

Bài 5. Tính $T = C_{15}^{13} + 3C_{10}^{7} - C_{25}^{23}$

Giải

Ta có : $C_{15}^{13} = \dfrac{15!}{2!13!} = 7.15 = 105$

$C_{10}^{7} = \dfrac{10!}{7!3!} = 8.9.\dfrac{10}{6} = 120$

$C_{25}^{23} = \dfrac{25!}{23!2!} = \dfrac{24.25}{2} = 300$

Vậy : $T = 105 + 360 - 300 = 165.$

Bài 6. Tính giá trị của : $L = \dfrac{21(P_3 - P_2)}{20\left(\dfrac{P_5}{A_5^4} + \dfrac{P_4}{A_5^3} + \dfrac{P_3}{A_5^2} + \dfrac{P_2}{A_5^1}\right)}$

Giải

Ta có : $P_2 = 2! = 2$; $P_3 = 3! = 6$

$\dfrac{P_5}{A_5^4} = \dfrac{5!}{\dfrac{5!}{(5-4)!}} = 1$; $\dfrac{P_4}{A_5^3} = \dfrac{4!}{\dfrac{5!}{2!}} = \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{P_3}{A_5^2} = \dfrac{3!}{\dfrac{5!}{3!}} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$; $\dfrac{P_2}{A_5^1} = \dfrac{2!}{\dfrac{5!}{4!}} = \dfrac{2}{5}$

Suy ra : $L = \dfrac{21.4}{20\left(1 + \dfrac{11}{10}\right)} = \dfrac{84}{42} = 2.$

Bài 7. Tính giá trị của : $P = \dfrac{7!4!}{10!}\left(\dfrac{9!}{2!7!} - \dfrac{8!}{3!5!}\right)$.

Giải

Ta có : $\dfrac{7!4!}{10!} = \dfrac{7!1.2.3.4}{7!8.9.10} = \dfrac{1}{30}$

$\dfrac{8!}{3!5!} = \dfrac{5!6.7.8}{3!5!} = 56$

$\dfrac{9!}{2!7!} = 36$

Do đó : $P = \dfrac{1}{30}(-20) = -\dfrac{2}{3}$.

Bài 8. Tính $Q = P_1.A_2^1 + P_2.A_3^2 + P_3A_4^3 + P_4.A_5^4 - P_1.P_2.P_3.P_4$

Giải

Ta có : $Q = P_1.A_2^1 + P_2.A_3^2 + P_3A_4^3 + P_4.A_5^4 - P_1.P_2.P_3.P_4$

$= 1!\dfrac{2!}{1!} + 2!\dfrac{3!}{1!} + 3!\dfrac{4!}{1!} + 4!\dfrac{5!}{1!} - 1!\,2!\,3!\,4!$

$= 2! + 2!\,3! + 3!\,4! + 4!\,5! - 1!\,2!\,3!\,4!$

$= 2 + 12 + 6 \times 24 + 24 \times 120 - 2 \times 6 \times 24$

$= 14 + 144 + 2880 - 288 = 2750.$

Bài 9. Rút gọn : $T = \dfrac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}} + \dfrac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$,

trong đó : m, k ∈ N, n > k.

Giải

Ta có : • $\dfrac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}} = \dfrac{(n+2)!}{\dfrac{n!}{(n-k)!}.(n-k)!} = (n+1)(n+2)$

• $C_8^{15} + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10} = C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^9 + C_{15}^{10}$

$= C_{16}^9 + C_{16}^{10} = C_{17}^{10}$

$\Rightarrow \quad T = (n+1)(n+2) + 1 = n^2 + 3n + 3.$

Bài 10. Rút gọn : $H = \dfrac{C_n^1.C_n^3}{(C_n^2)^2} + \dfrac{P_n.P_{n+1}.(n^2-n)^2}{4(C_n^2)^2.(n!)^2}$, $n \geq 2$.

Giải

Ta có : • $\dfrac{C_n^1 . C_n^3}{(C_n^2)^2} = \dfrac{\dfrac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \dfrac{n!}{3!(n-3)!}}{\left(\dfrac{n!}{2!(n-2)!}\right)^2} = \dfrac{4(n-2)!(n-2)!}{6(n-1)!(n-3)!} = \dfrac{2(n-22)}{3(n-11)}$

• $\dfrac{P_n . P_{n+1} . (n^2 - n)^2}{4(C_n^2)^2 . (n!)^2} = \dfrac{(n!)^2 (n+1)}{4 \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}} \cdot \dfrac{n^2 . (n-1)^2}{(n!)^2} = n + 1$

Vậy : $H = \dfrac{3n^2 - 2n - 7}{3n - 3}$.

C. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Chú ý trong phần này miền nghiệm hầu hết xét trên N = {0, 1, 2, ...}

Phần 1 : Các bài toán về phương trình và bất phương trình

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $(n + 1)! = 6[n! - (n - 1)!]$ **b)** $2C_7^n = C_7^{n-1} + C_7^{n+1}$

Giải

a) Điều kiện : $1 \le n \in Z$

Do $(n + 1)! = (n - 1)!n(n + 1)$

$n! = (n - 1)!n$

Nên PT $\Leftrightarrow n(n + 1) = 6(n - 1) \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 = 0$

$\Leftrightarrow n \in \{2, 3\}$.

b) Điều kiện : $\begin{cases} 1 \le n \le 6 \\ n \in Z \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow 2\dfrac{7!}{n!(7-n)!} = \dfrac{7!}{(n-1)!(8-n)!} + \dfrac{7!}{(n+1)!(6-n)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{n(7-n)} = \dfrac{1}{(8-n)(7-n)} + \dfrac{1}{(n+1)n}$

(vì $(7 - n)! = (6 - n)!(7 - n)$, $(8 - n)! = (6 - n)!(7 - n)(8 - n)$)

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{n(7-n)} = \dfrac{(n+1)n + (8-n)(7-n)}{(8-n)(7-n)(n+1)n}$

$$\Leftrightarrow \quad 2(8-n)(n+1) = n^2 + n + (n^2 - 15n + 56)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(7n - n^2 + 8) = 2n^2 - 14n + 56$$

$$\Leftrightarrow \quad 4n^2 - 28n + 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 7n + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} n = 5 \text{ (nhận)} \\ n = 2 \text{ (nhận)} \end{array}\right.$$

Bài 2. Giải phương trình : $A_n^6 + A_n^5 = A_n^4$

Giải

Điều kiện : $6 \le n \in Z$

$$\text{PT} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{(n-6)!} + \frac{n!}{(n-5)!} = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n-5} = \frac{1}{(n-5)(n-4)}$$

(vì : $(n-4)! = (n-6)!(n-5)(n-4), (n-5)! = (n-6)!(n-5)$)

$$\Leftrightarrow \quad (n-5)(n-4) + n - 4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 9n + 20 + n - 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 - 8n + 16 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (n-4)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n - 4 = 1 \ (\text{vì } n \ge 6) \quad \Leftrightarrow \quad n = 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \varnothing.$$

Bài 3. Giải các phương trình :

a) $A_n^2 = 12$ b) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7}{2}n$

(Câu (b) chính là đề thi trường Cao đẳng Hải quan năm 1998)

Giải

a) Điều kiện : $2 \le n \in Z$

$$\text{PT} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{(n-2)!} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)n = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 - n - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} n = 4 \\ n = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad n = 4$$

b) Điều kiện : $3 \le n \in Z$

$$\text{PT} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{7}{2}n$$

$$\Leftrightarrow \quad n + 3(n-1)n + (n-2)(n-1)n = 21n$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 + 3n - 3n + n^2 - 3n + 2 = 21 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad n = 4.$$

Bài 4. Giải các phương trình :

a) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$ b) $\frac{1}{2}P_{x+3} = 360\,A_x^5.(x-5)!$

Giải

a) **Điều kiện :** $2 \le x \in Z$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2.\frac{x!}{(x-2)!} + 50 = \frac{2x!}{(2x-2)!}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x + 25 = (2x-1)x \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 3.$$

b) **Điều kiện :** $5 \le x \in Z$

$$\text{PT} \Leftrightarrow (x+3)! = 720.\frac{x!}{(x-5)!}.(x-5)!$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) = 720$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) = 8.9.10 \qquad ((1)$$

* Nếu : $x = 7$ thỏa (1)

* Nếu : $x > 7 \Rightarrow (x+1)(x+2)(x+3) > 8.9.10$

* Nếu : $2 \le x \le 7 \Rightarrow (x+1)(x+2)(x+3) < 8.9.10$

Vậy $x = 7$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chú ý : *Có thể giải câu (b) theo 2 cách khác nhau như sau :*

Cách 1 :

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) = 720$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 720$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x - 714 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)(x^2 + 13x + 102) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x^2 - 13x + 102 = 0 \ \ (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7$$

Cách 2 :

Xét $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ trên $[2, +\infty)$

$f'(x) = (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) > 0, \ \forall x \ge 2$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[2, +\infty)$

Mà $f(7) = 720$

Vậy : $x = 7$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 720$ trên $[2, +\infty)$.

Bài 5. Giải phương trình : $\dfrac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \dfrac{24}{23}$

(Đại học An ninh – Cảnh sát năm 1998)

Giải

Điều kiện : $4 \le n \in Z$

PT $\Leftrightarrow \dfrac{23.n!}{(n-4)!} = 24\left[\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} - \dfrac{n!}{(n-4)!4!}\right]$

$\Leftrightarrow 23n(n-1)(n-2)(n-3) =$

$$= 24\left[(n+1)n(n-1) - \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\right]$$

$\Leftrightarrow 23(n-2)(n-3) = 24(n+1) - (n-2)(n-3)$

$\Leftrightarrow (n-2)(n-3) = n + 1$

$\Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 = n + 1$

$\Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} n = 1 & \text{(loại)} \\ n = 5 & \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 5.$

Bài 6. Giải phương trình : $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$

(Đại học Ngoại ngữ Hà Nội năm 2000)

Giải

Điều kiện : $3 \ge x \in Z$

PT $\Leftrightarrow \dfrac{x!}{1!(x-1)!} + 6.\dfrac{x!}{2!(x-2)!} + 6.\dfrac{x!}{3!(x-3)!} = 5x^2 - 14x$

$\Leftrightarrow x + 3x(x-1) + (x-1)(x-2) = 9x^2 - 14x$

$\Leftrightarrow 1 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = 9x - 14$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 2 & \text{(loại)} \\ x = 7 & \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 7.$

Bài 7. Tìm k thuộc N để : $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$.

(Cao đẳng Sư phạm TP. HCM năm 2000)

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 0 \le k \le 12 \\ k \in Z \end{cases}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{14!}{k!(14-k)!} + \frac{14!}{(k+2)!(12-k)!} = 2.\frac{14!}{(k+1)!(13-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(k+1)(13-k)}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k+2) + (14-k)(13-k) = 2(14-k)(k+2)$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 3k + 2 + k^2 - 27k + 182 = 2(12k - k^2 + 28)$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 - 48k + 128 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 12k + 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} k = 4 & \text{(nhận)} \\ k = 8 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Bài 8. Giải phương trình : $C_{x+8}^{x+3} = 5.A_{x+6}^3$.

Giải

Điều kiện : $-3 \le x \in \mathbb{Z}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{(x+8)!}{5!(x+3)!} = 5.\frac{(x+6)!}{(x+3)!} \Leftrightarrow (x+7)(x+8) = 5.5! = 600$$

$$\Leftrightarrow (x+7)(x+8) = 600 \Leftrightarrow x^2 + 15x - 544 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 17 \\ x = -32 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 17.$$

Bài 9. Giải phương trình : $\dfrac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} = \dfrac{15}{(n-1)!}$.

Giải

Điều kiện : $1 \le n \in \mathbb{Z}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{n!(n+2)!} = \frac{15}{(n-1)!} \quad (1)$$

Vì $\begin{cases} (n+4)! = (n+2)!.(n+3)(n+4) \\ n! = (n-1)!n \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow (n+3)(n+4) = 15 \Leftrightarrow n^2 - 8n + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 6 \end{array}\right.$$

Bài 10. Giải phương trình : $C_6^3.x^{\frac{3}{2(\lg x+1)}}.x^{\frac{1}{4}} = 100\,C_2^1$.

Giải

Điều kiện : $x > 0$

Ta có : $\begin{cases} C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{4.5.6}{2.3} = 20 \\ C_2^1 = \dfrac{2!}{1!1!} = 2 \end{cases}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \quad 20.\,x^{\frac{3}{2(\lg x+1)}+\frac{1}{4}} = 200 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{3}{2(\lg x+1)} + \frac{1}{4}\right]\lg x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (6 + \lg x + 1)\lg x = 4(\lg x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lg x + 7)\lg x = 4(\lg x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lg x = 1 \\ \lg x = -4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \dfrac{1}{10^4} \end{array}\right.$$

Bài 11. Giải phương trình : $C_n^4 = C_n^3 + \dfrac{5}{4}A_{n-1}^2$.

Giải

Điều kiện : $4 \le n \in \mathbb{Z}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \quad \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{5}{4}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{4!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{n-3} \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{4n}{n-3} + \frac{30}{n-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad n(n-3) = 4n + 30$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 - 7n - 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} n = -3 \text{ (loại)} \\ n = 10 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad n = 10.$$

Bài 12. Giải phương trình : $2^n = n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Cách 1 :

* Với $n = 1$: thỏa phương trình.
* Với $n \ge 2$: ta có :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}.1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k > C_n^0 + C_n^1 = 1 + n$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $n = 1$.

Cách 2 :

* Với $n = 1$: thỏa phương trình.

* Với $n \ge 2$: Lúc đó :

Xét $f(n) = 2^n - (n + 1)$

$f'(n) = 2^n\ln 2 - 1 > 2^n\ln\sqrt{e} - 1 \ge 2^{n-1} - 1 > 0$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[2, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(n) \ge f(2) > 0$

$\Rightarrow$ $2^n > n + 1, \forall n \ge 2$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất n = 1.

Chú ý : *Nếu dùng trực tiếp BĐT Bernoulli*

$2^n = (1 + 1)^n \ge 1 + n.1 \ge n + 1 \Rightarrow 2^n \ge n + 1$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ n = 1.

Bài 13. Giải phương trình : $\dfrac{1}{C_4^n} = \dfrac{1}{C_5^n} + \dfrac{1}{C_6^n}$.

Giải

Điều kiện : $n \in [0, 4) \cap \mathbb{Z}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{n!(4-n)!}{4!} = \frac{n!(5-n)!}{5!} + \frac{n!(6-n)!}{6!}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{5-n}{5} + \frac{(5-n)(6-n)}{5.6}$$

$$\Leftrightarrow 30 = 6(5-n) + (n-5)(n-6)$$

$$\Leftrightarrow 30 = 30 - 6n + n^2 - 11n + 30$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 17n + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = 15 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 2.$$

Bài 14. Giải các phương trình sau :

a) $C_{18}^x = C_{18}^{x+2}$ b) $14.3!.C_{x+2}^x = A_{x+4}^4$.

Giải

a) Điều kiện : $\begin{cases} 0 \le x \le 16 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{18!}{x!(18-x)} = \frac{18!}{(x+2)!(16-x)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(18-x)(17-x)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 35x + 306 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow 38x = 304 \Leftrightarrow x = 8.$$

b) Điều kiện : $0 \le x \in Z$

$$PT \Leftrightarrow 84.\frac{(x+2)!}{x!2!} = \frac{(x+4)!}{x!} \Leftrightarrow 42 = (x+3)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7x - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -10 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3$$

Chú ý : *Sau đây là điều còn bỏ ngỏ nên dành cho các bạn suy nghĩ :*

$$C_{18}^{x} = C_{18}^{x+2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x + 2 \\ x + x + 2 = 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 8$$

Đúng hay sai ? (đúng lúc nào, và sai lúc nào ?)

Tổng quát hơn : Nếu $C_n^k = C_n^l$ $(0 \le k, l \le n)$ thì $\left[\begin{array}{l} k = l \\ k + l = n \end{array}\right.$.

Điều này đúng hay sai các bạn tự làm "thử" xem như một bài tập.

Bài 15. Giải các phương trình sau :

a) $A_n^2 - A_n^1 = 3$ **b)** $A_n^1 . C_n^{n-2} = 24.$

Giải

a) Điều kiện : $2 \le n \in Z$

$$PT \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3 \Leftrightarrow n(n-1) - n = 3$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \text{ (loại)} \\ n = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 3.$$

b) Điều kiện : $2 \le n \in Z$

$$PT \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} - \frac{n!}{(n-2)!2!} = 24$$

$$\Leftrightarrow n.n(n-1) = 18 \Leftrightarrow n^2(n-1) = 4^2.3 \qquad (1)$$

Cách 1 :

* Nếu $n = 4$: thỏa (1)
* Nếu $m > 4 \Rightarrow n^2(n-1) > 4^2.3$
* Nếu $2 \le n < 4 \Rightarrow n^2(n-1) < n^2.3$

Vậy $n = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 2 : Xét $f(n) = n^2(n-1)$ trên $[2, +\infty)$

$f(4) = 4^2.3$

$$f'(n) = 3n^2 - 2n = n(3n - 2) > 0$$

$\Rightarrow$ f tăng trên $[2, +\infty)$

Vậy n = 4 là nghiệm duy nhất của phương trình $f(n) = 4^2.3$

Cách 3 :

(1) $\Leftrightarrow$ $n^3 - n^2 - 2n - 48 = 0$ $\Leftrightarrow$ $(n - 4)(n^2 + 3n + 12) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 4 \\ n^2 + 3n + 12 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 4.$$

Bài 16. Giải các bất phương trình :

a) $A_n^3 + 15 < 15n$ b) $A_n^3 < A_n^2 + 12.$

Giải

a) Điều kiện : $3 \le n \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!} + 15 < 15n \Leftrightarrow n(n - 1)(n - 2) + 15 < 15n$

$\Leftrightarrow n(n - 1)(n - 2) < 15(n - 1)$

$\Leftrightarrow n(n - 2) < 15$ (vì $n - 1 > 0$)

$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 15 < 0 \Leftrightarrow -3 < n < 5$

Vì $3 \le n \in Z \Rightarrow n \in \{3, 4\}.$

b) Điều kiện : $3 \le n \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-3)!} < \dfrac{n!}{(n-2)!} + 12$

$\Leftrightarrow n(n - 1)(n - 2) < n(n - 1) + 12$

$\Leftrightarrow n(n - 1)(n - 3) < 12$ (1)

Cách 1 :

(1) $\Leftrightarrow$ $n^3 - 4n + 3n^2 - 12 < 0$ $\Leftrightarrow$ $(n - 4)(n^2 + 3) < 0$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} n < 4 \\ \text{vì } 3 \le n \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow n = 3.$$

Cách 2 :

* Nếu $n \ge 4 \Rightarrow n(n - 1)(n - 3) \ge 4.3.1 = 12$

* Nếu $n < 4 \Rightarrow n(n - 1)(n - 3) < 4.3.1 = 12$

Vậy (1) $\Leftrightarrow n < 4$ Cùng với $3 \le n \in Z \Rightarrow n = 3$ (giống cách 1).

Cách 3 :

Xét $f(n) = n(n-1)(n-3)$ trên $[3, +\infty)$

Thì $f'(n) = (n-1)(n-3) + n(n-3) + n(n-1) > 0$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow$ $f(n) < f(4)$ $\Leftrightarrow$ $n < 4$

Cùng với $3 \le n \in Z$ $\Rightarrow$ $n = 3$ (giống cách 1, 2).

Bài 17. Giải bất phương trình : $(n!)^3 C_n^n . C_{2n}^n . C_{3n}^n < 720.$

Giải

Điều kiện : $0 \le n \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow$ $(n!)^3 \dfrac{n!}{0!n!} . \dfrac{(2n)!}{n!n!} . \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!} < 720$ $\Leftrightarrow$ $(3n)! < 720$ (1)

* Nếu $n > 2$ $\Rightarrow$ $(3n)! > (3.2)! = 720$
* Nếu $0 \le n \le 2$ $\Rightarrow$ $(3n)! \le (3.2)! = 720$

Vậy : (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 0 \le n \le 2 \\ n \in Z \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $n \in \{0, 1, 2\}$.

Bài 18. Giải bất phương trình : $P_{x+3} \le 720. A_x^5 . P_{x-5}$.

Giải

Điều kiện : $5 \le x \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow$ $(x+3)! \le 720 \dfrac{x!}{(x-5)!} .(x-5)$

$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x+2)(x+3) \le 720$ (1)

Cách 1 :

* Nếu $x > 7$ $\Rightarrow$ $(x+1)(x+2)(x+3) > 8.9.10 = 720$
* Nếu $5 \le x \le 7$ $\Rightarrow$ $(x+1)(x+2)(x+3) \le 8.9.10 = 720$

Vậy : (1) $\Leftrightarrow$ $5 \le x \le 7$, mà $x \in Z$ $\Rightarrow$ $x \in \{5, 6, 7\}$.

Cách 2 :

Xét $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ trên $[5, +\infty)$

$f'(x) = (x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) + (x+1)(x+2) \ge 0$

Do đó : (1) $\Leftrightarrow$ $f(x) \le f(7)$ $\Leftrightarrow$ $x \le 7$ (tiếp tục như cách 1).

Cách 3 :

(1) $\Leftrightarrow$ $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \le 720$ $\Leftrightarrow$ $x^3 + 6x^2 + 11x - 714 \le 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-7)\underbrace{(x^2 + 13x + 102)}_{(>0,\ \text{vì } \Delta < 0)} \le 0$ $\Leftrightarrow$ $x \le 7$ (tiếp tục như cách 1).

Bài 19. Giải bất phương trình : $\frac{1}{2}A^2_{2n} - A^2_A \le \frac{6}{x}C^3_x + 10$.

(Đại học Bách khoa Hà Nội năm 20000)

Giải

Điều kiện : $3 \le x \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}.\frac{2x!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}2x(2x-1) - x(x-1) \le \frac{6}{x}.\frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + 10$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - x^2 + x \le (x-1)(x-2) + 10$

$\Leftrightarrow \quad x^2 \le x^2 - 3x + 2 + 10 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 4$

Vì $\quad 3 \le x \in Z \quad \Rightarrow \quad x \in \{3, 4\}$.

Bài 20. Giải bất phương trình : $C^{x-1}_{x-1} + C^{x-1}_{x-1} < 79 - \frac{(x-1)!}{2(x-3)!}$.

Giải

Điều kiện : $\quad 3 \le x \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)!}{(x-1)!0!} + \frac{(x-1)!}{(x-2)!1!} < 79 - \frac{(x-1)!}{2.(x-3)!}$

$\Leftrightarrow \quad 1 + x - 1 < 79 - \frac{(x-1)(x-2)}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 158 < -(x^2 - 3x + 2)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 156 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -12 < x < 13$

Vì $\quad 3 \le x \in Z \quad \Rightarrow \quad x \in \{3, 4, 5, 6, 7, \dots 12\}$.

Bài 21. Giải các bất phương trình :

a) $2(A^3_x + A^2_x) \le P_{x+1}$ **b)** $A^3_x \le 20x$.

Giải

a) Điều kiện : $\quad 3 \le x \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{x!}{(x-3)!} + 3.\frac{x!}{(x-2)!}\right) \le (x+1)!$

$\Leftrightarrow \quad 2[x(x-1)(x-2) + 3x(x-1)] \le (x+1)!$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)x(2x-4+6) \le (x+1)!$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)x.2(x+1) \le (x+1)!$$

$$\Leftrightarrow \quad 2! \le (x-2)! \quad \Leftrightarrow \quad 2 \le x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 4$$

Vậy $4 \le x \in Z$.

b) Điều kiện : $3 \le x \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \quad \dfrac{x!}{(x-3)!} \le 20x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)(x-2) \le 20x$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 \le 20 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 18 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3 \le x \le 6$$

Vì $3 \le x \in Z \quad \Rightarrow \quad x \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Bài 22. Giải bất phương trình : $A_{x+5}^4 \ge 15(x+3)(x+2)(x+1)$.

Giải

Điều kiện : $-1 \le x \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \quad \dfrac{(x+5)!}{(x+1)!} \ge 15(x+3)(x+2)(x+1)$

$$\Leftrightarrow \quad (x+5)(x+4)(x+3)(x+2) \ge 15(x+3)(x+2)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+5)(x+4) \ge 15(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 9x + 20 \ge 15x + 15$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \ge 5 \\ x \le 1 \end{array}\right.$$

Vì $-1 \le x \in Z \quad \Rightarrow \quad x \in \{-1, 0, 1\} \cup \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Bài 23. Giải bất phương trình : $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} C_x^{x-i} > 1024$.

Giải

Điều kiện : $10 \le x \in Z$

Ta có : $\displaystyle\sum_{i=0}^{10} C_x^{x-i} \ge 1024 \quad \Leftrightarrow \quad C_x^x + C_x^{x-1} + \ldots + C_x^{x-10} \ge 1024$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{x!}{(x-1)!1!} + \frac{x!}{(x-2)!2!} + \ldots + \frac{x!}{(x-10)!10!} > 1024$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-9)}{10!} > 1024$$

Ta có :

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + \dfrac{(x-1)+x}{2!} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{(x-1)\ldots(x-9) + \ldots x(x-1)\ldots(x-8)}{10!} > 0, \forall x \geq 10 \\ f(10) = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^{10-i} = \sum_{i=0}^{n} C_{10}^{i}.1^{10-i}.1^{i} = (1+1)^{10} = 1024 \end{cases}$$

Vì vậy : $f(x) \geq 1024 \Leftrightarrow f(x) \geq 7(10) \Leftrightarrow x \geq 10$

Vậy nghiệm bất phương trình là $x \in \{10, 11, 12 \ldots\}$

$\Leftrightarrow x = 10 + y \,;\, x \in N.$

Bài 24. Giải bất phương trình : $2^{x-1} \geq x!$ (1)

Giải

Điều kiện : $0 \leq x \in Z$

* Với $x = 0$: (1) vô nghiệm

* Với $x = 1; 2$: (1) thỏa

* Với $x \geq 3$: Ta có : $x! = 2.3 \ldots x > \underbrace{2.2 \ldots 2}_{(x-1)\text{ số } 2} = 2^{x-1}$

$\Rightarrow x! > 2^{x-1} \Rightarrow$ (1) vô nghiệm

Tóm lại nghiệm của (1) là $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Chú ý : ***Qua cách chứng minh trên, ta suy ra được bất đẳng thức đẹp sau :***

$$\text{"}a^{n-1} \leq n!, \forall \begin{cases} 3 \leq n \in Z \\ 0 < a \leq 2 \end{cases}$$

Bài 25. Giải bất phương trình : $\sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\dfrac{C_n^{i+1}}{C_n^i} \leq 28$ với $1 \leq \leq n \in Z$.

Giải

Bất PT $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \dfrac{\dfrac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!}}{\dfrac{n!}{i!(n-i)!}} \leq 28$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1}(n-i) \le 28 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} i \le 28$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} \le 28 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 56 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \le n \le 7$$

Vì $1 \le n \in Z \quad \Rightarrow \quad n \in \{1, 2, 3, 7, \ldots\}$.

Bài 26. Giải bất phương trình : $\dfrac{n!}{6!(n-6)!} + \dfrac{n!}{5!(n-5)!} \le \dfrac{1}{(n-5)!}$.

Giải

Điều kiện : $6 \le n \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \quad \dfrac{n!}{6!(n-5)!}(n-5+6) \le \dfrac{1}{(n-5)!}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)!}{6!(n-5)!} \le \frac{1}{(n-5)!} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)! \le 6!$$

$$\Leftrightarrow \quad n+1 \le 6 \quad \Leftrightarrow \quad n \le 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \varnothing \quad (\text{vì } n \ge 6).$$

Bài 27. Giải bất phương trình : $\dfrac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} \le \dfrac{143}{4P_{n-1}}$.

Giải

Điều kiện : $2 \le n \in Z$

Bất PT $\Leftrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{(n+2)!}{(n-2)!}}{(n+2)!} < \dfrac{143}{4(n-1)!} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \dfrac{143}{4(n-1)}$

$$\Leftrightarrow \quad n-1 < \frac{143}{4} \quad \Leftrightarrow \quad n < 1 + \frac{143}{4} \quad \Leftrightarrow \quad n < 36 + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \le n \le 36 \quad (\text{vì } 2 \le n \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \quad n \in \{2, 3, 4, \ldots, 36\}.$$

Bài 28. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn : $C_n^2.C_n^{n-2} + 2C_n^2.C_n^3 + C_n^3.C_n^{n-3} = 100$,

trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử.

(Đại học và Cao đẳng (dự bị), khối D, năm 2003)

Giải

Điều kiện : $3 \le n \in Z$.

Ta có : $C_n^2.C_n^{n-2} + 2C_n^2.C_n^3 + C_n^3.C_n^{n-3} = 100$

$\Leftrightarrow \quad (C_n^2)^2 + 2C_n^2.C_n^3 + (C_n^3)^2 = 100$

$\Leftrightarrow \quad (C_n^2 + C_n^3)^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad C_n^2 + C_n^3 = 10$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} = 10$

$\Leftrightarrow \quad 3n(n-1) + n(n-1)(n-2) = 60$

$\Leftrightarrow \quad n(n-1)(n+1) = 60$

$\Leftrightarrow \quad (n-1)n(n+1) = 3.4.5$ (3 số nguyên dương liên tiếp)

$\Leftrightarrow \quad n = 4 \quad (?)$

Bài 29. Cho tập hợp A gồm n phần tử, n > 4. Tìm n, biết rằng trong số các tập con của tập A có đúng 16n tập con có số phần tử là số lẻ.

(Đại học và Cao đẳng (dự bị), khối A, năm 2004)

Giải

Số tập con của A là 2^n.

Hơn nữa, số tập con có số phần tử lẻ = số tập con có số phần tử chẵn nên :

$$2^n = 2(16n) \Leftrightarrow 2^{n-5} = n \Leftrightarrow n = 8$$

Vì $f(x) = 2^{x-5} - x$ có $f'(x) = 2^{x-5}\ln 2 - 1 > 0, \forall x \geq 6$, nên $x = 8$ là nghiệm duy nhất của phương trình $2^{x-5} = x$ trên $[6, +\infty)$.

Bài 30. Giải bất phương trình : $C_{2x}^2 + C_{2x}^4 + ... + C_{2x}^{2x} \geq 2^{2003} - 1$ (1)

(Cao đẳng Sư phạm Bắc Ninh, năm 2004)

Giải

Điều kiện $x \in N$

Ta có : $2^{2x} = (1+1)^{2x} + (1-1)^{2x} = \sum_{i=0}^{2x} C_{2x}^i + \sum_{i=0}^{2x} (-1)^i C_{2x}^i$

$$= \sum_{i=0}^{2x} [1 + (-1)^i] C_{2x}^i = 2[C_{2x}^0 + C_{2x}^2 + ... + C_{2x}^{2x}]$$

Do đó : BPT (1) $\Leftrightarrow \quad 2^{2x-1} - 1 \geq 2^{2003} - 1$

$\Leftrightarrow \quad 2x - 1 \geq 2003$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 1002$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{1002, 1003, ...\}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Giải các phương trình sau :

a) $C_x^0 + C_x^1 + \ldots + C_x^x = 128$ b) $(x - 7)! = 720$.

Bài 2. Giải các phương trình sau :

a) $2A_{2x}^2 = 2C_{4x}^x - 50$ b) $A_{5x}^3 = 24$.

Bài 3. Giải các phương trình :

a) $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 7n$ b) $C_{\sqrt{n}}^2 = 24$.

Bài 4. Giải các phương trình :

a) $(x!)^3 C_x^x . C_{2x}^x . C_{3x}^3 = 720$ b) $C_{2x}^1 + C_{2x}^2 + \ldots + C_{2x}^{2x-1} = 32$.

Bài 5*. Giải các bất phương trình :

a) $C_x^0 + C_x^1 + 2C_x^2 + \ldots + xC_x^x < x.(x!)$ (với $0 \le x \le 6$, $x \in Z$)

b) $(x + 3)! \ge 720\, A_x^5 P_{x-5}$.

Bài 6*. Giải các bất phương trình :

a) $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + \ldots + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} \ge 1023$

b) $C_{x+1}^{x-2} \le C_{x+1}^{x-1} + 100$.

Bài 7. Giải các bất phương trình :

a) $C_n^2 + 2C_n^3 + \ldots + (n-1)C_n^n > (n-2)2^{n-1}$ $(0 \le n \le 5$, $n \in Z)$

b) $2^{n-1} \le n!$.

Bài 8. Giải các bất phương trình :

a) $(1 + x)^{2003} \ge 1 + C_x^1$ b) $(1 - x)^{100} \ge 1 + C_x^1 + \frac{1}{2}C_x^2$.

Bài 9. Giải các bất phương trình sau :

a*) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_n^{2n-1} > 79$ b) $\left(1 + \frac{1}{C_n^1}\right)^n \ge 2$

c) $C_{n+5}^4 \ge \frac{143P_{n+5}}{96(n+3)!}$ d) $(C_5^0)^2 + (C_5^1)^2 + (C_5^2)^2 \le P_{(n+7)}$

e) $A_{2n}^1 + 2A_{2n}^2 + 6A_{2n}^3 \le 7n$ f) $C_n^2 + C_n^3 \ge \frac{n^3}{6}$

g) $A_n^3 + 6C_n^2 \le \frac{1}{2}(n + 1)!$ h) $P_2.n^4 - P_3.n \le C_n^n + 7$.

Phần II : Các bài toán về hệ phương trình và hệ bất phương trình

Tập nghiệm của các bài toán dạng này cũng các bài toán phần I, tập nghiệm phần lớn là các tập con của N^2 , $N^2 = \{(a, b) / a, b \in N\}$.

Bài 1. Giải hệ :	$\begin{cases} 7A_{5x}^{y-3} = A_{5x}^{y-2} \\ 4C_{5x}^{y-2} = 7C_{5x}^{y-3} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $x \geq 1;\ y \geq 3;\ x, y \in Z$

$$\text{Hệ} \Rightarrow \begin{cases} 7\dfrac{(5x)!}{(5x-y+3)!} = \dfrac{(5x)!}{(5x-y+2)!} \\ 4\dfrac{(5x)!}{(y-2)!(5x-y+2)!} = 7\dfrac{(5x)!}{(y-3)!(5x-y+3)!} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 = 5x - y + 3 \\ \dfrac{4}{y-2} = \dfrac{7}{5x-y+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - y + 3 = 7 \\ y - 2 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \text{(thỏa hệ)}$$

Vậy : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Bài 2. Giải hệ :	$\begin{cases} A_x^y + y.A_x^{y-1} = 5A_{x+1}^{y-1} \\ A_{x+1}^{y-1} = 2C_{x+1}^{y-1} \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 1 \leq y \in Z \\ 0 \leq x \in Z \end{cases}$

$$\text{Hệ} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} + y.\dfrac{x!}{(x-y+1)!} = 5\dfrac{(x+1)!}{(x-y+2)!} \\ \dfrac{(x+1)!}{(x-y+2)!} = 2\dfrac{(x+1)!}{(y-1)!(x-y+2)!} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{y}{x-y+1} = \dfrac{5(x+1)}{(x-y+1)(x-y+2)} \\ (y-1)! = 2! \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{5(x+1)}{(x-2)(x-1)} \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{5(x+1)}{(x-2)(x-1)} \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \text{(thỏa hệ)}$$

Vậy : $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$ là nghiệm của hệ.

Bài 3.	Giải hệ :	$\begin{cases} A_x^y . P_{x-y} = 72P_{x-2} \\ 10 < x + y < 16 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq y \geq 0 \\ x \geq 2 \\ x, y \in Z \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!}.(x-y)! = 72(x-2)! \\ 10 < x + y < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 72 \\ 10 < x + y < 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 72 = 0 \\ 10 < x + y < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -8 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ 10 < x + y < 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 1 < y < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ 2 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Vậy hệ có 6 nghiệm : (x, y) : (9, 2) ; (9, 3) ; (9, 4) ; (9, 5) ; (9, 6).

Bài 4.	**Giải hệ :**	$\begin{cases} \dfrac{A_y^{x+1}}{P_x} + C_y^{y-x-1} = 126 \\ P_{x+2} = 720 \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 0 \leq x, y \in Z \\ y \geq x + 1 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y!}{(y-x-1)!.x!} + \dfrac{y!}{(y-x-1)!(x+1)!} = 126 \\ (x+2)! = 6! \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{y!}{(y-5)!.4!} + \dfrac{y!}{(y-5)!5!} = 126 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ 5 \le y \in Z \\ \dfrac{1}{20} y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4) = 126 \end{cases}$$

* Nếu $y > 7 \quad \Rightarrow \quad f(y) > \dfrac{1}{20}.7.6.5.4.3 = 126$

* Nếu $5 \le y < 7 \quad \Rightarrow \quad f(y) < \dfrac{1}{20}.7.6.5.4.3 = 126$

* Nếu $y = 7 \quad \Rightarrow \quad f(y) = 126$

Vậy : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$ là nghiệm của hệ.

Bài 5. Giải hệ : $\begin{cases} P_{x+y+3} = 720A^5_{x+y}P_{x+y-5} & (1) \\ P_{x-y} = 120 & (2) \\ x, y \in Z \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x + y \ge 5 \\ x \ge y \\ x, y \in Z \end{cases}$

(2) $P_{x-y} = 5! \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)! = 5! \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 5$

$\Leftrightarrow \quad x = y + 5 \quad (\Rightarrow y \ge 0)$

Thay vào (1) :

$$P_{2y+8} = 720\,A^5_{2y+5}.P_{2y} \quad \Leftrightarrow \quad (2y+8)! = 720\frac{(2y+5)}{(2y)!}.(2y)!$$

$$\Leftrightarrow \quad f(y) = (2y+8)(2y+7)(2y+6) = 720$$

* Nếu : $y > 1 \quad \Rightarrow \quad f(y) > 10.9.8 = 720$

* Nếu : $0 \le y < 1 \quad \Rightarrow \quad f(y) < 10.9.8 = 720$

* Nếu : $y = 1 \quad \Rightarrow \quad f(y) = 10.9.8 = 720$

Vậy : $y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$ là nghiệm của hệ.

Bài 6. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} A_{2x}^{2} + y \le 12 \\ P_{x+y} \le 6 \\ x, y \in N^* \end{cases}$

Giải

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x+y)!}{(2x+y-2)!} \le 12 \\ (x+y)! \le 3! \end{cases} \quad (x, y \in N^*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)(2x+y-1) \le 12 \\ x+y \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^2 - (2x+y) - 12 \le 0 \\ x+y \le 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le 2x+y \le 4 \\ x+y \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y \le 4 \\ x+y \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left[\begin{array}{l} (1,\ 1) \\ (1,\ 2) \end{array}\right.$$

Bài 7. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} A_{x-y}^{3} \ge 24 \\ P_{x+y} \le 120 \end{cases}$ $(x, y \in N)$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x, y \in N \\ x \ge y + 3 \end{cases}$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-y)!}{(x-y-3)!} \ge 24 \\ (x+y)! \le 5! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-y-1)(x-y-2) \ge 24 \\ x+y \le 5 \end{cases}$$

* Nếu $0 \le x - y < 4 \Rightarrow (x-y)(x-y-2) < 4.3.2 = 24$

* Nếu $x - y \ge 4 \Rightarrow (x-y)(x-y-1)(x-y-2) > 4.3.2 = 24$

$$\text{Vậy :} \begin{cases} x - y \ge 4 \\ x + y \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge y + 4 \\ x + y \le 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y + 4 \le x + y \le 5 \Rightarrow y \le \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0 \quad (\text{vì } y \in N)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 \ge x \ge 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left[\begin{array}{l} (5,\ 0) \\ (4,\ 0) \end{array}\right. \text{(thỏa hệ).}$$

Bài 8. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} \lg(3C_x^3) - \lg C_x^1 \le 1 \\ x - 3y \le 6 \\ x, y \in N \end{cases}$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} 3 \le x \in N^* \\ y \in N^* \end{cases}$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \dfrac{3C_x^3}{C_x^1} \le \lg 10 \\ x - 3y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3C_x^3}{C_x^1} \le 10 \\ x - 3y \le 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\dfrac{x!}{3!(x-3)!} \le 10.\dfrac{x!}{1!(x-1)!} \\ x - 3y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) \le 20 \\ x - 3y \le 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 18 \le 0 \\ x - 3y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 6 \\ x - 3y \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 6 \\ x - 3y \le 6 \\ x, y \in N^* \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 6 \\ x, y \in N^* \end{cases}$$ Đây là tập nghiệm của hệ.

Bài 9. Cho khai triển nhị thức :

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{-\frac{x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right) + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^n, n \in N$$

Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n, tìm n và x.

(Đại học và Cao đẳng, khối A, năm 2002)

Giải

Ta có :

- $$C_n^3 = 5C_n^1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le n \in Z \\ \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 5\dfrac{n!}{1!(n-1)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le n \in Z \\ 30 = (n-1)(n-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le n \in Z \\ n^2 - 3n - 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le n \in Z \\ \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = -4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad n = 7$$

- $C_n^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-3}\left(2^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 20n \quad \Leftrightarrow \quad C_7^3.\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4.2^{-x} = 140$

$\Leftrightarrow \quad 35.2^{x-2} = 35.4$

$\Leftrightarrow \quad 2^{x-2} = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$

Vậy : $(n, x) = (7, 4)$.

Bài 10. Cho $n \in N$ và $(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$.

Biết rằng tồn tại số $k \in Z$, $1 \le k \le n - 1$ sao cho $\dfrac{a_{k-1}}{2} = \dfrac{a_k}{9} = \dfrac{a_{k+1}}{24}$.

Tính n ?

(Đại học và Cao đẳng (dự bị), khối B, năm 2002).

Giải

Ta có : $\dfrac{a_{k-1}}{2} = \dfrac{a_k}{9} = \dfrac{a_{k+1}}{24} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{C_n^{k-1}}{2} = \dfrac{C_n^k}{9} \\ \dfrac{C_n^k}{9} = \dfrac{C_n^{k+1}}{24} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \dfrac{2n!}{k!(n-k)!} \\ \dfrac{24n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{9n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k+1)9k \\ 9(n-k) = 24(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n - 11k = -2 \\ 9n - 33k = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ k = 2 \end{cases}$$

Bài 11. Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$.

Biết rằng $\quad C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$

($n \in N$, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

(Đại học và Cao đẳng, khối D, năm 2005)

Giải

Ta có : $\quad C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)^n}{2} + (n+2)(n+1) + (n+3)(n+2) + \frac{(n+4)(n+3)}{2} = 149$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n^2 + 12n - 135 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -9 \text{ (Loại)} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad n = 5$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{3}{4}.$$

Bài 12. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2.A_y^x + 5C_y^x = 90 \\ 5.A_y^x - 2C_y^x = 80 \end{cases}$

(Cao đẳng Công nghiệp Hà Nội, năm 2004)

Giải

Điều kiện : $x, y \in N$, $x \le y$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} A_y^x = 20 \\ C_y^x = 10 \end{cases}$

Mà : $A_y^x = x!C_y^x \Rightarrow x! = 2 \Leftrightarrow x = 2$

Do đó : $C_y^x = 10 \Leftrightarrow C_y^2 = 10 \Leftrightarrow y(y-1) = 20 \Leftrightarrow y = 5$

Vậy : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5. \end{cases}$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Giải hệ : $\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 80 \\ A_x^y - 2C_x^y = 40 \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ : $\begin{cases} A_x^y + yA_x^{y-1} = 5A_{x+1}^{y-1} \\ A_{x+1}^{y-1} = 2C_{x+1}^{y-1} \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ : $\begin{cases} 20A_x^{y-1} = 7A_{x-1}^y \\ A_{x-1}^y = 6(C_{x-2}^y + C_{x-2}^{y-1}) \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ : $\begin{cases} C_{x+y-1}^4 - C_{x+y-1}^3 = \dfrac{5}{4}A_{x+y-2}^2 \\ x + y = 12 \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ : $\begin{cases} \ln(3C_x^3) = 1 + \ln(x-1) \\ x - 4y = 6 \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ : $\begin{cases} 6C_{x-y}^{2} + 6C_{x-y}^{3} = (x - y)^3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{x + y}\right)^{C_{x-y}^{1}} \geq 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Bài 8*. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} \left(1 + C_{x+y}^{2}\right)^{\frac{1}{C_{x+y}^{2}}} < 4 \\ 1 < x + y \leq 5 \end{cases}$

Bài 9. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} A_{x-2y}^{3} \leq 24 \\ P_{x+2y} \geq 120 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} C_{2x-y}^{2} \leq 6 \\ P_{x+2y} \leq 6 \end{cases}$

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TỔ HỢP

A. Phần I : Trực tiếp dùng định nghĩa Tổ hợp để chứng minh các đẳng thức

B. Phần II : Dùng khai triển nhị thức Newton và những kỹ thuật đặc biệt để chứng minh các đẳng thức

A. PHẦN I : TRỰC TIẾP DÙNG ĐỊNH NGHĨA TỔ HỢP ĐỂ CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC

Các bài toán phần này chủ yếu dùng trực tiếp định nghĩa và các tính chất cơ bản sau :

* $P_n = P_{n-1}.n$ $\quad(1 \le n \in Z)$
* $C_n^k = C_n^{k-1}$ $\quad(0 \le k \le n)$
* $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ $\quad(1 \le k \le n-1)$
* $A_n^k = k!.C_n^k$

Bài 1. Cho $k < n$ $(k, n \in N)$. Chứng minh : $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

(Đại học Đà Lạt khối A, B năm 1999)

Chú ý : *Bài toán này chính là tính chất cơ bản của tổ hợp.*

Giải

Ta có : $C_n^k + C_n^{k+1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}$$

Vậy : $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Bài 2. Cho : $\begin{cases} 2 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh : $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

(Đại học Quốc gia Hà Nội năm 1999)

Giải

Ta có : $k(k-1)C_n^k = k(k-1)\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$

$$= n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!}$$

$$= n(n-1)\,C_{n-2}^{k-2} \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM).}$$

Bài 3. Cho : $\begin{cases} 3 \le k \le n \\ k, n \in N \end{cases}$. Chứng minh :

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

(Đại học Dân lập Kỹ thuật Công nghệ TP. HCM năm 1998)

Chú ý : *Trong quá trình làm bài toán này, ta sử dụng công thức :*

$$C_n^l = C_{n-1}^{l-1} + C_{n-1}^l \quad (1 \le l \le n-1)$$

Giải

Ta có : $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} =$

$$= (C_n^k + C_n^{k-1}) + 2(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + (C_n^{k-2} + C_n^{k-3})$$

$$= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + (C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2})$$

$$= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k \quad \text{(ĐPCM).}$$

Bài 4. Cho : $\begin{cases} 0 < m < n \\ m, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh :

a) $mC_n^m = n.C_{n-1}^{m-1}$ **b)** $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \ldots + C_{m-1}^{m-1}$

(Trung tâm Đào tạo & Bồi dưỡng Cán bộ Y tế năm 1998)

Giải

a) Ta có : $\dfrac{mC_n^m}{nC_{n-1}^{m-1}} = \dfrac{m.\dfrac{n!}{m!(n-m)!}}{n.\dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}} = \dfrac{\dfrac{m.n!}{m!}}{\dfrac{n!}{(m-n)!}} = 1$

$\Rightarrow \quad mC_n^m = n.C_{n-1}^{m-1}$

Hoặc chứng minh biến đổi trái qua phải, như sau :

$$mC_n^m = m.\frac{n!}{m!(n-m)!} = n.\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = nC_{n-1}^{m-1}$$

b) Áp dụng công thức $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ nhiều lần, như sau :

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$C_{n-1}^m = C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m$$

$+ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (Cộng vế với vế các

$C_{m+1}^m = C_m^{m-1} + C_m^m$ đẳng thức này với nhau)

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m$$

$\Rightarrow \quad C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + \ldots + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$ (vì $C_m^m = C_{m-1}^{m-1}$ (cũng bằng 1))

Bài 5. Cho : $\begin{cases} 4 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$$

(Đại học Quốc gia TP. HCM khối D năm 1997)

Giải

Để chứng minh bài toán này phải sử dụng công thức :

$C_n^l = C_{n-1}^{l-1} + C_{n-1}^l \quad (1 \le l \le n-1)$ nhiều lần như sau :

Vế trái đẳng thức =

$= (C_n^k + C_n^{k-1}) + 3(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + 3(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}) + (C_n^{k-3} + C_n^{k-4})$

$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}$

$= (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1} + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}) + (C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3})$

$= C_{n+2}^k + 2C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2} = (C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1}) + (C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2})$

$= C_{n+3}^k + C_{n+3}^{k-1} = C_{n+4}^k =$ Vế phải

Chú ý :

* ***Để ý "nội dung" cũng như "ý tưởng" bài 3 và bài 5 chỉ là "một".***
* ***Bạn đọc nên xem kỹ thêm bài 7.***

Bài 6. Cho : $\begin{cases} 3 \le k+3 \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$$

Giải

Cách làm tương tự bài 3, bài 5, ta có :

Vế trái đẳng thức =

$$= 2(C_n^k + C_n^{k+1}) + 3(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}) + (C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$$

$$= 2C_{n+1}^{k+1} + 3C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3} = 2(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}) + (C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3})$$

$$= 2C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + (C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3})$$

$$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3} = \text{vế phải} \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM)}.$$

Bài 7. Cho : $\begin{cases} 0 \le m \le k \le n \\ k, m, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh :

$$C_n^k . C_n^0 + C_n^{k-1}.C_m^1 + ... + C_n^{k-m}.C_m^m = C_{n+m}^k$$

(ĐHQG TPHCM năm 1997, bộ đề tuyển sinh, câu IVa, đề 126)

Giải

Ta chứng minh bài toán này quy nạp theo m :

* $m = 0$: $C_n^k . C_0^0 = C_{n+0}^k$ (đúng)

* $m = 1$: $C_n^k . C_1^0 + C_n^{k-1}.C_1^1 = C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (đúng)

* $m = p$: Giả sử bài toán này đúng, tức là

$$C_n^k . C_p^0 + C_n^{k-1}.C_p^1 + ... + C_n^{k-p}.C_p^p = C_{n+p}^k$$

* $m = p + 1$:

Ta có : $C_n^k . C_{p+1}^0 + C_n^{k-1}.C_{p+1}^1 + ... + C_n^{k-p-1}.C_{p+1}^{p+1} =$

$$= C_n^k . C_p^0 + C_n^{k-1}.(C_p^1 + C_p^0) + C_n^{k-2}.(C_p^2 + C_p^1) + \ldots + C_n^{k-p}(C_p^p + C_p^{p-1}) + C_n^{k-p-1}.C_p^p$$

$$= (C_n^k.C_p^0 + C_n^{k-1}.C_p^1 + ... + C_n^{k-p}.C_p^p) + (C_n^{k-1}.C_p^0 + C_n^{k-2}.C_p^1 + ... + C_n^{k-1-p}.C_p^p)$$

$$= C_{n+p}^k + C_{n+p}^{k-1} = C_{n+p+1}^k \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM)}.$$

Các bạn lưu ý trong quá trình chứng minh chúng ta sử dụng các công thức sau :

* $C_p^0 = C_{p+1}^0 = C_p^p = C_{p+1}^{p+1} = 0$

* $C_p^l = C_{p-1}^l + C_{p-1}^{l-1}$ $(1 \le l \le p - 1)$

Chú ý :

* *Lấy m = 1 :*

Ta có : $C_n^k.C_1^0 + C_n^{k-1}.C_1^1 = C_{n+1}^k \Rightarrow C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Đây là hệ thức cơ bản của tổ hợp, cũng chính là đề thi đại học Đà Lạt khối A, B năm 1999.

* *Lấy m = 2 :*

$$C_n^k.C_2^0 + C_n^{k-1}.C_2^1 + C_n^{k-2}.C_2^2 = C_{n+2}^k$$

$$\Rightarrow C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^k$$

(Đề thi Đại học Cảnh sát Nhân dân năm 1999)

* *Lấy m = 3 :*

$$C_n^k.C_3^0 + C_n^{k-1}.C_3^1 + C_n^{k-2}.C_3^2 + C_n^{k-3}.C_3^3 = C_{n+3}^k$$

$$\Rightarrow C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k$$

(Đề thi ĐHDL – Kỹ thuật Công nghệ TP HCM năm 1998, bài 3 trong phần này)

* *Lấy m = 4 :*

$$C_n^k.C_4^0 + C_n^{k-1} + C_n^{k-2}.C_4^2 + C_n^{k-3}.C_4^3 + C_n^{k-4}.C_4^4 = C_{n+4}^k$$

$$\Rightarrow C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$$

(Đề thi ĐHQG TPHCM khối D năm 1997, bài 5 trong phần này)

* *Lấy m = n = k :*

Ta có đẳng thức đẹp :

$$C_n^n.C_n^0 + C_n^{n-1}.C_n^1 + C_n^{n-2}.C_n^2 + \ldots + C_n^{n-n}.C_n^n = C_{2n}^n$$

$$\Leftrightarrow C_n^0.C_n^0 + C_n^1.C_n^1 + C_n^2.C_n^2 + \ldots + C_n^n.C_n^n = C_{2n}^2$$

$$\Leftrightarrow (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \quad (*)$$

(Bộ đề tuyển sinh, câu IVa, đề 83)

*Bài * (cũng như bài 7) sẽ có cách giải khác, bạn đọc sẽ thấy được ở phần sau.*

Bài 8. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1} \quad (1 \le n \in Z)$

b) $1 + P_1 + 2P_2 + \ldots + (n-1)P_{n-1} = P_n \quad (1 \le n \in Z)$

Giải

a) Ta có : $P_n - P_{n-1} = n! - (n-1)! = (n-1)!n - (n-1)!$

$$= (n-1)!(n-1) = (n-1)P_{n-1}$$

b) Theo câu (a) :

$$P_2 - P_1 = P_1$$

$$+ \quad P_3 - P_2 = 2P_2$$

$$P_4 - P_3 = 3P_3$$

. . . .

$$P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad P_n - P_n = P_1 + 2P_2 + ... + (n-1)P_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + ... + (n-1)P_{n-1}$$

Bài 9. Cho : $\begin{cases} 2 \le k \le n \\ k.n \in Z \end{cases}$. Chứng minh :

a) $A^k_{n-1} + kA^{k-1}_{n-1} = A^k_n$ **b)** $A^{n+2}_{n+k} + A^{n+1}_{n+k} = k^2.A^n_{n+k}$

c) $P_k.A^2_{n+1}.A^2_{n+3}.A^2_{n+5} = n.k!\ A^5_{n+5}$

Giải

a) ***Cách 1 :***

$$A^k_{n-1} + kA^{k-1}_{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} + k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}\left(1 + \frac{k}{n-k}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}.\frac{n-k+k}{n-k} = \frac{(n-1)!n}{(n-1-k)!(n-k)}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} = A^k_n$$

Cách 2 : Ta có :

$$A^k_{n-1} + k.A^{k-1}_{n-1} = k!C^k_{n-1} + k.(k-1).C^{k-1}_{n-1}$$

$$= k!(C^k_{n-1} + C^{k-1}_{n-1}) = k!C^k_n = A^k_n$$

b) $$A^{n+2}_{n+k} + A^{n+1}_{n+k} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!} + \frac{(n+k)!}{(k-1)!} = \frac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) = \frac{(n+k)!.k}{(k-2)!(k-1)}$$

$$= \frac{k^2(n+k)!}{(k-2)!(k-1)k} = \frac{k^2(n+k)!}{k} = k^2 A^k_{n+k}$$

c) $P_k.A_{n+1}^2.A_{n+3}^2.A_{n+5}^2 = k!\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}.\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}.\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!}$

$$= k!\frac{(n+5)!}{(n-1)!} = n.k!\ \frac{(n+5)!}{n!} = n.k!\ A_{n+5}^5.$$

Bài 10. Cho : $1 \le k \le m \le n$. Chứng minh :

a) $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}$ b) $C_n^k.C_{n-k}^{m-k} = C_n^m.C_m^k$

Giải

a) Ta có :

$$\frac{n-k-1}{k}.C_n^{k-1} = \frac{n-k+1}{k}.\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$$

b) $C_n^k.C_{n-k}^{m-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}.\dfrac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \dfrac{n!}{(k)!(m-k)!(n-m)!}$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}.\frac{m!}{k!(m-k)!} = C_n^m.C_m^k \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM).}$$

Chú ý : Theo câu (a)

$$C_n^{k-1} = \frac{k}{n-k+1}.C_n^k \Rightarrow C_{2n}^n = \frac{n+1}{2n-(n+2)+1}.C_{2n}^{n+1}$$

$$\Rightarrow C_{2n}^n = \frac{n+1}{n}.C_{2n}^{n+1} \Rightarrow n.C_{2n}^n = (n+1).C_{2n}^{n+1}$$

Cho ta một công thức đẹp quen thuộc.

Bài 11. Chứng minh rằng : $\forall n \in N^*$, ta có :

a) $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$

b) $(1 + 1 + 1^2)1! + (1 + 2 + 2^2)2! + (1 + 3 + 3^2)3! + ... + (1 + n + n^2)n! =$

$= (n+1).(n+1)! - 1.$

Giải

a) Vế trái đẳng thức $= (2-1).1! + (3-1).2! + ... + (n+1-1).n!$

$= (2.1! - 1!) + (3.2! - 2!) + ... + ((n+1)n! - n!)$

$= (2! - 1!) + (3! - 2!) + ... + ((n+1)! - n!)$

$= (n+1)! - 1!$

$= (n+1)! - 1 =$ Vế phải.

b) Vế trái đẳng thức =

$= (2^2 - 1)1! + (3^2 - 2)2! + (4^2 - 3)3! + \ldots + ((n+1)^2 - n)n!$

$= (2.2! - 1!) + (3.3! - 2.2!) + (4.4! - 3.3!) + \ldots + ((n+1)(n+1)! - n.n!)$

$= (n+1)(n+1)! - 1 = (n+1)(n+1)! - 1$

= Vế phải.

Bài 12. Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{2}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \ldots + 1 = \dfrac{n-1}{n}$, $\forall 2 \le n \in Z$

(Đại học Thủy lợi năm 2000)

b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = C_{n+1}^2 + 2(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_2^2)$

Giải

a) Ta có : $\dfrac{1}{A_k^2} = \dfrac{(k-2)!}{k!} = \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, $\forall 2 \le k \in Z$

Vì vậy : $\dfrac{2}{A_2^2} + \dfrac{1}{A_3^2} + \ldots + \dfrac{1}{A_n^2} = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n} \Rightarrow$ (ĐPCM).

b) Ta có : $C_k^2 = \dfrac{k(k-1)}{2}$, $\forall 2 \le k \in Z$

Suy ra : $C_{n+1}^2 + 2(C_n^2 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_2^2) =$

$$= \frac{(n+1)n}{2} + 2\left[\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \ldots + \frac{2.1}{2}\right]$$

$$= \frac{(n+1)n}{2} + \left[n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 - (1 + 2 + \ldots + n)\right]$$

$$= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \qquad \left(\text{vì} : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}\right).$$

Bài 13. Cho $0 \le k, n \in Z$. Chứng minh : $S = C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$

Giải

Cách 1 : Ta chứng minh bài toán quy nạp theo k :

* $k = 0$: $C_n^0 = C_{n+1}^0$ $(= 1) \Rightarrow$ đúng

* $k = 1$: $C_n^0 + C_{n+1}^1 = C_{n+2}^1 \Rightarrow$ đúng

(Vì : $C_n^0 + C_{n+1}^1 = 1 + n + 1 = n + 2 = C_{n+2}^1$)

* $k = m$: Giả sử bài toán cũng đúng, tức là :

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$$

* $k = m + 1$: $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+m}^m + C_{n+m+1}^m = C_{n+m+1}^m + C_{n+m+1}^{m+1}$

$$= C_{n+m+2}^{m+1}$$

(Vì : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ $(1 \le k \le n - 1)$)

Theo nguyên lí quy nạp suy ra ĐPCM.

Cách 2 : Ta có :

$$C_n^0 = C_{n+1}^1 - C_n^1$$

$$+ \quad C_{n+1}^1 = C_{n+2}^2 - C_{n+1}^2$$

$$C_{n+2}^2 = C_{n+3}^3 - C_{n+2}^3$$

. . . . (Cộng vế với vế các đẳng thức này với nhau)

$$C_{n+k}^{k-1} = C_{n+k+1}^k - C_{n+k}^k$$

$$\Rightarrow C_n^0 = C_{n+k+1}^k - (C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+k}^k)$$

$$\Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$$

Chú ý : *Dùng công thức đối ứng* $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$

Ta có đẳng thức "đẹp" : $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$.

Bài 14. Chứng minh rằng :

$$P_n.P_{n+1}(n^2 - 3n^2 + 2n)^2 = 36(C_n^3)(n!)^2.(n + 1), (\forall 3 \le n \in \mathbb{Z}).$$

Giải

Ta có : $$\frac{P_n.P_{n+1}(n^3 - 3n^2 + 2n)^2}{36(C_n^3)^2(n!)^2} = \frac{n!(n+1)!(n^3 - 3n^2 + 2n)^2}{36\left(\dfrac{n!}{3!(n-3)!}\right)^2(n!)^2}$$

$$= \frac{n!(n+1)![n(n-1)(n-2)]^2}{[n(n-1)(n-2)]^2(n!)^2} = n + 1$$

(Vì $n! = (n - 3)!n(n - 1)(n - 2)$) $\Rightarrow$ (ĐPCM).

Bài 15. Cho : $\begin{cases} 0 \le k \le n-1 \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh :

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + ... + (-1)^k C_n^k = (-1)^k C_{n-1}^k$$

Giải

Ta có : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad (1 \le k \le n-1)$

Suy ra : $-C_n^1 = -C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1$

$C_n^2 = C_{n-1}^1 - C_{n-1}^2$

$+ \quad -C_n^3 = -C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3$

. . . .

$(-1)^k C_n^k = (-1) C_{n-1}^k + (-1)^k C_{n-1}^k$

$\Rightarrow \quad -C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^k C_n^k = -C_{n-1}^0 + (-1)^k C_{n-1}^k$

$= \; -C_n^0 + (-1)^k C_{n-1}^k \quad$ (Vì : $C_n^0 = 1 = C_{n-1}^0$)

$\Rightarrow \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^k C_n^k = (-1)^k C_{n-1}^k$

Chú ý : *Tương tự bài 13, bài này cũng có thể làm được theo quy nạp (dành cho các bạn).*

Bài 16. Cho : $\begin{cases} 0 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $C_{n+1}^k = C_n^k \cdot \dfrac{n+1}{n+1-k}$

b) $\prod_{i=1}^{n} (C_n^{i-1} + C_n^i) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} C_n^i (n+1)^n}{n!}$

Giải

a) Ta có : $C_n^k \dfrac{n+1}{n+1-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \dfrac{n+1}{n+1-k} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$

b) Theo câu (a) :

$$\prod_{i=1}^{n} (C_n^{i-1} + C_n^i) = \prod_{i=1}^{n} C_{n+1}^i = \prod_{i=1}^{n} C_n^i \frac{n+1}{n+1-i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} C_n^i \frac{(n+1)!}{n!} \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM).}$$

Bài 17. Tìm n ∈ N sao cho :

$$C_{2n+1}^{1} - 2.2C_{2n+1}^{2} + 3.2^2.C_{2n+1}^{3} - 4.2^3.C_{2n+1}^{4} + ... + (2n+1).2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1} = 2005 \quad (1)$$

(Đại học và Cao đẳng, khối A, năm 2005)

Giải

$$\forall \begin{cases} 0 \le i \le j \\ i, j \in Z \end{cases}, \text{ ta có : } \frac{C_{j+1}^{i+1}}{C_j^i} = \frac{\dfrac{(j+1)!}{(i+1)!(j-i)!}}{\dfrac{J!}{i!(j-i)!}} = \frac{j+1}{i+1} \Leftrightarrow (i+1)C_{j+1}^{i+1} = (j+1)C_j^i$$

Do đó :

$$C_{2n+1}^{1} - 2.2.C_{2n+1}^{2} + 3.2^2.C_{2n+1}^{3} - 4.2^3C_{2n+1}^{4} + ... + (2n+1)2^{2n}.C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$= (2n+1)C_{2n}^{0} - 2(2n+1)C_{2n}^{1} + 2^2.(2n+1)C_{2n}^{2} - 2^3.(2n+1)C_{2n}^{3} + ... + 2^{2n}(2n+1)C_{2n}^{2n}$$

$$= (2n+1)(C_{2n}^{0} - 2C_{2n}^{1} + 2^2.C_{2n}^{2} - 2^3C_{2n}^{3} + ... + 2^{2n}C_{2n}^{2n})$$

$$= (2n+1)(1-2)^{2n} = 2n+1.$$

Do đó : PT(1) $\Leftrightarrow$ $2n + 1 = 2005$ $\Leftrightarrow$ $n = 1002.$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1*. Chứng minh rằng : $S_n = C_n^4$

Biết : $\begin{cases} S_4 = 1 \\ S_{n+1} = S_n + 1(n-2) + 2(n-3) + ... + (n-2)1 \end{cases}$ $(\forall 4 \le n \in Z)$.

Bài 2. Chứng minh rằng : $C_n^{2000} + C_{n-1}^{2000} + ... + C_{n-p}^{2000} = C_{n+1}^{2001} - C_{n-p}^{2001}$

(Với $2001 \le n - p$; n, p ∈ N*).

Bài 3*. Chứng minh rằng : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n, \forall n \in N.$

Bài 4. Chứng minh rằng : $A_n^9 = A_{n-1}^9 + 9A_{n-1}^8, \forall 9 \le n \in Z, 9 \le m \in Z.$

Bài 5. Chứng minh rằng : $\sqrt{A_n^6 + A_n^5} = (n-4)\sqrt{A_n^4}, \forall 6 \le n \in Z.$

Bài 6*. Tính : a) $\sum = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n, 1 \le n \in Z.$

Biết rằng : $C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + ... + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$).

b) $S = \dfrac{(2006+n)!}{(2007+n)!}$ (n ∈ N).

Bài 7. Chứng minh rằng : $A_{n+7}^{n+2} + A_{n+7}^{n+1} = 49A_{n+7}^{n}$, $(\forall n \in N)$.

Bài 8. Chứng minh rằng : $\sum_{k=1}^{100} \frac{n+k-1}{(n+k)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+100)!}$ $(\forall n \in N)$.

Bài 9. Chứng minh rằng : $2.2! + 3.3! + ... + 1000.1000! = 1001! - 2$.

Bài 10. Chứng minh rằng : $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}$ $(\forall 2 \le n \in Z)$.

Bài 11. Chứng minh rằng : $\frac{(m+k)!}{m!} = (m+1)(m+2)...(m+k)$, $(\forall k, m \in N^*)$

B. PHẦN II : DÙNG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON VÀ NHỮNG KỸ THUẬT ĐẶC BIỆT ĐỂ CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TỔ HỢP

Phương pháp giải

Các bài toán về chứng minh các đẳng thức trong phần này chúng ta đều dùng nhị thức Newton kết hợp với những kỹ thuật đặc biệt như : Đạo hàm, tích phân, hay đồng nhất thức của hai đa thức ...

1. *LỚP CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐẠO HÀM*

Bài 1. Chứng minh rằng :

$$1.2^{n-1}C_n^1 + 2.2^{n-2}C_n^2 + 3.2^{n-3}C_n^3 + 4.2^{n-4}C_n^4 + ... + nC_n^n = n.3^{n-1} \quad (\forall 1 \le n \in Z)$$

(ĐH Kinh tế Quốc dân năm 2000)

Giải

Cách 1 :

Xét : $(2+x)^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n+1}x + C_n^2 2^{n-2}x^2 + ... + C_n^n x^n$ (1)

Đạo hàm 2 vế (1) theo biến x, ta có :

$$n(2+x)^{n-1} = C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2}.2.x + C_n^3 2^{n-3}.3.x^2 + ... + C_n^n n.x^{n-1}$$

Chọn x = 1, thì :

$$n.3^{n-1} = 1.2^{n-1}.C_n^1 + 2.2^{n-2}.C_n^2 + 3.2^{n-3}.C_n^3 + 4.2^{n-4}.C_n^4 + ... + nC_n^n$$

$\Rightarrow$ (ĐPCM).

Cách 2 :

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^n x^n$

Đạo hàm hai vế theo biến x :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + \ldots + nC_n^nx^{n-1}$$

Chọn $x = \frac{1}{2}$, ta được :

$$n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2\frac{1}{2} + \ldots + nC_n^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad n.3^{n-1} = 2^{n-1}.C_n^1 + 2.2^{n-2}.C_n^2 + 3.3^{n-3}.C_n^3 + \ldots + nC_n^n \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM)}.$$

Bài 2. Chứng minh rằng : $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n.2^{n-1}$

(ĐH Tài chính Kế toán Hà Nội năm 2000)

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \ldots + C_n^nx^n$

Đạo hàm hai vế đẳng thức này theo biến x :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + \ldots + nC_n^nx^{n-1}$$

Chọn x = 1 ta được :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n.2^{n-1} \Rightarrow \text{(ĐPCM)}.$$

Chú ý : Chọn n = 2000, ta có đẳng thức "đẹp" sau :

$$C_{2000}^1 + 2C_{2000}^2 + \ldots + 2000C_{2000}^{2000} = 2000.2^{1999}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_{2000}^1 + 2C_{2000}^2 + \ldots + 2000C_{2000}^{2000} = 1000.2^{2000}.$$

Bài 3. Tính tổng : $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - 4C_n^4 + \ldots + (-1)^{n-1}n.C_n^n$

(Với : $2 \le n \in Z$)

(ĐH Bách khoa Hà Nội năm 1999).

Giải

Cách 1 :

Xét : $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kx^k = C_n^0 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^kx^k$

Đạo hàm 2 vế theo biến x, ta có :

$$-n(1-x)^n = \sum_{k=1}^{n}k(-1)^kC_n^kx^{k-1}$$

Chọn x = 1, suy ra : $0 = \sum_{k=1}^{n} k(-1)^k C_n^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k(-1)^{k-1} C_n^k = 0$

$$\Rightarrow \quad C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + n(-1)^{n-1} C_n^n = 0$$

Cách 2 :

Theo bài 2 ta có :

$$n(1-x)^{n-1} = C_n^1 - 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + ... + nC_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = –1, suy ra :

$$0 = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n(-1)^{n-1}.$$

Bài 4. Cho $f(x) = (1+x)^n$, $(2 \le n \in Z)$.

a) Tính $f''(1)$.

b) Chứng minh rằng : $2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$.

(ĐH An ninh – Cảnh sát khối A 1998)

Giải

a) $f'(x) = n(1+n)^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \Rightarrow f''(1) = n(n-1)2^{n-2}$

b) Ta có : $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + \sum_{k=2}^{n} C_n^k x^k$

$$f'(x) = C_n^1 + \sum_{k=2}^{n} kC_n^k x^{k-1}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2}$$

$$\Rightarrow \quad f''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$$

$$\Rightarrow \quad 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + ... + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}.$$

Bài 5. **Chứng minh rằng :**

$$n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + (n-2)4^{n-3}C_n^2 + ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} =$$
$$= C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2n^{n-1}C_n^n$$

(ĐH Hàng hải năm 1997)

Giải

* Xét khai triển :

$$(2x-1)^n = C_n^0(2x)^n - C_n^1(2x)^{n-1} + \ldots + (-1)^n C_n^n \quad (1)$$

Đạo hàm 2 vế (1) theo biến x :

$$2n(2x-1)^{n-1} = 2nC_n^0(2x)^{n-1} - 2(n-1)C_n^1(2x)^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}2C_n^{n-1}$$

Chọn x = 2, suy ra :

$$2n.3^{n-1} = 2nC_n^0 4^{n-1} - 2(n-1)C_n^1 4^{n-2} + \ldots + 2(-1)^{n-1}C_n^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad n.3^{n-1} = nC_n^0 4^{n-1} - (n-1)C_n^1 4^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \quad (2)$$

Mặt khác :

* Xét : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$

Đạo hàm 2 vế này theo biến x :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^2 x + \ldots + nC_n^n x^{n-1}$$

Chọn x = 2, suy ra :

$$n.3^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 2 + \ldots + nC_n^n 2^{n-1} \quad (3)$$

Từ (2), (3) ⇒ kết quả bài toán.

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} = n2^{n-1} \quad (\forall 1 \le n \in \mathbb{Z})$

b) $nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0 \quad (\forall 1 \le n \in \mathbb{Z})$.

Giải

Xét khai triển : $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^n$

Đạo hàm 2 vế đẳng thức này theo biến x :

$$n(x+1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} + (n-1)C_n^1 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}$$

* Chọn x = 1, suy ra :

$$n2^{n-1} = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1}$$ (kết quả câu (a))

* Chọn x = −1, suy ra :

$$0 = nC_n^0(-1)^{n-1} + (n-1)C_n^1(-1)^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0$$

Chú ý :

* *Ta luôn có :* $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$ *từ câu (b) suy ra :*

$$nC_n^n - (n-1)C_n^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^1 = 0 \Leftrightarrow C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + n(-1)^{n-1}C_n^n = 0$$

Đây là kết quả đề thi ĐH Bách khoa Hà Nội năm 1999, bài 3 trong phần này.

* *Nếu khai triển nhị thức :*

$$(n-1)^n = C_n^0x^n - C_n^1x^{n-1} + \ldots + (-1)^nC_n^n$$

$$\Rightarrow \quad n(x-1)^{n-1} = nC_n^0x^{n-1} - (n-1)C_n^1 + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}$$

Chọn x = 1, ta có ngay :

$$0 = nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + \ldots +) - 1)^{n-1}C_n^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \text{kết quả câu (b)}$$

(Đây là cách 2 cho câu (b).)

Bài 7. Tính tổng : $\sum = C_{2000}^0 + 2C_{2000}^1 + \ldots + 2001C_{2000}^{2000}$

(ĐH An ninh khối D năm 2000)

Giải

Cách 1 :

Xét : $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \ldots + C_n^nx^n$ $(1 \le n \in Z)$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + \ldots + nC_n^nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad f'(1) = n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n \qquad (1)$$

$$\text{và} \quad f(1) = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n \qquad (2)$$

Cộng (1), (2) vế với vế ta được :

$$(n+2)2^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$$

Lấy n = 2000, ta có ngay :

$$\sum = C_{2000}^0 + 2C_{2000}^1 + \ldots + 2001C_{2000}^{2000} = (2000+2)2^{1999} = 1001.2^{2000}.$$

Cách 2 :

Xét : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \ldots + C_n^nx^n$

$$\Rightarrow \quad x(1+x)^n = C_n^0x + C_n^1x^2 + C_n^2x^3 + \ldots + C_n^nx^{n+1}$$

Đạo hàm 2 vế, suy ra :

$$(1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1x + \ldots + (n+1)C_n^nx^n$$

Cho x = 1, ta có :

$$2^n + n2^{n-1} = C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n$$

$$\Rightarrow \quad C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}.$$

Lấy n = 2000, ta được : $\sum = 1001.2^{2000}$. Đó là kết quả phải tìm.

Bài 8. Tìm số nguyên dương n sao cho :

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2.C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005\ (*)$$

(Đại học và Cao đẳng, năm 2005)

Giải

Ta có :

$$(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1x + C_{2n+1}^2x^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1},\ \forall x \in R$$

Đạo hàm 2 vế theo x :

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2x + 3C_{2n+1}^3x^2 + ... + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$$

Thay x = –2, ta có :

$$2n + 1 = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + ... + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}$$

Do đó : $(*) \Leftrightarrow 2n + 1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002.$

Bài 9. Cho $f(x) = x(x+1)^{2001},\ x \in R.$

a) Tính f'(1).

b) Tính tổng $S = 1.C_{2001}^0 + 2C_{2001}^1 + ... + 2002.C_{2001}^{2001}$

(Cao đẳng Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, khối A + B, năm 2001)

Giải

a) Ta có : $f(x) = x(x+1)^{2001}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = (x+1)^{2001} + 2001x(x+1)^{2000}$

$\Rightarrow \quad f'(1) = 2^{2001} + 2^{2000}.2001 = 2003.2^{2000}$

b) Ta có : $f(x) = C_{2001}^0x + C_{2001}^1x^2 + C_{2001}^2x^3 + ... + C_{2001}^{2001}x^{2002}$

$\Rightarrow \quad f'(x) = C_{2001}^0 + 2C_{2001}^1x + 3C_{2001}^2x^2 + ... + 2002C_{2001}^{2001}x^{2001}$

$\Rightarrow \quad f'(1) = C_{2001}^0 + 2C_{2001}^1 + 3C_{2001}^2 + ... + 2002C_{2001}^{2001}$

Vậy : $1C_{2001}^0 + 2C_{2001}^1 + 3C_{2001}^2 + ... + 2002C_{2001}^{2001} = 2003.2^{2000}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1*. Tính các tổng sau :

a) $A = 1.2C_{100}^{2} + 2.3C_{100}^{3} + ... + 99.100C_{100}^{100}$

b) $B = 1.2.3C_{100}^{3} + 2.3.4C_{100}^{4} + ... + 98.99.100C_{100}^{100}$

Bài 2. Chứng minh rằng :

$$2C_n^2 + 4C_n^4 + 6C_n^6 + ... = C_n^1 + 3C_n^3 + 5C_n^5 + ... \qquad (\forall 2 \le n \in Z).$$

Bài 3*. Tính các tổng sau :

a) $C = C_{1001}^{1000} + 2C_{1001}^{999} + ... + 1001C_{1001}^{0}$

b) $D = C_{1001}^{1} + 2C_{1001}^{2}.3 + 3C_{1001}^{3} + ... + 101C_{1001}^{1001}.3^{1000}$

Bài 4. Chứng minh rằng :

$$C_n^1 + 2C_n^2.10 + 3C_n^3.10^2 + ... + nC_n^n.10^{n-1} = n11^{n-1}, \quad (\forall n \in N^*).$$

Bài 5. Chứng minh rằng :

$$C_n^1 - 2C_n^2.7 + 3C_n^3.7^2 - ... + nC_n^n(-7)^{n-1} = n(-6)^{n-1}, \quad (\forall n \in N^*).$$

2. *LỚP CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍCH PHÂN*

Các bài toán ở mục này hoàn toàn tương tự như các bài ở mục (1) chỉ đi "ngược nhau" giữa đạo hàm và tích phân.

Bài 1. **a)** Tính tích phân : $I = \int_0^1 (1+x)^n dx$

b) Tính $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$

(ĐH Sư phạm TP. HCM khối D, E năm 2000)

Giải

a) $I = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

b) Mặt khác : $\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$

Theo câu (a) $\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Bài 2. Chứng minh rằng :

$$2C_n^0 - \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$$

(ĐH Giao thông Vận tải năm 1996)

Giải

Ta có :

Cách 1 :

$$(1-x)^n = C_n^o - C_n^1 x + C_n^2 c^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$$

$$\Rightarrow \int_0^2 (1-x)^n dx = \int_0^2 (C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n)dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)}\right]_0^2 = \left[C_n^0 - C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + (-1)^n C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{1+(-1)^n}{n+1}2 = 2C_n^0 - \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_3^2 + \ldots + \frac{(-1)2^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

Cách 2 :

Xét : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_{-2}^0 (1+x)^n dx = \int_{-2}^0 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n)dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{(n+1)}\right]_{-2}^0 = \left[C_n^0 x + \frac{C_n^1 x^2}{2} + \ldots + \frac{C_n^n x^{n+1}}{n+1}\right]_{-2}^0$$

$$\Rightarrow \frac{1+(-1)^n}{n+1} = -\left[C_n^0(-2) + \frac{C_n^1(-2)^2}{2} + \ldots + \frac{C_n^n(-2)^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow 2C_n^0 - \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \ldots + (-1)^n\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{1+(-1)^n}{n+1}$$

$$= 0.\begin{cases} 0 & \text{nếu n lẻ} \\ \dfrac{2}{n+1} & \text{nếu n chẵn} \end{cases}$$

Chú ý : *Thực chất cách 1 và 2 chỉ là phép đổi biến mà thôi. Tuy vậy, nhiều lúc cho ta dễ tìm hướng đi của bài toán.*

Bài 3.

a) Tính $I = \int_0^1 x(1-x^2)^n dx \quad (1 \le n \in Z)$

b) Chứng minh rằng : $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2n+2}$.

(ĐH Luật Hà Nội năm 1997)

Giải

a) Đặt : $t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx \Rightarrow -\frac{dt}{2} = xdx$

Đổi cận :

x	0	1
t	1	0

$$\Rightarrow I = \int_1^0 -\frac{t^n dt}{2} = \left[\frac{t^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

b) Ta có : $x(1-x^2)^n = xC_n^0 - x^3C_n^1 + x^5C_n^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n+1}C_n^n$

Suy ra : $\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \left[\frac{x^2}{2}C_n^0 - \frac{x^4}{4}C_n^1 + \frac{x^6}{6}C_n^2 + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+2}C_n^n\right]_0^1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n.$$

Bài 4.

a) Tính : $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (1 \le n \in Z)$

b) Chứng minh rằng : $1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

(Bộ đề tuyển sinh câu IVa, đề 81)

Giải

a) Đặt : $u = (1-x^2)^n \Rightarrow du = -2nx(1-x^2)^{n-1}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\Rightarrow I_n = \left[x(1-x^2)^n\right]_0^1 + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$= 2n\left[\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx - \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}dx\right] = 2n[I_{n-1} - I_n]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{2n}{2n+1}$$

Vì vậy : $\dfrac{I_n}{I_{n-1}} \cdot \dfrac{I_{n-1}}{I_{n-2}} \dots \dfrac{I_1}{I_0} = \dfrac{2n}{2n+1} \cdot \dfrac{2(n-1)}{2n-1} \dots \dfrac{2}{3} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.I_0 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

b) Theo công thức nhị thức Newton :

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{2k}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$$

Chú ý : $\begin{cases} (2n)!! = 2.4.6\dots(2n) \\ (2n+1)!! = 1.3.5\dots(2n+1). \end{cases}$

Bài 5. Chứng minh rằng :

$$2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \frac{2^2}{4}C_n^3 + \dots + \frac{2^{n+1}.C_n^n}{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1} \qquad (\forall n \in N)$$

(ĐH Đà Nẵng năm 2001)

Giải

Ta có : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

$$\Rightarrow \quad \int_0^2 (1+x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^2 x^k dx$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}.C_n^k}{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad 2C_n^0 + \frac{2^2}{2}C_n^1 + \frac{2^3}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

Bài 6. Cho $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ $(1 \le n \in Z)$. Chứng minh rằng :

$$S_n - C_n^1.S_{n-1} + C_n^2.S_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.S_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Giải

Ta có : $(x-1)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n(-1)^n$ (1)

Cho x = 1, ta có :

$$0 = 1 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n(-1)^n \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) vế với vế :

$$(x-1)^n = (x^n - 1) - C_n^1(x^{n-1} - 1) + C_n^2(x^{n-2} - 1) + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}(x-1) \quad (*)$$

Chia 2 vế (*) cho (x − 1) sau đó lấy tích phân từ 0 → 1, ta được:

$$-\frac{(-1)^n}{n} = S_n - C_n^1.S_{n-1} + C_n^2.S_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.S_1$$

$$\Rightarrow \quad S_n - C_n^1.S_{n-1} + C_n^2.S_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.S_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

⇒ (ĐPCM).

Bài 7. Tính : $S = \frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$ $(1 \le n \in Z)$.

Giải

Cách 1 :

Xét : $f(x) = (1-x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 (1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n)dx$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{-(n+1)}\right]_0^1 = 1 - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{n}{n+1}$$

Cách 2 :

Xét : $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{0}(1+x)^n dx = \left[x + C_n^1\frac{x^2}{2} + C_n^2\frac{x^3}{3} + \ldots + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{(1+x)^{n-1}}{(n+1)}\right]_{-1}^{0} = -\left[-1 + C_n^1\frac{(-1)^2}{2} + C_n^2\frac{(-1)^3}{3} + \ldots + C_n^n\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n}{n+1} = \frac{C_n^1}{2} - \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{n}{n+1}.$$

Chú ý : *Các bạn để ý cách 1 và cách 2 chỉ là hình thức đổi biến cận để dễ nhìn.*

Bài 8. Chứng minh rằng :

$$C_n^1\frac{1}{1} - C_n^2\frac{1}{2} + C_n^3\frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n.\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Giải

Ta có : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{x} = \frac{1-\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k x^k}{x}$

$$= \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1} \quad (\forall x \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}, \quad \forall x \in R\ (?)$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k dx = \int_0^1\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}dx$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\Rightarrow \quad C_n^1 - \frac{C_n^2}{2} + \frac{C_n^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}C_n^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Bài 9. Cho $2 \le n \in Z$

a) Tính : $I_n = \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx$

b) Chứng minh rằng : $\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$.

(ĐH Mở Hà Nội năm 1999)

Giải

a) **Đặt :** $t = 1 + x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx \Rightarrow \frac{dt}{3} = x^2dx$

Đổi cận :

x	0	1
t	1	0

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3}\int_1^2 t^n dx = \frac{1}{3}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

b) **Ta có :** $(1+x^3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{3k} \Rightarrow x^2(1+x^3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{3k+2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int_0^1 x^{3k+2}dx$$

$$\Rightarrow \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{3k+3} \Rightarrow \frac{C_n^0}{3} + \frac{C_n^1}{6} + \ldots + \frac{C_n^n}{3n+3} = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}.$$

Bài 10. Cho $1 \le n \in Z$

a) Tính : $I_n = \int_0^1 x(1-x)^n dx$

b) Tính : $S = \frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{4}C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n$

Giải

a) **Đặt :** $t = 1 - x \Rightarrow -dt = dx$

Đổi cận :

x	0	1
t	1	0

$$\Rightarrow I_n = \int_0^1 (1-t)t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

b) Ta có : $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^k \Rightarrow x(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^{k+1}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^1 x^{k+1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k+2}$$

$$\Rightarrow \frac{C_n^0}{2} - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+2} C_n^n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Chú ý : *Khi lấy $n = 19$ ta có :*

a) $I_{19} = \frac{1}{20.21} = \frac{1}{420}$

b) $\frac{1}{2}C_{19}^0 - \frac{1}{3}C_{19}^1 + \frac{1}{4}C_{19}^2 - \ldots - \frac{1}{21}C_{19}^{19} = I_{19} = \frac{1}{420}$

(Đây là đề thi ĐH Nông nghiệp năm 1999)

Bài 11. Cho n là số nguyên dương. Tính tổng :

$$\sum = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2003)

Giải

Ta có : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$, $\forall n \in R$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n) dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_1^2 = \left[C_n^0 x + \frac{C_n^1 x^2}{2} + \frac{C_n^2 x^3}{3} + \ldots + \frac{C_n^n x^{n+1}}{n+1}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n.$$

Bài 12. Tính tổng sau :

$$S = \frac{2^6}{1}C_6^0 + \frac{2^5}{2}C_6^1 + \frac{2^4}{3}C_6^2 + \frac{2^3}{4}C_6^3 + \frac{2^2}{5}C_6^4 + \frac{2}{6}C_6^5 + \frac{1}{7}C_6^6.$$

(Đại học Duy Tân, năm 2001)

Giải

Ta có :

$$S = \left[\frac{2^6}{1}C_6^0x + \frac{2^5}{2}C_6^1x^2 + \frac{2^4}{3}C_6^2x^3 + \frac{2^3}{4}C_6^3x^4 + \frac{2^2}{5}C_6^4x^5 + \frac{2}{6}C_6^5x^6 + \frac{1}{7}C_6^6x^7\right]_0^1$$

$$= \int_0^1 [C_6^0 2^6 + C_6^1 2^5.x + C_6^2 2^4 x^2 + C_6^3 2^3 x^3 + C_6^4 2^2 x^4 + C_6^5 2x^5 + C_6^6 x^6]dx$$

$$= \int_0^1 (2+x)^6 dx = \left[\frac{(2+x)^7}{7}\right]_0^1 = \frac{3^7 - 2^7}{7}.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Tính tổng sau theo $n \in N^*$: $S = \frac{C_n^0}{n+1} + \frac{C_n^1}{n} + \ldots + \frac{C_n^n}{1}$.

Bài 2. Tính tổng sau theo $n \in N^*$: $\sum = \frac{C_n^1}{n} - \frac{C_n^2}{n-1} + \ldots + \frac{(-1)^n C_n^n}{1}$.

Bài 3. Chứng minh rằng :

$$2C_{100}^0 - \frac{1}{2}2^2C_{100}^1 + \frac{1}{3}2^3C_{100}^2 - \ldots + \frac{1}{101}2^{101}C_{100}^{100} = \frac{2}{101}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng :

$$3C_n^0 + \frac{3^2}{2}C_n^1 + \frac{3^3}{3}C_n^2 + \ldots + \frac{3^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{4^{n+1}-1}{n+1}, \forall n \in N^*.$$

Bài 5. Tính các tổng sau : a) $A = 1 - \frac{C_{10}^1}{3} + \frac{C_{10}^2}{5} - \ldots + \frac{C_{10}^{10}}{21}$

b) $B = \frac{1}{2}C_{10}^0 - \frac{1}{4}C_{10}^1 + \frac{1}{6}C_{10}^2 - \ldots + \frac{1}{22}C_{10}^{10}$.

Bài 6. Chứng minh rằng :

$$C_n^n - \frac{1}{2}C_n^{n-1} + \frac{1}{3}C_n^{n-2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^0 = \frac{1}{n+1}, \forall n \in N.$$

Bài 7. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1}2C_n^0 + \frac{1}{2}2^2C_n^1 + \frac{1}{3}2^3C_n^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}2^{n+1}C_n^n = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}, \forall n \in N.$$

Bài 8. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1}3C_n^n + \frac{1}{2}3^2C_n^{n-1} + \frac{1}{3}3^3C_n^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n+1}3^{n+1}C_n^0 = \frac{4^{n+1}-1}{n+1}, \forall n \in N.$$

3. *LỚP CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỒNG NHẤT THỨC CỦA HAI ĐA THỨC*

Phương pháp giải

Nói chung cách làm các bài toán trong mục này là "cố gắng" khai triển nhị thức Newton theo 2 hướng "thích hợp", khác nhau, sau đó so sánh hệ số (cùng bậc) của chúng với nhau để đi đến kết quả cần chứng minh. Gọi là phương pháp đồng nhất thức.

Bài 1. Cho $\begin{cases} 0 \le m \in k \le n \\ k, m, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh :

$$C_n^k . C_m^0 + C_n^{k-1}.C_m^1 + \ldots + C_n^{k-m}.C_m^m = C_{m+n}^k .$$

(ĐHQG TP.HCM năm 1997)

Giải

Ta có : $\begin{cases} (1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + \ldots + C_m^m x^m \\ (x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + \ldots C_n^n x^n \\ \qquad = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n \\ ((1+x)^{m+n} = C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 x + \ldots + C_{m+n}^{m+n} x^{m+n} \end{cases}$

Do đó hệ số x^k trong $(1+x)^m.(1+x)^n$ là :

$$C_m^0 . C_n^k + C_n^1 . C_n^{k-1} + \ldots + C_m^m . C_n^{k-m}$$

Còn hệ số x^k trong $(1+x)^{m+n}$ là C_{m+n}^k

Vì vậy đồng nhất thức : $(1+x)^m.(1+x)^n \equiv (1+x)^{m+n}$

Ta được : $C_{m+n}^k = C_m^0 . C_n^k + C_n^1 . C_n^{k-1} + \ldots + C_m^m . C_n^{k-m}$

Chú ý : *Bài này và bài 7 (phần 1 chương 2) là một, ở đây chúng tôi trình bày lại dưới cách khác để bạn đọc hiểu sâu hơn "bản chất" bài toán.*

Bài 2.

a) Chứng minh rằng : $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

(Bộ đề tuyển sinh câu IV a đề 83)

b) Suy ra : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2} = (C_{2n}^n)^2$

(Đề thi Olympic Mỹ năm 1982)

Giải

a) Theo bài 1 (xét trong trường hợp m = k = n)

$$C_n^n . C_n^0 + C_n^{n-1} . C_n^1 + \ldots + C_n^0 C_n^n = C_{2n}^n$$

$$\Rightarrow \quad (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

b) Ta có : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2[(n-k)!]^2} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!}\right]^2$

$$= C_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n . C_{2n}^n = (C_{2n}^n)^2.$$

Bài 3. Cho $\begin{cases} 4 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh :

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_n^k + 4.$$

(ĐHQG TP.HCM khối D năm 1997)

Giải

Ta có : $(1 + x)^{n+4} = (1 + x)^n (1 + x)^4$

$$\Rightarrow \quad C_{n+4}^0 + C_{n+4}^1 x + \ldots + C_{n+4}^{n+4} x^{n+4} =$$

$$= (C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4)$$

Đồng nhất thức hai đa thức này với nhau (So sánh hệ số x^k 2 vế), ta được :

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+k}^k$$

Chú ý : ***Xem lại cách giải bài này ở phần 1, bài 5 của chương 2.***

Bài 4. Cho $\begin{cases} 0 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh :

$$C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k+1} + \ldots + C_n^{n-k} C_n^n = \frac{(2n)!}{(n-k)!.(n+k)!}.$$

Giải

Ta có : $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^n (1 + x)^n \equiv \dfrac{1}{x^n}(1 + x)^{2n}, \quad \forall x \ne 0$

$$\Rightarrow \quad \left(C_n^0 + C_n^1 \frac{1}{x} + \ldots + C_n^n \frac{1}{x^n}\right)(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)$$

$$\equiv \frac{1}{x^n}(C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n})$$

Đồng nhất thức 2 vế đẳng thức với nhau, so sánh hệ số x^k 2 vế, ta được :

$$C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k+1} + \ldots + C_n^{n-k} C_n^n = C_{2n}^{n+k} = \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}$$

Chú ý : *Lấy* $k = 0$ *ta có :* $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

Đó là kết quả bài 2 (câu (a)).

Bài 5. Cho $\begin{cases} 0 \le k, n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng : $C_k^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+n}^n = C_{k+n+1}^n$

Giải

Xét đa thức : $P(x) = (x + 1)^{k+n} + \ldots + (x + 1)^{k+1} + (x + 1)^k$.

Có hệ số của x^k là : $C_k^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+n}^n$

Hơn nữa : $P(x) = \dfrac{(x+1)^k[1-(x+1)^{n+1}]}{x} = \dfrac{(x+1)^k - (x+1)^{k+n+1}}{x}$

Có hệ số của x^k là : $C_{k+n+1}^{k+1} = C_{k+n+1}^n$

Vậy qua đồng nhất thức (2 đa thức), ta có :

$$C_k^0 + C_{k+1}^1 + \ldots + C_{k+n}^n = C_{k+n+1}^n$$

Chú ý : *Bạn đọc nên xem lại lời giải bài này ở phần I, bài 13 cũng chương 2.*

Bài 6. Với $n \in N$, a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển đa thức $(x^2 + 1)^n(x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

(Đại học và Cao đẳng, khối D, năm 2003)

Giải

Ta có :

$$(x^2+1)^n(x+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2n-2k} \sum_{h=0}^{n} C_n^h 2^h . x^{n-h} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n} C_n^k . C_n^h . 2^h . x^{3n-(2k+h)}$$

Hơn nữa : $2k + h = 3 \Leftrightarrow (k, h) \in \{(1, 1); (0, 3)\}$

$$\Rightarrow a_{3n-3} = 2C_n^1 C_n^1 + 2^3 C_n^0 C_n^3 = 2n^2 + n(n-1)(n-2)$$

Do đó : $a_{3n-3} = 26n \Leftrightarrow 2n + \dfrac{4}{3}(n-1)(n-2) = 26$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -\dfrac{7}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 5.$$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1*.

a) Chứng minh rằng :

$$C_n^0.C_n^k + C_n^1.C_n^{k-1} + ... + C_n^k.C_n^0 = C_{2n}^k \quad (0 \le k \le n)$$

b) Suy ra rằng : $(C_{100}^0)^2 + (C_{100}^1)^2 + ... + (C_{100}^{100})^2 = C_{200}^{100}$

Bài 2*. Chứng minh rằng :

$$1 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - (C_n^3)^2 + ... + (-1)^n (C_n^n)^2 =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{nếu n lẻ} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}(n+2)(n+4)...(2n)}{2.4...n}, & \text{nếu n chẵn} \end{cases}$$

Bài 3. Tính tổng : $S = (C_{99}^1)^2 + 2(C_{99}^2)^2 + ... + 99(C_{99}^{99})^2$

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $C_{10}^9 + 4C_{10}^8 + 6C_{10}^7 + 4C_{10}^6 + C_{10}^5 = C_{14}^9$

b) $(C_{1999}^0)^2 - (C_{1999}^1)^2 + (C_{1999}^2)^2 - ... - (C_{1999}^{1999})^2 = 0$

c) $\dfrac{a_1}{a_1 + a_2} + \dfrac{a_3}{a_3 a_4} = \dfrac{2a_2}{a_2 + a_3}$ $\left(\begin{array}{l}\text{với } a_1, a_2, a_3, a_4 \\ \text{là 4 số hạng liên tiếp} \\ \text{trong khai triển } (1+x)^{100}\end{array}\right)$

4. *LỚP CÁC BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT BIẾN ĐỔI TRỰC TIẾP TỪ NHỊ THỨC NEWTON*

Phương pháp giải

Lớp các bài toán này khá hay, hướng đi chủ yếu là tìm một *đa thức đặc biệt*, sau đó khai triển ... rồi chọn giá trị *đặc biệt cho biến đa thức* và biến đổi đến kết quả đề yêu cầu.

Lớp hàm này nội dung bài tập có phần nhẹ hơn nhưng khá hay.

Bài 1. Cho $0 \le n \in Z$.

Chứng minh các bài toán cơ bản sau :

a) $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ *(Đại học Y Dược TP.HCM năm 2000)*

b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$ *(Bộ đề tuyển sinh)*

Giải

a) Ta có : $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}.1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$

$\Rightarrow \quad C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

b) Ta có : $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k .1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k$

$\Rightarrow \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

Chú ý :

* *Theo câu (a)* : (n = 11) $\Rightarrow \quad C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{11}^{11} = 2^{11}$

$\Rightarrow \quad \sum = C_{11}^6 + C_{11}^7 + \ldots + C_{11}^{11} = C_{11}^0 + C_{11}^1 + \ldots + C_{11}^5$

(vì : $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \le k \le n$)

$\Rightarrow \quad 2\sum = C_{11}^0 + C_{11}^1 + \ldots + C_{11}^{11} = 2^{11}$

$\Rightarrow \quad \sum = 2^{10} = 1024 \quad \Rightarrow \quad C_{11}^6 + C_{11}^7 + \ldots + C_{11}^{11} = 1024$

(Đây là kết quả đề thi ĐHQG Hà Nội khối D năm 1997).

* Và với n = 10 $\Rightarrow \quad C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10}$

Cũng do : $C_n^k = C_n^{n-k}$ $(0 \le k \le n)$

$\Rightarrow \quad S = C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 + C_{10}^4$

$\Rightarrow \quad 2S = (C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10}) - C_{10}^5 = 2^{10} - C_{10}^5$

$\Rightarrow \quad S = 386 \quad \Rightarrow \quad C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 386.$

(Đây là kết quả cho đề thi ĐHDL Kỹ nghệ khối D, năm 1999).

Bài 2. Chứng minh rằng :

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}, \ (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

(ĐH Y Dược TP. HCM năm 2000, bộ đề tuyển sinh)

Giải

Ta có : $0 = (1-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k .1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k (-1)^k$

$= C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - \ldots + C_{2n}^{2n}$

$$\Rightarrow \quad C^0_{2n} + C^2_{2n} + \ldots + C^{2n}_{2n} = C^1_{2n} + C^3_{2n} + \ldots + C^{2n-1}_{2n}$$

Chú ý :

* *Bài 2 chỉ là trường hợp đặc biệt của câu b (bài 1)*

* *Ta chứng minh được kết quả tốt hơn.*

$$C^1_{2n} + C^3_{2n} + \ldots + C^{2n-1}_{2n} = C^0_{2n} + C^2_{2n} + \ldots + C^{2n}_{2n} = 2^{2n-1}$$

(Phần này dành cho các bạn tự kiểm tra lại).

Bài 3. Cho $0 \le n \in Z$. Chứng minh rằng :

$$C^0_{4n} - 3C^1_{4n} + 3^2C^2_{4n} - \ldots + 3^{4n}C^{4n}_{4n} = C^0_{2n} - 5C^1_{2n} + 5^3C^2_{2n} - 5^3C^3_{2n} + \ldots + 5^{2n}C^{2n}_{2n}$$

Giải

Ta có : $(-2)^{4n} = (-4)^{2n} \quad \Rightarrow \quad (1-3)^{4n} = (1-5)^{2n}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{2n} C^k_{4n}(-1)^k 3^k = \sum_{k=0}^{2n} C^k_{2n}(-1)^k 5^k$$

$$\Rightarrow \quad C^0_{4n} - 3C^1_{4n} + 3^2C^2_{4n} - \ldots + 3^{4n}C^{4n}_{4n} = C^0_{2n} - 5C^1_{2n} + 5^2C^2_{2n} - \ldots + 5^{2n}C^{2n}_{2n}$$

$\Rightarrow$ (ĐPCM).

Bài 4. Tính giá trị của các tổng sau :

$$P = 2^0C^0_{2n} + 2^2C^2_{2n} + \ldots + 2^{2n}C^{2n}_{2n}$$

$$Q = 2^1C^1_{2n} + 2^3C^3_{2n} + \ldots + 2^{2n-1}C^{2n-1}_{2n}$$

Giải

Xét : $(1+2x)^{2n} = C^0_{2n} + C^1_{2n}2x + C^2_{2n}(2x)^2 + \ldots + C^{2n}_{2n}(2x)^{2n}$

Lấy x = 1 :

$$\Rightarrow \quad 3^{2n} = C^0_{2n} + C^1_{2n}2 + C^2_{2n}2^2 + \ldots + C^{2n}_{2n}2^{2n} = P + Q$$

$$\Rightarrow \quad P + Q = 3^{2n} = 9^n$$

Lấy x = −1

$$\Rightarrow \quad 1 = C^0_{2n} - C^1_{2n}2 + C^2_{2n}2^2 - \ldots + C^{2n}_{2n}2^{2n} = P - Q$$

Vậy : $\begin{cases} P + Q = 9^n \\ P - Q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \dfrac{1}{2}(9^n + 1) \\ Q = \dfrac{1}{2}(9^n - 1) \end{cases}$

Bài 5.

Cho $\begin{cases} a_n = 1 + q + \ldots + q^n \ (q \neq 1) \\ b_n = 1 + \left(\dfrac{1+q}{2}\right) + \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^n \\ 1 \le n \in Z \end{cases}$

Chứng minh : $C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2.a_1 + C_{n+1}^3.a_2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}.a_n = 2^n.b_n$.

Giải

Ta có : $\begin{cases} b_n = 2\dfrac{1 - \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^{n+1}}{1-q} \\ a_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{cases}$

(tính chất cấp số nhân, hay nhận thấy trực tiếp từ hằng đẳng thức $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$)

* $2^{n+1} = (1+1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k.1^{n+1-k}.1^k = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k$

$$= C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} \quad (1)$$

* $(1+q)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k.1^{n+1-k}.q^k = C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 q + \ldots + C_{n+1}^{n+1} q^{n+1} \quad (2)$

Lấy (1) – (2) vế với vế, ta được :

$$C_{n+1}^0(1-q) + C_{n+1}^2(1-q^2) + \ldots + C_{n+1}^{n+1}(1-q^{n+1}) = 2^{n+1} - (1+q)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{C_{n+1}^1(1-q)}{1-q} + \frac{C_{n+1}^2(1-q^2)}{1-q} + \ldots + C_{n+1}^{n+1}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2^n.\frac{2^1 - \left(\dfrac{1+q}{2}\right)^{n+1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2.a_1 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}.a_n = 2^n.b_n \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM).}$$

Chú ý : *Với* $q = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = 2 - \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$

Thay vào kết quả bài toán trên $\Rightarrow C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$\Rightarrow C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n+1}$

(Đây là kết quả đề thi ĐH Y Dược TP HCM năm 2000, thuộc bài 1, lớp các bài toán này).

Bài 6. Cho $0 \le n \in Z$. Tính các tổng sau

$$M = C_n^0 + 2C_n^2 + 4C_n^4 + \ldots + 2^k C_n^{2k} + \ldots$$

$$N = C_n^1 + 2C_n^3 + 4C_n^5 + \ldots + 2^k C_n^{2k+1} + \ldots$$

Giải

Ta có : $(1 + x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2 C_n^2 + \ldots x^n C_n^n$

* Chọn $x = \sqrt{2}$:

$$\Rightarrow \quad (1 + \sqrt{2})^n = C_n^0 + \sqrt{2}\, C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + 2^k C_n^{2k} + \ldots$$

* Chọn $x = -\sqrt{2}$:

$$\Rightarrow \quad (1 - \sqrt{2})^n = C_n^0 - \sqrt{2}\, C_n^1 + 2C_n^2 - \ldots - \sqrt{2}\, 2^k\, C_n^{2k+1} +$$

$$= M - \sqrt{2}\, N$$

Vậy : $\begin{cases} M + \sqrt{2}N = (1 + \sqrt{2})^n \\ M - \sqrt{2}N = (1 - \sqrt{2})^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2} \\ N = \dfrac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

Bài 7.

a) Cho $n \in N^*$. Chứng minh rằng luôn tại $A, B \in N^*$ để :

$$(2 + \sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$$

$$(2 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} \text{ (hãy xác định rõ A, B)}$$

b) Với mỗi $x \in R$, kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\{x\} = x - [x]$. Dùng kết quả câu (a) để tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \{(2 + \sqrt{2})^n\}$.

Giải

a) Đặt : $\begin{cases} A = 2^n . C_n^0 + 2^{n-2} .2. C_n^2 + \ldots \\ B = 2^{n-1} . C_n^1 + 2^{n-3} .2. C_n^3 + \ldots \end{cases}$ $(A, B \in N^*)$

Xét : $(2 + x)^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} x C_n^1 + \ldots + x^n C_n^n$

* Chọn $x = \sqrt{2}$:

$$\Rightarrow \quad (2 + \sqrt{2})^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1}\sqrt{2}\, C_n^1 + 2^{n-2}.2.C_n^2 + \ldots = A + B\sqrt{2}$$

* Chọn $x = -\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \quad (2 - \sqrt{2})^n = 2^n C_n^0 - 2^{n-1}\sqrt{2}\, C_n^1 + 2^{n-2}.2.C_n^2 + \ldots = A - B\sqrt{2}$$

b) Ta luôn có : $\begin{cases} \{x + n\} = \{x\}, \forall x \in R, \forall n \in Z \\ \{x\} + \{-x\} = 1, \forall x \notin Z \end{cases}$

(Các bạn tự kiểm tra điều này)

Khi đó : $\{(2+\sqrt{2})^n\} = \{A + B\sqrt{2}\} = 1 - \{-A - B\sqrt{2}\}$

$$= 1 - \{(A - B\sqrt{2}) - 2A\} = 1 - \{A - B\sqrt{2}\}$$

$$= 1 - \{(2-\sqrt{2})^n\}$$

Vì : $0 < 2 - \sqrt{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (2-\sqrt{2})^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \{(2-\sqrt{2})^n\}$

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} \{(2+\sqrt{2})^n\} = 1$

Chú ý : *Các bạn để ý rằng trong khi làm bài toán này chúng ta có sử dụng công thức* : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0\ (|q| < 1)$.

Bài 8. Cho $0 \le n \in Z$. Tính các tổng sau :

a) $A = 2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + \ldots$

b) $B = 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-3} C_n^3 + 2^{n-5} C_n^5 + \ldots$

c) $C = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2 C_5^2 + \ldots + 2^5 C_5^5$

Giải

Xét : $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^n$

* **Chọn $x = 2$:** $\Rightarrow 3^n = C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + \ldots + C_n^n = A + B$ **(1)**

* **Chọn $x = -2$:** $\Rightarrow (-1)^n = C_n^0 (-2)^n + C_n^1 (-2)^{n-1} + \ldots + C_n^n$

$$\Rightarrow 1 = C_n^0 2^n - C_n^1 2^{n-1} + \ldots + C_n^n (-1)^n = A - B$$

Vậy : $\begin{cases} A + B = 3^n \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}(3^n + 1) \\ B = \dfrac{1}{2}(3^n - 1) \end{cases}$

Từ (1) lấy $n = 5$, suy ra : $3^5 = C_5^0 2^5 + C_5^1 2^4 + C_5^2 2^3 + C_5^3 2^2 + C_5^4 2 + C_5^5$

$$= C_5^0 + C_5^1 2 + C_5^2 2^2 + C_5^3 2^3 + C_5^4 2^4 + C_5^5 2^5$$

$$= C \quad (\text{vì } C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \le k \le n))$$

$$\Rightarrow \quad C = 3^5 = 243.$$

Bài 9. Tính các tổng sau :

a) $A = C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2 C_n^2 + \ldots + 6^n C_n^n$

b) $B = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 - \ldots + (-1)^n 2^n C_n^n$ (với $0 \le n \in Z$)

c) $C = C_{2n}^0 - 10C_{2n}^1 + 10^2 C_{2n}^2 - \ldots + 10^{2n} C_{2n}^{2n}$

Giải

Xét : $(1+2x)^n = C_n^0 + (2x)C_n^1 + (2x)^2C_n^2 + \dots + (2x)^nC_n^n$

* Chọn x = 3, suy ra :

$7^n = C_n^0 + 6C_n^1 + 6^2C_n^2 + \dots + 6^nC_n^n = A \quad \Rightarrow \quad A = 7^n$

* Chọn x = −1, suy ra :

$(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + (-2)^nC_n^n = B \quad \Rightarrow \quad B = (-1)^n$

* Chọn x = −5, suy ra :

$(-9)^n =$ công thức $- 10C_n^1 + 10^2C_n^2 - \dots + (-10)^nC_n^n$

Thay n bởi 2n, ta có :

$(-9)^{2n} = C_{2n}^0 - 10C_n^1 + 10^2C_{2n}^2 - \dots + 10^{2n}C_{2n}^{2n} = C \quad \Rightarrow \quad C = 81^n$

Chú ý :

** Kết quả câu (a) có thể làm theo cách khác, bằng cách khai triển*

$(x+1)^n = \dots$ rồi chọn $x = 6$ ...

** Câu (b) thì từ khai triển $(1+x)^n = \dots$ rồi chọn $x = 2$ ...*

** Câu (c) thì từ khai triển $(1+x)^{2n} = \dots$ rồi chọn $x = 10$ ...*

Bài 10. Viết khai triển nhị thức Newton $(3x-1)^{16}$, từ đó chứng minh rằng :

$$3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + 3^{14}C_{16}^2 - \dots + C_{16}^{16} = 2^{16}.$$

(ĐH Bách khoa Hà Nội năm 1998)

Giải

Ta có : $(3x-1)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k (3x)^{16-k}(-1)^k =$

$$= C_{16}^0(3x)^{16} - C_{16}^1(3x)^{15} + C_{16}^2(3x)^{14} - \dots + C_{16}^{16}$$

Cho x = 1

Suy ra : $2^{16} = C_{16}^0.3 - C_{15}^0.3^{15} + C_{16}^2.3^{14} - \dots + C_{16}^{16} \quad \Rightarrow$ (ĐPCM).

Bài 11. Chứng minh rằng : $C_{2004}^0 + 2^2C_{2004}^2 + \dots + 2^{2004}C_{2004}^{2004} = \dfrac{3^{2004}+1}{2}$.

(Cao đẳng, khối T - M, ĐHDL Hùng Vương, năm 2004)

Giải

Ta có : $\begin{cases} (1+x)^{2004} = \sum_{k=0}^{2004} C_{2004}^k x^k \\ (1-x)^{2004} = \sum_{k=0}^{2004} C_{2004}^k (-x)^k \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^{2004} + (1-x)^{2004} = \sum_{k=0}^{2004} C_{2004}^{k}\left[x^k + (-x)^k\right]$$

$$= 2\left(C_{2004}^{0} + C_{2004}^{2}x^2 + \ldots + C_{2004}^{2004}x^{2004}\right)$$

Lấy x = 2, ta có : $C_{2004}^{0} + 2^2 C_{2004}^{2} + \ldots + 2^{2004} C_{2004}^{2004} = \dfrac{3^{2004}+1}{2}$.

Bài 12. Tính $n \in N$ sao cho : $C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + 2^n C_n^n = 243$.

(Đại học và Cao đẳng, khối D, năm 2002)

Giải

Ta có : $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

Lấy x = 2, ta có : $3^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 243 = 3^5 \quad \Leftrightarrow \quad n = 5.$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Chứng minh rằng :

$10^0 C_{200}^{0} - 10C_{200}^{1} + 10^2 C_{200}^{2} - 10^3 C_{200}^{3} + \ldots + 10^{100} C_{200}^{200} = 81^{200}$

Bài 2. Tính tổng :

a) $\sum C_{12}^{7} + C_{12}^{8} + \ldots + C_{12}^{12}$ b) $S = C_{11}^{6} + C_{11}^{7} + C_{11}^{8} + C_{11}^{9} + C_{11}^{10}$

Bài 3. Tính các tổng sau :

a) $A = 4^n C_n^0 + 4^{n-2} C_n^2 + 4^{n-4} C_n^4 + \ldots$

b) $B = 4^{n-1} C_n^1 + 4^{n-3} C_n^3 + 4^{n-5} C_n^5 + \ldots \ (3 \le n \in Z)$

Bài 4. Tính tổng : $\sum = C_{100}^{0} + 5C_{100}^{1} + 5^2 C_{100}^{2} + \ldots + 5^{100} C_{100}^{100}$

Bài 5. Tính tổng : $\sum = C_{1000}^{3} + C_{1000}^{5} + \ldots + C_{1000}^{999}$

Bài 6. Tính các tổng sau :

a) $U = C_7^1 + C_7^2 + \ldots + C_7^7$ b) $V = C_7^0 + 2C_7^1 + \ldots + 2^7 C_7^7$

Bài 7. Cho $1 \le k \le n$

a) Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{k} C_n^{k-1} = \dfrac{1}{n+1} C_{n+1}^{k}$

b) Dùng câu (a) để tính tổng số : $S = 1 + \dfrac{1}{2} C_n^1 + \dfrac{1}{3} C_n^2 + \ldots + \dfrac{1}{n+1} C_n^n$

Bài 8. Tính các tổng sau :

a) $M = C_{99}^{98} + C_{99}^{97} + \ldots + C_{99}^{2}$ b) $N = 10^0 C_{10}^{0} + 10^1 C_{10}^{1} + \ldots + 10^{10} C_{10}^{10}$

c) $P = C_{15}^{0} + 6C_{15}^{1} + 6^2 C_{15}^{2} + \ldots + 6^{15} C_{15}^{15}$.

Chương 3

NHỮNG ỨNG DỤNG CỦA KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ VÀ SỐ HỌC ĐẶC BIỆT

A. Phần I : Xác định hệ số của một lũy thừa x^k trong một số đa thức

B. Phần II : Dùng khai triển nhị thức Newton để chứng minh một số bài toán số học

A. PHẦN I : XÁC ĐỊNH HỆ SỐ CỦA MỘT LŨY THỪA X^K TRONG MỘT ĐA THỨC

Bài 1. Tính các hệ số của x^2 và x^3 trong khai triển : $(x + 1)^5 + (x - 2)^7$.

(ĐHSP Quy Nhơn năm 1998)

Giải

* Hệ số x^2 trong : $(x + 1)^5$ là $C_5^2.1^3 = C_5^2$

* Hệ số x^3 trong : $(x + 1)^5$ là $C_5^3.1^2 = C_5^3$

* Hệ số x^2 trong : $(x - 2)^7$ là $C_7^2.(-2)^5 = -32C_7^2$

* Hệ số x^3 trong : $(x - 2)^7$ là $C_7^3.(-2)^4 = 16C_7^3$

Vậy :

* Hệ số x^2 trong : $(x + 1)^5 + (x - 2)^7$ là $C_5^2 - 32C_7^2 = 10 - 32.21 = -662$

* Hệ số x^3 trong : $(x + 1)^5 + (x - 2)^7$ là $C_5^3 + 16C_7^3 = 10 + 16.35 = 570$.

Bài 2. Khai triển và rút gọn đa thức :

$$P(x) = (1 + x)^6 + (1 + x)^7 + ... + (1 + x)^{10},$$

ta được : $P(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + ... + a$

Tính a_8.

(ĐH An ninh Cảnh sát năm 1998)

Giải

* Hệ số x^8 trong $(1 + x)^8$ là C_8^8

* Hệ số x^8 trong $(1 + x)^9$ là C_9^8
* Hệ số x^8 trong $(1 + x)^{10}$ là C_{10}^8

$\Rightarrow \quad a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 = 1 + 9 + 45 = 55.$

Bài 3. Khai triển và rút gọn đa thức :

$$Q(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + \ldots + (1 + x)^{14},$$

ta được đa thức : $Q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{14}x^{14}$.

Xác định hệ số a_9.

(ĐH Thủy lợi cơ sở II năm 2000)

Giải

Hệ số x^9 trong các đa thức : $(1 + x)^9, (1 + x)^{10}, \ldots, (1 + x)^{14}$ lần lượt là :

$$C_9^9, C_{10}^5, \ldots, C_{14}^9.$$

Vì vậy :
$$a_9 = C_9^9 + C_{10}^9 + \ldots + C_{14}^9$$
$$= 1 + 10 + \frac{1}{2}10.11 + \frac{1}{6}10.11.12 + \frac{1}{24}.10.11.12.13 + \frac{1}{120}.10.11.12.13.14,$$
$$= 11 + 55 + 220 + 715 + 2002 = 3003.$$

Bài 4. **Đa thức**
$$R(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + \ldots + 20(1 + x)^{20}$$
$$= a_0 + a_1x + \ldots + a_{20}x^{20}$$

Tìm a_{15} = ?

(Học viện Kỹ thuật Quân sự năm 1997)

Giải

Hệ số x^{15} trong $(1 + x)^{15}, (1 + x)^{16}, \ldots, (1 + x)^{20}$ lần lượt là :

$$C_{15}^{15}, C_{16}^{15}, C_{17}^{15}, C_{18}^{15}, C_{19}^{15}, C_{20}^{15}$$

Suy ra :
$$a_{15} = 15C_{15}^{15} + 16C_{16}^{15} + 17C_{17}^{15} + 18C_{18}^{15} + 19C_{19}^{15} + 20C_{20}^{15}$$
$$= 15 + 16.16 + 17.\frac{16.17}{2} + 18.\frac{16.17.18}{6} + 19.\frac{16.17.18.19}{24} + 20.\frac{16.17.18.19.20}{120}$$
$$= 15 + 256 + 2312 + 14688 + 73644 + 310080 = 400995.$$

Bài 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển : $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}$ $(x \neq 0)$.

(ĐH Quốc gia Hà Nội năm 2000)

Giải

Số hạng tổng quát của khai triển

$$C_{17}^k\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{17-k}\left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k \quad (0 \le k \le 17,\ k \in Z)$$

$$C_{17}^k\ x^{\frac{3k}{4}+\frac{2k}{3}-\frac{34}{3}} = C_{17}^k\ x^{\frac{17k}{12}-\frac{34}{3}}$$

Số hạng này không phụ thuộc vào x $\Leftrightarrow \frac{17k}{12} - \frac{34}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 8$

Vậy số hạng cần tìm (là số hạng thứ 9) trong khai triển và có giá trị là C_{17}^8.

Bài 6. Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^n$ $(x \neq 0)$. Hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x, biết rằng : $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.

(ĐH Sư phạm Hà Nội khối A năm 2000)

Giải

Trước hết tìm $n \in N$:

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 79$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 158 \Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy n = 12

Lúc đó : $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{15}}\right)^{12}$ có số hạng tổng quát : $C_{12}^k\left(x\sqrt[3]{x}\right)^{12-k}\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^k$

$$C_{12}^k\ x^{16-\frac{4k}{3}-\frac{28k}{15}} = C_{12}^k\ x^{16-\frac{48k}{15}} \text{ không phụ thuộc vào x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 16 - \frac{48}{15}k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = 5$$

Vậy số hạng cần tìm (là số hạng thứ 6) trong khai triển và có giá trị là $C_{12}^5 = 792$.

Bài 7. Tìm hệ số của x^{1002} trong khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{2001}$

Giải

Số hạng thứ k + 1 (trong khai triển) :

$$C_{2001}^k (x^2)^{2001-k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^k = C_{2001}^k x^{4002-5k}$$

Cho $\quad 4002 - 5k = 1002 \quad \Leftrightarrow \quad k = 600$

Vậy hệ số của x^{1002} là C_{2001}^{600}.

Bài 8. Khai triển đa thức :

$$P(x) = (1 + 2x)^{12} = a_0 + a_1x + \dots + a_{12}x^{12}$$

Tìm max $\{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$.

(Học viện Kỹ thuật Quân sự năm 2000)

Giải

Ta có : $\quad a_k = C_{12}^k.2^k$

Lúc đó : $\quad a_k < a_{k+1} \quad (0 \le k \le 11)$

$$\Leftrightarrow \quad C_{12}^k.2^k < C_{12}^{k+1}.2^{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12!.2^k}{k!(12-k)!} < \frac{12!.2^{k+1}}{(k+1)!(11-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{12-k} < \frac{2}{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad k + 1 < 24 - 2k$$

$$\Leftrightarrow \quad 3k < 23 \quad \Leftrightarrow \quad k < \frac{23}{3} = 7 + \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le k \le 7 \quad (\text{vì } k \in Z)$$

Như vậy $\begin{cases} a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_8 \\ a_8 > a_9 > \dots > a_{12} \end{cases}$

Suy ra : $\quad \text{Max}\{a_1, a_2, \dots, a_{12}\} = a_8 = 126720$

$\left(\text{Vì}: a_8 = C_{12}^8.2^8 = 495.256 = 126720\right)$.

Bài 9. Tìm số hạng không chứa x, y (x, y ≠ 0) trong biểu thức : $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{12}$

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển :

$$C_{12}^{k}\left(\frac{x}{y}\right)^{12-k}\left(\frac{y}{x}\right)^{k}=C_{12}^{k}\left(\frac{x}{y}\right)^{12-2k}$$

Số hạng này không phụ thuộc vào x, y $\Leftrightarrow$ $12-2k=0$ $\Leftrightarrow$ $k=6$

Vậy số hạng thứ 7 trong khai triển sẽ không phụ thuộc vào x, y và có giá trị là $C_{12}^{6}=924$.

Bài 10.

a) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12}$.

b) Biết tổng tất cả các hệ số của $(x^2+1)^n$ bằng 1024.

Tìm hệ số a ($a \in N^*$) của ax^{12} trong khai triển.

(Câu (b) đề thi Đại học Hành chính Quốc gia năm 2000)

Giải

a) Số hạng thứ (k + 1) là : $a_k = C_{12}^{k}x^{12-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k}=C_{12}^{k}x^{12-2k}$ $(0 \le k \le 12)$

Ta chọn : $12-2k=8$ $\Leftrightarrow$ $k=2$

Vậy số hạng thứ 3 trong khai triển có chứa x^8 và có hệ số là : $C_{12}^{2}=66$

b) Ta có : $(1+x^2)^n = C_n^0 + C_n^1x^2 + \ldots + C_n^nx^{2n}$

Với x = 1 thì : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 1024$

$\Leftrightarrow$ $2^n = 2^{10}$ $\Leftrightarrow$ $n=10$

Do đó hệ số a (của x^{12}) là : $C_{12}^{6}=210$.

Bài 11. Đặt : $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + \ldots + a_{100}x^{100}$

a) Tính a_{97}

b) Tính tổng : $M = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$

c) Tính tổng : $N = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 100a_{100}$

(ĐH Hàng hải năm 1997)

Giải

a) $a_{97} = C_{100}^{97}(-2)^3 = -8.\dfrac{100!}{3!.97!} = -1293600$

b) Cho x = 1, suy ra : $(1-2)^{100} = a_0 + a_1 + ... + a_{100} = M \Rightarrow M = 1$

c) Từ đẳng thức : $(x-2)^{100} = a_0 + a_1x + ... + a_{100}x^{100}$

$\Rightarrow 100(x-2)^{99} = a_1 + 2a_2x + ... + 100a_{100}x^{99}$

Chọn x = 1, suy ra : $N = a_1 + 2a_2 + ... + 100a_{100} = -100$.

Bài 12.

a) Hãy tìm hai số hạng đứng giữa khai triển : $(x^3 + xy)^{31}$

b) Hãy tìm một số hạng đứng giữa khai triển : $(x^3 + xy)^{30}$

Giải

a) Khai triển : $(x^3 + xy)^{31}$ có 31 + 1 = 32 số hạng. Nên có hai số hạng đứng giữa là số hạng thứ 16 và thứ 17 :

* Số hạng thứ 16 : $C_{31}^{15}.(x^3)^{16}(xy)^{15} = C_{31}^{15}.x^{63}.y^{15}$

* Số hạng thứ 17 : $C_{31}^{16}.(x^3)^{15}(xy)^{16} = C_{31}^{16}.x^{61}.y^{16}$

b) Khai triển $(x^3 + y)^{30}$ có 30 + 1 = 31 số hạng. Nên số hạng đứng giữa là số hạng thứ $\left[\dfrac{31}{2}\right] + 1 = 16$

$$C_{30}^{15}(x^3)^{15}(xy)^{15} = C_{30}^{15}x^{60}y^{15}$$

Chú ý : *Cách viết [x] là ký hiệu phần nguyên của x (tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).*

Ví dụ : [2] = 2 ; [2,5] = 2 ; [–3, 4] = –4...

Bài 13. Đặt : $(1 + x + x^2)^{2001} = a_0 + a_1x + ... + a_{4002}x^{4002}$

Tính các tổng sau :

a) $A = a_0 + a_1 + ... + a_{4002}$ **b)** $B = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{4002}$

c) $C = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + ... + 2^{4002}.a_{4002}$

Giải

a) Chọn x = 1, suy ra : $3^{2001} = a_0 + a_1 + ... + a_{4002} \Rightarrow A = 3^{2001}$

b) Chọn x = –1, suy ra : $1 = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{4002} \Rightarrow B = 1$

c) Chọn x = 2, suy ra : $7^{2001} = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + ... + 2^{4002}.a_{4002}$

$\Rightarrow C = 7^{2001}$

Bài 14. Tìm a, b, c, d sao cho :

$$(2x - 1)^{2000} - (ax + b)^{2000} = (x^2 + cx + d)^{1000},\ \forall x \in R.$$

Giải

Với $x = \frac{1}{2}$, suy ra :

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^{2000} + \left(\frac{1}{4} + \frac{c}{2} + d\right)^{1000} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -2b \\ 2c + 4d = -1 \end{cases}$$

Khi đó :

$$(2x - 1)^{2000} = (-2bx + b)^{2000} + (x^2 + cx + d)^{1000},\ \forall x \in R \qquad (1)$$

Suy ra hệ số của x^{2000} :

$$2^{2000} = (2b)^{2000} + 1 \quad \Rightarrow \quad b = \pm\frac{1}{2}\sqrt[2000]{2^{2000} - 1}$$

Lúc đó : (1) $\Leftrightarrow$ $(2x - 1)^{2000}(1 - b^{2000}) = (x^2 + cx + d)^{1000}$

$\Leftrightarrow$ $(2x - 1)^{2000}.\frac{1}{2^{2000}} = (x_2 + cx + d)^{1000}$

$\Leftrightarrow$ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = |x^2 + cx + d|$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$ (Các bạn tự kiểm lại)

Vậy $\begin{cases} a = \sqrt[2000]{2^{2000} - 1} \\ b = -\frac{1}{2}\sqrt[2000]{2^{2000} - 1} \\ c = -1 \\ d = \frac{1}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} a = -\sqrt[2000]{2^{2000} - 1} \\ b = \frac{1}{2}\sqrt[2000]{2^{2000} - 1} \\ c = -1 \\ d = \frac{1}{4} \end{cases}$ (thỏa đề bài).

Bài 15. Tìm x, biết rằng trong khai triển của nhị thức : $\left(2^x + 2^{\frac{1}{2} - x}\right)^n$ có tổng 2 số hạng thứ ba và thứ năm bằng 135, còn tổng 3 hệ số của 3 số hạng cuối bằng 22.

Giải

Giả thiết suy ra : $\begin{cases} C_n^2(2^x)^{n-2}.2^{1-2x} + C_n^4(2^x)^{n-4} = 135 & (1) \\ C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 & (2) \end{cases}$

* Giải (2) :

$$(2) \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \Leftrightarrow n^2 + n - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -7 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 6$$

* Giải (1) : $C_6^2(2^x)^4.2^{1-2x} + C_6^4(2^x)^2.2^{2-4x} = 135$

$$\Leftrightarrow 2^{2x+1} + 2^{2-2x} = 9 \quad (\text{vì } C_6^2 = C_6^4 = 15)$$

$$\Leftrightarrow 2t + \frac{4}{t} = 9 \quad (t = 2^{2x} > 0) \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{2x} = 2^2 \\ 2^{2x} = 2^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy : $x \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$ là 2 giá trị cần tìm.

Bài 16. Tìm số hạng thứ 5 trong khai triển :

$$\left(\frac{x^2}{y^2} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^n, \quad (x, y \neq 0, n \in N^*)$$

biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển này bằng 32768.

Giải

Tổng tất cả các hệ số trong khai triển là :

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 32768 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_k^0 = 2^{15}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} C_k^0 (1)^{n-k}.1^k = 2^{15} \Leftrightarrow (1+1)^n = 2^{15}$$

$$\Leftrightarrow 2^n = 2^{15} \Leftrightarrow n = 15$$

Vậy số hạng thứ 5 trong khai triển là

$$C_{15}^4\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{11}\left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^4 = C_{15}^4\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{58}{3}} = 1365\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{58}{3}}$$

Chú ý : *Bạn đọc có thể dùng trực tiếp kết quả quen thuộc :*

$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$, $\forall n \in N$ *mà không cần chứng minh lại.*

Bài 17. Hãy tìm số x trong khai triển $(x + x^{\ln x})^5$ $(x > 0)$ biết rằng số hạng thứ 3 bằng $10e^5$.

Giải

Số hạng thứ 3 trong khai triển $(x + x^{\ln x})^5$ là :

$$C_5^2 x^3 \left(x^{\ln x}\right)^2 = 10e^5 \Leftrightarrow 10.x^3.x^{2\ln x} = 10e^5 \Leftrightarrow x^3.x^{2\ln x} = e^5$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^3.x^{2\ln x}) = 5 \Leftrightarrow 3\ln x + 2\ln x.\ln x = 5$$

$$\Leftrightarrow 2(\ln x)^2 + 3(\ln x) - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x = 1 \\ \ln x = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{e^5}} \end{array}\right.$$

Bài 18. Cho hàm số : $P(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10}$

a) Tính tích phân : $I = \int_0^1 (1 + 3x)P(x)dx$

b) Xác định hệ số x^3 trong khai triển hàm số P(x) theo lũy thừa của x.

(ĐH Sư phạm Quy Nhơn khối B năm 2000)

Giải

a) Đặt : $t = 1 + 2x + 3x^2 \Rightarrow dt = (2 + 6x)dx \Rightarrow (1 + 3x)dx = \dfrac{dt}{2}$

Đổi cận :

x	0	1
t	1	6

$$\Rightarrow I = \int_1^6 t^{10}\frac{dt}{2} = \left[\frac{t^{11}}{22}\right]_1^6 = \frac{6^{11} - 1}{22}$$

b) Ta có : $P(x) = (1 + 2x + 3x^2)^{10} = [1 + x(2 + 3x)]^{10}$

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 x(2+3x) + C_{10}^2 x^2(2+3x)^2 + C_{10}^3 x^3(2+3x)^3 + \ldots + C_{10}^{10} x^{10}(2+3x)^{10}$$

Qua đây ta thấy hệ số x^3 chỉ xuất hiện trong :

$$C_{10}^2 x^2(2+3x)^2 + C_{10}^3 x^3(2+3x)^2 = C_{10}^2 x^2(4 + 12x + 9x^2) + C_{10}^3 x^3(2+3x)^3$$

$$= C_{10}^2(4x^2 + 12x^3 + 9x^4) + C_{10}^3 x^3(2+3x)^3$$

Vậy hệ số x^3 trong khai triển P(x) là :

$$12C_{10}^2 + C_{10}^3.8 = 12.45 + 120.8 = 540 + 960 = 1500.$$

Bài 19. Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Newton $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng : $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

($n \in N^*$, $x > 0$, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

(Đề thi Đại học và Cao đẳng, khối A, năm 2003)

Giải

Ta có : $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3) \Leftrightarrow \left(C_{n+3}^{n+1} + C_{n+3}^{n}\right) - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1} = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+3)(n+2)}{2!} = 7(n+3)$

$\Leftrightarrow n = 12$

Số hạng tổng quát của khai triển là $C_{12}^k x^{-3k}.x^{\frac{5}{2}(12-k)} = C_{12}^k.x^{\frac{60-11k}{2}}$

Khi đó : $x^{\frac{60-11k}{2}} = x^8 \Leftrightarrow 60 - 11k = 16 \Leftrightarrow k = 4$

Do đó hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!} = 495$.

Bài 20. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1 + x^2(1 - x)]^8$.

(Đề thi Đại học và Cao đẳng, khối A, năm 2004)

Giải

Ta có : $[1 + x^2(1-x)]^8 = C_8^0 + C_8^1x^2(1-x) + C_8^2x^4(1-x)^2 + C_8^3x^6(x-1)^3 +$

$+ C_8^4x^8(1-x)^4 + C_8^5x^{10}(1-x)^5 + C_8^6x^{12}(1-x)^6 +$

$+ C_8^7x^{14}(1-x)^7 + C_8^8x^{16}(1-x)^8$

Ta thấy :
- Bậc của x trong 3 số hạng đầu nhỏ hơn 8
- Bậc của x trong 4 số hạng cuối lớn hơn 8

Vậy : x^8 chỉ có trong các số hạng thứ tư, thứ năm, với hệ số tương ứng là

$$a_8 = C_8^3.C_3^2 + C_8^4.C_4^0 = 238.$$

Bài 21. Trong khai triển nhị thức $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$, tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau.

(Cao đẳng Giao thông, năm 2004)

Giải

Ta có :

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{b}}}\right)^{21}=\left(a^{\frac{1}{3}}.b^{-\frac{1}{6}}+a^{-\frac{1}{6}}.b^{\frac{1}{2}}\right)^{21}=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^{k}a^{\frac{k}{3}}.b^{-\frac{k}{6}}a^{\frac{k-21}{6}}.b^{\frac{21-k}{2}}$$

$$=\sum_{k=0}^{21}C_{21}^{k}a^{\frac{3k-21}{6}}.b^{\frac{63-4k}{6}}.$$

Do đó, số mũ của a và b bằng nhau $\Leftrightarrow \dfrac{3k-21}{6}=\dfrac{63-4k}{6}$

$\Leftrightarrow 7k = 84$

$\Leftrightarrow k = 12$

Vậy hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau trong khai triển trên là :

$$C_{12}^{21}=\frac{21!}{12!9!}=29.39.30.$$

Bài 22. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^{3}$

với $x \neq 0$, $n \in N^*$ và $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 79$.

(Cao đẳng Thực phẩm, năm 2004)

Giải

Ta có • $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 79 \Leftrightarrow 1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 79$

$\Leftrightarrow 2n + n(n-1) = 156$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 156 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

• $\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)^{12}=\displaystyle\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{12-k}.x^{-3k}=\sum_{k=0}^{12}C_{12}^{k}x^{12-4k}$

$\Rightarrow$ Số hạng không chứa x ứng với $12 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = 3$

Vậy số hạng không chứa x là $C_{12}^3 = 220$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Cho : $P(x) = (1 + x)^9 + (1 + x)^{10} + ... + (1 + x)^{15}$

$= a_0 + a_1x + ... + a_{15}x^{15}$

Tính hệ số a_{11} = ?

Bài 2. Với giá trị nào của x thì số hạng thứ 6 trong khai triển :

$$\left(10^{\lg\sqrt{9^x+7}} + 10^{-\frac{1}{5}\lg(3^x+1)}\right)^7 \text{ bằng 84 ?}$$

Bài 3. Tìm hệ số của x^9 trong khai triển $\left(3x - \dfrac{1}{3x}\right)^{12}$?

Bài 4. Tìm hệ số không phụ thuộc vào x trong các khai triển :

a) $\left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)^{100}$ b) $\left(1 + x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^8$

Bài 5*. Trong khai triển của $\left(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}\right)^{200}$ có bao nhiêu số hạng có hệ số là hữu tỉ ? (tức là dưới hạng phân số)

Bài 6*. Tìm m, n, p, q để :

$$(1 - 2x)^{40} - (m - nx)^{40} = (x^2 - px + q)^{20}, \forall x \in R$$

Bài 7. Đặt : $(1 + x + x^2 + x^4)^7 = a_0 + a_1x + ... + a_{28}x^{28}$

a) Tính : $A = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{28}$ = ?

b) Tính : $A = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{28}$ = ?

c) Tính : a_3 = ?

Bài 8. Tính giá trị số hạng thứ tư trong khai triển : $(1 - 0{,}0001)^{1001}$

Bài 9. Tìm các số hạng không chứa x trong các khai triển sau :

a) $\left(\dfrac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^{16}$ b) $\left(x + \dfrac{1}{x^9}\right)^{100}$ c) $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{5}{x}\right)$

B. PHẦN II : DÙNG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC

Những bài toán giới thiệu trong phần này, hầu hết là những bài toán khá hay và khó thường gặp trong các kỳ thi Olympic Toán trong nước cũng như quốc tế...

Bài 1 **a)** Tìm số dư của phép chia 101^{10} cho 11.

b) Tìm số dư của phép chia 7^{1999} cho 100.

Giải

a) Ta có : $101^{10} = (99+2)^{10} = \sum_{k=0}^{9} C_{10}^{k}.99^{10-k}.2^{k} + C_{10}^{10}.2^{10}$

$= \text{BSC}(11) + 2^{10} = \text{BSC}(11) + 1024$

$= \text{BSC}(11) + 1$ (vì $1024 = 11.93 + 1$)

Vậy 101^{10} khi chia cho 11 dư số là 1.

b) Ta có : $7^{1999} = (7^7)^{499}.7^3 = (\text{BSC}(100)+1)^{499}.(300+43)$

$= (\text{BSC}(100)+1).(300+43)$ (do bài 12)

$= \text{BSC}(100) + 43$

Vậy 7^{1999} có 2 số tận cùng là 43, tức là 7^{1999} khi chia cho 100 dư số là 43.

Chú ý : BSC (a) : *kí hiệu chỉ bội số chung của a.*

Bài 2 Chứng minh rằng : với mọi $n \in N^*$ ta luôn có $m \in N^*$ để :

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

(Đề thi Olympic Rumani năm 1980)

Giải

Trước hết ta chứng minh bài toán sau :

Luôn tồn tại $A, B \in N^*$: $\begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)^n = A - B\sqrt{2} \\ A^2 - 2B^2 = (-1)^n \end{cases}$ (1)

Quả vậy (chứng minh bằng qui nạp theo n)

* Với n = 1 : Chọn A = B = 1 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)^1 = A - B\sqrt{2} \\ A^2 - 2B^2 = (-1)^1 \end{cases}$ (đúng)

* Với n = k : Giả sử bài toán đúng, tức là :

Tồn tại $A, B \in N^*$: $\begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)^k = A - B\sqrt{2} \\ A^2 - 2B^2 = (-1)^k \end{cases}$ (2)

* Với n = k + 1 : Chọn A = A + 2B, B = A + B
(với A, B tìm được ở bước 2)

Lúc đó : $\left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1} = \left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1}\left(1-\sqrt{2}\right) = \left(A - B\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$

$$= A - B\sqrt{2} - A\sqrt{2} + 2B = (A+2B) - (A+B)\sqrt{2}$$

$$= A' - B'\sqrt{2}$$

$$A'^2 - 2B'^2 = (A+2B)^2 - 2(A+B)^2$$

$$= (A^2 + 4AB + 4B^2) - (2A^2 + 4AB + 2B^2)$$

$$= 2B^2 - A^2 = (-1)(A^2 - 2B^2) = (-1).(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

Vậy theo nguyên lí qui nạp bài toán (1) được chứng minh, khi đó :

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = (-1)^n\left(1-\sqrt{2}\right)^n = (-1)^n\left(A - B\sqrt{2}\right)$$

* Nếu n chẵn : $(-1)^n = 1$, suy ra :

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = \sqrt{A^2} - \sqrt{2B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{A^2 - 1} \qquad (\text{vì } A^2 - 2B^2 = 1)$$

* Nếu n lẻ : $(-1)^n = -1$, suy ra :

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^n = B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2} - \sqrt{A^2} = \sqrt{2B^2} - \sqrt{2B^2 - 1}$$

$$(\text{vì } A^2 - 2B^2 = -1)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý :

1) Bài toán tổng quát : $\forall p, n \in N^*$, luôn tồn tại $m \in N^*$ để :

$$\left(\sqrt{P} + \sqrt{P-1}\right)^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$$

(Các bạn tự làm)

2) Cách khác chứng minh (1).

Ta có :

$$* \left(1-\sqrt{2}\right)^n = C_n^0 - C_n^1\sqrt{2} + C_n^2 2 - C_n^3 2\sqrt{2} + \dots + C_n^n\left(-\sqrt{2}\right)^n = A - B\sqrt{2}$$

Với $\begin{cases} A = C_n^0 + C_n^2 2 + C_n^4 4 + \dots \\ B = C_n^1 + C_n^3 2 + C_n^5 4 + \dots \end{cases}$ $(A, B \in N^*)$

$$* \left(1+\sqrt{2}\right)^n = C_n^0 = C_n^1\sqrt{2}C_n^2 2 + \dots + C_n^n\left(\sqrt{2}\right)^n = A + B\sqrt{2}$$

Suy ra : $\left(1-\sqrt{2}\right)^n = A - B\sqrt{2}$

$$A^2 - 2B^2 = \left(A - B\sqrt{2}\right)\left(A + B\sqrt{2}\right) = \left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right)^n = (-1)^n$$

Từ đó đi đến kết quả bài toán.

Bài 3. Chứng minh rằng : $A = \dfrac{9^{9^{9^9}} - 9^{9^9}}{100} \in Z$.

Giải

Đặt : $p = 9^9$, $q = 9^{9^9}$ $(p, q \in N^*)$

Suy ra : p, q là các số lẻ. Vì vậy :

$$* \; 9^{9^9} = 9^p = (10-1)^p = 10^p - C_p^1 10^{p-1} + \ldots + C_p^{p-1} 10 - 1$$

$\Rightarrow$ 9^{9^9} và $C_p^{p-1}10 - 1 = 10p - 1$ cùng số tận cùng (1)

Cách làm tương tự (1), ta có :

$* \; 9^{9^{9^9}} = 9^q$ và $10q - 1$ cùng số tận cùng (2)

Mà : $p = 9^9 = (10-1)^9 = C_9^0 10^9 - C_9^1 10^8 + \ldots + C_9^8 10 - C_9^9$

$= BSC\,(10) + C_9^8 10 - C_9^9 = BSC\,(10) + 90 - 1$

$= BSC\,(10) + 9$

$\Rightarrow$ p có số tận cùng là 9

$\Rightarrow$ $10p - 1$ có số tận cùng là 89

$\Rightarrow$ $q = 9^{9^9}$ có số tận cùng là 9 (do (1)) (3)

$\Rightarrow$ $10q - 1$ có số tận cùng là 89

$\Rightarrow$ $9^{9^{9^9}}$ có số tận cùng là 89 (do (2)) (4)

Từ (3), (4) $\Rightarrow$ $9^{9^{9^9}} - 9^{9^9}$ có số tận cùng là 00 $\Rightarrow$ $\dfrac{9^{9^{9^9}} - 9^{9^9}}{100} \in Z$

Bài 4. Giải phương trình (ẩn x, y) : $x^n + y^n = (x+y)^n$ $(n \in N^*)$.

(Đề thi Olympic CHDC Đức năm 1986)

Giải

Ta xét các trường hợp có khả năng xảy ra :

(TH1) Nếu $n = 1$: $\forall (x, y) \in R^2$ là nghiệm của PT.

(TH2) $\forall n \in N$: $\forall (x, 0), (0, y) \in R^2$ đều là nghiệm của PT.

(TH3) $\begin{cases} xy \neq 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ là nghiệm của PT $\Leftrightarrow$ n lẻ

(TH4) $\begin{cases} n \geq 2 \\ xy(x+y) \neq 0 \end{cases}$ ta chứng minh PT vô nghiệm.

Quả vậy : không giảm tính tổng tổng quát ta xem $|x| \geq |y|$

Đặt : $t = \dfrac{y}{x} \neq -1, \quad 0 < |t| \leq 1$

lúc đó PT : $(x + y)^n = x^n + y^n \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^n = 1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$

$\Leftrightarrow \quad (1 + t)^n = 1 + t^n$

* Nếu $t > 0$:

$\Rightarrow \quad (1 + t)^n = C_n^0 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + ... + C_n^n t^n > C_n^0 + C_n^n t^n = 1 + t^n$

$\Rightarrow \quad (1 + t)^n > 1 + t^n$

* Nếu $t < 0$:

$\Rightarrow \quad (1 + t)^n = (1 - |t|)^n < 1 - |t| < 1 - |t|^n \leq 1 + t^n$

$\Rightarrow \quad (1 + t)^n < t + t^n$

Tóm lại PT : $(1 + t)^n = 1 + t^n$ (vô nghiệm)

Vậy nghiệm của PT đã cho là :

* Với $n = 1$: $\forall (x, y) \in R^2$ là nghiệm của PT.
* n chẵn : $\forall (x, 0), (0, y) \in R^2$ là nghiệm của PT.
* n lẻ : $\forall (x, 0), (0, y), (x, -x) \in R^2$ là nghiệm của PT.

Bài 5. $\forall n \in N^*$. Chứng minh $\dfrac{C_{2n}^n}{n+1} \in Z$.

(Đề thi Olympic Áo năm 1982)

Giải

Cách 1 : Ta có :

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) C_{2n}^n = C_{2n}^n - \frac{n}{n+1} C_{2n}^n = C_{2n}^n - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$= C_{2n}^n - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} \in Z$$

Cách 2 : Xét :

$$(2n + 1) C_{2n}^n = (2n + 1) . \frac{(2n)!}{n!\,n!} = (n + 1) \cdot \frac{(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}$$

$$= (n + 1) C_{2n+1}^n \,\vdots\, (n + 1)$$

$\Rightarrow \quad (2n + 1)\ C_{2n}^n \,\vdots\, (n + 1)$

Vì $(2n + 1, n + 1) = 1$ (tức là $2n + 1$, $n + 1$ nguyên tố cùng nhau)

Nên $C_{2n}^{n} \vdots (n + 1) \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n} \in Z \Rightarrow$ (ĐPCM).

Bài 6. Trong khai triển $\left(\sqrt{12} + \sqrt{15}\right)^6$ có bao nhiêu số hạng là số nguyên ?

Giải

Ta có : Số hạng tổng quát của khai triển :

$$C_6^k.\left(\sqrt{12}\right)^{6-k}\sqrt{15}^{\,k} = C_6^k.2^{6-k}.3^{3-\frac{k}{2}}.3^{\frac{k}{2}}.5^{\frac{k}{2}} = C_6^k.2^{6-k}.3^3.5^{\frac{k}{2}} \text{ là số nguyên}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} \in N \quad \Leftrightarrow \quad k \in \{0, 2, 4, 6\}$$

Vậy trong khai triển trên có 4 số hạng là các số nguyên.

Bài 7. Có bao nhiêu số hạng nguyên trong sự khai triển: $\left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{96}\right)^{36}$?

Giải

Số hạng tổng quát trong khai triển :

$$C_{36}^k\left(\sqrt[3]{7}\right)^{36-k}.\left(\sqrt[5]{96}\right)^k \quad (0 \le k \le 36)$$

$$= C_{36}^k.7^{12-\frac{k}{3}}.2^k.3^{\frac{k}{5}} = C_{36}^k.2^k.7^{12-\frac{k}{3}}.3^{\frac{k}{5}} \text{ là số nguyên}$$

$$\Leftrightarrow 12 - \frac{k}{3}, \frac{k}{5} \in N \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k \vdots 15 \\ 0 \le k \le 36 \\ k \in Z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad k \in \{0, 15, 30\}$$

Vậy trong khai triển có 3 số hạng là các số nguyên.

Bài 8. Chứng minh rằng :
a) $\sqrt{1001}\left[\left(\sqrt{1001} + 1\right)^{2000} - \left(\sqrt{1001} - 1\right)^{2000}\right]$ là số tự nhiên chia hết cho 11.
b) $1001^{10} + 3.1001^5 + 5 \vdots 121$.

Giải

a) Ta có :

$$\left(\sqrt{1001} + x\right)^{2000} = C_{2000}^0\sqrt{1001}^{\,2000} + C_{2000}^1\sqrt{1001}^{\,1999}.x + \ldots + C_{2000}^{2000}.x^{2000}$$

Chọn x = 1, suy ra :

$$\left(\sqrt{1001} + 1\right)^{2000} = C_{2000}^0\sqrt{1001}^{\,2000} + C_{2000}^1\sqrt{1001}^{\,1999} + \ldots + C_{2000}^{2000}$$

- Chọn x = −1, suy ra :

$$\left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000} = C_{2000}^{0}\sqrt{1001}^{\,2000} - C_{2000}^{1}\sqrt{1001} + \ldots + C_{2000}^{2000}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1001}+1\right)^{2000} - \left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000} =$$

$$= 2\sqrt{1001}\left(C_{2000}^{1} + C_{2000}^{3}.1001 + \ldots + C_{2000}^{1999}.1001^{999}\right)$$

$$= 2\sqrt{1001}.X \qquad (X \in N)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1001}\left(\left(\sqrt{1001}+1\right)^{2000} - \left(\sqrt{1001}-1\right)^{2000}\right) = 11.182X \;\vdots\; 11$$

⇒ (ĐPCM).

b) Đặt $n = 1001^5$

$\Rightarrow A = 1001^{10} + 3.1001^5 + 5 = n^2 + 3n + 5$

Giả sử $A \;\vdots\; 121$

$\Rightarrow 4A = 4n^2 + 12n + 20 \;\vdots\; 121 \quad \Rightarrow \quad (2n+3)^2 + 11 \;\vdots\; 121$

$\Rightarrow (2n+3)^2 + 11 \;\vdots\; 11 \quad \Rightarrow \quad (2n+3)^2 \;\vdots\; 11$

$\Rightarrow 2n + 3 \;\vdots\; 11$ (vì 11 là số nguyên tố)

$\Rightarrow (2n+3)^2 \;\vdots\; 11^2 = 121$ (vô lí vì : $(2n+3)^2 + 11 \;\vdots\; 121$ sẽ không xảy ra)

Tóm lại $A \not\vdots\; 121$.

Bài 9.

a) Chứng minh rằng : $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right]$ là số tự nhiên lẻ ($\forall n \in N^*$) với $[x]$ là phần nguyên của x (là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

b) Chứng minh rằng : $(n+1)(n+2)\ldots(2n)/(2n-1)!!$ là số tự nhiên chẵn, ($\forall 1 \le n \in Z$).

Giải

a) Ta có : $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^{n-k}\left[\left(\sqrt{5}\right)^k + \left(-\sqrt{5}\right)^k\right]$ k = 0

$$= 2\left(C_n^0 3^n + C_n^2 3^{n-2}.5 + C_n^4 3^{n-4}.5^2 + \ldots\right)$$

$$= 2X \qquad (X \in N^*)$$

vì : $0 < 3 - \sqrt{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \left(3-\sqrt{5}\right)^n < 1$

$$\Rightarrow \quad \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n < \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad 2X - 1 < \left(3+\sqrt{5}\right)^n < 2X$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right] = 2X - 1 \quad \text{là số tự nhiên lẻ}$$

b) Đặt $\begin{cases} A = (n+1)(n+2)\ldots(2n) \\ B = 1.3.5\ldots(2n-1) = (2n-1)!! \end{cases}$

Lúc đó : $(2n)! = 1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)\ldots(2n) = n!A$

$$= [1.3.5\ldots(2n-1)][2.4.6\ldots(2n)]$$

$$= B.2^n(1.2.3\ldots n) = B.2^n.n!$$

$$\Rightarrow \quad n!.A = B.2^n.n! \quad \Rightarrow \quad A = B.2^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A}{B} = 2^n \text{ là số tự nhiên chẵn} \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM).}$$

Bài 10. Chứng minh rằng hệ sau vô nghiệm (x, y, z) :

$$\begin{cases} x^n + y^n = z^n \\ x, y, z \in N^* \quad (2 \le n \in N^*) \\ x, y \le n \end{cases}$$

(Đề thi Olympic Anh năm 1980)

Giải

Giả sử $(x, y, z) \in N^* \times N^* \times N^*$ là nghiệm. Không giảm tính tổng quát ta xem $x \le y$ khi đó theo công thức nhị thức Newton :

$$(y+1)^n = C_n^0 y^n + C_n^1 y^{n-1} + \ldots + C_n^n > C_n^0 y^n + C_n^1 y^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad (y+1)^n > y^n + ny^{n-1} \ge y^n + x.y^{n-1} \ge y^n + x.x^{n-1} \ge x^n + y^n = z^n$$

$$\Rightarrow \quad (y+1)^n > z^n$$

$$\Rightarrow \quad y + 1 > z > y \quad (\text{vì} : z = x^n + y^n > y^n \ \Rightarrow\ z > y)$$

$$\Rightarrow \quad y + 1 > z \ge y + 1 \quad (\text{vì } y, z \in N^*) \quad \Rightarrow \quad \text{vô lí} \quad \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM).}$$

Bài 11. Cho $3 \le n \in Z$. Chứng minh rằng PT :

$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n \quad \text{không có nghiệm } x \in N^*.$$

(Đề thi Olympic Áo năm 1972)

Giải

Đặt : $y = x + 1 \ge 2$ $(y \in Z)$

PT $\Leftrightarrow$ $(y-1)^n + y^n = (y+1)^n \quad \Leftrightarrow \quad (y+1)^n - (y-1)^n - y^n = 0$

Mà : $(y+1)^n - (y-1)^n - y^n \ 3 \ 1 - (-1)^n \pmod{y}$

$\Rightarrow$ $4 \leq n$ chẵn (vì lúc này $1-(-1)^n = 0$)

Lúc đó : $(y \pm 1)^n \equiv \dfrac{n(n-1)y^2}{2} \pm ny + 1 \pmod{y^3}$

$\Rightarrow$ $0 = (y+1)^n - (y-1)^n - y^n \equiv 2ny \pmod{y^3}$

$\Rightarrow$ $2n \equiv 0 \pmod{y^2} \quad \Rightarrow \quad 2n \geq y^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{n}{y} \geq \dfrac{y}{2} \geq 1$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{y}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{y}\right)^k > C_n^0 + C_n^1 \frac{1}{y} \geq 1 + \frac{n}{y} \geq 2$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{y}\right)^n > 2 > 1 + \left(1-\frac{1}{y}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{y}\right)^n > 1 + \left(1-\frac{1}{y}\right)^n$$

$\Rightarrow$ $(y+1)^n > y^n + (y-1)^n$

$\Rightarrow$ PT : $(y+1)^n = y^n + (y-1)^n$ vô nghiệm

Vậy bài toán đã chứng minh xong.

Bài 12.

a) Cho a, b $\in$ Z, n $\in$ N*. Chứng minh rằng :

$$(a+b)^n = BSC\ (a) + b^n = BSC\ (b) + a^n$$

b) Tìm n $\in$ N* để $2^n + 1 \ \vdots\ 3$

c) Chứng minh rằng : $4^n + 15n - 1 \ \vdots\ 9, \ \forall n \in N^*$

d) $\dfrac{2^{2n}.(2n-1)!!}{(2n)!!} \vdots\ 2$.

Giải

a) Ta có : $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1}.ab^{n-1} + C_n^n b^n$

$= a^n + \left(C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n\right)$

$= b^n + \left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1}.ab^{n-1}\right)$

$= a^n + BCS\ (b) = b^n + BSC\ (a)$

b) Ta có : $2^n + 1 = (3-1)^n + 1$

BSC (3) + $(-1)^n + 1 \ \vdots\ 3 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^n + 1 \ \vdots\ 3 \quad \Leftrightarrow \quad$ n lẻ

c) * $n = 1 :\Rightarrow \quad 4^n + 15n - 1 = 18 \vdots 9$

* $n \geq 2 : \quad 4^n + 15n - 1 = (3 + 1)^n + 15n - 1$

$$= C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} 3^2 + C_n^{n-1} 3 + C_n^n + 15n - 1$$

$$= C_n^0 3^n + C_n^1 3^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} 3^2 + 18n \quad (\text{vì } C_n^n = 1, C_n^{n-1} = n)$$

$$= 3^2(C_n^0 3^{n-2} + C_n^1 3^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2}) + 18n \vdots 9$$

Tóm lại : $\quad 4^n + 15n - 1 \vdots 9$

d) $$\frac{2^{2n}(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{2^{2n}(2n-1)!!(2n-2)!!}{(2n-2)!!2n(2n-2)!!} = \frac{2^{2n}(2n-1)!}{2n[(2n-2)!!]^2}$$

$$= \frac{2^{2n}(2n-1)!}{2n[2^{n-1}(n-1)!]^2} = \frac{2^{2n}}{2^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}$$

$$= 2C_{2n-1}^{n-1} \vdots 2 \qquad (\text{vì } C_{2n-1}^{n-1} \in N^*).$$

Bài 13. Cho $2 \leq p$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng :

a) $C_p^k \vdots p, \ \forall k = 1, 2, \ldots, p - 1$ **b)** $C_n^p - \left[\frac{n}{p}\right] \vdots p \quad (\forall p \leq n \in N).$

Giải

a) $\begin{cases} k \in \{1, 2, \ldots, p - 1\} \\ P \text{ là số nguyên tố} \end{cases}$

Ta có : $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k}$

vì p là số nguyên tố $\Rightarrow \quad p \not\vdots k$

Mà $C_p^k \in N \Rightarrow \quad (p-1)(p-2)\ldots(p-k+1) \vdots 12\ldots k$

$$\Rightarrow \quad C_p^k = p.q \quad \text{với } q = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k} \in N$$

$$\Rightarrow \quad C_p^k \vdots p$$

b) Ta có : $C_p^n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} \in N^*$

Trong p số nguyên liên tiếp n, n – 1, ..., n – p + 1 chỉ có đúng một số chia hết cho p, kí hiệu là N. (Các bạn tự kiểm lại điều này !)

Khi đó $\left[\dfrac{n}{p}\right] = \dfrac{N}{p} \in N$

và $\quad C_n^p - \left[\dfrac{n}{p}\right] = \dfrac{n(n-1)...(N-1)N(N+1)...(n-p+1)}{P!} - \dfrac{N}{P}$

Để ý rằng các số n, n − 1, ..., n − p + 1 (trừ N ra)

khi chia cho P sẽ có số dư là 1, 2, 3, ..., p − 1, tức là :

$$n = k_1p + r_1, \quad n-1 = k_2p + r_2, \quad ..., \quad n-p+1 = k_{p-1}p + r_{p-1}$$

với $\begin{cases} k_1, k_2, ..., k_{p-1} \in Z \\ \{r_1, r_2, ..., r_{p-1}\} = \{1, 2, ..., p-1\} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad n(n-1)...(N+1)(N-1)...(n-p+1) = BSC(p) + r_1.r_2...r_{p-1}$

$$= BSC(p) + (p-1)!$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{n(n-1)...(n-p+1)}{p} - \dfrac{N(p-1)!}{P} \vdots p$

Vì $(p, (p-1)!) = 1$ (số nguyên tố cùng nhau)

$\Rightarrow \quad C_n^p - \left[\dfrac{n}{p}\right] \vdots p \quad \Rightarrow \quad$ (ĐPCM).

Bài 14. $\forall n \in N^*$, $\forall p \geq 2$ là số nguyên tố. Ta luôn có : $n^p - n \vdots p$

(Định lí Fermat (nhỏ))

Giải

Đặt : $a_n = n^p - n$

* Với n = 1 : $\quad a_1 = 0 \vdots p$
* Với n = k : $\quad$ Giả sử : $a_k \vdots p$
* Với n = k + 1 : $\quad$ Xét :

$$a_{k+1} - a_k = (k+1)^p - (k+1) - k^p + k = (k+1)^p - 1 - k^p$$

$$= C_p^0k^p + C_p^1k^{p-1} + ... + C_p^{p-1}k + C_p^p - 1 - k^p$$

$$= C_p^1k^{p-1} + C_p^2k^{p-2} + ... + C_p^{p-1}k \quad (\text{vì } C_p^0 = C_p^p = 1)$$

Theo kết quả bài trên : $\quad C_p^k \vdots p, \forall k = 1, 2, ..., p-1$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} a_{k+1} - a_k \vdots p \\ \text{mà } a_k \vdots p \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} \vdots p$$

Vậy với n = k + 1 bài toán đúng, tức là theo nguyên lí quy nạp định lí Fermat (nhỏ) được chứng minh.

Bài 15.

a) Cho $3 \le p$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng :

$$S_p = 1^p + 2^p + \dots + (p-1)^p \vdots p$$

b) Tìm $3 \le p$ là số nguyên tố sao cho :

$$f(p) = (2+3) - (2^2+3^2) + (2^3+3^3) - \dots + (2^p+3^p) \vdots 5$$

(Câu (b) lược trích trên tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

Giải

a) Theo định lí Fermat :

$$1^p - 1 \vdots p$$
$$2^p - 2 \vdots p$$
$$+ \quad 3^p - 3 \vdots p$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(p-1)^p - (p-1) \vdots p$$

$$\Rightarrow \quad S_p - [1 + 2 + \dots + (p-1)] \vdots p \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad S_p - \frac{p(p-1)}{2} \vdots p$$

Vì : $3 \le p$ là số nguyên tố $\Rightarrow$ p lẻ $\Rightarrow$ $p - 1$ chẵn

$$\Rightarrow \quad p - 1 \vdots 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p(p-1)}{2} = p.\frac{p-1}{2} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ $S_p \vdots p$ $\Rightarrow$ (ĐPCM).

b) Với k lẻ, ta có : $2^k + 3^k \equiv 0 \pmod 5$

vì vậy $f(p) \equiv 0 \pmod 5$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (2^{2i} + 3^{2i}) \equiv 0 \pmod 5$$

mà $3^{2i} \equiv (-2)^{2i} \equiv 2^{2i} \pmod 5$

Nên $f(p) \equiv 0 \pmod 5$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2^{2i} \equiv 0 \pmod 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^i \equiv 0 \pmod 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p-1}{2} \text{ chẵn} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p-1}{2} = 2k \quad (k \in N^*) \quad \Leftrightarrow \quad p = 4k + 1.$$

Bài 16. Cho $3 \le n \in \mathbb{Z}$, n lẻ. Chứng minh rằng : $11^n + 7^n \,\vdots\, 18$.

Giải

Ta có : $11^n = (9+2)^n = C_n^0 9^n + C_n^1 9^{n-1}.2 + \ldots + C_n^{n-1} 9.2^{n-1} + C_n^n 2^n$

$7^n = (9-2)^n = C_n^0 9^n - C_n^1 9^{n-1}.2 + \ldots C_n^{n-1} 9.2^{n-1} - C_n^n 2^n$ (vì n lẻ)

Suy ra : $11^n + 7^n = 2(C_n^0 9^n + C_n^2 9^{n-2}.2^2 + \ldots + C_n^{n-1} 9.2^{n-1})$

$= 28(C_n^0 9^{n-1} + C_n^2 9^{n-3}.2^2 + \ldots + C_n^{n-1} 2^{n-1}) \,\vdots\, 18.$

Bài 17. Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Đặt : $S(m, n) = 1 + \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \dfrac{(n+k+1)!}{n!(n+k)}$

Chứng minh rằng :

a) $S(m, n) \,\vdots\, m!$ **b)** $S(m, n) \not\vdots\; m!(n+1)$

(Đề thi Olympic Anh năm 1981)

c) $13^{2n} + 6 \,\vdots\, 7$ **d)** $7^{2n+1} + 1 \,\vdots\, 8$ **e)** $5^n\, 2.3^{n-1} + 1 \,\vdots\, 8$

Giải

(a) và (b) Ta sẽ chứng minh :

$S(m, n) = (-1)^m C_{n+m}^m .m!$ (theo quy nạp với m) (1)

* **Với m = 1 :**

$$S(1, n) = 1 - \frac{(n+1)!}{n!(n+1)} = 1 - (n+2) = -(n+1) = (-1)^1 C_{n+1}^1 .1! \text{ (đúng)}$$

* **Với m = k : Giả sử (1) đúng**

* **Với m = k + 1 :**

$$S(k+1, n) = S(k, n) + (-1)^{k+1}.\frac{(n+k+2)!}{n!(n+k+1)}$$

$$= (-1)^k C_{n+k}^k .k! + (-1)^{k+1} \frac{(n+k)!(n+k+2)}{n!}$$

$$= (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} + (-1)^{k+1} \frac{(n+k)!(n+k+2)}{n!}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(n+k)!}{n!}(n+k+2-1) = (-1)^{k+1} \frac{(n+k+1)!}{n!}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!}.(k+1)! = (-1)^{k+1} C_{n+k+1}^{k+1}.(k+1)!$$

Vậy bước 3 đúng, nên theo nguyên lí quy nạp (1) đúng $\forall m \in \mathbb{N}$.

Khi đó : * $S(m, n) \vdots m!$ (vì $C^m_{n+m} \in N^*$)

* $S(3, 2) = -C^3_5.3! = -60 \vdots 3!(2 + 1)$

$(m = 3, n = 2) \Rightarrow$ (ĐPCM).

c) Ta có : $13^{2n} + 6 = (14 - 1)^{2n} + 6 = BSC(14) + (-1)^{2n} + 6$ (do bài 12)

$= BSC(7) + 7 \vdots 7$

d) $7^{2n+1} + 1 = (8 - 1)^{2n+1} + 1 = BSC(8) + (-1)^{2n+1} + 1$ (do bài 12)

$= BSC(8) \vdots 8$

e) $A = 5^n + 2.3^{n-1} + 1 = (5^n + 3^n) - (3^{n-1} - 1)$ (1)

$= 5^n + 5.3^{n-1} - 3.3^{n-1} + 1 = 5(5^{n-1} + 3^{n-1}) - (3^n - 1)$ (2)

* $\begin{cases} \text{Với n chẵn} \\ (n-1 \text{ lẻ}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{n-1} + 3^{n-1} \vdots 8 \\ 3^n - 1 \vdots 8 \end{cases} \Rightarrow A \vdots 8$ (do (2))

* $\begin{cases} \text{Với n lẻ} \\ (n-1 \text{ chẵn}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^n + 3^n \vdots 8 \\ 3^{n-1} - 1 \vdots 8 \end{cases} \Rightarrow A \vdots 8$ (do (1))

Vậy $A \vdots 8 \Rightarrow$ (ĐPCM).

Chý ý : *(cho câu (a) và (b))*

Các bạn dùng khai triển nhị thức Newton (với một nhị thức đặc biệt nào đó) làm thử bài này xem sao. Mục đích trước hết là chứng minh :

$$S(m, n) = (-1)^m C^n_{n+m} m!$$

Chỉ dùng nhị thức Newton, không quy nạp.

Bài 18. Chứng minh rằng :

a) $3^n\left[C^0_n - \frac{1}{3}C^1_n + ... + (-1)^n \frac{1}{3^n}C^n_n\right] \vdots 8$, $\forall 3 \le n \in Z$

b) $2.1.C^2_n + 3.2.C^3_n + ... + n(n-1)C^n_n \vdots 2^{n-1}$, $\forall 2 \le n \in Z$

Giải

a) Ta có : $3^n\left[C^0_n - \frac{1}{3}C^1_n + ... + (-1)^n \frac{1}{3^n}C^n_n\right] =$

$$= 3^n\left[C^0_n(1)^n + C^1_n(1)^{n-1}\left(-\frac{1}{3}\right) + ... + C^n_n\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$= 3^n\left(1 - \frac{1}{3}\right)^n = 3^n\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2^n \vdots 8, \forall n \ge 3 \ (n \in Z)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

b) Xét : $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n$

$f'(x) = C_n^1 + C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \ldots + nC_n^n x^{n-1} = n(x+1)^{n-1}$

$f''(x) = 2.1C_n^2 + 3.2.C_n^3 x + \ldots + n(n-1)C_n^n x^{n-2} = n(n-1)(x+1)^{n-2}$

$\Rightarrow \quad f''(1) = 2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}$

$\Rightarrow \quad 2.1.C_n^2 + 3.2C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2} \vdots 2^{n-1}$

(Vì $n(n-1) \vdots 2 \Rightarrow n(n-1)2^{n-2} \vdots 2.2^{n-2} = 2^{n-1}$)

$\Rightarrow$ (ĐPCM).

Bài 19. Cho $n \in N$. Chứng minh rằng : $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k} \not\vdots\, 5$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 - 4)

Giải

Ta có : $\begin{cases} (1+x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k.x^k \\ (1-x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}.x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^{2n+1}.(1-x)^{2n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}.x^{2k}\right)^2 - \left(\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}x^{2k+1}\right)^2$$

Với $x = \sqrt{8}$, ta có : $A^2 - 8B^2 = -7^{2n+1}$

trong đó : $\begin{cases} A = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2K}.2^{3k} \\ B = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}.2^{3k} \end{cases}$

Vì $-7^{2n+1} \equiv \pm 2 \pmod 5$. Do đó, nếu $B \vdots 5$ thì $A^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$ (vô lí)

Vậy $B \not\vdots\, 5$.

Bài 20. Chứng minh rằng : $C_n^5 + C_{n+4}^5 \equiv n \pmod 2$, $\forall 5 \le n \in Z$ trong đó :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \quad 0 \le k \le n;\ k, n \in Z.$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 - 4)

Giải

Sử dụng kết quả : $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Ta có : $C_n^5 + C_{n+4}^5 = C_n^5 + C_{n+3}^5 + C_{n+3}^4$

$$= C_n^5 + (C_{n+2}^5 + C_{n+2}^4) + (C_{n+2}^4 + C_{n+2}^3)$$

$$= C_n^5 + C_{n+2}^5 + C_{n+2}^3 + 2C_{n+2}^4$$

$$= C_n^5 + (C_{n+1}^5 + C_{n+1}^4) + (C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2) + 2(C_{n+1}^4 + C_{n+1}^3)$$

$$= C_n^5 + C_{n+1}^5 + 3C_{n+1}^4 + 3C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2$$

$$= C_n^5 + (C_n^5 + C_n^4) + 3(C_n^4 + C_n^3) + 3(C_n^3 + C_n^2) + (C_n^2 + C_n^1)$$

$$= 2C_n^5 + 4C_n^4 + 6C_n^3 + 4C_n^2 + n$$

$$\equiv n \pmod 2.$$

Bài 21. Tính $\left[(45 + \sqrt{1999})^{1999}\right]$ trong đó [a] kí hiệu phần nguyên của số a.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

Giải

Ta có : $(45 + \sqrt{1999})^{1999} + (45 - \sqrt{1999})^{1999} =$

$$= \sum_{k=0}^{1999} C_{1999}^k 1999^{\frac{k}{2}}.45^{1999-k} + \sum_{k=0}^{1999} C_{1999}^k (1-)^k 1999^{\frac{k}{2}} 45^{1999-k}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{999} C_{1999}^{2k} 1999^k 45^{1999-2k} = 2m$$

Mà $44 < \sqrt{1999} < 45 \Leftrightarrow 0 < 45 - \sqrt{1999} < 1$

$\Rightarrow 0 < (45 - \sqrt{1999})^{1999} < 1 \Rightarrow [(45 + \sqrt{1999})^{1999}] = 2m - 1$

trong đó $m = \sum_{k=0}^{999} C_{1999}^{2k} 1999^k 45^{1999-2k}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Tìm hai số tận cùng của các số sau :

a) 2^{1000} b) 7^{2000}

c) $(1999^{1999} - 1999^{1996})(2001^{2001} - 2001^{1997})/10^5$

Bài 2*. Tìm a, b, c, d $\in N^*$ để $\overline{aaaaabbbbbccccc} + 1 = (\overline{ddddd} + 1)^3$

Bài 3. Cho a $\in N^*$, hãy tìm số dư trong phép chia a^{100} cho 125.

Bài 4*. Chứng minh rằng :

a) $2.1C_{200}^2 + 3.2C_{2000}^3 + ... + 2000.1999.C_{2000}^{1999} \vdots 3998000 \quad (\forall 2 \le n \in Z)$

b) $2001^8 - 2001^4 \vdots 240$

Bài 5. Giải các phương trình :

a) $\sqrt[n]{2} = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in N^*$ b) $9^n = 1 + 2n$, $n \in N^*$

Bài 6*. Chứng minh rằng các số sau đây đều nguyên :

a) $A = (1983^{1983} - 1917^{1917})/10$ b) $B = (1971^{1971} - 1917^{1960})/10$

c) $C = (11^{10} - 1)/100$

Bài 7. Giải phương trình :

a) $(x - 3)^4 + (x - 2)^4 = 1$

(Đề thi vào lớp 10 trường Phổ thông Năng khiếu TP.HCM)

b) $(x - 7)^{101} + (x - 8)^{1001} = 1$

Bài 8*. Giải và biện theo a, b, c phương trình : $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Bài 9. Cho $n \in N^*$ là số lẻ. Chứng minh rằng :

a*) $2^{n!} - 1 \vdots n$

b*) $2^0C_{2n+1}^1 + 2^3C_{2n+1}^3 + 2^6C_{2n+1}^5 + ... + 3^{3n}C_{2n+1}^{2n+1} \not\vdots 5$

c) $n^5 - n \vdots 30$ d) $10^n + 18n - 28 \vdots 27$

e) $n^8 - n^6 - n^4 + n^2 \vdots 5670$ f) $(n + 1)^n - 1 \vdots n^2$

g*) $n^2 + 3n + 5 \not\vdots 121$

Bài 10*. Tìm 5 chữ số tận cùng của $9^{9^{9^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}$ (2001 chữ số 9)

Bài 11. Tìm 3 chữ số tận cùng của $1993^{1994^{1995}}$

Bài 12. Tìm 1000 chữ số tận cùng của $A = 1 + 50 + 50^2 + ... + 50^{999}$

Bài 13. Tìm $n \in N$ để $n^{10} + 1 \vdots 10$

Bài 14*. Chứng minh rằng : $B = 1 + 9^{40} + 77^{40} + 1977^{40}$ là số chính phương.

Bài 15. Tìm $n \in N$ để $C = 1^n + 9^n + 19^n + 1993^n$ là số chính phương.

Bài 16. Tìm $2 \le n \in N$ nhỏ nhất để $D = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ là số chính phương.

Bài 17. Tìm tất cả các số hạng trong khai triển $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2001}$ mà chia hết cho 9.

Bài 18. Cho $3 \le n \in Z$, n lẻ, $a_i \ne a_j$, $\forall i \ne j$

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \{1, 2, ..., n\}$. Chứng minh rằng :

a) $(a_1 - 1)(a_2 - 2)...(a_n - n) \vdots 2$ b) $n^2 + 3n + 5 \not\vdots 1331$.

Chương 4

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN TỔ HỢP VÀ "NHỊ THỨC NEWTON"

I. GIỚI THIỆU CÁC BẤT ĐẲNG CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

1. *Bất đẳng thức Cauchy*

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ $(2 \leq n \in \mathbb{Z})$, ta luôn có :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 a_2 \ldots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

2. *Bất đẳng thức Bunhiacopski* (viết tắt BCS)

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ $(2 \leq n \in \mathbb{Z})$, ta luôn có :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $\exists t \in \mathbb{R} : a_i = tb_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

3) *Bất đẳng thức Bernoulli*

a) *Dạng nguyên thủy :*

Cho $a \geq -1$, $1 \leq n \in \mathbb{Z}$, ta luôn có : $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ n = 1 \end{array}\right.$

b) *Dạng mở rộng :*

* $a > -1$, $\alpha \geq 1$ thì : $(1 + a)^\alpha \geq 1 + \alpha a$
* $a > -1$, $0 < \alpha \leq 1$ thì : $(1 + a)^\alpha \leq 1 + \alpha a$

Dấu "=" (mỗi bất đẳng thức trên) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ \alpha = 1 \end{array}\right.$

II. GIỚI THIỆU CÁC BÀI TOÁN

Bài 1. Chứng minh rằng :

$$C_{2001}^{k} + C_{2001}^{k+1} \leq C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001} \quad \forall k \in [0, 2000] \cap \mathbb{Z}.$$

(ĐHQG Hà Nội khối A năm 2000)

Giải

Theo công thức : $C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = C_{n}^{k}$ $\quad (1 \le k \le n-1)$

Suy ra : $\begin{cases} C_{2001}^{k} + C_{2001}^{k+1} = C_{2002}^{k+1} \\ C_{2001}^{1000} + C_{2001}^{1001} = C_{2002}^{1001} \end{cases}$

Do đó BĐT cần chứng minh $\Leftrightarrow$ $C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{1001}$ (1)

* ***Nếu*** $0 \le k \le 1000$:

Ta có : $\dfrac{C_{2002}^{k+1}}{C_{2002}^{k}} = \dfrac{2002!}{(k+1)!(2001-k)!} \cdot \dfrac{k!(2002-k)!}{2002!} = \dfrac{2002-k}{k+1} \ge 1$

$\Rightarrow \quad C_{2002}^{k} \le C_{2002}^{k+1} \quad \Rightarrow \quad C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{k+2} \le \ldots \le C_{2002}^{1001}$

$\Rightarrow \quad C_{2002}^{k+1} \le C_{2002}^{1001}$ (2) $\Rightarrow$ (1) đúng.

* ***Nếu*** : $1001 \le k \le 2000$:

$\Rightarrow \quad 0 \le l = 2002 - (k+1) = 2001 - k \le 1000$

Lúc đó : $C_{2002}^{k+1} = C_{2002}^{l} \le C_{2002}^{1001}$ (do (2)) $\Rightarrow$ (1) đúng

Tóm lại : (1) luôn đúng $\Rightarrow$ (ĐPCM).

Bài 2. Cho $n \in N^*$. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{C_{1997}^{1}} + \dfrac{1}{C_{1998}^{2}} + \ldots + \dfrac{1}{C_{1997+n}^{n+1}} < \dfrac{1}{1995}$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

Giải

Ta có : $\dfrac{1}{C_{1997+k}^{k+1}} = \dfrac{(k+1)!\,1996!}{(1997+k)!} = \dfrac{1996!(k+1)!}{1995(1997+k)!}[1997 + k - (k+2)]$

$$= \frac{1996}{1995}\left[\frac{1995!(k+1)!}{(1996+k)!} - \frac{1995!(k+2)}{(1997+k)!}\right]$$

$$= \frac{1996}{1995}\left(\frac{1}{C_{1996+k}^{k+1}} - \frac{1}{C_{1997+k}^{k+2}}\right) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{1997+k}^{k+1}}$$

$$= \frac{1996}{1995}\left(\frac{1}{C_{1996}^{1}} - \frac{1}{C_{1997+n}^{k+2}}\right) < \frac{1996}{1995}\cdot\frac{1}{C_{1996}^{1}} = \frac{1}{1995}$$

Chú ý : *Bài toán tổng quát :* "$\forall n \in N^*$, $\forall 3 \le m \in N^*$, *ta luôn có :*

$$\frac{1}{C_{m}^{1}} + \frac{1}{C_{m+1}^{2}} + \ldots + \frac{1}{C_{m+n}^{n+1}} < \frac{1}{m-2}\text{"}$$

tự giải !

Bài 3. Cho $3 \le n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng : $n^{n+1} > (n+1)^n$

(ĐH An ninh khối A năm 2000)

Giải

Cách 1 : *(Dùng khai triển nhị thức Newton)*

Ta có : $n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$

Hơn nữa :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^n\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < 2 + \underbrace{1+\ldots+1}_{(n-2)\text{ số } 1} = n$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

Cách 2 : $n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n}$ (1)

Ta chứng minh (1) bằng quy nạp.

- Với $n = 3$: $\left(\frac{3}{4}\right)^3 > \frac{1}{3}$ (đúng) (Vì $81 > 64$)
- Với $n = k$: Giả sử $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k > \frac{1}{k}$
- Với $n = k+1$: Ta có :

$$\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k\frac{k+1}{k+2} > \left(\frac{k}{k+1}\right)^k\left(\frac{k+1}{k+2}\right) > \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k+2}\right) > \frac{1}{k+1}$$

$$\left(\text{Vì } (k+1)^2 > k(k+2) \Rightarrow \frac{k+1}{k+2} > \frac{k}{k+1}\right)$$

Vậy bước 3 đúng $\Rightarrow$ Theo nguyên lí quy nạp (1) đúng.

Cách 3 :

$$n^{n+1} > (n+1)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{n+1}$$

Theo BĐT Bernoulli :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 > \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\geq \left[\frac{2n^2}{(n+1)^3} - \frac{1}{n+1}\right] + \frac{1}{n+1} \geq \frac{(n-1)^2 - 2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}$$

$$> \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{n+1}$$

Cách 4 :

Ta có : $n^{n+1} > (n+1)^n \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)\ln(n) > n\ln(n+1)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Xét $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x \geq 3$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \quad \forall x \geq 3$$

$\Rightarrow$ f giảm trên $[3, +\infty) \quad \Rightarrow \quad f(n) > f(n+1)$

$$\Rightarrow \frac{\ln(n)}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Cách 5 :

Xét $f(x) = x - \ln(1+x), \quad x > 0$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0, \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow$ f tăng trên $(0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(0), \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \quad x - \ln(1+x) > 0, \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \quad \ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$ (với $x = \dfrac{1}{n}$)

$\Rightarrow \quad \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 1 \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < n, \quad \forall n \geq 3$

Bài 4. Chứng minh các kết quả trong giới hạn :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$ **b)** $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Giải

a) * $a = 1$: luôn đúng

* $a > 1$: Đặt : $b = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$

Ta có : $a = (1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k > C_n^1 b = nb$

$\Rightarrow \quad a > n(\sqrt[n]{a} - 1) \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt[n]{a} < \frac{a}{n} + 1$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{n} + 1\right) = 1$ Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

* $0 < a < 1$: $\Rightarrow \quad \frac{1}{a} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$

Tóm lại : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

b) Xét : $b = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$ (với $n \geq 2$)

$\Rightarrow \quad n = (1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k > C_n^2 b^2 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{n(n-1)}{2} b^2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{n-1}} > b = \sqrt[n]{n} - 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sqrt{\frac{2}{n-1}} + 1}_{(n-1)\text{số}} > \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{(n-1)\text{số}} > 1$

Mà : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{n-1}} + 1\right) = 1$

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \quad \Rightarrow$ (ĐPCM).

Bài 5.

a) Cho $\begin{cases} a + b = 2 \\ a, b > 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $a^n + b^n \geq 2, \forall 1 \leq n \in Z$

b) Cho a, b > 0. Chứng minh rằng : $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n, \forall 1 \leq n \in Z$

(Bộ đề tuyển sinh)

Giải

a) ***Cách 1 :***

Đặt : $a = 1 + \alpha \quad \Rightarrow \quad b = 1 - \alpha$

Suy ra : $a^n + b^n = (1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\alpha)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [\alpha^k + (-\alpha)^k]$$

$$= 2C_n^0 + C_n^2\alpha^2 + 2C_n^4\alpha^4 + \ldots \geq 2C_n^0 = 2$$

$$\Rightarrow \quad a^n + b^n \geq 2$$

Cách 2 :

Đặt $\begin{cases} a = 1+\alpha > 0 \\ b = 1-\alpha > 0 \end{cases}$ (như cách 1)

Theo BĐT Bernoulli : $\left.\begin{array}{l} a^n = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha \\ b^n = (1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a^n + b^n \geq 2$

Cách 3 :

Áp dụng BĐT Cauchy : $a^n + 1 + \ldots + 1 \geq n\sqrt[n]{a^n.1\ldots1} \geq na$

Chứng minh tương tự : $b^n > nb - (n-1)$

Vậy : $a^n + b^n \geq n(a+b) - 2(n-1) = 2$

Cách 4 : Ta chứng minh bằng quy nạp.

* Với n = 1 $\Rightarrow$ $a^1 + b^1 = 2 \geq 2$ (đúng)

* Với n = k : Giả sử $a^k + b^k \geq 2$

* Với n = k + 1 : Ta luôn có : $(a^k - b^k)(a - b) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad a^{k+1} + b^{k+1} \ {}^{3}\ a^k b + ab^k$$

$$\Rightarrow \quad 2(a^{k+1} + b^{k+1}) \ {}^{3}\ (a^k + b^k)(a+b) \geq 2.2$$

$$\Rightarrow \quad a^{k+1} + b^{k+1} \geq 2 \text{ (đúng)}$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp bài toán được chứng minh.

Cách 5 : (Chỉ xét $n \geq 2$, vì n = 1 BĐT luôn đúng)

Xét $f(a) = a^n + b^n = a^n + (2-a)^n$, $(0, 2)$

Ta có :

* $f'(a) = na^{n-1} - (2-a)^{n-1} = n[a^{n-1} - (2-a)^{n-1}] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad a^{n-1} = (2-a)^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad a = 2 - a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1$$

* $f''(a) = n(n-1)a^{n-2} + n(n-1)(2-a)^{n-2} > 0$

Vậy : $\min\limits_{0<a<2} f(a) = f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(a) \geq 2 \quad \Rightarrow \quad a^n + b^n \geq 2$

b) *Cách 1 :*

Đặt : $\begin{cases} a' = \dfrac{2a}{a+b} > 0 \\ b' = \dfrac{2b}{a+b} > 0 \end{cases}$ $(a' + b' = 2)$

Theo câu (a) : $a'^n + b'^n \ge 2$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a}{a+b}\right)^n + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^n \ge 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^n + b^n}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

Cách 2 : $\forall 0 \le i \le n$, ta luôn có :

$$(a^{n-i} - b^{n-i})(a^i - b^i) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad a^n + b^n \ge a^{n-1} - b^i + a^i b^{n-1} \quad (1)$$

Hơn nữa :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}.b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k.b^{n-k}$$

$$\Rightarrow \quad 2(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a^{n-k}.b^k + a^k.b^{n-k}) \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k (a^n + b^n)$$

$$= 2^n(a^n + b^n) \quad (\text{vì } \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^n + b^n}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

Chú ý : ***Qua cách chứng minh trên các bạn suy tư "một tý", ta sẽ có bài toán với giả thiết nhẹ hơn :***

"Cho $\begin{cases} a + b \ge 0 \\ n \in N^* \end{cases}$ thì $\dfrac{a^n + b^n}{2} \ge \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$ "

Bài 6. **Cho $2 \le n \in Z$. Chứng minh rằng :** $C_n^0 C_n^1 ... C_n^n \le \left(\dfrac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$

(Đề kiểm tra lớp 10 chuyên Tin – Toán ĐHQG TP.HCM)

Giải

(Các bạn để ý $C_n^0 = C_n^n = 1$)

Ta có : $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}.1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$

$$\Rightarrow \quad 2^n - 2 = C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} \geq (n-1)^{n-1}\sqrt{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1}}$$

(Do BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1} \geq C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1}$$

Vậy : $\quad C_n^0 C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n \leq \left(\frac{2^n - 2}{n-1}\right)^{n-1}$.

Bài 7. Cho $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ n \in N^* \end{cases}$ Chứng minh rằng : $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$

(Bộ đề tuyển sinh)

Giải

Cách 1 :

Đặt : $\begin{cases} a = 1 + x \geq 0 \\ b = 1 - x \geq 0 \end{cases} \quad (a + b = 2)$

Lúc đó : $\quad 2^n = (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} . b^k \geq C_n^0 a^n + C_n^n b^n = a^n + b^m$

$$\Rightarrow \quad (1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$$

Cách 2 :

Vì $-1 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \dfrac{1+x}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \dfrac{1-x}{2} \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n \leq \dfrac{1+x}{2} & \Rightarrow \quad \left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-x}{2}\right)^n \leq 1 \\ \left(\dfrac{1-x}{2}\right)^n \leq \dfrac{1-x}{2} & \Rightarrow \quad (1+x)^n + (1-x)^n \leq 2 \end{cases}$$

Cách 3 : (Chỉ xét $n \geq 2$, vì $n = 1$ BĐT luôn đúng)

Đặt : $x = \cos 2t,\ t \in R$

$$\Rightarrow \quad (1 + x)^n + (1 - x)^n = (1 + \cos 2t)^n + 1 - \cos 2t)^n = (2\cos t)^n + (2\sin t)^n$$

$$= 2^n(\sin^n t + \cos^n t) \leq 2^n(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2^n$$

$$\Rightarrow \quad (1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$$

Cách 4 : (cũng xét $n \geq 2$)

Xét $f(x) = (1 + x)^n + (1 - x)^n$

$f'(x) = n[(1 + x)^{n-1} - (1 - x)^{n-1}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$f''(x) = n(n - 1)[(1 + x)^{n-2} + (1 - x)^{n-2}] > 0$

Bảng biến thiên :

x	−1		0		1
f'		−	0	+	
f	2^n	↘	2	↗	2^n

Vậy : $2 \leq f(x) \leq 2^n \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq (1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n \quad \Rightarrow \quad$ (ĐPCM).

Chú ý : *Với* $x = \dfrac{1000}{1001}$ *hay* $= \dfrac{2000}{2001}$, *ta có những BĐT rất "đẹp" :*

$$* \quad \left(1 + \frac{1000}{1001}\right)^{2007} + \left(1 - \frac{1000}{1001}\right)^{2007} < 2 \qquad (n = 2007)$$

$$* \quad \left(1 + \frac{2000}{2001}\right)^{2008} + \left(1 - \frac{2000}{2001}\right)^{2008} < 2 \qquad (n = 2008)$$

Các bạn để ý các BĐT không xảy ra dấu "=" ?

Bài 8. Cho $3 \leq n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh :

a) $n! > 2^{n-1}$ b) $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < 3$

c) Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n!} = ?$ $(0 \leq a \leq 2)$ d) Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a^n}{n!} = ?$ $(a \in \mathbb{R})$.

Giải

a) ***Cách 1 :*** Ta có : $n! = \underbrace{2.3.4\ldots n}_{(n-2)\text{ số}} > \underbrace{2.2.2\ldots 2}_{(n-2)\text{ số}} \geq 2^{n-1} \quad \Rightarrow \quad n! > 2^{n-1}$

Cách 2 : (Dùng quy nạp)

* Với $n = 3$: $3! = 6 > 2^{3-1}$
* Với $n = k$: Giả sử : $k! > 2^{k-1}$
* Với $n = k + 1$: Ta có : $(k + 1)! = k!\,(k + 1) > 2^{k-1}.2 = 2^k$

$\Rightarrow \quad (k + 1)! > 2^k$ (đúng)

Vậy theo nguyên lí quy nạp : $n! > 2^{n-1}$, $\forall n \geq 3$

b) ***Cách 1 :***

Theo câu (a) : $n! > 2^{n-1},\ \forall n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},\ \forall n \geq 3$

Suy ra :

$$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$$

$$+ \quad \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$$

....

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3$$

Cách 2 :

Ta có : $1 + \frac{1}{1!} = 2$

$$\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$+ \quad \frac{1}{4!} < \frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5!} < \frac{1}{4.5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

....

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(n-1)^n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 3 - \frac{1}{n} < 3$$

c) Theo câu (a) $(n-1)! > 2^{n-2} \geq a^{n-2}$ (vì $0 \leq a \leq 2$)

$$\Rightarrow \quad \frac{a^{n-2}}{(n-1)!} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^2}{n}$$

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^2}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

d) Chọn $n_0 \in Z$ cố định ; $n_0 > |a| + 3$

Lúc đó : $n! = 1.2...n_0\underbrace{(n_0+1)(n_0+2)...(n-1)n}_{(n-n_0-1)\text{ số}} >$

$$> 1.2...n_0.|a|^{n-n_0-1}.n \geq n_0!\ |a|^{n-n_0-1}.n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|a|^{n-n_0-1}}{n!} < \frac{a}{n_0!n} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{|a|^n}{n!} \leq \frac{|a|^{n_0+1}}{n_0!n}$$

Mà : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a|^{n_0+1}}{n_0!n} = 0$

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

Bài 9. Cho $2 \leq n \in Z$. Chứng minh rằng : $2 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.

(ĐH An ninh khối A năm 1999, đề thi đề nghị Olympic 30–4 lần VI)

Giải

Cách 1 :

Ta có : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\dfrac{1}{n} + C_n^2\dfrac{1}{n^2} + ... + C_n^n\dfrac{1}{n^n}$

$$= 2 + C_n^2\frac{1}{n^2} + ... + C_n^n\frac{1}{n} > 2 \qquad (\text{vì } C_n^0 = 1, C_n^1 = n)$$

Mà : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$, $(2 \leq k \leq n)$

$$\Rightarrow \quad C_n^k\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \quad 2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 3 \qquad (\text{do bài 8})$$

Cách 2 :

Đặt : $\begin{cases} a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \\ b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \end{cases} \quad (n \geq 2)$

Theo BĐT Bernoulli (nhiều lần)

* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + n\frac{1}{n} = 2$

* $\frac{a_n + 1}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^n$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n > \frac{n+2}{n+1}\left(1 - \frac{n}{n^2 + 2n + 1}\right)$$

$$\geq \frac{(n+2)(n^2 + n + 1)}{(n+1)^3} \geq \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1$$

$\Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n$

(Có thể từ đây suy ra : $a_n > a_{n-1} > \ldots > a_2 > 2 \Rightarrow a_n > 2$)

* $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2}$

$$= \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} > \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{n+2}{n^2 + 2n}\right) = 1$$

$\Rightarrow \quad b_n > b_{n+1}$

Vậy : $\begin{cases} a_{n+1} > a_n \\ b_{n+1} < b_n \end{cases} \quad (\forall n \geq 2)$

Mà : $\quad a_n < b_n \qquad (\forall n \geq 2)$

* Nếu $n \geq 10 \quad \Rightarrow \quad a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_{10}$

$$\Rightarrow \quad a_n < b_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{11} < 3$$

(Các bạn tự kiểm tra bằng tính toán thông thường)

* Nếu $n < 10 \quad \Rightarrow \quad a_n < a_{n+1} \leq \ldots \leq a_{10} < b_{10} < 3$

Tóm lại : $2 < a_n < 3, \quad (\forall n \geq 2)$

Cách 3 :

Xét $f(x) = e^x - (1 + x)$ trên $[0, +\infty)$

$f'(x) = e^x - 1 \geq 0, \ \forall x \geq 0$

$\Rightarrow \ f(x) \geq f(0) \quad$ (dấu "=" $\Leftrightarrow x = 0$)

$\Leftrightarrow \ e^x - (1 + x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geq 1 + x$

$\Leftrightarrow \ x \geq \ln(1 + x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad$ (với $= \frac{1}{n} > 0$)

$\Rightarrow \ 1 > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3$

Còn : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + n\frac{1}{n} = 2$ (BĐT Bernoulli)

Vậy : $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$

Cách 4 : Trước hết ta chứng minh BĐT kép sau :

$$1 + \frac{k}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}, \qquad \forall 2 \leq k \leq n$$

Thật vậy : (ta chứng minh quy nạp theo k)

* k = 2 : $1 + \frac{2}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}$ luôn đúng, vì :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$

* k = m : Giả sử : $1 + \frac{m}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < 1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}$

* k = m + 1 : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\geq 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m}{n^2} > 1 + \frac{m+1}{n}$$

Và $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{m+1} < 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)^2}{n^2} - \frac{n(m+1) - m^2}{n^3}$

$$< 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)^2}{n^2}$$

(Vì : $n(m + 1) > m.m = m^2 \Leftrightarrow n(m + 1) - m^2 > 0$)

Vậy bước 3 của phép chứng minh quy nạp cho ta BĐT kép đúng, tức là BĐT kép được chứng minh.

Quay lại bài toán, chọn k = n, ta có ngay kết quả : $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$

Bài 10. Chứng minh rằng $\sqrt[n]{(n+1)!} > 1 + \sqrt[n]{n!}$, $\forall n \in N^*$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

Giải

BĐT $\Leftrightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt[n]{(n+1)!}} + \sqrt[n]{\dfrac{n!}{(n+1)!}} \le 1$ (0)

Theo BĐT Cauchy : $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}}{n} \ge \sqrt[n]{\dfrac{1}{(n+1)!}}$ (1)

$\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{n+1}}{n} \ge \sqrt[n]{\dfrac{n!}{(n+1)!}}$ (2)

Cộng (1), (2) vế với vế ta được (0).

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ n = 1

Chú ý : *Bạn đọc chú ý BĐT trên là trường hợp đặc biệt của BĐT Minkowski*

" $\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}$

(trong đó $2 \le n \in Z$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m \ge 0$) "

Thật vậy :

Chọn : $\begin{cases} a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_2 = 2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_n = n \end{cases}$ $\Rightarrow$ có ngay BĐT trên.

Chứng minh BĐT Minkowski :

* Nếu $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n) = 0$

$\Rightarrow$ $a_i = b_i = 0, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

$\Rightarrow$ BĐT luôn đúng.

* Nếu $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n) > 0$

Theo BĐT Cauchy :

$$+\begin{cases}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{a_i+b_i}} \le \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{a_i+b_i}\right)\\[2ex] \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{a_i+b_i}} \le \dfrac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\dfrac{b_i}{a_i+b_i}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i}} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}} \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i+b_i}{a_i+b_i}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i} \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)} \Rightarrow \quad \text{(ĐPCM)}.$$

Bài 11. $\forall n \in N^*$. Chứng minh rằng : $\dfrac{1!2!+2!3!+\ldots+n!(n+1)!}{n\sqrt[n]{(1!)^2\ldots(n!)^2}} \ge 2\sqrt[2n]{n!}$

Giải

Ta có : $k!\,(k+1)! = k!\,(k+1)\,k! = (k!)^2 + k(k!)^2$

Vì vậy :

$$1!2!+2!3!+\ldots+n!(n+1)! = (1!)^2+(2!)^2+\ldots+(n!)^2+1(1!)^2+2(2!)^2+\ldots+n(n!)^2$$

$$\ge 2n\sqrt[2n]{(1!2!\ldots n!)^4\, n!}$$

$$\Rightarrow \frac{1!2!+2!3!+\ldots+n!(n+1)!}{n\sqrt[n]{(1!)^2.(2!)^2\ldots(n!)^2}} \ge 2\sqrt[2n]{n!}$$ Dấu "=" $\Leftrightarrow$ $n = 1$.

Bài 12. Cho $a \ge 0$, $1 \le m < n$ ($m, n \in Z$). Chứng minh các BĐT sau :

a) $(1+a)^n \ge 1+n.a$ (BĐT Bernoulli)

b) $(1+n)^m < (1+m)^n$ **c)** $1998^{2001} + 1999^{2001} < 2000^{2001}$

Giải

a) Ta có : $(1+a)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k \ge C_n^0 + C_n^1 a \ge 1 + na$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\\ n = 1\end{array}\right.$

b) Theo BĐT Bernoulli (mở rộng) : $(1+m)^{\frac{n}{m}} > 1 + \dfrac{n}{m}.m = 1 + n$

$$\Rightarrow (1+m)^n > (1+n)^m$$

c) Theo BĐT Bernoulli : $\left(\dfrac{2000}{1999}\right)^{2001} = \left(1 + \dfrac{1}{1999}\right)^{2001} > 1 + \dfrac{2001}{1999} > 2$

$$\Rightarrow \quad 2000^{2001} > 2.1999^{2001} > 1998^{2001} + 1999^{2001}$$

Vậy : $1998^{2001} + 1999^{2001} < 2000^{2001}$.

Bài 13. Cho $|q| < 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

(Định lí cơ bản trong giới hạn)

Giải

* Với $q = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

* Với $0 < |q| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|q|} > 1$

Đặt $a = \dfrac{1}{q} - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{q^n} = (1 + a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k > C_n^1 a$

$$\Rightarrow \frac{1}{q^n} > na \Rightarrow 0 < q^n < \frac{1}{na}$$

Mà $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{na} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Bài 14.

Cho $\begin{cases} S = a_a + a_2 + ... + a_n \\ a_1, a_2, ..., a_n \geq 0 \\ 1 \leq n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(a + a_n) \leq 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + ... + \frac{S^n}{n!}.$$

Giải

Theo BĐT Cauchy :

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(a + a_n) \leq \left(\frac{n + a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{S}{n}\right)^n$$

$$\leq 1 + C_n^1 \frac{S}{n} + C_n^2\left(\frac{S}{n}\right)^2 + ... + C_n^n\left(\frac{S}{n}\right)^n$$

Hơn nữa : $\forall\ 1 \leq k \leq n$

$$(n - k)!\, n^k \geq (n - k)!\,(n - k + 1)(n - k + 2)...n = n!$$

$$\Rightarrow \frac{C_n^k}{n^k} = \frac{n!}{k!}\cdot\frac{1}{(n-k)!\,n^k} \le \frac{n!}{k!}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{1}{k!}$$

$$C_n^k\left(\frac{S}{n}\right)^k \le \frac{S^k}{k}$$

$$\Rightarrow (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \le 1 + \frac{S^1}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \dots + \frac{S^n}{n!}.$$

Bài 15.

Cho $\begin{cases} m > n \ge 1 \\ m, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ b) $\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{x^i}{i!}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{(-x)^i}{i}\right) < 1, \forall x \ne 0, \forall m$ lẻ

(Câu (b) là đề thi ĐH An ninh năm 1997)

Giải

a) ***Cách 1 :***

Đặt $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $n \ge 1$

Theo công thức nhị thức Newton :

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Tương tự : $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \dots +$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

So sánh từng ngoặc (.) của hai biểu thức với nhau, ta thấy ngay: $a_{n+1} > a_n$

Vậy $\{a_n\}$ là dãy tăng $\Rightarrow$ $a_m > a_{m-1} > \dots > a_n$

$$\Rightarrow a_m > a_n \Rightarrow \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Cách 2 : **Áp dụng BĐT Bernoulli (mở rộng)**

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{n}} > 1+\frac{1}{m}\cdot\frac{m}{n} = 1+\frac{1}{n} \quad\Rightarrow\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{m} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{n}$$

Cách 3 : **Áp dụng BĐT Cauchy :**

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1+\ldots+1 > m\sqrt[m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

$$\Rightarrow\quad n+n.\frac{1}{n}+m-n > m\sqrt[m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

$$\Rightarrow\quad m+1 > m\sqrt[m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \quad\Rightarrow\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{m} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Cách 4 :

Xét $f(t) = \ln t,\ t \in [1,\ 1+x]\quad (x > 0)$

$$f'(t) = \frac{1}{t}$$

Theo định lí Lagrange :

$$f(1+x) - f(1) = f'(c)(1+x-1) \quad (\text{với } c \in (1,\ 1+x))$$

$$\Rightarrow\quad \ln(1+x) = \frac{x}{c}$$

Mà : $1 < c < 1+x \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{c} < 1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x}{1+x} < \dfrac{x}{c} < x$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x \qquad (1)$$

Quay lại bài toán :

Xét $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\quad (x > 0)$

$$g'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right] = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left[\ln(1+z)-\frac{z}{1+z}\right]$$

Với $z = \dfrac{1}{x} > 0$

Theo (1) $\Rightarrow$ $g'(x) > 0$, $g(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ $g(n+1) > g(n)$ $\Rightarrow$ (ĐPCM).

b) Đặt : $\begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} \\ g(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \frac{(-x)^i}{i!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^m}{m!} \quad \text{(vì m lẻ)} \\ h(x) = f(x).g(x) \end{cases}$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = f(x) - \frac{x^m}{m!}$$

$$g'(x) = -1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \ldots - \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} = -g(x) - \frac{x^m}{m!}$$

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = \left(f(x) - \frac{x^m}{m!}\right)g(x) + f(x)\left(-g(x) - \frac{x^m}{m!}\right)$$

$$= -\frac{x^m}{m!}[f(x) + g(x)] = -2\frac{x^m}{m!}\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\right)$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0		
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Vậy : $h(x) < 1, \forall x \neq 0 \Rightarrow$ (ĐPCM).

Chú ý :

* ***Qua các chứng minh trên (cách 4 của bài toán), ta có BĐT "đẹp" (nhờ định lí Lagrange) :***

$$\frac{x}{1+n} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1$$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{x}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{x}{1+x}} < (1+x)^x < e \ldots$$

* **Theo câu b) m lẻ $\Rightarrow$ m – 1 chẵn**

$\Rightarrow 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!} > 0, \forall x$ Và dấu của x^m chính là dấu của x (và ngược lại).

Bài 16. Dùng quy nạp chứng minh các BĐT sau :

a) $a_{n+1} > a_n$ với $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(\forall 1 \le n \in \mathbb{Z})$

b) $n! > \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ $(\forall 1 \le n \in \mathbb{Z})$.

Chú ý : *Câu a) là bài toán rất quen thuộc được chứng minh rất nhiều cách ở các bài toán trước, ở đây chúng tôi giới thiệu lại nhưng yêu cầu phải chứng minh bằng quy nạp.*

Giải

a) Dành cho các bạn. (Cách chứng minh tương tự như phép chứng minh quy nạp cho BĐT Bernoulli).

b) * Với n = 1 : $1! > \left(\dfrac{1}{e}\right)^1 \Leftrightarrow e > 1$ luôn đúng (vì $e \approx 2,7182...$)

* Với n = k : Giả sử : $k! > \left(\dfrac{k}{e}\right)^k$

* Với n = k + 1 : Ta sẽ chứng minh : $(k + 1)! > \left(\dfrac{k+1}{e}\right)^{k+1}$ (1)

Quả vậy : $(k + 1)! = k!\,(k + 1) > \left(\dfrac{k}{e}\right)^k (k + 1)$

Để chứng minh (1) đúng, ta sẽ chứng minh :

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k (k+1) > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \Leftrightarrow e > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = a_k \quad (2)$$

Cách 1 :

Theo câu a) : $a_{k+1} < a_{k+n}$ $(\forall 2 \le n \in \mathbb{Z})$

Cho $n \to +\infty$, ta có : $a_{k+1} \le e$ (Vì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k+n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{k+n}\right)^{k+n} = e$

$\Rightarrow a_k < a_{k+1} \le e \Rightarrow a_k < e \Rightarrow$ (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Cách 2 :

Theo cách 4 (bài 15), ta có được : $\ln(1 + x) < x$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$ (thay x bởi $\dfrac{1}{x}$)

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 1 \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^k < e$$

$\Rightarrow$ (2) đúng...

Qua 2 cách ta đều khẳng định (1) đúng, như vậy theo nguyên lí quy nạp

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n, (\forall 1 \le n \in Z).$$

Bài 17.

a) Cho x, a ≥ 0, $2 \le n \in Z$. Chứng minh rằng : $\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| \le \sqrt[n]{|x - a|}$

b) Cho dãy không âm $\{x_n\}$ hội tụ đến x (x ≥ 0). Chứng minh :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{x}$ bằng định nghĩa ($2 \le m \in Z$ là hằng số).

Giải

a) Không giảm tính tổng quát ta xem $x \ge a$

Đặt $b = x - a \ge 0 \quad \Rightarrow \quad a + b = x$

BĐT cần chứng minh $\Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{x-a} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{x-a} + \sqrt[n]{a}$

Theo nhị thức Newton :

$$\left(\sqrt[n]{x-a} + \sqrt[n]{a}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-k}\left(\sqrt[n]{b}\right)^k \ge C_n^0\left(\sqrt[n]{a}\right)^n + C_n^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a + b = x$$

$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{x-a} + \sqrt[n]{a} \ge \sqrt[n]{x} \quad \Rightarrow \quad$ (ĐPCM).

b) Vì $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, nên $\forall \varepsilon > 0, \exists n_o \in N : \quad n > n_o \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| < \varepsilon^m$

Do đó theo câu a), suy ra : $\left|\sqrt[m]{x_n} - \sqrt[m]{x}\right| \le \sqrt[m]{|x_n - x|} < \sqrt[m]{\varepsilon^m}, \quad \forall n > n_o$

$\Rightarrow$ Theo định nghĩa giới hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{x}$.

Bài 18. Cho $2 \le n \in Z$. Chứng minh các BĐT sau :

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < A_n = \dfrac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

b) $\dfrac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} < C_{2n}^n < \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$ **c)** $\dfrac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \dfrac{2^{100}}{10}$.

Giải

a) Đặt : $B_n = \dfrac{2.4.6...(2n-2)}{3.5.7...(2n-1)}$

Suy ra : $A_nB_n = \dfrac{(2n-1)!}{(2n)!} = \dfrac{1}{2n}$

$\forall\ 2 \le k \in Z$, ta có : $\dfrac{2k-2}{2k-1} > \dfrac{2k-3}{2k-2}$ (vì $\Leftrightarrow 4k^2 - 8k + 4 > 4k^2 - 8k + 3$)

Do đó : * Với k = 2 : $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$ (1)

* Với k = 3 : $\dfrac{4}{5} > \dfrac{3}{4}$ (2)

....

* Với k = n : $\dfrac{2n-2}{2n-1} > \dfrac{2n-3}{2n-2}$ (n – 1)

$1 > \dfrac{2n-1}{2n}$ (n)

Nhân (n) BĐT (1), (2), ... (n) vế với vế, ta được :

$B_n > A_n \quad \Rightarrow \quad A_n^2 < A_nB_n = \dfrac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad A_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

Mặt khác : $\dfrac{2k-2}{2k-1} < \dfrac{2k-1}{2k}$, $\forall\ 2 \le k \in Z$

(vì $\Leftrightarrow (2k-1)^2 > 2k(2k-2) \Leftrightarrow 4k^2 - 4k + 1 > 4k^2 - 4k$)

Do đó : * Với k = 2 : $\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$ (1')

* Với k = 3 : $\dfrac{4}{5} < \dfrac{5}{6}$ (2')

....

* Với k = n : $\dfrac{2n-2}{2n-1} < \dfrac{2n-1}{2n}$ (n – 1)'

Nhân (n – 1) BĐT (1)', (2)', ... (n – 1)' vế với vế, ta được :

$B_n < 2A_n \quad \Rightarrow \quad 2A_n^2 > A_nB_n = \dfrac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad A_n > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Tóm lại : $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < A_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

b) Ta có : $\frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n} = \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1.2.3...(2n)}{2^{2n}(1.2...n)(1.2...n)}$

$$= \frac{1.2.3...(2n)}{[2.4...(2n)][2.4...(2n)]} = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$$

Theo câu a) $\Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n} < \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} < C_{2n}^{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$

c) Chọn n = 50, ta có ngay :

$$\frac{2^{99}}{\sqrt{50}} < C_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{2^{100}}{10\sqrt{2}} < C_{100}^{50} < \frac{2^{100}}{10}.$$

Bài 19. Cho : $\begin{cases} 0 \le k \le n \\ k, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng : $C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n} \le \left(C_{2n}^{n}\right)^2$

(ĐH Y dược TP.HCM năm 1998, 2001 và bộ đề tuyển sinh)

Giải

Đặt : $a_k = C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n}$, $(0 \le k \le n, \ k \in Z)$

Lúc này : $a_k = \frac{(2n+k)!(2n-k)!}{(n!)^2(n+k)!(n-k)!}$

$$a_{k+1} = \frac{(2n+k+1)!(2n-k-1)!}{(n!)^2(n+k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(n+k+1)(2n-k)}{(2n+k+1)(n-k)} = \frac{2n^2+2nk+2n-kn-k^2-k}{2n^2+nk+n-2nk-k^2-k}$$

$$= \frac{2n^2+nk+2n-k^2-k}{2n^2-nk+n-k^2-k} \ge 1$$

$\Rightarrow \quad a_k \ge a_{k+1} \quad \Rightarrow \quad (a_k)$ là dãy giảm $\quad \Rightarrow \quad a_k \le a_{k-1} \le ... \le a_o$

$\Rightarrow \quad a_k \le a_o \quad \Rightarrow \quad C_{2n+k}^{n}.C_{2n-k}^{n} \le \left(C_{2n}^{n}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad$ (ĐPCM).

Bài 20. Cho $1 \le n$, $k \in Z$, $k \le n$. Chứng minh rằng :

a) $C_{2n}^{k-1} \le C_{2n}^{k}$ b) $C_{2n+1}^{k-1} \le C_{2n+1}^{k}$

Giải

Xét : $\frac{C_m^k}{C_m^{k-1}} = \frac{\frac{m!}{k!(m-k)!}}{\frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)}}$ $(k \le m) = \frac{m-k+1}{k} = \frac{m+1}{k} - 1$

a) Nếu m = 2n :

$$C_{2n}^{k} \ge C_{2n}^{k-1} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{k} - 1 \ge 1 \Leftrightarrow 2n + 1 \ge 2^k$$

$$\Leftrightarrow k \le n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \le n \text{ (luôn đúng)}$$

b) Nếu m = 2n + 1 :

$$C_{2n+1}^{k} \ge C_{2n+1}^{k-1} \Leftrightarrow \frac{2n+2}{k} - 1 \ge 1 \Leftrightarrow 2n + 2 \ge 2k$$

$$\Leftrightarrow k \le n + 1 \quad \text{(luôn đúng)}$$

Bài 21. Đặt : $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_{3n}^{3k}$ $(1 \le n \in Z)$. Tìm $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{S_n}$.

(Lược trích Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ" bài T8/228 năm 1996)

Giải

Ta có : $C_{3n}^{3k} = C_{3n-1}^{3k-1} + C_{3n-1}^{3k} = C_{3n-2}^{3k-2} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k}$

$$= C_{3n-2}^{3k-2} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k} > C_{3n-2}^{3k-2} + C_{3n-2}^{3k-1} + C_{3n-2}^{3k}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} C_{3n}^{3k} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{3n}^{3k} > 2 + \sum_{k=1}^{3n-3} C_{3n-2}^{k} = \sum_{k=0}^{3n-2} C_{3n-2}^{k} = 2^{3n-2}$$

$$\Rightarrow S_n > \frac{8^n}{4} \Rightarrow \sqrt[3n]{S_n} > \frac{2}{\sqrt[3n]{4}} \quad (1)$$

Mặt khác : $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_{3n}^{3k} < \sum_{k=0}^{n} C_{3n}^{k} = 2^{3n} \Rightarrow \sqrt[3n]{S_n} < 2 \quad (2)$

Vậy : (1), (2) $\Rightarrow \frac{2}{\sqrt[3n]{4}} < \sqrt[3n]{S_n} < 2$

Mà : $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3n]{4}} = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{S_n} = 2.$

Bài 22. Cho $3 < n \in Z$. Chứng minh rằng :

a) $n(n + 1)(2n + 1)(2^n - 1) < 3.2^n.n^3$

b) $1.\sqrt{C_n^1} + 2.\sqrt{C_n^2} + ... + n.\sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1}.n^3}$.

Giải

a) Ta có : $(n + 1)(2n + 1) = 2n^2 + 3n + 1$

Và $n > 3 \Rightarrow n^2 > 3n \Rightarrow n^2 \geq 3n + 1$

$\Rightarrow 3n^2 \geq 2n^2 + 3n + 1 = (n+1)(2n+1)$

$\Rightarrow 3n^3 > n(n+1)(2n+1)$

$\Rightarrow 3n^3.2n^2 \geq 2^n.n(n+1)(2n+1) > n(n+1)(2n+1)(2^n - 1)$

b) Theo BĐT Bunhiacopski :

$$1.\sqrt{C_n^1} + 2.\sqrt{C_n^2} + \ldots + n.\sqrt{C_n^n} \leq$$

$$\leq \sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}.\sqrt{(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2}$$

$$\leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.(2^n - 1)} < \sqrt{\frac{3.2^n.n^3}{6}} \quad \text{(Do câu a)}$$

$$\left(\text{Vì : } \begin{cases} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n \\ C_n^0 = 1 \end{cases}\right)$$

$$\Rightarrow 1.\sqrt{C_n^1} + 2.\sqrt{C_n^2} + \ldots + n.\sqrt{C_n^n} < \sqrt{2^{n-1}.n^3}$$

Vậy BĐT được chứng minh hoàn toàn.

Bài 23. Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển : $(1 + 0,2)^{1000}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

Giải

+ **Số hạng thứ k :** $T_k = C_{1000}^{k-1}(0,2)^{k-1} = \dfrac{1}{5^{k-1}}C_{1000}^{k-1}$

+ **Tương tự, số hạng thứ k – 1 :** $T_{k-1} = \dfrac{1}{5^{k-2}}C_{1000}^{k-2}$

số hạng thứ k + 1 : $T_{k+1} = \dfrac{1}{5^k}C_{1000}^{k}$

+ **Do đó :** $\begin{cases} T_k \geq T_{k-1} \\ T_k \geq T_{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5}C_{1000}^{k-1} \geq C_{1000}^{k-2} \\ C_{1000}^{k-1} \geq \dfrac{1}{5}C_{1000}^{k} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5}.\dfrac{1000!}{(k-1)!(1001-k)!} \geq \dfrac{1000!}{(k-2)!(1002-k)!} \\ \dfrac{1000!}{(k-1)!(1001-k)!} \geq \dfrac{1}{5}.\dfrac{1000!}{k!(1000-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{5(k-1)} \ge \dfrac{1}{1002-k} \\ \dfrac{1}{1001-k} \ge \dfrac{1}{5k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1002-k \ge 5k-5 \\ 5k \ge 1001-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1001}{6} \le k \le \frac{1007}{6} \Leftrightarrow 166 + \frac{5}{6} \le k \le 167 + \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow k = 167$$

Vậy : $\text{Max } T_k = \dfrac{1}{5^{166}} C_{1000}^{166}$ (tại $k = 167$).

Bài 24. Chứng minh rằng :

$$P_k(x) = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3 + \ldots + (-1)^k C_n^k x^k \ge 0,$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], (k, n \in N^*).$$

Giải

Ta có : $P_k(x) = (1 - C_n^1 x) + (C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3) + \ldots$

Có 2 trường hợp xảy ra :

a) *Nếu k lẻ thì* : $P_k(x) = (1 - C_n^1 x) + (C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3) + \ldots + (C_n^{k-1} x^{k-1} - C_n^k x^k)$

Hơn nữa $C_n^S x^S - C_n^{S+1} x^{S+1} = \dfrac{n!}{S!(n-S)!} x^S - \dfrac{n!}{(S+1)!(n-S-1)!} x^{S+1}$

$$= C_n^S x^S \left(1 - \frac{n-S}{S+1} x\right)$$

$$= C_n^S . x^S . \frac{S(1+x) + (1-nx)}{S+1} \ge 0, \quad \forall \begin{cases} 0 \le S \le n-1 \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad P_k(x) \ge 0$

b) *Nếu k chẵn thì*

$P_k(x) = (1 - C_n^1 x) + (C_n^2 x^2 - C_n^3 x^3) + \ldots + (C_n^{k-2} x^{k-2} - C_n^{k-1} x^{k-1}) + C_n^k x^k \ge 0,$

$$\forall 0 \le x \le \frac{1}{n}$$

Tóm lại, ta luôn có : $P_k(x) \ge 0, \quad \forall 0 \le x \le \dfrac{1}{n}.$

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Chứng minh rằng : $\frac{1}{2}C_{1001}^{1} - \frac{1}{3}C_{1001}^{2} + \ldots + \frac{1}{1002}C_{1001}^{1001} < 1$

Bài 2*. Chứng minh rằng : $\left(1 + \frac{1}{2001}\right)^{2001} < 3 - \frac{3}{2003}$

Bài 3*. Cho đa thức $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$ $(a_1, a_2, a_{n-1} \le 0)$

có nghiệm thực.

Chứng minh rằng : $P(2) \ge 3^n$, $\forall\ 2 \le n \in Z$.

Bài 4*. Chứng minh rằng :

$$1 - C_n^1\left(\sin\frac{1}{n}\right) + C_n^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k\left(\sin\frac{1}{n}\right)^k > 0$$

$\forall\ 1 \le k \le n \qquad (k, n \in Z)$

Bài 5. Tìm số hạng có giá trị tuyệt đối lớn nhất trong khai triển $(x + y)^{50}$, biết $x^2 = 3y^2$.

Bài 6. Cho $1 < n \in Z$, $0 \le k \le n$, $k \in Z$. Tìm k để C_n^k lớn nhất (theo n).

Bài 7. Chứng minh rằng : $(2n - 1)! < n^{2n-1}$, $\forall\ 1 < n \in Z$

Bài 8. Chứng minh rằng : $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$, $\forall\ 1 < n \in Z$

Bài 9. Chứng minh BĐT Cauchy :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}, \quad \forall 1 < n \in Z; \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$$

Bài 10. Chứng minh rằng : $x^{2000} + (x - 2)^{2000} \ge 2, \forall x \in R$

Bài 11. Chứng minh rằng : $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{2000} < \frac{1}{1000}\left(1 + tg^2\frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in N^*$

Bài 12. Cho $3 \le n \in Z$. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1}$ b) $(n!)^2 > n^n$

Bài 13*. Cho $\begin{cases} 1 < m < n \\ a > 0 \\ m, n \in Z \end{cases}$. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt[n]{1 + na} < \sqrt[m]{1 + ma}$ b) $7 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+1} < 8$

Bài 14*. Tìm $k \in N^*$ lớn nhất sao cho 2^k là ước số của $\left[\left(1 + \sqrt{3}\right)^{1001}\right]$.

(Với [x] là phần nguyên của x, là số nguyên lớn nhất không vượt quá x)

Chương 5

TOÁN ĐỐ VỀ TỔ HỢP

Những kiến thức cơ bản về "Tổ hợp" chúng tôi đã trình bày kĩ ở chương 1. Chương này chúng tôi giới thiệu các dạng "Toán đố" cơ bản về "Tổ hợp", các bài toán trong các đề thi đại học những năm 1997, 1998, 1999, 2000, ..., 2005 và một số bài toán nâng cao khác.

1. CÁC VÍ DỤ VỀ HOÁN VỊ

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho 5 người khách :

a) Vào 5 ghế xếp thành một dãy ?

b) Vào 5 ghế chung quanh một bàn tròn nếu không có sự phân biệt giữa các ghế này ?

Giải

a) Mỗi cách xếp 5 người vào một dãy 5 ghế là một hoán vị của 5 phần tử nên có :

$$P_5 = 5! = 120 \text{ cách sắp xếp}$$

b) Cách sắp xếp này là xếp một người nào đó vào 1 ghế bất kỳ, rồi chọn 4 ghế còn lại cho 4 người còn lại sẽ có :

$$P_4 = 4! = 24 \text{ cách sắp xếp}$$

Vậy có 24 cách sắp xếp 5 người vào 1 bàn tròn 5 ghế.

Ví dụ 2. Bảy mẫu tự của chữ VIETNAM có thể tạo ra bao nhiêu chữ (không cần có nghĩa) mà các phụ âm và nguyên âm đan xen kẽ nhau ?

Giải

Kí hiệu : $\begin{cases} \text{P là phụ âm} \\ \text{N là nguyên âm} \end{cases}$

Từ sơ đồ : PNPNPNP (1)

(Vì chữ VIETNAM có 3 nguyên âm và 4 phụ âm)

Từ sơ đồ (1) suy ra có 4! cách hoán vị 4 phụ âm và 3! cách hoán vị 3 nguyên âm.

Vậy có : 4!.3! = 144 cách tạo chữ như trên.

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách xếp 3 học sinh nam, 4 học sinh nữ ngồi trên một dãy ghế dài sao cho học sinh cùng phái ngồi gần nhau ?

Giải

* Có 2! cách sắp xếp 2 phái với nhau
* Sau đó : – Có 3! cách sắp xếp 3 nam với nhau
  – Có 4! cách sắp xếp 3 nữ với nhau

Vậy có tất cả : 2!.3!.4! = 288 cách sắp xếp.

2. CÁC VÍ DỤ VỀ CHỈNH HỢP (KHÔNG HỢP)

Ví dụ 1. Với 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số gồm 7 chữ số trong đó chữ số 6 có mặt hai lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần ?

Giải

Sắp 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 vào 7 vị trí thì có tất cả A_7^5 cách sắp

Sắp 2 chữ số 6 vào 2 vị trí còn lại có 1 cách sắp. Vậy có tất cả là :

$A_7^5.1 = 2520$ số cần tìm.

Ví dụ 2. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và trong đó phải có mặt chữ số 5 ?

(Bộ đề tuyển sinh, câu IVa, đề 88)

Giải

- Ta sẽ lập được một số như vậy bằng cách lấy chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 rồi xen chữ số 5 vào một vị trí bất kỳ ⇒ có $5.A_6^4$ số như thế này.
- Nhưng chúng ta loại bỏ các số bắt đầu chữ số 0, một số như vậy được thành lập bằng cách chọn chỉnh hợp chập 3 từ 5 phần tử 1, 2, 3, 4, 6 chen 5 vào một vị trí bất kỳ và chữ số 0 đặt phía trước các chữ số đó ⇒ có $4.A_5^3$ số như thế này.

Suy ra có : $5.A_6^4 - 4.A_5^3 = 6.25.4.3 - 5.16.3 = 1800 - 240$

$= 1560$ số như đề đã yêu cầu.

Ví dụ 3. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập bao nhiêu chữ số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên phải khác 0.

(ĐH Y dược TP.HCM năm 1997)

Giải

Có 2 loại số chẵn cần tìm :

– Nếu số 0 ở hàng đơn vị, còn lại 6 số xếp vào 4 vị trí còn lại, nên có A_6^4 cách.

– Nếu số hàng đơn vị là 2, 4 hoặc 6 : có 3 cách chọn. Nên số thành lập trong trường hợp này có $3 \times 5 \times A_5^3$ cách.

Vậy số cần lập có : $A_6^4 + 3 \times 5 \times A_5^3 = 360 + 900 = 1260$ cách lập.

3. CÁC VÍ DỤ VỀ TỔ HỢP

Ví dụ 1. Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ. Cần lấy ra một nhóm 5 người trong đó có 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

(ĐH Đà Nẵng năm 1997)

Giải

Chọn một nhóm 5 người (có 3 nam, 2 nữ). Nên có C_6^2 cách chọn nữ, C_8^3 cách chọn nam. Vậy có tất cả :

$$C_6^2 . C_8^3 = \frac{6!}{2!4!} . \frac{8!}{3!5!} = \frac{5.6.6.7.8}{12} = 840 \text{ cách chọn.}$$

Ví dụ 2. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kĩ sư. Để lập một tổ công tác, cần chọn một kĩ sư làm tổ trưởng, một công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập tổ công tác ?

(ĐH Kiến trúc Hà Nội năm 1998)

Giải

Chọn một kĩ sư trong 3 người nên có 3 cách chọn, và có 10 cách chọn một công nhân làm tổ phó. Chọn 5 công nhân còn lại làm tổ viên có C_9^5 cách chọn. Vậy ta có tất cả :

$$3.10.\ C_9^5 = 3.10.\frac{9!}{4!5!} = 30.126 = 3780 \text{ cách.}$$

Ví dụ 3. Một cỗ bài có 52 quân trong đó có 4 quân ách.

a) Có bao nhiêu cách rút ra 3 quân ách trong 52 quân ?

b) Có bao nhiêu cách rút ra 3 quân trong 52 quân mà trong đó có 2 quân ách ?

Giải

a) Số cách rút 3 quân trong 52 quân là số tổ hợp chập 3 trong 52 quân :

Vậy số cách rút là : $C_{52}^{3} = 22100$

b) Số cách rút 3 quân mà có 2 quân ách là số cách rút 2 quân ách trong 49 quân ách : C_4^2 ghép với số cách rút 1 quân không ách trong 48 quân không ách :

Vậy số cách rút quân trong trường hợp này là :

$$C_4^2 . C_{48}^1 = \frac{4!}{2!2!}.48 = 288$$

4. BÀI TOÁN TỔNG HỢP. GIẢI ĐỀ THI ĐẠI HỌC & CAO ĐẲNG CÁC NĂM 1997, 1998, 1999, 2000, ..., 2005

Bài 1. Một học sinh có 12 cuốn sách đôi một khác nhau trong đó có 4 sách Văn, 2 sách Toán, 6 sách Anh văn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp các cuốn sách lên một kệ sách dài (nếu các cuốn sách cùng môn sắp kề nhau).

(ĐH Quốc gia TP.HCM khối D năm 1999)

Giải

Đặt 3 nhóm cuốn sách lên một kệ dài thì có 3! cách sắp. Trong mỗi nhóm có thể thay đổi các cách sắp :

– Môn Văn có 4! cách.

– Môn Toán có 2! cách.

– Môn Anh có 6! cách.

Vậy số cách sắp cần tìm là : 3!4!2!6! = 207360 cách.

Bài 2.

a) Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên phải lẻ ?

b) Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau, trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (dĩ nhiên chữ số đầu tiên phải $\neq 0$) ?

(ĐH Quốc gia TP.HCM đợt 1 khối A năm 2000)

Giải

Gọi số cần tìm là : $\overline{a_1a_2..a_6}$

a) a_1 lẻ $\Rightarrow$ $a_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ có 5 cách chọn

a_6 chẵn $\Rightarrow$ $a_6 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ có 5 cách chọn

4 chữ số còn lại có A_6^4 cách chọn

$\Rightarrow$ Số cách chọn cần tìm là :

$$5.5.A_6^4 = 25.\frac{8!}{4!} = 25.5.6.7.8 = 42000 \text{ cách.}$$

b) 2 nhóm chữ số :

– Chữ số chẵn : {0, 2, 4, 6, 8}

– Chữ số lẻ : {1, 3, 5, 7, 9}

Vì vậy : Cách chọn 3 chữ số lẻ là $C_5^3 = 10$

Cách chọn 3 chữ số chẵn là $C_5^3 = 10$

$\Rightarrow$ Chữ số tạo thành trong trường hợp này là : $6!.C_5^3.C_5^3 = 72000$

(trong trường hợp này có tính trường hợp $a_1 = 0$).

Khi $a_1 = 0$:

Cách lập chữ số trong trường hợp này là : $5!\ C_5^3.C_4^2 = 7200$

Vậy có : $72000 - 7200 = 64800$ cách thành lập số theo yêu cầu đề ra.

Bài 3. Một tổ gồm có 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chọn 1 nhóm người để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau ?

(ĐH Nông nghiệp I năm 1997)

Giải

Tổ có 12 học sinh, mỗi cách chọn 4 người để làm trực nhật là 1 tổ hợp chập 4 từ 12 phần tử. Do đó số cách chọn nhóm 4 người để làm trực nhật là :

$$C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!} = 495 \text{ cách chọn.}$$

Bài 4. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được :

a) Bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau ?

b) Bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số khác nhau ?

(CĐ Hải quan năm 1998)

Giải

a) Gọi số cần tìm $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$

* Nếu kể cả trong trường hợp $a_1 = 0$ thì có A_7^5 số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau.

* Trong các số đó gồm có A_6^4 số gồm 5 chữ số mà $a_1 = 0$

Vậy các số tự nhiên cần tìm theo yêu cầu có :

$$A_7^5 - A_6^4 = 2520 - 360 = 2160 \text{ cách lập.}$$

b) * Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà $a_6 = 0$ thì có A_6^4 số.

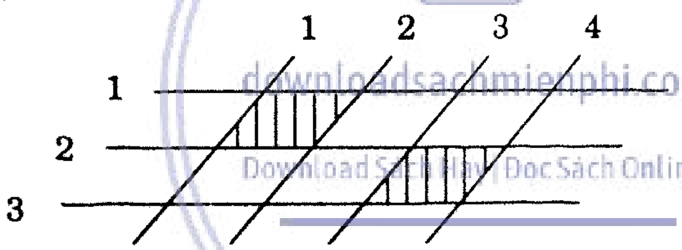
* Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau mà chữ số hàng đơn vị là 2, hoặc 4, hoặc 6 là $3\left(A_6^4 - A_5^3\right)$

Vậy có :

$A_6^4 + 3\left(A_6^4 - A_5^3\right) = 4A_6^4 - 3A_5^3 = 1440 - 180 = 1260$ số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số lập theo yêu cầu.

Bài 5. Một họ gồm 3 đường thẳng song song cắt 1 họ gồm 4 đường thẳng song song khác. Hỏi có tất cả bao nhiêu hình bình hành được tạo thành ?

Giải



Ta đã biết hình bình hành là 1 tứ giác có 2 cặp cạnh đối song song.

Vậy để tạo thành một hình bình hành ta lấy 1 cặp đường thẳng song song này cắt 1 cặp đường thẳng song song khác.

Trên hình vẽ ta thấy : Công việc tạo thành hình bình hành chia thành 2 giai đoạn :

Giai đoạn 1 : Ở họ gồm 3 đường song song :

Cứ 2 trong 3 đường song song đó (không kể thứ tự) sẽ tạo nên một cặp đường thẳng song song, vậy có tất cả $C_3^2 = 3$ cặp đường thẳng song song.

Giai đoạn 2 : Ở họ gồm 4 đường thẳng song song lí luận tương tự có tất cả $C_4^2 = 6$ đường thẳng song song.

Vậy ta có 3.6 = 18 hình bình hành được tạo thành (từ yêu bài toán).

Bài 6. Có bao nhiêu số khác nhau có 7 chữ số mà tổng các chữ số là số chẵn ?

Giải

Ta xét 10 số liên tiếp có 7 chữ số :

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_60}$$

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_61}$$

....

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_69}$$

$(a_1 \neq 0,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$

Chữ số đầu tiên a_1 có thể lấy 9 giá trị khác nhau, mỗi số a_i (i = 2, 3, 4, 5, 6) có thể lấy 10 giá trị khác nhau, riêng chữ số cuối cùng chỉ lấy 5 giá trị khác nhau để tổng các chữ số là chẵn.

Vậy có tất cả : $9.10^5.5 = 45.10^5$ số được tạo thành như đề yêu cầu.

Bài 7. Tìm tất cả những số có bốn chữ số có thể lập được từ bốn chữ số 1, 5, 6, 7 ?

Giải

Các chữ số hàng nghìn, hàng trăm, hàng chục và hàng đơn vị có thể lấy bất kỳ trong {1, 5, 6, 7}. Như vậy với mỗi chữ số có 4 khả năng.

Vậy số có bốn chữ số được thành lập có : 4.4.4.4 = 256 cách.

Bài 8. Một đội văn nghệ có 10 học sinh nam, 10 học sinh nữ. Chọn một tốp ca 5 em trong đó có ít nhất 2 nam, 2 nữ.

Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

(CĐ Sư phạm Hà Nội năm 1999)

Giải

Ta xét 2 trường hợp :

* Số cách chọn 5 em trong đó 2 nam và 3 nữ là : $C_{10}^2 . C_{10}^3$

* Số cách chọn 5 em trong đó 3 nam và 2 nữ là : $C_{10}^3 . C_{10}^2$

Do đó số cách chọn theo yêu cầu :

$$C_{10}^2 . C_{10}^3 + C_{10}^3 . C_{10}^2 = 2. C_{10}^2 . C_{10}^3 = 2. \frac{9.10}{2} \cdot \frac{8.9.10}{6} = 10800.$$

Bài 9. Cho tập hợp A = {x, y, z, t}. Có bao nhiêu tập con của A :

a) Không chứa phần tử **x** ? **b)** Chứa phần tử **x** ?

Giải

a) Đặt $B = A \setminus \{x\}$

Số các tập con của B = {y, z, t}

* Loại không có phần tử : $C_3^0 = 1$ (tập rỗng)
* Loại có 1 phần tử : $C_3^1 = 3$
* Loại có 2 phần tử : $C_3^2 = 3$
* Loại có 3 phần tử : $C_3^3 = 1$ (tập X)

Vậy có tất cả : $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ tập con cần tìm.

b) Ta chỉ việc thêm phần tử x vào mỗi tập con trên thì ta sẽ có tất cả 8 tập con của A chứa x.

Bài 10. Xét những số gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là 2, 3, 4, 5. Hỏi có bao nhiêu số như vậy nếu :

a) Năm chữ số 1 xếp kề nhau ? **b)** Các chữ số được xếp tùy ý ?

(Học viện Ngân hàng khối D năm 1999)

Giải

Đặt : $A = \overline{a_1a_2...a_9}$, $B = 11111$

a) Ta cần sắp : B, 2, 3, 4, 5 xen lẫn với nhau $\Rightarrow$ có $5! = 120$ cách.

Vậy ta có 120 cách sắp số A theo yêu cầu câu a.

b) Sắp 2, 3, 4, 5, vào 9 vị trí có A_9^4 cách, còn 5 vị trí còn lại sắp số 1 chỉ có 1 cách.

Vậy ta có : $A_9^4.1 = 3024$ cách sắp số theo yêu cầu b.

Bài 11. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau chia hết cho 10 (chữ số hàng vạn khác không)

(ĐH Đà Nẵng khối A, đợt 1, năm 2000)

Giải

Gọi số cần tìm (chia hết cho 10) : $\overline{a_1a_2a_3a_40}$ với $a_1 \neq 0$.

Do đó các chữ số như thế này có : $A_9^4 = 3024$ số.

Bài 12. Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số, mỗi số có 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5 ?

(ĐH Quốc gia Hà Nội khối B năm 2000)

Giải

Gọi số cần tìm là A = $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ $(a_4 \neq 0; 5)$

* Chọn a_4 từ {1, 3, 7} có 3 cách
* Chọn a_1 từ {0, 1, 3, 5, 7} có 3 cách
* Chọn a_2 từ {0, 1, 3, 5, 7}\{a_1, a_4} có 3 cách
* Chọn a_3 từ {0, 1, 3, 5, 7}\{a_1, a_2, a_4} có 2 cách

Vậy ta có tất cả : 3.3.3.2 = 54 số A cần lập

Bài 13. Một lớp học có 20 học sinh có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 người đi dự hội nghị sinh viên của trường sao cho trong 3 người đó có ít nhất một cán bộ lớp.

(ĐH Giao thông Vận tải Hà Nội năm 2000)

Giải

Ta xét 2 trường hợp :

* 1 cán bộ lớp, 2 học sinh ⇒ có $C_2^1.C_{18}^2$ (cách)
* 2 cán bộ lớp, 1 học sinh ⇒ có $C_2^2.C_{18}^1$ (cách)

Do đó có số cách cử là : $C_2^1.C_{18}^2 + C_2^2.C_{18}^1 = 2.153 + 18 = 324$ (cách).

Bài 14. Cho 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Từ 5 chữ số này có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó, mỗi chữ số trên có mặt một lần ?

(ĐH Kiến trúc Hà Nội – Cơ sở Thủ Đức năm 1998)

Giải

Xét 2 trường hợp :

* Nếu chọn 0 ở hàng đơn vị, mỗi cách xếp 4 chữ số còn lại vào 4 vị trí còn lại : là 1 hoán vị của 4 phần tử ⇒ có 4! = 24 (số).
* Có 2 cách chọn hàng đơn vị từ 2, 4. Còn lại 3 số khác 0 nên có 3 cách chọn số hàng vạn, còn 3 số để xếp vào 3 vị trí giữa còn lại, có 3! cách. Do đó trong trường hợp này có 2.3.3! = 36 (số)

Vậy ta có tất cả : 24 + 36 = 60 (số) có thể lập được theo đề yêu cầu.

Bài 15. Cho 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 1 nhà vật lí nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cần có nhà toán học và nhà vật lí. Hỏi có bao nhiêu cách ?

(ĐH Y Hà Nội năm 2000)

Giải

Vì phải có cả nam, cả nữ, có cả nhà toán học và vật lí học nên trong đoàn phải có 1 người vật lí và 1 nữ toán học, người thứ ba phải là nhà toán học nam hoặc là nhà vật lí nam, hoặc nhà toán học nữ. Vậy số cách là :

$$C_5^1.C_4^1.C_3^1 + C_4^1.C_3^2 + C_4^2.C_3^1 = 5.4.3 + 4.3 + 6.3$$

$$= 60 + 12 + 18 = 90 \text{ (cách)}$$

Bài 16. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng, 6 viên bi vàng, người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ 3 màu ?

Giải

Số cách chọn 4 trong 15 bi là $C_{15}^4 = 1365$

Các trường hợp chọn được 4 bi có cả 3 màu :

– 2 đỏ + 1 trắng + 1 vàng là : $C_4^2.C_5^1.C_6^1 = 180$ cách

– 1 đỏ + 2 trắng + 1 vàng là : $C_4^1.C_5^2.C_6^1 = 240$ cách

– 1 đỏ + 1 trắng + 2 vàng là : $C_4^1.C_5^1.C_6^2 = 300$ cách

Vậy số cách chọn 4 bi ra không đủ 3 màu là :

$$1365 - (180 + 240 + 300) = 645 \text{ cách.}$$

Bài 17. Một đội văn nghệ có 20 người, trong đó có 10 nam, 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 người sao cho :

a Có đúng 2 nam trong 5 người đó.

b Có ít nhất 2 nam và ít nhất 1 nữ trong 5 người đó.

(ĐH Thái Nguyên khối A, B năm 2000)

Giải

a Chọn 5 người có đúng 2 nam $\Rightarrow$ có 3 nữ

$\Rightarrow$ Số cách chọn : $C_{10}^2.C_{10}^3 = 5400$ cách.

b) Chọn 5 người có ít nhất 2 nam, có 3 trường hợp :

– Chọn 2 nam, 3 nữ $\Rightarrow$ có $C_{10}^2.C_{10}^3 = 5400$ cách

– Chọn 3 nam, 2 nữ $\Rightarrow$ có $C_{10}^3.C_{10}^2 = 5400$ cách

– Chọn 4 nam, 1 nữ $\Rightarrow$ có $C_{10}^4.C_{10}^1 = 2100$ cách

Do đó số cách chọn cần tìm là :

$$5400 + 5400 + 2100 = 12900 \text{ cách.}$$

Bài 18. Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số khác nhau đôi một được thành lập bằng cách dùng 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 sao cho 2 chữ số chẵn không nằm liền nhau.

(CĐ Kinh tế Đối ngoại TP.HCM năm 2000)

Giải

* Các số có 7 chữ số lấy từ tập {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9} là 7! số

* Các số 7 chữ số mà 2 chữ số chẵn 2, 4 đứng kề nhau là 2!.6!

Vậy các số có 7 chữ số lấy từ {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9} sao cho 2 chữ số chẵn không đứng liền nhau là :

$$7! - 2!.6! = 6!.7 - 2.6! = 5.6! = 3600 \text{ số.}$$

Bài 19. Một lớp học có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn 5 người trong lớp để đi lên công tác phong trào "Mùa hè xanh". Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 người đó phải có it1 nhất :

a) Hai học sinh nữ và hai học sinh nam.

b) Một học sinh nữ và một học sinh nam.

(Đại học Văn Lang, năm 2001)

Giải

a) Nếu trong 5 người phải có ít nhất 2 học sinh nữ và 2 học sinh nam thì ta có 2 giải pháp chọn :

- Chọn 2 học sinh nữ (có C_{10}^2 cách chọn) và 3 học sinh nam (có C_{10}^3 cách chọn), trường hợp này có $C_{10}^2.C_{10}^3$ cách chọn.

- Chọn 2 học sinh nam (có C_{10}^2 cách chọn) và 3 học sinh nữ (có C_{10}^3 cách chọn), trường hợp này có $C_{10}^2.C_{10}^3$ cách chọn.

Vậy tổng số cách chọn thỏa đề bài là : $2.C_{10}^2.C_{10}^3 = 10800$ cách chọn.

b) Nếu trong 5 người phải có ít nhất 1 học sinh nữ và 1 học sinh nam thì ta có 4 giải pháp chọn :

- Chọn 1 học sinh nam và 4 học sinh nữ có tất cả là $C_{10}^1.C_{10}^4$ cách chọn.
- Chọn 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ có tất cả là $C_{10}^2.C_{10}^3$ cách chọn.
- Chọn 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ có tất cả là $C_{10}^3.C_{10}^2$ cách chọn.
- Chọn 4 học sinh nam và 1 học sinh nữ có tất cả là $C_{10}^4.C_{10}^1$ cách chọn.

Vậy tổng số cách chọn thỏa đề bài là

$$2(C_{10}^2.C_{10}^3 + C_{10}^1.C_{10}^4) = 12200 \text{ cách chọn.}$$

Bài 20. Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ $(n \geq 2)$ nội tiếp trong (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, tìm n.

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2002)

Giải

- Số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ là C_{2n}^3
- Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n chéo lớn.
- Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ có các đường chéo là hai đường chéo lớn. Ngược lại, với mỗi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1A_2...A_{2n}$ tức là C_n^2
- Do đó : $C_{2n}^3 = 20.C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = \frac{20n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2n - 1 = 15 \Leftrightarrow n = 8.$$

Bài 21. Từ 9 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau ?

(Đại học và Cao đẳng, khối D, (đề tham khảo), năm 2003)

Giải

Các số phải lập là số chẵn nên phải có chữ số đứng cuối cùng là một trong các chữ số 0, 2, 4, 6, 8.

- Trường hợp chữ số 0 đứng cuối thì 6 chữ số còn lại của số được lập ứng với một chỉnh hợp chập 6 của 8 chữ số còn lại, do đó có A_8^6 số thuộc loại này.
- Trường hợp mỗi một trong các chữ số 2, 4, 6, 8 đứng cuối cùng thì 6 chữ số còn lại của số tự nhiên được lập cùng ứng với chỉnh hợp chập 6 của 8 chữ số (kể cả các số tự nhiên có chữ số 0 đứng đầu mà thực chất là số có 6 chữ số). Vì vậy số lượng các loại số này gồm $4(A_8^6 - A_7^5)$
- Vậy lập được tất cả $A_8^6 + 4(A_8^6 - A_7^5) = 90720$ số tự nhiên chẵn gồm 7 chữ số khác nhau thuộc 9 chữ số đã cho.

Bài 22. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2 ?

(Đề thi Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2004)

Giải

Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3, nên ta có các trường hợp sau :

- Để có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó, thì số cách chọn là :

$$C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 = 23625.$$

- Để có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó, thì số cách chọn là :

$$C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 = 10500.$$

- Để có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó, thì số cách chọn là :

$$C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 22750.$$

Vì các cách chọn trên đôi một khác nhau, nên số đề kiểm tra có thể lập được là :

$$23625 + 10500 + 22750 = 56875.$$

Bài 23. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 2 tỉnh miền núi, sao mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ?

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2005)

Giải

Có $C_3^1.C_{12}^4$ cách phân công thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất.

Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất thì có $C_2^1.C_8^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ hai. Với mỗi cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ nhất và tỉnh thứ hai thì có $C_1^1.C_4^4$ cách phân công các thanh niên tình nguyện về tỉnh thứ ba.

Vậy số phân công đội thanh niên tình nguyện về 3 tỉnh thỏa mãn yêu cầu bài trên là :

$$C_3^1.C_{12}^4.C_2^1.C_8^4.C_1^1.C_4^4 = 207900.$$

Bài 24. Có bao nhiêu số nguyên chẵn gồm 6 chữ số khác nhau thỏa điều kiện chữ số hàng trăm ngàn khác 0 và phải có một chữ số 2 ?

(Cao đẳng Giao thông III, năm 2004)

Giải

Tìm các số nguyên dương chẵn có 6 chữ số khác nhau và có mặt chữ số 2.

Gọi x là số các số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau, y là số các số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau mà không có mặt chữ số 2. Số phải tìm là x – y.

* ***Tính x :*** Chia các số này thành 2 loại :

Loại 1 : gồm những số có chữ số hàng đơn vị bằng 0, có $9.A_8^4$ số loại 1

Loại 2 : gồm những số có chữ số hàng đơn vị khác 0, có $4.8.A_8^4$ số loại 2

$$\Rightarrow \quad x = 9.A_8^4 + 32.A_8^4 = 41A_8^4.$$

* ***Tính y :*** Cho các số này thành 2 loại :

Loại 1 : gồm những số có chữ số hàng đơn vị bằng 0, có $8.A_7^4$ số loại 1

Loại 2 : gồm những số có chữ số hàng đơn vị khác 0, có $3.7.A_7^4$ số loại 2

$$\Rightarrow \quad y = 8A_7^4 + 21A_7^4 = 29A_7^4$$

Suy ra đáp số cần tìm là $41A_7^4 - 29A_7^4 = 12A_7^4 = 44520$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 1. Xét các biển số xe là dãy gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, ..., Z. Các chữ số lấy từ 10 chữ số 0, 1, 2, ... 9. Hỏi :

a) Có bao nhiêu biển số xe trong đó có ít nhất một chữ cái khác chữ cái O và các chữ số đôi một khác nhau ?

b) Có bao nhiêu biển số xe có 2 chữ cái khác nhau đồng thời có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số lẻ đó giống nhau ?

(Học viện Ngân hàng TP.HCM khối A năm 2000)

Đáp số : *a) 3402000 (biển số)*

b) 975000 (biển số)

Bài 2. Từ các số 1, 2, ..., 9. Ta lập tất cả các số gồm 9 chữ số khác nhau :

a) Có bao nhiêu số được thành lập ?

b) Trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5 ?

c) Có bao nhiêu số chẵn ?

Đáp số : *a) 362880 số*

b) 40320 số

c) 161280 số

Bài 3. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy gồm có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau :

a) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau.

b) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường nhau.

(ĐH Quốc gia TP.HCM, đợt 2, khối A năm 1999)

Đáp số : *a) 1036800 cách*

b) 33177600 cách

Bài 4. Cho 2 hộp bi. Hộp thứ nhất có 7 bi xanh và 3 bi đỏ, hộp thứ hai có 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Từ mỗi hộp lấy ra 1 viên. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách chọn 1 xanh và 1 đỏ ?

b) Có bao nhiêu cách chọn 2 đỏ ?

c) Có bao nhiêu cách chọn ít nhất 1 đỏ ?

Đáp số : *a) 46 (cách)*

b) 12 (cách)

c) 58 (cách)

Bài 5. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ cả 3 màu ?

(ĐH Huế năm 1999)

Đáp số : *645 cách*

Bài 6.

a) Có 12 học sinh ưu tú của 1 trường. Muốn chọn 1 đoàn đại biểu đi dự trại hè quốc tế gồm 1 trưởng đoàn, 1 thư ký và 3 thành viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

b) Xét dãy số gồm 7 chữ số (mỗi chữ số được chọn từ các số 0, 1, 2, ..., 9) thỏa :

– Chữ số vị trí số 3 là số chẵn.

– Chữ số cuối không chia hết cho 5.

– Các chữ số 4, 5, 6 đôi một khác nhau.

Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

(ĐH Quốc gia TP.HCM đợt 3 năm 1998)

Đáp số : *a) 15840 cách chọn*

b) 2592000 cách chọn

Bài 7. Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm các chữ số khác nhau đôi một được thành lập từ 6 chữ số 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Đáp số : *3732960.*

Bài 8. Có 5 thẻ trắng và 5 thẻ đen, đánh dấu mỗi loại theo các số 1, 2, 3, 4, 5. Có bao nhiêu cách sắp xếp các thẻ này thành hàng sao cho hai thẻ cùng màu không nằm liền nhau ?

(ĐH Đà Lạt năm 2000)

Đáp số : *240 cách chọn.*

Phụ lục

CÁC ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM

ĐỀ A

Câu 1. Tìm m để hàm số : $y = \dfrac{x^2 - mx + m}{x + 1} + 6$ nghịch biến trên $\left(-2; -\dfrac{3}{2}\right)$.

Đáp số :

a) ☐ $m \geq 0$ b) ☐ $m \leq 1$ c) ☐ $m \geq 10$ d) ☐ $m \leq 9$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x + 1}$ có đồ thị (C).

Từ điểm A(4; 0) vẽ được mấy tiếp tuyến với (C) ?

Đáp số :

a) ☐ 1 b) ☐ 2 c) ☐ 3 d) ☐ 4.

Câu 3. Tính $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx$.

Đáp số :

a) ☐ $I = J = 0$ b) ☐ $I = J = \dfrac{\pi}{4}$

c) ☐ $I = J = \dfrac{\pi}{3}$ d) ☐ Một kết quả khác.

Câu 4. Nhận dạng ΔABC, biết rằng : $\cos A + \cos B + \cos C = \dfrac{3}{2}$

Đáp số :

a) ☐ ΔABC vuông cân tại A b) ☐ ΔABC cân tại A

c) ☐ $\begin{cases} A = 80^0 \\ B = C = 50^0 \end{cases}$ d) ☐ ΔABC đều.

Câu 5. Cho M ∈ (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ thì mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) ☐ $OM^2 + MF_1.MF_2 = 3a^2$ b) ☐ $OM^2 + MF_1.MF_2 = 3b^2$

c) ☐ $OM^2 + MF_1.MF_2 = a^2 + b^2$ d) ☐ $OM^2 + MF_1.MF_2 = 2(a^2 + b^2)$.

Câu 6. Tập nghiệm của phương trình $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$ là :

a) ☐ $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z\right\}$ b) ☐ $S = \{k\pi/k \in Z\}$

c) ☐ $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in Z\right\}$ d) ☐ Tất cả đều sai.

Câu 7. Định m để bất phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+12} > m$ có nghiệm.

Đáp số :

a) ☐ $m > 5$ b) ☐ $m > 6$ c) ☐ $m > 7$ d) ☐ m tùy ý.

Câu 8. Đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-1}$ vuông góc với đường thẳng nào sau đây :

a) ☐ $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 5 - 8t \\ z = 6t \end{cases}$ b) ☐ $\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$

c) ☐ $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases}$ d) ☐ $\begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 1}$

Đáp số :

a) ☐ $\begin{cases} y_{max} = 5 \\ y_{min} = 0 \end{cases}$ b) ☐ $\begin{cases} y_{max} = 3 \\ y_{min} = 2 \end{cases}$

c) ☐ $\begin{cases} y_{max} = 1 \\ y_{min} = -3 \end{cases}$ d) ☐ Tất cả đều sai.

Lời giải

Câu 1. $y = \frac{x^2 - mx + m}{x+1} + 6$

- $D = R\backslash\{-1\}$
- $y' = \frac{x^2 + 2x - 2m}{(x+1)^2}$

Xét: $f(x) = x^2 + 2x - 2m$ có $\Delta' = 1 + 2m$

- Nếu $\Delta' \le 0$ thì $f(x) \ge 0, \forall x \in D \Rightarrow y' \ge 0, \forall x \in D$

$\Rightarrow$ y không nghịch biến trên $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$

- Nếu $\Delta' > 0$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, hàm số y nghịch biến trên $\left(-2; -\dfrac{3}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$ $x_1 \le -2 < x_2$

$$\Leftrightarrow \quad f(-2) \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 4 - 2m \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \ge 0$$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu a).

Câu 2.

- Phương trình đường thẳng (d) qua A(4; 0) có dạng $y = k(x - 4)$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x + 1} = k(x - 4) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = k(x - 4)(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 1 = k(x^2 - 3x - 4)$$

$$\Leftrightarrow \quad (k - 2)x^2 - (3k - 1)x + (1 - 4k) = 0 \qquad (1)$$

- (d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta = (3k - 1)^2 - 4(k - 2)(1 - 4k) = 0 \\ k \ne 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k \ne 2 \\ 9k^2 - 6k + 1 - 4(-4k^2 + 9k - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} k \ne 2 \\ 25k^2 - 42k + 9 = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Ta thấy phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$\Rightarrow$ Từ A vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Rightarrow$ Đáp số là b).

Câu 3. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}dx$, $\qquad J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}dx$

Ta có : $I + J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

Đặt $\quad x = \dfrac{\pi}{2} - t \quad \Rightarrow \quad dx = -dt$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^3 t}{\cos^3 t + \sin^3 t}(-dt) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t + \cos^3 t} dt = J$$

$$\Rightarrow \quad I = J = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{Đáp số là câu b).}$$

Câu 4. Ta có :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\le 2\sin\frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\le -2\left(\sin\frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

$\Rightarrow$ Đáp số là câu d).

Câu 5. Ta có : $M(x_M, y_M) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} OM^2 = x_M^2 + y_M^2 \\ MF_1 = a + ex_M \\ MF_2 = a - ex_M \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad OM^2 + MF_1.MF_2 = x_M^2 + y_M^2 + a^2 - e^2x_M^2$$

$$= (1 - e^2)x_M^2 + y_M^2 + a^2 = \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x_M^2 + y_M^2 + a^2$$

$$= \frac{b^2}{a^2}x_M^2 + y_M^2 + a^2 = b^2\left(\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}\right) + a^2$$

$$= a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Đáp số là câu c).}$$

Câu 6.

Đặt $t = |\sin x - \cos x| \quad (0 \le t \le \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow \quad t^2 = 1 - \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2x = 1 - t^2$

Do đó, PT $\Leftrightarrow \quad t + 4(1 - t^2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2 - t - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu d).

Câu 7. Xét $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+12}, \quad x \ge -1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2x+6}} + \frac{1}{2\sqrt{3x+12}} > 0, \quad \forall x > -1$$

Bảng biến thiên :

x	-1		$+\infty$
y'	||	+	
y	5	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra, bpt có nghiệm, $\forall m \in R \quad \Rightarrow \quad$ Đáp số là câu d).

Câu 8. Đáp số là câu b).

Câu 9.

- Nhận xét : y xác định trên R
- y thuộc miền giá trị $\Leftrightarrow y = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ có nghiệm x.

Bài toán trở thành tìm y để phương trình :

$(y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1 - 2y$ có nghiệm x

$\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 + (y-2)^2 \ge (1-2y)^2$

$\Leftrightarrow \quad (y^2 - 2y + 1) + (y^2 - 4y + 4) \ge 1 - 4y + 4y^2$

$\Leftrightarrow \quad 2y^2 + 2y - 4 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le y \le 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{max} = 1 \\ y_{min} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ **Đáp số là câu (d).**

ĐỀ B

Câu 1. Trong mặt phẳng (Oxy), cho (E) : $x^2 + 4y^2 = 4$ và đường thẳng (d) : $y = x + k$. Điều kiện của k để (d) cắt (E) tại 2 điểm phân biệt là ::

a) ☐ $|k| < \sqrt{5}$ b) ☐ $|k| \le \sqrt{5}$

c) ☐ $|k| > \sqrt{5}$ d) ☐ $|k| \ge \sqrt{5}$.

Câu 2. Tìm m nguyên dương sao cho $C_{14}^{n+5} + C_{14}^{n+3} = 2C_{14}^{n+4}$

Đáp số :

a) ☐ $n = 8$ b) ☐ $n = 9$

c) ☐ $n = 10$ d) ☐ Một đáp số khác.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4}, & \text{nếu } x > 2 \\ x + 3(a-1), & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

Tìm a để hàm số f liên tục trên $[2; +\infty)$.

Đáp số :

a) ☐ $a = \dfrac{5}{3}$ b) ☐ $a = \dfrac{5}{12}$ c) ☐ $a = \dfrac{4}{3}$ d) ☐ $a = \dfrac{5}{13}$.

Câu 4. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m} \ (m \neq 0) \text{ có tâm đối xứng là } I(-2; -2).$$

Đáp số :

a) ☐ $m = 10$ b) ☐ $m = 11$

c) ☐ $m = 12$ d) ☐ Tất cả đều sai.

Câu 5. Cho a, b, c > 0, ta luôn có : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq A$

Đáp số :

a) ☐ $A = 1$ b) ☐ $A = \dfrac{3}{4}$

c) ☐ $A = \dfrac{3}{2}$ d) ☐ Tất cả đều đúng.

Câu 6. Cho tích phân $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}$. Câu nào sau đây là đúng :

a) ☐ $1 \leq I < \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ b) ☐ $1 < I \leq \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

c) ☐ $1 \leq I \leq \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ d) ☐ $1 < I < \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 7. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) tâm $I(\sqrt{2}; -1; 1)$ và đi qua $A(0; 0; 2)$.

Xét vị trí tương đối của (S) và mặt phẳng (P) : $x\sqrt{2} - y + z = 0$, ta thấy :

a) ☐ (S) cắt (p) b) ☐ (S) tiếp xúc (p)

c) ☐ (S) và (p) không có điểm chung d) ☐ (p) chứa tâm I của (S).

Câu 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases}$

Đáp số :

a) ☐ $\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 \end{cases}$ b) ☐ $\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$ c) ☐ $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$ d) ☐ $\begin{cases} x = 7 \\ y = 5. \end{cases}$

Câu 9. Giải bất phương trình : $\log_2 (7.10^x - 5.25^x) > 2x + 1$

Đáp số :

a) ☐ $-1 \le x < 0$ b) ☐ $-1 < x \le 0$

c) ☐ $-1 < x < 0$ d) ☐ $-1 \le x \le 0.$

Lời giải

Câu 1. Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và (d) là nghiệm của phương trình :

$$x^2 + 4(x + k)^2 = 4 \Leftrightarrow 5x^2 + 8kx + 4k^2 - 4 = 0$$

Do đó (d) và (E) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 16k^2 - 5(4k^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow -4k^2 + 20 > 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 < 5 \Leftrightarrow |k| < \sqrt{5} \Rightarrow$$ Đáp số là câu a).

Câu 2. Điều kiện : $\begin{cases} 0 \le n \le 9 \\ n \in Z \end{cases}$

Do đó : $C_{14}^{n+5} + C_{14}^{n+3} = 2C_{14}^{n+4}$

$$\Leftrightarrow \frac{14!}{(n+5)!(9-n)!} + \frac{14!}{(n+3)!(11-n)!} = 2.\frac{14!}{(n+2)!(10-n)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+5)(n+4)} + \frac{1}{(11-n)(10-n)} = \frac{2}{(n+4)(10-n)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(11-n)(10-n)+(n+5)(n+4)}{(n+5)(n+4)(11-n)(10-n)} = \frac{2(n+5)(11-n)}{(n+5)(n+4)(11-n)(10-n)}$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 21n + 110 + n^2 + 9n + 20 = 2(-n^2 + 6n + 55)$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 24n + 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = 5 \end{array}\right. \Rightarrow$$ **Đáp số là câu d).**

Câu 3.

- Trên (2; +∞), ta có $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2 - 4} \Rightarrow$ f liên tục trên (2;+∞)
- Do đó f liên tục trên [2; +∞) $\Leftrightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2+}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right) = 3a-1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x-2}{x^2-4} = 3a-1$

$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{1}{x+2} = 3a-1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{4} = 3a-1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{5}{12}$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu b).

Câu 4. Ta có $y = \dfrac{x^2-2mx+3m^2}{x-2m} = x + \dfrac{3m^2}{x-2m}$ (C)

Với $m \neq 0$, thì (C) có tiệm cận đứng là $x = 2m$ và tiệm cận xiên là $y = x$.

$\Rightarrow$ Tâm đối xứng của (C) là $J(2m; 2m)$

Do đó : $J(2m; 2m) \equiv I(-2; -2) \quad \Leftrightarrow \quad m = -1 \quad \Rightarrow$ Đáp số là câu d).

Câu 5. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{c}{a+b}+1\right)-3$$

$$= \frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3$$

$$\geq \frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\,.\,3\sqrt[3]{\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{b+c}\cdot\frac{1}{c+a}}-3 = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu d).

Câu 6.

Đặt $f(x) = -x^2 + 2x + 8, \quad x \in [0; 3]$

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Bảng biến thiên :

x	0		1		3
f'		+	0	−	
f	8	↗	9	↘	5

$\Rightarrow \quad 5 \leq f(x) \leq 9, \ \forall x \in [0; 3] \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \ \forall x \in [0; 3]$

(*Chú ý :* • $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

• $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$)

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 \frac{1}{3}dx < \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} < \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} < \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu d).

Câu 7.

- (S) có tâm $I(\sqrt{2}; -1; 1)$ và đi qua $A(0; 0; 2)$ nên độ dài bán kính là :

$$R = IA = \sqrt{2+1+1} = 2$$

- Khoảng cách từ d từ I đến mặt phẳng (p) là :

$$d = d(I, (p)) = \frac{|2+1+1|}{\sqrt{2+1+1}} = 2 \quad \Rightarrow \quad R = d = 2$$

$\Rightarrow$ (p) tiếp xúc với (p) $\Rightarrow$ Đáp số là câu b).

Câu 8. Điều kiện $\begin{cases} x \geq y \geq 2 \\ x, y \in Z \end{cases}$

Do đó hệ $\begin{cases} 5C_x^{y-2} = 3C_x^{y-1} \\ C_x^y = C_x^{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\dfrac{x!}{(y-2)!(x-y+2)!} = \dfrac{3x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = \dfrac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(y-1) = 3(x-y+2) \\ y = x-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8y+11=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu c).

Câu 9. Ta có : $\log_2(7.10^x - 5.25^x) > 2x + 1 \Leftrightarrow 7.10^x - 5.25^x > 2^{2x+1}$

$$\Leftrightarrow 7.10^x - 5.25^x > 2.4^x \Leftrightarrow 5.25^x - 7.10^x + 2.4^x < 0$$

$$\Leftrightarrow 5.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7\left(\frac{5}{2}\right)^x + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \left(\frac{5}{2}\right)^x < 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{5}{2}\right)^x < \left(\frac{5}{2}\right)^0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \text{Đáp số là câu c)}$$

ĐỀ C

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 2x + 2}{x-1}$ có đồ thị (C).

Tìm các giá trị của k sao cho trên (C) có 2 điểm P, Q khác nhau thỏa mãn $\begin{cases} x_P + y_P = k \\ x_Q + y_Q = k \end{cases}$

Câu 2. Phương trình các tiệm cận của đường cong $y = x + \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$ là :

a) ☐ $y = 3x + 1$ b) ☐ $y = -x - \frac{1}{2}$

c) ☐ $y = x - \frac{1}{2}$ d) ☐ Tất cả đều sai.

Câu 3. Parabol $y^2 = -2px$ $(p > 0)$ có tiêu điểm là $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$.

Tìm tọa độ tiêu điểm của parabol $y^2 + 4(x - y) = 0$.

Đáp số :

a) ☐ $F(-2; 0)$ b) ☐ $F(0; 2)$ c) ☐ $F(0; -2)$ d) ☐ $F(2; 0)$.

Câu 4. Hàm số f liên tục trên [a; b] và F là hàm số thỏa mãn điều kiện $F'(x) = f(x), \forall x \in [a; b]$. Khi đó, ta có công thức $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Hãy tính $I = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{2 - x^2}}$.

Đáp số :

a) ☐ $I = \frac{5\pi}{12}$ b) ☐ $I = \frac{7\pi}{18}$

c) ☐ $I = \frac{15\pi}{34}$ d) ☐ Một kết quả khác.

Câu 5. Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m & (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} = 1 & (2) \end{cases}$$

Đáp số :

a) ☐ $0 < m < 1$ b) ☐ $0 \le m \le 1$

c) ☐ $m = 0$ c) ☐ $m = 1$.

Câu 6. Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Đặt $p = \frac{a + b + c}{2}$, $S = S_{\Delta ABC}$ thì :

a) ☐ $S = \sqrt{p(p - a)}$ b) ☐ $S = \sqrt{p(p - b)}$

c) ☐ $S = \sqrt{p(p - c)}$ d) ☐ Một kết quả khác.

Câu 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{|\sin x|} + \sqrt{|\cos x|}$ là :

a) ☐ 1 b) ☐ 2 c) ☐ 3 d) ☐ 4.

Câu 8. Giải phương trình lượng giác : $\sin^{2006}x + \cos^{2006}x = 1$.

Câu 9. Tính $S_n = 1 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n$, $n \in N$.

Đáp số :

a) ☐ $\frac{(-1)^n}{n+1}$ b) ☐ $\frac{1-(-1)^n}{n+1}$

c) ☐ $\frac{1(-1)^n}{n+1}$ d) ☐ Một kết quả khác.

Lời giải

Câu 1. Ta có : $\begin{cases} y_P = -x_P + k \\ y_Q = -x_Q + k \end{cases} \Leftrightarrow$ P, Q ∈ đường thẳng (d) : $y = -x + k$

Do đó, yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow$ Tìm k để (d) và (C) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt P, Q

$\Leftrightarrow$ $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 2} = -x + k$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)(-x + k)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 2x + 2 = -x^2 + (k + 1)x - k$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - (k + 3)x + k + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $\Delta = (k + 3)^2 - 8(k + 2) > 0$

$\Leftrightarrow$ $k^2 - 2k - 7 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > 1 + \sqrt{8} \\ k < 1 - \sqrt{8} \end{array}\right.$

Câu 2.

- Ta có : $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{|x|}{x}\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = \begin{cases} 3, & x \to +\infty \\ -1, & x \to -\infty \end{cases}$

Do đó : • $b = \lim\limits_{x\to+\infty}[y - ax] = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2 + 2x + 2} - 2x) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x} = \frac{1}{2}$$

• $b = \lim\limits_{x\to-\infty}[y - ax] = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2 + 2x + 1} + 2x) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Các tiệm cận xiên cần tìm là : $y = 3x + \dfrac{1}{2}$, $y = -x - \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu (d).

Câu 3. Ta có : $y^2 + 4(x - y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = -4x + 4$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 = -4(x-1) \Leftrightarrow Y^2 = -4X, \text{ với } \begin{cases} y - 2 = Y \\ x - 1 = X \end{cases}$$

Vậy tiêu điểm F của (P) có tọa độ là :

$$\begin{cases} X_F = -1 \\ Y_F = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 2 \end{cases} \Leftrightarrow F(0; 2)$$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu b).

Câu 4. Đặt $t = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow t^2 = 2 - x^2 \Rightarrow t\,dt = -x\,dx$.

$$\Rightarrow I = \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{-t\,dt}{t} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{Đáp số là câu d).}$$

Câu 5. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y+1} \geq 1$

Cùng với (2) $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1$

Vậy : m = 1 (tương ứng với nghiệm x = y = 0) $\Rightarrow$ Đáp số là câu d).

Câu 6. Ta có : $\begin{cases} S = \dfrac{1}{2} bc\sin A \\ \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{cases}$

$$\Rightarrow 16S^2 = 4b^2c^2\sin^2 A = 4b^2c^2(1 - \cos^2 A) = 4b^2c^2\left[1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right]$$

$$= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$
$$= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$
$$= [a^2 - (b - c)^2][(b + c)^2 - a^2]$$
$$= (a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)(b + c - a)$$
$$= 16(p - c)(p - b)(p - a)$$

$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Công thức Hêrông)

$\Rightarrow$ Đáp số là câu d).

Câu 7. Ta có : • $y(0) = 1$

• $y = \sqrt{|\sin x|} + \sqrt{|\cos x|} \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $y_{min} = 1 \Rightarrow$ Đáp số là câu a).

Câu 8. Ta có : $\sin^{2006}x + \cos^{2006}x = 1 \Leftrightarrow \sin^{2006}x + \cos^{2006}x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\underbrace{(1 - \sin^{2004} x)}_{\geq 0} + \cos^2 x\underbrace{(1 - \cos^{2004} x)}_{\geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(1 - \sin^{2004} x) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos^{2004} x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0 \\ \sin^{2004} x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 0 \\ \cos^{2004} x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 9. Ta có :

$$(1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k x^k$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 - x)^n dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^1 x^k dx$$

$$\Rightarrow -\left[\frac{(1 - n)^{n+1}}{n + 1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k + 1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n + 1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k + 1}$$

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n + 1}C_n^n = \frac{1}{n + 1}$$

$\Rightarrow$ Đáp số là câu d).

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: HẢI ĐĂNG
Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN
Trình bày bìa: THÁI HỌC

***Thực hiện liên kết:* Nhà sách HỒNG ÂN**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Mã số: 1L - 249ĐH2008
In 1.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH in Bao bì Phong Tân.
Số xuất bản: 511 - 2008/CXB/07 – 94/ĐHQGHN, ngày 12/6/2008.
Quyết định xuất bản số: 249 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2008.