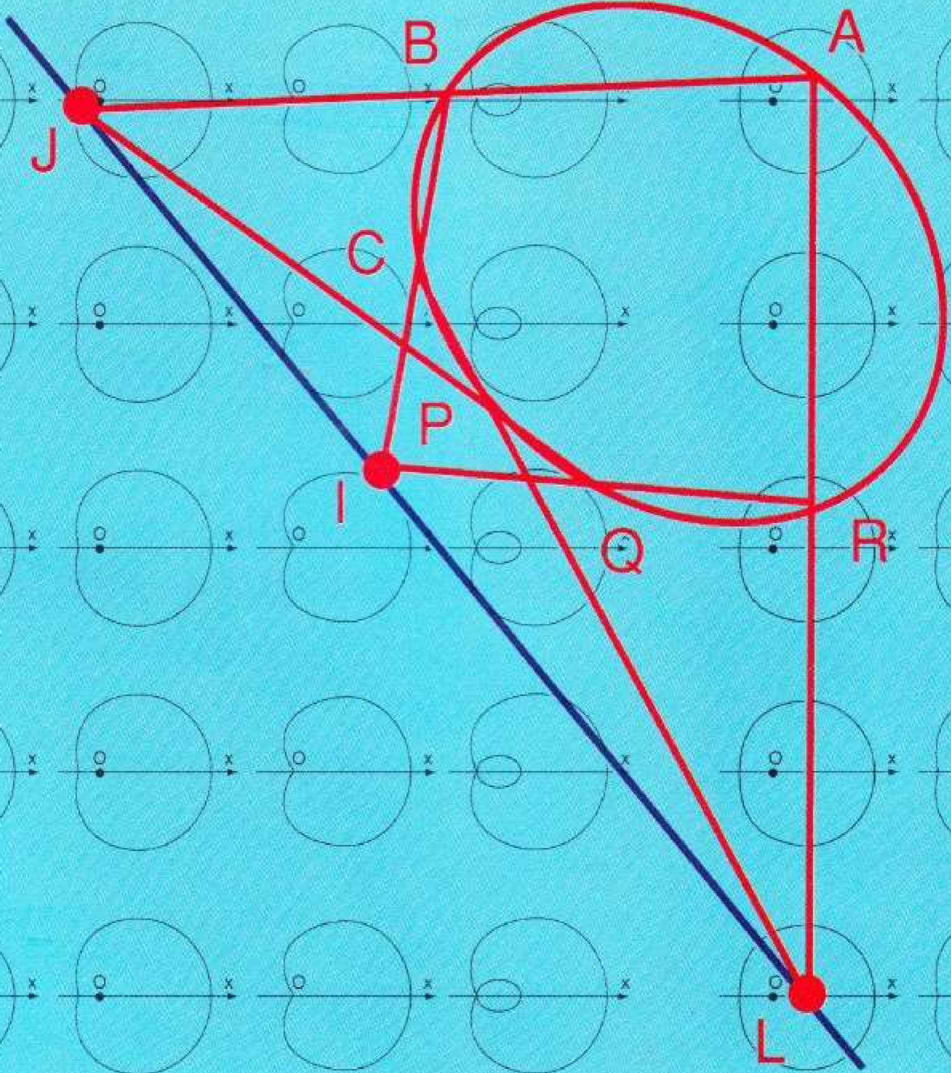
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

7
2003

SỐ 313 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



Phỏng đoán Catalan đã thành định lí

Bình luận về các bài toán thi vào đại học

PHỎNG ĐOÁN CATALAN ĐÃ THÀNH ĐỊNH LÍ

Charles Eugène Catalan

Charles Eugène Catalan (1843-1894) là nhà toán học Bỉ, một thời gian dài sống tại Pháp, giáo sư trường Đại học Liège. Phỏng đoán Catalan, thoạt đầu tưởng là một bài toán số học không đáng kể, lại là một thách thức làm hoang mang các chuyên gia số học từ 150 năm nay.

Năm 1844, Eugène Catalan trong một bức thư gửi thầy giáo phụ đạo trường Bách Khoa Paris, có nhận xét : *"Hai số tự nhiên liên tiếp không phải là 8 và 9 thì không thể là những lũy thừa đúng"*.

Để hiểu vấn đề, hãy nhìn bảng những số chính phương ($4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, v.v...) thêm vào đó bảng những số lập phương ($8 = 2^3$, $27 = 3^3$, 64, v.v...), rồi lại thêm những số có thể viết dưới dạng lũy thừa, như 2^8, 7^9... Tất nhiên chuỗi những lũy thừa đó là vô hạn, và dường như không chứa hai số nguyên liên tiếp nào khác 8 và 9. Nói khác đi Catalan diễn đạt phỏng đoán của mình theo ngôn ngữ đại số : *phương trình* $x^m - y^n = 1$, *trong đó các ẩn số x, y, m, n đều nguyên, dương (m, n khác 1), chỉ có một nghiệm duy nhất*". (Thực vậy $3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$) *"Tôi tin điều đó đúng, nhưng chưa chứng minh được hoàn toàn"*.

Năm trăm năm trước, nhà toán học Tây Ban Nha Levi Ben Gerson đã chứng minh rằng chỉ có 8 và 9 là những số nguyên liên tiếp trong bảng các lũy thừa của 2 và 3 nghĩa là giải quyết được các trường hợp $2^m - 3^n = 1$ và $3^m - 2^n = 1$. Điều đó có còn đúng với những lũy thừa của những số khác 2 và 3 ? Bí mật...

Năm 1850, người Pháp Vitor Lebesgue chứng minh rằng một bình phương (khác 9) không thể có theo ngay sau nó một lũy thừa (nói khác, phương trình $x^2 - y^n = 1$ không có nghiệm nguyên dương). Nhưng phải chờ đến năm 1964, các công trình của Ko Chao mới biết chắc chắn rằng một bình phương cũng không thể có ngay trước một lũy thừa (phương trình $x^m - y^2 = 1$ chỉ có một nghiệm nguyên dương). Như vậy vẫn còn vô số trường hợp cần nghiên cứu.

Năm 1976, có một đột phá trọng đại : Robert Tijdeman, nhà toán học Hà Lan thành công trong việc làm cho bảng đó hữu hạn ! Nhờ có những lí lẽ giải tích phức tạp (giảm giá trị những dạng tuyến tính của logarit những số đại số), ông chứng minh rằng nếu tồn tại hai lũy thừa liên tiếp thì chúng buộc phải nhỏ hơn một giá trị T nào đó. Như vậy chỉ còn phải xác minh từng số một nhỏ hơn T không có hai lũy thừa nào liên tiếp. Có vấn đề là bảng số vẫn có tầm lớn quá chừng, vì nó chứa tất cả những lũy thừa dạng $x^n < T$, trong đó n nhỏ hơn 10^{106} và x nhỏ hơn 10 tỉ lũy thừa 10 tỉ lũy thừa khoảng 300.

(Xem tiếp trang 6)

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THAM BIẾN ĐỂ TÌM CỰC TRỊ MỘT BIỂU THỨC

PHẠM THỊ VIỆT THÁI
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 303 tháng 9 năm 2002 có bài *Tìm cực trị một biểu thức bằng nhiều cách*. Bài viết này xin nêu thêm một cách giải theo một cách nhìn khác.

Giả sử cần tìm cực trị một biểu thức $Q(x)$. Để đơn giản ta chỉ xét biểu thức $Q(x)$ luôn xác định trên tập hợp số thực, nghĩa là nếu $Q(x)$ có mẫu thức thì mẫu thức luôn dương. Ta đưa thêm tham biến t để xét biểu thức $f(x) = Q(x) - t$. Nếu $f(x) \geq 0$ (hoặc $f(x) \leq 0$) với mọi x thuộc tập xác định của $Q(x)$ và tồn tại giá trị t_0 để có $f(x) = 0$ (tức là có $Q(x) = t_0$) thì t_0 chính là giá trị nhỏ nhất (GTNN) (hoặc giá trị lớn nhất (GTLN)) của biểu thức $Q(x)$. Xin minh họa việc sử dụng phương pháp tham biến qua các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 1. *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $Q = \dfrac{x^2+8x+7}{x^2+1}$

Lời giải. Xét $f(x) = Q(x) - t = \dfrac{x^2+8x+7-t(x^2+1)}{x^2+1}$

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x nên dấu của $f(x)$ chính là dấu của tử thức $g(x) = x^2 + 8x + 7 - t(x^2+1)$ hay $g(x) = (1-t)x^2 + 8x + 7 - t$ (1)

Xét tam thức $g(x) = ax^2 + bx + c =$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac \qquad (*)$$

• Nếu $a = 0$ thì $g(x) = bx + c$ luôn cùng dấu khi $b = 0$ và $g(x) = 0$ khi $c = 0$.

• Nếu $a > 0$ thì $g(x) \geq 0$ với mọi x khi $\Delta \leq 0$ và $g(x) = 0$ chỉ khi $\Delta = 0$.

• Nếu $a < 0$ thì $g(x) \leq 0$ với mọi x khi $\Delta \leq 0$ và $g(x) = 0$ chỉ khi $\Delta = 0$

Áp dụng vào (1) có :

$\Delta = 16 - (1-t)(7-t) = -t^2 + 8t + 9$.

$\Delta = 0$ khi $t = -1$ hoặc $t = 9$.

• Với $t = -1$ thì $a = 1 - t = 2 > 0$ nên $g(x) \geq 0$ $\Rightarrow f(x) \geq 0$, suy ra $Q(x)$ có GTNN là -1 và xảy ra khi $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

• Với $t = 9$ thì $a = 1 - t = -8 < 0$ nên $g(x) \leq 0$ $\Rightarrow f(x) \leq 0$, suy ra $Q(x)$ có GTLN là 9 và xảy ra khi $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$.

Như vậy phương pháp tham biến cho phép ta chuyển việc xét cực trị một biểu thức $Q(x)$ tức là xét một bất phương trình $Q(x) \geq t$ (hoặc $Q(x) \leq t$) về việc xét một phương trình $\Delta(t) = 0$, nên có thể nói *phương pháp tham biến là chiếc cầu nối giữa bất phương trình và phương trình*.

Ta có thể mở rộng việc xét cực trị của biểu thức một biến $Q(x)$ sang biểu thức hai biến $Q(x, y)$ bằng phương pháp tham biến, lúc đó $f(x, y) = Q(x, y) - t$ và xét tử thức của $f(x, y)$ theo một biến nào đó sao cho tử thức luôn cùng dấu và tồn tại giá trị bằng 0.

Ví dụ 2. *Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức* $Q = \dfrac{3y^2-4xy}{x^2+y^2}$ *với* (x, y) *khác* $(0, 0)$.

Lời giải. Vì $x^2 + y^2$ luôn luôn dương trừ giá trị $x = y = 0$ nên dấu của $f(x, y)$ chính là dấu của tử thức $g(x, y) = 3y^2 - 4xy - t(x^2 + y^2)$ hay

$$g(x, y) = (3-t)y^2 - 4xy - tx^2 \qquad (2)$$

Nếu $t = 3$ thì $g(x, y) = -3x^2 - 4yx$. Vì $\Delta = 4y^2 \geq 0$ nên $g(x, y) = 0$ chỉ khi $y = 0$, $x = 0$ (đã loại trừ).

Xét (2) theo biến y có

$\Delta_y = 4x^2 + t(3-t)x^2 = (4 + 3t - t^2)x^2$;

$\Delta_y = 0$ với mọi x khi $t = -1$ hoặc $t = 4$.

• Với $t = -1$ thì $a = 3 - t = 4 > 0$ nên $g(x, y) \geq 0$ $\Rightarrow f(x, y) \geq 0$, suy ra $Q(x, y)$ có GTNN là -1 và xảy ra khi $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 0 \Leftrightarrow (2y - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y$ $(\neq 0)$.

• Với $t = 4$ thì $a = 3 - t = -1 < 0$ nên $g(x, y) \leq 0$ $\Rightarrow f(x, y) \leq 0$, suy ra $Q(x, y)$ có GTLN là 4 và xảy ra khi $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 0 \Leftrightarrow -(y + 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2x$ $(\neq 0)$

Các bạn càng thấy ưu thế của phương pháp tham biến trong ví dụ sau.

Ví dụ 3. *Tìm u, v để biểu thức* $Q = \dfrac{ux+v}{x^2+1}$ *đạt GTLN bằng 4 và GTNN bằng –1.*

Lời giải. Đặt

$$f(x) = Q(x) - t = \frac{ux+v-t(x^2+1)}{x^2+1}$$

Vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên dấu của $f(x)$ chính là dấu của tử thức $g(x) = ux + v - t(x^2 + 1)$ hay $g(x) = -tx^2 + ux + v - t$.

Để GTLN $Q(x)$ là $t_1 = 4$ (lúc đó $a_1 = -4 < 0$) và GTNN $Q(x)$ là $t_2 = -1$ (lúc đó $a_2 = 1 > 0$) xảy ra đồng thời thì dựa vào (*) phải có

$$\begin{cases}\Delta_1=1\\ \Delta_2=0\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}u^2+16(v-4)=0\\ u^2-4(v+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}v=3\\ u^2=16\end{cases}$$

nghĩa là (u, v) bằng (4, 3) hoặc (–4, 3).

Mời các bạn áp dụng phương pháp trên (cùng các cách khác) để làm các bài tập sau :

Bài tập 1. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức Q sau đây :

1) $Q = \dfrac{x^2+4\sqrt{2}x+3}{x^2+1}$ 2) $Q = \dfrac{1+x^4}{(1+x^2)^2}$

3) $Q = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$

4) $Q = \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$ 5) $Q = \dfrac{x+2y+1}{x^2+y^2+7}$

6) $Q = \dfrac{2x-1}{x^2+x+4}$ 7) $Q = \dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$

Bài tập 2. Tìm m để biểu thức $Q = \dfrac{x+m}{x^2+x+1}$ chỉ nhận giá trị thuộc [-1; 1].

MỞ RỘNG KHÁI NIỆM...

(Tiếp trang 7)

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)(x+n-1)}, x \in R$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \text{ với } x \text{ là số thực dương.}$$

5. Công thức Riemann – Liouville : với $s > 0$ tùy ý ta có :

$$f^{(-s)}(x) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^x (x-t)^{s-1} f(t)dt$$

DẠNG 2. *Máy tính bỏ túi - Một công cụ để học toán giỏi và bước đầu tiếp cận với lập trình và công nghệ tin học*

Những bài dưới đây được lựa chọn nhằm thể hiện mối quan hệ hữu cơ giữa máy tính (tư duy thuật toán, quy trình thao tác nghiêm ngặt, các bước lập trình,...) và các kiến thức toán học (dãy số, công thức tổng quát của dãy số, phép chia hết,...).

Bài 8. (Đề chính thức) Cho dãy số $u_1 = 2$, $u_2 = 20$, $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ ($n \geq 2$).

1) Tính u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8.

2) Viết quy trình bấm phím liên tục để tính giá trị của u_n với $u_1 = 2$, $u_2 = 20$.

3) Sử dụng quy trình trên, tính giá trị của u_{22}, u_{23}, u_{24}, u_{25}.

Giải.

1) $u_3 = 42$; $u_4 = 104$; $u_5 = 250$; $u_6 = 604$.

2) Trên **Casio fx-500A** hoặc **fx-220**:

Bấm phím: 20 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$

Rồi lặp lại dãy phím:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{X} \leftrightarrow \text{M}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{=}$

Trên **fx-570MS hoặc fx-500MS**:

Bấm phím: 20 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ 2 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

Rồi lặp lại dãy phím:

$\boxed{\times}$ 2 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\times}$ 2 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

3) $u_{22} = 804268156$; $u_{23} = 1941675090$

$u_{24} = 4687618336$; $u_{25} = 11316911762$.

Nhận xét. Một số thí sinh đã dùng quy trình sau trên **Casio fx-500A**: 2 $\boxed{\text{Min}}$ 20

Lặp lại : $\boxed{\text{M}_+}$ $\boxed{\text{M}_+}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{X} \leftrightarrow \text{M}}$

Quy trình này đúng (dựa trên phân tích $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1} = u_n + u_n + u_{n-1}$) nhưng khó dùng nếu đề bài tổng quát hơn (thay $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ bằng $u_{n+1} = 10u_n + u_{n-1}$).

Một số thí sinh đã dùng quy trình sau trên **Casio fx-570MS**:

2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ 20 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

THI KHU VỰC
GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO LẦN THỨ BA – 2003

(Tiếp theo số trước)

TẠ DUY PHƯƠNG (*Viện Toán học*)
NGUYỄN HỮU THẢO (*Vụ Trung học Phổ thông*)

Khai báo công thức $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$:

$\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{=}$ 2 $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{:}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{C}}$

Rồi lặp lại dãy phím: $\boxed{=}$ ... $\boxed{=}$

Quy trình này rất hay nhưng không dùng được trên **Casio fx-500 MS** vì **Casio fx-500 MS** không có phím $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{=}$.

Bài 9. Cho dãy số:

$$u_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

1) Tính 8 số hạng đầu tiên của dãy này.

2) Lập một công thức truy hồi để tính u_{n+2} theo u_{n+1} và u_n.

3) Lập một quy trình tính u_n trên máy **Casio fx-500A** hoặc **Casio fx-570 MS**.

4) Tìm tất cả các số n nguyên để u_n chia hết cho 3.

Giải. 1) $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 15$; $u_4 = 56$; $u_5 = 209$; $u_6 = 780$; $u_7 = 2911$.

2) Ta sẽ chứng minh $u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

Thật vậy, đặt $a_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ và $b_n = \dfrac{(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$.

Khi ấy, $u_n = a_n - b_n$;

$u_{n+1} = (2+\sqrt{3})a_n - (2-\sqrt{3})b_n$;

$u_{n+2} = (2+\sqrt{3})^2 a_n - (2-\sqrt{3})^2 b_n =$

$= (7+4\sqrt{3})a_n - (7-4\sqrt{3})b_n =$

$= (8+4\sqrt{3})a_n - (8-4\sqrt{3})b_n - (a_n - b_n) = 4u_{n+1} - u_n$.

3) Quy trình trên **Casio fx-500A** hoặc **Casio fx-220**: 1 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 0 $\boxed{=}$

Lặp lại dãy phím: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{X} \leftrightarrow \text{M}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{-}$ $\boxed{[(}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{=}$

Quy trình trên **Casio fx-570MS** hoặc **Casio fx-500MS**: 1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{-}$ 0 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

Lặp lại dãy phím:

$\boxed{\times}$ 4 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\times}$ 4 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

4) u_n chia hết cho 3 khi và chỉ khi n chia hết cho 3.

Chứng minh: Vì $u_{n+2} = 3u_{n+1} + (u_{n+1} - u_n)$ nên $u_{n+2} \equiv u_{n+1} - u_n \pmod 3$

Phần dư của 8 số hạng đầu khi chia cho 3 là 0; 1; 1; 0; 2; 2; 0; 1 nên $u_6 \equiv u_0$; $u_7 \equiv u_1$ và $u_{n+6} \equiv u_n \pmod 3$. Vì $u_0; u_3; u_6$ chia hết cho 3 nên u_n chia hết cho 3 khi và chỉ khi n chia hết cho 3.

Bài 10. Cho $u_0 = 2$, $u_1 = 10$ và $u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

1) Lập một quy trình tính u_{n+1}.

2) Tìm công thức tổng quát của u_n.

3) Tính u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.

Giải. 1) Quy trình trên **Casio fx-500A** hoặc **fx-220**: 10 $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{=}$

Lặp lại dãy phím:

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{X} \leftrightarrow \text{M}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{-}$ $\boxed{[(}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{=}$

Quy trình trên **Casio fx-570MS** hoặc **Casio fx-500MS**: 10 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\times}$ 10 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

Lặp lại dãy phím:

$\boxed{\times}$ 10 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{A}}$

$\boxed{\times}$ 10 $\boxed{-}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{B}}$

2) Công thức tổng quát của u_n là:

$$u_n = (5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n.$$

Chứng minh (theo quy nạp):

$u_{n+1} = 10u_n - u_{n-1} =$

$10[(5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n] -$

$[(5+2\sqrt{6})^{n-1} + (5-2\sqrt{6})^{n-1}]$

$=(5+2\sqrt{6})^n(10-\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}})+(5-2\sqrt{6})^n(10-\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}})=$

$=(5+2\sqrt{6})^{n+1}+(5-2\sqrt{6})^{n+1}.$

3) $u_2 = 98$; $u_3 = 970$; $u_4 = 9602$;

$u_5 = 95050$; $u_6 = 940898$.

Bài 11. Cho dãy số:

$$u_n = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n - 2,\ n = 1, 2, \ldots$$

1) Tính 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

2) Lập một công thức truy hồi để tính u_{n+1} theo u_n và u_{n-1}.

3) Lập một quy trình tính u_{n+1}.

4) Chứng minh rằng $u_n = 5m^2$ khi n chẵn và $u_n = m^2$ khi n lẻ.

Bài 12 (*Đề chính thức*) 1) Viết kết quả của các biểu thức sau dưới dạng phân số:

$$A=\cfrac{20}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}};\quad B=\cfrac{2}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{8}}}};\quad C=\cfrac{2003}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{6+\cfrac{7}{8}}}}.$$

2) Tìm các số tự nhiên a và b biết:

$$\frac{329}{1051}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}}}.$$

Bài 13. Thời gian mà quả đất quay một vòng quanh mặt trời được viết dưới dạng

$$365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{20}}}}}.$$

Dựa vào liên phân số này, người ta có thể tìm ra số năm nhuận. Thí dụ, dùng liên phân số $365+\frac{1}{4}$ thì cứ 4 năm lại có 1 năm nhuận, còn nếu dùng liên phân số $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}} = 365\frac{7}{29}$ thì cứ 29 năm sẽ có 7 năm nhuận.

1) Hãy tính giá trị (dưới dạng phân số) của các liên phân số sau:

a) $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3}}}$; b) $365+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}}$;

c) Liên phân số ở đề bài.

2) Kết luận về số năm nhuận dựa theo các phân số nhận được.

Nhận xét : Các đề thi trên phần nào cho thấy *khả năng sử dụng tích cực máy tính* trong *học toán* (*không chỉ* trong *làm tính*).

MỘT DÃY SỐ... (*Tiếp trang 5*)

• Lúc đó $f(2) = r_2$. Nếu $r_2 \neq 0$ thì $r_2 = 1 \Rightarrow f(2) = 1$. Có $f(3) = f(2) + f(1) + r_3 = 1 + r_3$. Từ $f(1) + f(3) + r_4 = f(4) = 2f(2) + r_4$ suy ra $1 + r_3 = 2 \Rightarrow r_3 = 1 \Rightarrow f(3) = 2 \Rightarrow f(4) \geq 2$ và $f(5) \geq 3$. Bằng phương pháp quy nạp dẫn đến $f(2n+1) \geq n+1$, trái với (4). Suy ra $f(2) = r_2 = 0$.

• Lúc đó $f(3) = f(1) + f(2) + r_3 = r_3$

Nếu $r_3 = 0$ thì $f(3) = 0$, $f(4) = f(1) + f(3) + r_4 \leq 1$, $f(5) = f(2) + f(3) + r_5 \leq 1$, $f(6) = 2f(3) + r_6 \leq 1$.

Bằng phương pháp quy nạp suy ra $f(3n+t) \leq n$ với $1 \leq t \leq 3$ và mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$, trái với (4). Suy ra $f(3) = r_3 = 1$ là số dương.

Xin mời các bạn tìm ra những tính chất khác của dãy số thú vị này.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

MỘT DÃY SỐ THÚ VỊ

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Ta xét hai bài toán sau đây :

Bài toán 1. *Cho hàm $f(n)$ xác định trên tập hợp các số nguyên dương và nhận giá trị trên tập hợp các số nguyên không âm thỏa mãn các điều kiện sau : $f(2) = 0$, $f(3) > 0$, $f(9999) = 3333$ và với mỗi cặp số m, n thì $f(m+n) - f(m) - f(n) = r$ với r bằng 0 hoặc 1. Tính $f(1982)$.*

(Olympic Toán Quốc tế 1982)

Bài toán 2. *Giả sử dãy số nguyên không âm $a_1, a_2, ..., a_{1997}$ thỏa mãn điều kiện $a_m + a_n \le a_{m+n} \le a_m + a_n + 1$ với mỗi cặp số m, n mà $m+n \le 1997$. Chứng minh rằng tồn tại số thực x sao cho $a_n = [nx]$ với mỗi n mà $1 \le n \le 1997$ ([x] là số nguyên lớn nhất < nx)*

(Olympic Toán Hoa Kỳ 1997).

Cả hai bài toán trên đều đề cập đến một dãy số nguyên không âm (a_n) $(n = 1, 2, ...)$ thỏa mãn bất đẳng thức $a_m + a_n \le a_{m+n} \le a_m + a_n + 1$ (*) với mỗi cặp số m, n. Lời giải của bài toán 1 đã được trình bày trong nhiều quyển sách, chẳng hạn "Thi vô địch toán quốc tế" của thầy Lê Hải Châu hoặc "40 năm Olympic toán học quốc tế" của PGS.TS Vũ Dương Thụy và ThS. Nguyễn Văn Nho. Lời giải trong quyển sách thứ nhất đã dựa vào giả thiết để tính trực tiếp $f(1982)$. Còn lời giải trong quyển sách thứ hai đã chứng minh rằng $n \le 9999$ thì $f(n) = \left[\dfrac{n}{3}\right]$. Bài toán 2 đã nêu ra một tính chất đặc sắc của dãy số thỏa mãn (*). Rõ ràng bài toán 2 tổng quát hơn bài toán 1 và nếu tìm ra lời giải của bài toán 2 thì áp dụng nó giải được bài toán 1.

Lời giải bài toán 2. Từ điều kiện $a_n = [nx]$ suy ra $a_n \le nx < a_n + 1 \Leftrightarrow \dfrac{a_n}{n} \le x < \dfrac{a_n+1}{n}$.

Điều này gợi ý ta đặt $c = \max\left\{\dfrac{a_n}{n}, 1 \le n \le 1997\right\}$, $b = \min\left\{\dfrac{a_n+1}{n}, 1 \le n \le 1997\right\}$ và cần chứng tỏ rằng tồn tại số thực x trong khoảng $[c, b)$, nghĩa là cần chứng minh $c < b$.

Gọi k, m với $1 \le k \le 1997$, $1 \le m \le 1997$ là các số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $c = \dfrac{a_k}{k}$ và $b = \dfrac{a_m+1}{m}$. Từ đó có :

$kc = a_k$ và $a_p < pc$ với $1 \le p \le k - 1$ (1)

$mb = a_m + 1$ và $qb < a_q + 1$ với $1 \le q \le m - 1$ (2)

Sử dụng (*), (1), (2) để xét 3 trường hợp sau đối với k và m :

1) Nếu $k = m$ thì $kc = a_k < a_k+1 = kb \Rightarrow c < b$.

2) Nếu $k < m$, đặt $m = k + q$ với $1 \le q \le m-1$. Ta có $mb = a_m + 1 \ge a_k + a_q + 1 > a_k + qb$ nên $kc = a_k < mb - qb = (m-q)b = k\,b \Rightarrow c < b$.

3) Nếu $k > m$, đặt $k = m + p$ với $1 \le p \le k - 1$. Ta có $kc = a_k \le a_m + a_p + 1 < a_m + pc + 1 = mb + pc$ nên $mc = (k-p)c < mb \Rightarrow c < b$.

Vậy trong mọi trường hợp đều có $c < b$. Do đó tồn tại số thực x sao cho $c \le x < b$, suy ra dãy số $a_n = [nx]$ thỏa mãn đề bài.

Chú ý rằng bài toán 2 vẫn đúng nếu thay 1997 bởi số nguyên lớn hơn 2.

Từ bài toán 2 suy ra **lời giải bài toán 1** như sau :

Xét dãy $f(n) = a_n$ với $n = 1, 2, 3, ...$, thỏa mãn điều kiện bài toán 1 thì cũng thỏa mãn điều kiện (*) của bài toán 2, cho nên tồn tại số thực x sao cho $a_n = [nx]$ với $n = 1, 2, 3, ..., 9999, ...$ Từ $f(9999) = 3333$ có $[9999x] = 3333 \Rightarrow 3333 \le 9999x < 3334 \Rightarrow \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{3334}{9999}$. Vì vậy $\dfrac{1982}{3} \le 1982x < \dfrac{3334.1982}{9999} \Rightarrow 660 < 1982x < 661 \Rightarrow f(1982) = [1982x] = 660$.

Như thế ta đã giải được bài toán 1 mà không cần dùng đến giả thiết $f(2) = 0$ và $f(3) > 0$. Các giả thiết này có thể chứng minh được bằng các cách sau :

Cách 1. Dựa vào kết quả bài toán 2, ta có

$$\frac{2}{3} \le 2x < \frac{6668}{9999} < 1 \Rightarrow f(2) = [2x] = 0$$

$$1 \le 3x < \frac{10002}{9999} < 2 \Rightarrow f(3) = [3x] = 1$$

Cách 2. Chứng minh trực tiếp từ

$f(m + n) = f(m) + f(n) + r$ với $r \in \{0, 1\}$ (3)

và $f(9999) = 3333$ (4)

Đặt $f(1) = a$. Từ (3) có $f(2) = 2f(1) + r_2 = 2a + r_2$.

• Nếu $a \ge 1$ thì $f(2) \ge 2a \ge 2$. Có $f(3) = f(2) + f(1) + r_3 \ge 3a \ge 3$. Bằng phương pháp quy nạp dẫn đến $f(n) \ge n$ với $n \ge 2$, trái với (4). Suy ra $f(1) = a = 0$.

(Xem tiếp trang 4)

PHỎNG ĐOÁN CATALAN ...

(Tiếp bìa 2)

Cuối những năm 90 thế kỉ trước trong sự bế tắc của những kĩ thuật giải tích, Yann Bugeaud, (trường đại học Strasbourg) và Guillaume Hanrot (ở Nancy) khai thác một hướng khác, thuần túy đại số, sử dụng những tính chất căn bậc *n* của đơn vị trên mặt phẳng phức để chia đường tròn thành nhiều phần bằng nhau (cyclotomie).

Gần đây, tiến sĩ Preda Mihailescu công dân Thụy Sĩ, gốc Rumani, 47 tuổi, làm việc ở một hãng nhỏ ở Zurich chuyên phân tích các dấu lăn tay, đã chứng minh được phỏng đoán Catalan. *"Đây là lần đầu tiên một bài toán cổ điển được một nhà toán học không chuyên giải"* Yuri Bilu, trường đại học Bordeaux (Pháp) bình luận một cách khâm phục.

Mùa hè 1999, Preda Mihailescu dự một buổi nói chuyện ở Paris của Guillaume Hanrot về những công trình của mình. *"Những kết quả đó là kì diệu đối với tôi"*, Mihailescu nhớ lại một cách xúc động. *"Khi về, tôi ở một mình ba ngày ở Paris, để nghiên cứu điều kì diệu đó. Rồi trên chuyến tàu về Zurich tôi vẫn mơ màng về điều đó. Phải chăng đây là bản năng toán học của tôi hay là thần bản mệnh của tôi ? Dù sao khi thức tỉnh tôi đã chứng minh được điều mà tôi tìm tòi"*.

Bằng một giấc mơ, nhờ có trực giác thiên tài về cyclotomie, Mihailescu chứng minh rằng, nếu tồn tại những lũy thừa liên tiếp khác 8 và 9 thì các số mũ của chúng phải là những "cặp số Wieferich", nhưng rất hiếm (chỉ biết có 6 ví dụ). *Cặp số (m, n) gọi là cặp số Wieferich nếu có 2 tính chất : n^2 chia cho m^{n-1} có số dư 1 và m^2 chia cho n^{m-1} có số dư 1.* Như vậy bảng các lũy thừa được rút gọn rất nhiều. Nhưng không vì vậy mà phỏng đoán Catalan đã được giải. Thực vậy không ai biết xác định như thế nào tất cả các cặp số Wieferich. Không một ví dụ nào trong 6 ví dụ đã biết làm cho phỏng đoán của Catalan sai, nhưng không thể kết luận được khi không biết được tất cả các cặp số khác, nhỏ hơn số T của Tijdeman.

Trong năm 2000, Mihailescu xin nghỉ việc ở hãng để vùi đầu vào nghiên cứu. Kết quả là cuối năm, bằng cách dựa vào một định lí về cyclotomie đã được người Braxin Francisco Thaine chứng minh năm 1988, Mihailescu tưởng rằng đã chứng minh được phỏng đoán Catalan !

Lúc đầu, các nhà chuyên môn về đề tài này đều nghi ngờ, vì các công trình của Mihailescu ghi theo cách của người làm toán không chuyên, rất khó đọc. Chỉ có Yuri Bilu, ở trường đại học Bordeaux nhận lao vào những tình tiết lắt léo trong lập luận của Mihailescu. Chính Bilu cũng thấy rằng *"Công trình của Mihailescu đầy bí ẩn, mỗi ngày không thể đọc quá nửa trang"*. Trong một năm, Bilu chăm chú đọc các bản chứng minh khác nhau mà Mihailescu gửi. Nhưng mỗi lần đọc Bilu lại tìm ra một sai lầm. Đến cuối năm 2001 bản chứng minh mới vẫn có nhiều bí ẩn, nhưng không có sai lầm nghiêm trọng nào. Tháng 2-2002, Bilu mời Mihailescu đến Bordeaux ba ngày để giải thích chi tiết. Dần dần Mihailescu thuyết phục được Bilu và Bilu biên tập lại bản chứng minh cho có tính kinh viện hơn.

Preda Mihailescu

Chứng minh của Mihailescu đã được trình bày ở cuộc hội thảo Bourbaki ngày 17-11-2002. Còn bài viết 24 trang của Mihailescu được đăng trên báo toán học ở Đức *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, còn gọi là báo *Crelle* (cũng báo này năm 1844 công bố phỏng đoán Catalan). Maurice Mignotte, nhà nghiên cứu ở Trường đại học Strasbourg, từng nghiên cứu về phỏng đoán Catalan, nói : *"Đây là một sự kiện lớn trong giới các nhà số học"*.

Cũng như với phỏng đoán Fermat, kết quả chính của định lí Catalan không quan trọng lắm cả về ứng dụng thực tế lẫn về lí thuyết. Quan trọng là những khái niệm đưa ra để chứng minh phỏng đoán. Những khái niệm này sẽ có thể có tác động lên những chủ đề khác, như những khái niệm số học đã gợi ý cho những phương pháp hiện đại viết mật ước.

Bạn đọc có thể xem thêm trên trang web sau :

http : //www.math.uni paderborn de / preda/ papers/caterelle.ps

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo Sciences et Vie tháng 9-2002 và La Recherche tháng 1 - 2003)

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP

MỞ RỘNG KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

PHAN ĐỨC THÀNH
(*Đại học Vinh*)

Vấn đề mở rộng khái niệm đạo hàm bậc s nguyên dương cho giá trị s bất kì từ lâu đã được nhiều nhà toán học xuất sắc quan tâm nghiên cứu, trong đó có Leibniz, J.Bernoulli, Euler, Fourier, Liouville và Riemann.

Xin giới thiệu một cách tiếp cận sơ cấp khái niệm đạo hàm bậc s không nguyên dương sau đây, từ đó cho ta một cách nhìn thống nhất 2 khái niệm đạo hàm và tích phân xác định.

1. Từ xuất phát điểm đơn giản

Ta đã biết

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$$

Bằng quy nạp dễ dàng nhận thấy :

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x-kh) \quad (1)$$

ở đây $C_n^k = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$

2. Tổ hợp suy rộng.

Khái niệm tổ hợp C_n^k có thể định nghĩa đối với mọi s nguyên tùy ý nhờ các tổ hợp suy rộng

$C_s^k = \dfrac{s(s-1)...(s-k+1)}{k!}$ chẳng hạn

$$C_{-1}^k = \frac{(-1)(-2)...(-k)}{k!} = (-1)^k$$

Các tổ hợp suy rộng C_s^k có một số tính chất tương tự như tổ hợp thông thường. Chẳng hạn

$$C_s^k + C_s^{k+1} = C_{s+1}^{k+1} \;;$$

$$\sum_{k_1+k_2=m} C_s^{k_1} C_s^{k_2} = C_{2s}^m$$

Nhờ các tổ hợp suy rộng ta định nghĩa đạo hàm bậc $s = -1$ tương tự công thức (1) như sau :

$$f^{(-1)}(x) = \lim_{h\to 0} h\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{-1}^k f(x-kh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh) \text{ (ở đây } C_n^k = 0 \text{ với } k > n)$$

Theo định nghĩa của tích phân xác định thì vế phải của công thức trên l$f^{(-1)}(x) = \int_0^x f(t)dt$ (2)

3. Đạo hàm bậc nguyên

Với s nguyên bất kì ta phân hoạch đoạn $[0, x]$ thành m phần bằng nhau $\Delta x_m = \dfrac{x}{m}$ và ta định nghĩa đạo hàm bậc s nguyên là :

$$f^{(s)}(x) = \lim_{m\to 0}\left(\frac{x}{m}\right)^{-s}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_s^k f\left(x-k\frac{x}{m}\right) \quad (3)$$

Chú ý rằng khi $s = n$ nguyên dương thì (3) trùng với (1), khi $s = -1$ thì có (2).

Từ định nghĩa (3) ta suy ra được các tính chất sau của đạo hàm bậc s nguyên :

1. Nếu $f(x) = 0$ với $x \le 0$ thì

$$\left(f^{(s_1)}\right)^{(s_2)}(x) = f^{(s_1+s_2)}(x) \quad (4)$$

2. $(\alpha f+\beta g)^{(s)}(x) = \alpha f^{(s)}(x) + \beta f^{(s)}(x)$

(α, β là hằng số). Từ (2) và (4) ta có :

$$f^{(-2)}(x) = \int_0^x\left(\int_0^{x_1} f(t)dt\right)dx_1$$

$$f^{(-3)}(x) = \int_0^x\left(\int_0^{x_2}\left(\int_0^{x_1} f(t)dt\right)dx_1\right)dx_2 \text{ v.v...}$$

3. Với số tự nhiên $n \ge 1$ ta có

$$f^{(-n)}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

4. Người ta đã chứng minh được *một số tính chất sau của đạo hàm bậc s với* $s \in R$:

Với $s>1$ bất kì và $f(x)\equiv 1$ ta có $f^{(1-s)}(x) = \dfrac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}$

trong đó $\Gamma(s)$ là hàm Gamma của Euler được xác định như sau :

(Xem tiếp trang 2)

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

BÀN LUẬN VỀ CÁCH GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2003

NGUYỄN ANH DŨNG, ĐẶNG THANH HẢI

Câu I. *Cho HS :* $\dfrac{mx^2+x+m}{x-1}$ *(1) m là tham số.*

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = –1.

2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt và 2 điểm đó có hoành độ dương.

Lời giải. **1.** Bạn đọc tự giải.

2. Xét PT $y = 0$ hay $f(x) = mx^2 + x + m = 0$ với $x \neq 1$.

Đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt với hoành độ dương $\Leftrightarrow$ PT $f(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=1-4m^2>0 \\ f(1)=2m+1\neq 0 \\ S=-\dfrac{1}{m}>0,\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<0$$

Bài luyện tập 1. Cho hàm số

$y = x^3 - (3m+4)x^2 + (2m+1)x + m + 2$

Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn –1.

HD. Xét PT $y = 0 \Leftrightarrow (x-1)[x^2-(3m+3)x-m-2] = 0 \Rightarrow$ xét nghiệm của PT $f(x) = x^2 - 3(m+1)x - m - 2 = 0$.

Câu II.1. *Giải phương trình*

$$\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \qquad (1)$$

Lời giải.

$$\text{ĐK}: \begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \\ \operatorname{tg}x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq k\pi \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi \end{cases} (k\in Z)$$

Khi đó PT (1) $\Leftrightarrow$

$$\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\frac{\cos 2x.\cos x}{\cos x+\sin x}+\sin x(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left(\frac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x-\sin x=0 & (2) \\ \dfrac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x=0 & (3) \end{array}\right.$$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in Z)$.

Ta có (3) $\Leftrightarrow 1 + \sin^2 x - \sin x\cos x = 0$

PT bậc 2 đối với $\sin x$ vô nghiệm

Vậy PT (1) có nghiệm : $x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in Z)$

Câu II. 2. *Giải hệ PT* $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} & (1) \\ 2y=x^3+1 & (2) \end{cases}$

Lời giải. ĐK : $xy \neq 0$. Biến đổi PT (1) được $(x-y)(xy+1) = 0$.

TH1 : $x = y$: Thay vào PT (2) được

$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1) = 0$.

Từ đó ta được nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

TH2 : $xy + 1 = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{x}$. Thay vào PT (2) được $x^4 + x + 2 = 0$. PT này vô nghiệm vì

$$x^4+x+2=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}>0$$

hoặc $x^4 + x + 2 = (x^2-1)^2 + x^2 + \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$

Lưu ý. Học sinh dễ mắc sai lầm như sau : Với $f(t) = t-\dfrac{1}{t}$, ta có $f'(t) = 1+\dfrac{1}{t^2} > 0 \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến. Do đó từ PT $x-\dfrac{1}{x} = y-\dfrac{1}{y}$ $\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (!). Thực ra hàm số $f(t) =$

$t - \frac{1}{t}$ đồng biến trên $(-\infty, 0)$ và trên $(0, +\infty)$.

Nói cách khác PT $t - \frac{1}{t} = a \Leftrightarrow t^2 - at - 1 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Bài luyện tập 2. Giải hệ $\begin{cases} x-y=\sin x-\sin y \\ \cos 2x-3\sin y+1=0 \end{cases}$

HD : Xét chiều biến thiên của hàm
$f(t) = t - \sin t$.

Bài luyện tập 3: Giải hệ $\begin{cases} x^2-2x=y^2-2y \\ 4^x+2^y=5 \end{cases}$

HD: Từ PT đầu ta có $(x-y)(x+y-2)=0$

Câu IV. 1. *Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển nhị thức Niutơn của $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$ (n là số nguyên dương, $x > 0$, C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).*

Lời giải. Hệ thức trong giả thiết tương đương với: $\frac{(n+4)\,!}{(n+1)\,!\,3\,!}-\frac{(n+3)\,!}{n\,!\,3!}=7(n+3)$

$(n+4)(n+2)-(n+2)(n+1)=4 \Leftrightarrow 3n+6=42 \Leftrightarrow n=12$

Khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}$, ta được một tổng gồm các số hạng có dạng

$C_{12}^k\left(\frac{1}{x^3}\right)^{12-k}.\left(\sqrt{x^5}\right)^k=C_{12}^k x^{\frac{11k-72}{2}}$ với $0 \le k \le 12$

Số hạng chứa x^8 ứng với $\frac{11k-72}{2}=8 \Rightarrow k = 8$. Vậy hệ số của x^8 là $C_{12}^8=495$.

Cách khác : $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^{12}=\frac{\left(1+x^{11/2}\right)^{12}}{x^{36}}$, rồi tính $a_k=C_{12}^k x^{\frac{11k}{2}-36}$

Bài luyện tập 4. Hãy xác định số hạng không chứa x trong khai triển $(x\sqrt[3]{x}+x^{-28/15})^n$ biết rằng $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2} = 79$ $(x > 0)$.

Câu IV. 2. *Tính tích phân :* $I=\int\limits_{\sqrt5}^{2\sqrt3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

Lời giải. *Cách 1.* Đặt $t=\sqrt{x^2+4}$, ta được: $x^2 = t^2 - 4$; $xdx = tdt$ với $x=\sqrt5 \Rightarrow t = 3$; với $x=2\sqrt3 \Rightarrow t = 4$. Từ đó

$$I=\int\limits_{\sqrt5}^{2\sqrt3}\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}=\int\limits_3^4\frac{dt}{t^2-4}=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_3^4\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^4=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$$

Cách 2. Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$. Ta có

$$I=-\int\limits_{1/\sqrt5}^{1/2\sqrt3}\frac{dt}{\sqrt{4t^2+1}}=-\frac{1}{2}\int\limits_{1/\sqrt5}^{1/2\sqrt3}\frac{d(2t)}{\sqrt{(2t)^2+1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2+1}\right|\Bigg|_{1/\sqrt3}^{1/2\sqrt3}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt5}{\sqrt3}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$$

Cách 3. Đặt $x = 2\text{tg}t \Rightarrow dt = \frac{2dt}{\cos^2 t}$ $(0< t <\frac{\pi}{2})$

$x = 2\sqrt3 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$, $x = \sqrt5 \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\sqrt5}{2}$

Ta có $I = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^{\pi/3}\frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\text{tg}\frac{t}{2}\right|\Bigg|_\alpha^{\pi/3}$.

Tính $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{5}$.

Suy ra $I = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$

Lưu ý. Giả sử cần tính $\int\limits_{x_0}^{x_1}f(x)dx$

1) Nếu $f(x) = x\sqrt{ax^2+b}$ hoặc $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2+b}}{x}$ thì có thể dùng phép đổi biến $t = \sqrt{ax^2+b}$

2) Nếu $f(x) = \frac{1}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ thì có thể dùng phép đổi biến $mx + n = \frac{1}{t}$.

Bài luyện tập 5. Tính

a) $I=\int\limits_1^{\sqrt3}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$ b) $I = \int\limits_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

(Kì sau đăng tiếp)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/313. (Lớp 6). Đặt

$$A=\frac{1}{14}+\frac{1}{29}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{1877}$$

Chứng minh rằng $0,15 < A < 0,25$.

TRẦN VĂN THÍNH
(GV THCS Tự Cường, Tiên Lãng, Hải Phòng)

Bài T2/313. (Lớp 7). Tam giác ABC có đường trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại K sao cho $KB = KC$. Biết $\widehat{BAC} = 105^\circ$. Tính các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T3/313. Chứng minh rằng số $A = 2^n+6^n+8^n+9^n$ (với n là số nguyên dương) chia hết cho 5 khi và chỉ khi n không chia hết cho 4.

NGUYỄN MẠNH THẮNG
(GV THCS Khánh Dương, Yên Mô, Ninh Bình)

Bài T4/313. Giải bất phương trình

$$2\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+1}\ge\sqrt[3]{2x-1}$$

VŨ TRÍ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T5/313. Chứng minh rằng nếu đa thức $x^3 + ax^2 + bx + c$ có 3 nghiệm phân biệt thì đa thức $x^3 - bx^2 + acx - c^2$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

HOÀNG ANH TUẤN
(SV Toán A K33 ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T6/313. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng ΔABC là đều khi và chỉ khi

$$\sqrt{a+h_a}+\sqrt{b+h_b}+\sqrt{c+h_c}=\sqrt{a+h_b}+\sqrt{b+h_c}+\sqrt{c+h_a}$$

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV CLC K49 khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/313. Tam giác ABC có $\frac{1}{4}AC < AB < 4AC$. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC, cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F. Hãy xác định vị trí điểm E sao cho $AE + AF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện PKKQ Hà Tây)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/313. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x_1^3}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2^3}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n^3}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}$$

trong đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = s$ không đổi.

THỌ ĐẶNG
(Phòng GD-ĐT Ninh Phước, Ninh Thuận)

Bài T9/313. Đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $P(2003) = 2003!$ và $x.P(x-1) = (x - 2003).P(x)$.

Chứng minh rằng đa thức $f(x) = P^2(x) + 1$ là bất khả quy.

ĐÀM VĂN NHỈ
(GV CĐSP Thái Bình)

Bài T10/313. Dãy số thực (x_n) ($n = 0, 1, 2, \ldots$) được xác định bởi : $x_0 = a$ và $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

Tìm tất cả các giá trị của a để $x_n < 0$ với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

ĐOÀN QUANG MẠNH
(GV THPT Trần Phú, Hải Phòng)

Bài T11/313. Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{MA.MB.MC}{d_1.d_2.d_3}\ge\frac{4R}{r}$$

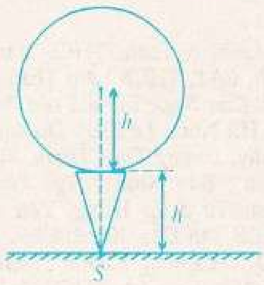
THÁI VIẾT THẢO
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài T12/313. Cho tứ diện $ABCD$ có các đường cao đồng quy tại điểm H. Chứng minh rằng :

$$(HA + HB + HC + HD)^2 \le AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$

LƯU XUÂN TÌNH
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ



Bài L1/313. Một đồ chơi trẻ em được cấu tạo bởi 2 phần làm bằng cùng một chất : phần dưới có dạng hình nón đặc, chiều cao h, bán kính đáy $r = \frac{h}{4}$ gắn với phần trên có dạng hình cầu đặc, bán kính $R = h$ sao cho trục hình nón đi qua tâm của hình cầu (hình vẽ). Vật được giữ sao cho trục thẳng đứng trên mặt phẳng nằm ngang rất nhẵn. Khi nó đổ và nằm yên trên mặt phẳng thì đỉnh S đã dịch một đoạn bao nhiêu so với vị trí ban đầu.

NGUYỄN VĂN HANH
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài L2/313. Cho mạch điện như hình vẽ : $u_{AB} = U_o 100\pi t$ (V), $U_{AN} = 200$(V), $L = 1/\pi$(H), $C = 50/\pi$ (μF), $R = 2r$, u_{MN} lệch pha so với u_{AB} là $\pi/2$.

a) Xác định U_o, R và r.

b) Viết biểu thức dòng điện trong mạch.

CHU VĂN BIÊN
(GV ĐH Hồng Đức, Thanh Hóa)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/313. (For 6th grade). Let

$$A = \frac{1}{14} + \frac{1}{29} + \ldots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2+(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{1877}$$

Prove that $0{,}15 < A < 0{,}25$

T2/313. (For 7th grade). The median BM and the angled-bisector CD of a triangle ABC intersect at K such that $KB = KC$. Calculate the measures of the angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, knowing that the measure of $\widehat{BAC}$ is 105°.

T3/313. Prove that the number $A = 2^n + 6^n + 8^n + 9^n$ (n is a positive integer) is divisible by 5 when and only when n is not divisible by 4.

T4/313. Solve the inequation

$$2\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1} \geq \sqrt[3]{2x-1}$$

T5/313. Prove that if the polynomial $x^3 + ax^2 + bx + c$ has 3 distinct roots then the polynomial $x^3 - bx^2 + acx - c^2$ has also 3 distinct roots.

T6/313. The measures of the sides BC, CA, AB of a triangle ABC are respectively a, b, c and the measures of its altitudes AA', BB', CC' are respectively h_a, h_b, h_c. Prove that the triangle ABC is equilateral when and only when

$$\sqrt{a+h_a} + \sqrt{b+h_b} + \sqrt{c+h_c} = \sqrt{a+h_b} + \sqrt{b+h_c} + \sqrt{c+h_a}$$

T7/313. A triangle ABC has $\frac{1}{4}AC < AB < 4AC$. A line passing through its centroid G cuts the sides AB, AC respectively at E, F. Determine the position of E so that $AE + AF$ attains its least value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/313. Find the least value of the expression:

$$P = \frac{x_1^3}{x_2+x_3+\ldots+x_n} + \frac{x_2^3}{x_1+x_3+\ldots+x_n} + \ldots + \frac{x_n^3}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}$$

where x_1, x_2, ..., x_n are real positive numbers satisfying the condition : $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = s$ (s is a given constant).

T9/313. The polynomial $P(x)$ satisfies the conditions : $P(2003) = 2003!$ and $x.P(x-1) \equiv (x-2003).P(x)$. Prove that the polynomial $f(x) = P^2(x) + 1$ is irreducible.

T10/313. The sequence of real numbers (x_n) ($n = 0, 1, 2, \ldots$) is defined by : $x_o = a$, $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$ Find all values of a so that $x_n < 0$ for all $n = 0, 1, 2, \ldots$

T11/313. Let M be a point inside the triangle ABC. Let d_1, d_2, d_3 be respectively the distances from M to the lines BC, CA, AB, let R and r be respectively the circumradius and the inradius of ΔABC. Prove that : $\frac{MA.MB.MC}{d_1.d_2.d_3} \geq \frac{4R}{r}$

T12/313. The altitudes of a tetrahedron $ABCD$ are concurrent at a point H. Prove that :

$(HA + HB + HC + HD)^2 \leq AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$.

Bài T1/309. (Lớp 6). *So sánh giá trị của biểu thức* $A = \frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{9999}{10000}$ *với các số 98 và 99.*

Lời giải.

Biến đổi

$$A = \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{16}\right)+...+\left(1-\frac{1}{10000}\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+...+\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

$$= 99-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}\right) = 99-B$$

trong đó $B = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}$

Vì $B > 0$ nên $A < 99$.

Dựa vào hệ thức $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ (*) với mọi $k \geq 2$, ta có $B = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2} <$

$$< \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{100} < 1.$$

Từ đó $A = 99 - B > 99 - 1 = 98$.

Vậy $98 < A < 99$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn đã giải đúng.

Một số bạn đã chứng minh bài toán tổng quát :

$$n-2 < \frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{n^2-1}{n^2} < n-1 \text{ với } n \geq 2.$$

2) Nếu đặt $B = \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+C = \frac{61}{144}+C$ rồi ước lượng giá trị của C nhờ (*) và $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ ta có $0,19 < C < 0,24$ suy ra $0,61 < B < 0,67$ và được $98,33 < A < 98,39$.

3) Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Nguyễn Bảo Linh*, 6 Toán, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Vũ Ngọc Bích*, 6A1, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Quang Sự, Kim Ngọc Tùng, Trần Bá Trung*, 6A, THCS Yên Lạc ; **Hà Nội :** *Lê Thùy Dương*, 6A, THCS Mai Dịch, Cầu Giấy, *Dương Thùy Dung*, 4I, TH Nguyễn Trãi, Thanh Xuân ; **Bắc Ninh :** *Ngô Phú Cường*, 6A, THCS Tam Sơn, Từ Sơn; **Hưng Yên :** *Nguyễn Quang Sang*, 6A, THCS Tân Dân, Khoái Châu ; **Hà Nam :** *Nhữ Anh Thái*, 4D, TH Lương Khánh Thiện, Phủ Lý ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Huy*, 6A, THCS Nam Quang, Nam Trực ; **Thái Bình :** *Nguyễn Văn Chiến*, 6A, THCS Minh Tân, Hưng Hà ; **Hải Phòng :** *Bùi Thị Thu Trang*, 6A1, THCS Hồng Bàng, Ngô Quyền ; **Thanh Hóa :** *Trần Xuân Hoãn*, 6D, THCS Bắc Sơn, Sầm Sơn, *Nguyễn Đăng Dũng*, 6A, THCS Thiệu Khánh, Thiệu Hóa; **Nghệ An :** *Trần Trung Kiên*, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Đậu Thế Vũ*, 6A, THCS Diễn Lộc, *Tăng Hồng Trường*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh :** *Đặng Hữu Tường*, 6A, THCS Bình An, Can Lộc ; **Quảng Bình :** *Phạm Tài Tú*, 6/1, THCS Quảng Xuân, Quảng Trạch ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Trung Hà*, 5C, TH số 1 Nam Phước, Duy Xuyên ; **Quảng Ngãi :** *Lâm Huỳnh Kim Ngân*, 6A7, THCS Nguyễn Nghiêm, *Nguyễn Thị Xuân Duyên*, 6A, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Quảng ngãi ; **Bình Định :** *Bùi Bảo Khang*, 6A1, THCS An Nhơn 2 ; **Khánh Hòa :** *Phạm Đăng Lộc*, 6/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Tuấn Khanh*, 6/1, THCS Hồng Bàng, Q. 5.

VÂN KHANH

Bài T2/309. (Lớp 7). *Tam giác ABC có* $\widehat{ABC} = 30^o$, $\widehat{ACB} = 20^o$. *Đường trung trực của AC cắt BC ở E và cắt tia BA ở F. Chứng minh rằng AF = EF và AC = BE.*

Lời giải. (của đa số các bạn)

a) Gọi K là giao điểm của AC và EF. ΔEAC cân tại $E \Rightarrow \widehat{EAK} = \widehat{ECK} = 20^o$. Mặt khác, $\widehat{FAC} = \widehat{ABC}+\widehat{ACB} = 50^o \Rightarrow \widehat{FAE} = 70^o$ (1)

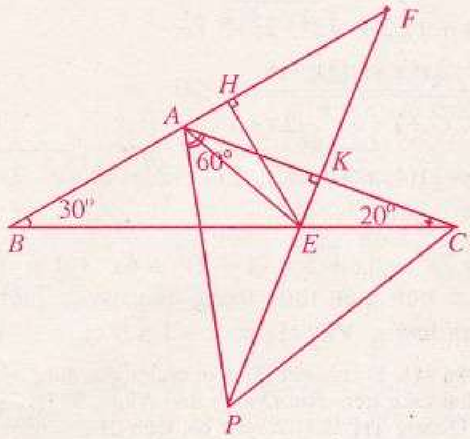
$\widehat{AEK} = \widehat{KEC} = 90^o - \widehat{KCE} = 70^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔFAE cân tại $F \Rightarrow AF = EF$.

b) *Cách 1.* Hạ $EH \perp AF$ ($H \in AF$). Ta có $AK = EH$ (do ΔFAE cân). Trong tam giác vuông BHE có $\widehat{B} = 30^o \Rightarrow EH = \frac{1}{2}BE$. Mặt khác, $AK = \frac{1}{2}AC$ suy ra $AC = BE$.

Cách 2. Trên tia KE lấy điểm P sao cho ΔPAC là tam giác đều.

Ta có $\widehat{FAP} = \widehat{FAC}+\widehat{CAP} = \widehat{ABC}+\widehat{ACB}+\widehat{CAP} = 50^o + 60^o = 110^o$, $\widehat{FEB} = 90^o + \widehat{ECK} = 110^o$



$\Rightarrow \widehat{FAP} = \widehat{FEB}$. Từ đó suy ra $\Delta FAP = \Delta FEB$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = AP = AC$ (đpcm).

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia gửi bài đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Phạm Thị Huyền Trang*, 7C, THCS Phong Châu, Tx Phú Thọ ; *Tạ Hồng Sơn*, 7A3, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Thị Bích Phượng*, 7A, THCS Yên Lạc, *Trương Ngọc Cương*, 7B, THCS Vĩnh Yên, *Nguyễn Quang Sơn*, 8A1, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Phước Thảo*, 7B, THCS Yên Phong ; **Hà Tây :** *Lê Hồng Thuận*, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hưng Yên :** *Phạm Thị Hà*, 7B, THCS Tiên Lữ ; **Thái Bình :** *Phạm Thúy Quỳnh*, 8A, THCS thị trấn Vũ Thư ; **Ninh Bình :** *Bùi Thị Lan*, 7A, THCS thị trấn Nho Quang ; **Thanh Hóa :** *Đinh Phương Duy*, 7E, THCS Trần Mai Ninh, *Nguyễn Trung Anh*, *Nguyễn Thị Hương*, 7D, THCS Nguyễn Chích, thị trấn Rừng Thông ; **Nghệ An :** *Vũ Ngọc Mai*, *Hoàng Nguyễn Phương Mai*, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Nguyễn Thị Phương Thảo*, 7A, THCS Trung Sơn, Đô Lương ; **Bình Định :** *Huỳnh Nguyễn Huyền Trang*, 7A9, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Quảng Ngãi :** *Đỗ Thị Yến Trinh*, 6/1, THCS thị trấn Châu Ổ, Bình Sơn ; **Bạc Liêu :** *Khương Bá Ước*, THCS Hộ Phòng, huyện Giá Rai.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/309. *Tìm các số nguyên x, y sao cho*

$$\frac{x+2y}{x^2+y^2} = \frac{7}{20} \qquad (1)$$

Lời giải. Với $x^2 + y^2 \neq 0$ thì $x + 2y > 0$ và $(1) \Leftrightarrow 20(x + 2y) = 7(x^2 + y^2)$ (2)

Do (20, 7) = 1, từ (2) suy ra $\begin{cases} x+2y=7k \\ x^2+y^2=20k \end{cases}$ (3)

với k là số nguyên dương.

Ta có

$5(x^2 + y^2) = x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x^2 + y^2 - 4xy$

$= (x + 2y)^2 + (2x - y)^2$ (4)

Thay (3) vào (4) được

$$(2x - y)^2 = k(100 - 49k) \qquad (5)$$

Mặt khác từ (4) có $(x + 2y)^2 \leq 5(x^2 + y^2) = \frac{5.20}{7}(x+2y) \Rightarrow 0 < x + 2y < 15$.

Từ đó và (3) thì $k = 1$ hoặc $k = 2$.

• Với $k = 1$ thay vào (5) được $(2x - y)^2 = 51$ $\Rightarrow$ vô nghiệm nguyên.

• Với $k = 2$ thay vào (5) được $(2x - y)^2 = 4 \Rightarrow 2x - y = 2$ hoặc $2x - y = -2$. Kết hợp với $2x + y = 14$ suy ra $y = 6$ và $x = 2$.

Vậy PT (1) có nghiệm nguyên $x = 2$, $y = 6$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn dùng BĐT Côsi – Bu-nhi-a-cốp-xki để có $(x + 2y)^2 \leq 5(x^2 + y^2)$ $\Rightarrow 0 < x + 2y < 15$ rồi giải các hệ PT sau để tìm nghiệm :

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y=14 \\ x^2+y^2=40 \end{cases}$$

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Quang Huy*, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch, *Đỗ Đình Khanh*, 8A, THCS Yên Lạc ; **Hà Tây :** *Nguyễn Việt Anh*, 9A, THCS Thạch Thất ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hương Ly*, 7H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Bắc Giang :** *Phạm Việt Đức*, 9A, THCS Cao Thượng, Tân Yên ; **Hưng Yên :** *Đỗ Việt Phương*, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Phòng :** *Lương Phú Khánh*, *Bùi Ngọc Khôi*, 9A, *Lê Trung Sơn*, 9B, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Vũ Thị Mai Phương*, 9A, THCS Trực Thanh, *Nguyễn Quang Tuyên*, 8C, THCS Đào Sư Tích, Cổ Lễ, Trực Ninh ; **Thanh Hóa :** *Bùi Khắc Kiên*, *Lê Minh Thông*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Hoàng Long*, 9C, THCS Trần Phú, Nông Cống, *Nguyễn Phương Hoàng*, 9A, THCS Thiệu Đô, Thiệu Hóa, *Lưu Xuân Thế*, *Lê Phú Khánh*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Phạm Quang Khang*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Hà Tĩnh :** *Hoàng Minh Đức*, 9A, THCS Nguyễn Huy Tự, Can Lộc ; **Thừa Thiên – Huế :** *Lê Hữu Điền Khuê*, 8/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế ; **Quảng Trị :** *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa ; **Quảng Nam :** *Phan Hồ Anh Thư*, 9/6 THCS Lê Quý Đôn, Thăng Bình ; **Phú Yên :** *Võ Anh Dũng*, 9B, THCS Hùng Vương, Tx. Tuy Hòa ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Trung Thảo*, 9/9, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Biên Hòa, *Nguyễn Hải Đăng*, 9/3, THCS Nguyễn Công Trứ, Xuân Lộc ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Đức Duy*, 9/1, THCS Ngô Sĩ Liên, Tân Bình, *Nguyễn Anh Cường*, 9/1, THCS Lê Quý Đôn, Q.3 ; **Tiền Giang :** *Phạm Hồng Nhật*, 8A4, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Mỹ Tho ; **Đồng Tháp :** *Lý Duy Khiêm*, 9A1, THPT Tx. Cao Lãnh.

VIỆT HẢI

Bài T4/309. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} + \frac{(a-b)^2(3a+b)(a+3b)}{8(a+b)(a^2+6ab+b^2)} \qquad (1)$$

trong đó a, b là các số dương.

Lời giải. Với $a = b$ thì (1) đúng. Giả sử $a \neq b$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2(3a+b)(a+3b)}{8(a+b)(a^2+6ab+b^2)}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\left[1-\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(3a+b)(a+3b)}{4(a+b)(a^2+6ab+b^2)}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a+b)(a^2+6ab+b^2) - (a+b+2\sqrt{ab}).$$
$$(3a^2+3b^2+10ab) \geq 0 \qquad (2)$$

Đặt $x = a + b$, $y = \sqrt{ab}$ thì $a^2 + b^2 = x^2 - 2y^2$. Ta có :

$(2) \Leftrightarrow 4x(x^2+4y^2) - (x+2y)(3x^2+4y^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2y \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (3)

(3) đúng suy ra (1) đúng và đẳng thức chỉ xảy ra khi $a = b$.

Nhận xét. Khá nhiều bạn giải bài toán này bằng cách tương tự như trên và có lời giải đúng.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/309. *Giải bất phương trình*

$$(x-1)\sqrt{x^2-2x+5} - 4x\sqrt{x^2+1} \geq 2(x+1) \quad (1)$$

Lời giải. *Cách 1.* (của bạn *Nguyễn Duy Mạnh*, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương**)

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(\sqrt{(x-1)^2+4}+2) \geq$$
$$\geq 2x(\sqrt{(2x)^2+4}+2) \qquad (2)$$

• Nếu $x \leq -1$ thì $0 > x-1 \geq 2x$. Do đó $0 < \sqrt{(x-1)^2+4}+2 \leq \sqrt{(2x)^2+4}+2$. Vậy

$(x-1)(\sqrt{(x-1)^2+4}+2) \geq 2x(\sqrt{(2x)^2+4}+2)$,

BPT (2) được nghiệm đúng.

• Nếu $-1 < x \leq 0$ thì $x-1 < 2x \leq 0$. Suy ra $\sqrt{(x-1)^2+4}+2 > \sqrt{(2x)^2+4}+2$. Từ đó

$(x-1)(\sqrt{(x-1)^2+4}+2) < 2x(\sqrt{(2x)^2+4}+2)$,

BPT (2) vô nghiệm.

• Nếu $x > 0$, thì từ (2) suy ra $x-1 > 0$, hay $x > 1$. Do đó $0 < x-1 < 2x$. Vậy $0 < \sqrt{(x-1)^2+4}+2 < \sqrt{(2x)^2+4}+2$. Suy ra $(x-1)(\sqrt{(x-1)^2+4}+2) < 2x(\sqrt{(2x)^2+4}+2)$, mâu thuẫn với (2).

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \leq -1$.

Cách 2. (của nhiều bạn).

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5}) +$$
$$+2x(2\sqrt{(x^2+1)} - \sqrt{x^2-2x+5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2+\sqrt{x^2-2x+5}) +$$
$$+ \frac{2x(x+1)(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{x^2+1}.\sqrt{x^2-2x+5}$$
$$+ 7x^2-4x+5) \leq 0.$$

Do $7x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 6x^2 + 1 > 0$ với mọi x, nên biểu thức trong dấu ngoặc luôn có giá trị dương. Vậy $(1) \Leftrightarrow x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$.

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn có lời giải đúng và giải theo hai cách trên. Bạn *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa, **Quảng Trị** đã khái quát bài toán đã cho thành bài toán sau (giải tương tự cách 1).

Cho $a, b, c, d, m, k \in \mathbf{R}$. Khi đó

$(ax+b)(\sqrt{(ax+b)^2+k^2}+m^2)$

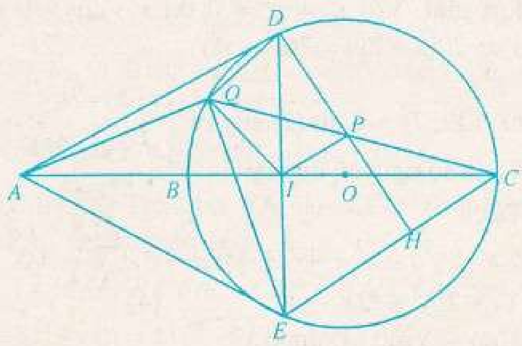
$\geq (cx+d)(\sqrt{(cx+d)^2+k^2}+m^2) \Leftrightarrow ax+b \geq cx+d$

$\Leftrightarrow (a-c)x \geq d-b$.

2) Các bạn có lời giải gọn là : **Hải Phòng :** *Lương Phú Khánh, Đinh Khang, Vũ Ngọc Linh, Nguyễn Mạnh Chiến, Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Trần Vĩnh Cửu*, 8A7, THCS Phùng Chí Kiên ; **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, 9C, THCS Phạm Huy Thông, Hưng Yên ; **Hải Dương :** *Nguyễn Duy Mạnh, Nguyễn Anh Tuấn*, THCS Lê Quý Đôn ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy – Phong Châu ; **Thừa Thiên – Huế:** *Phan Lê Anh Minh*, 9_1, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế ; **Đồng Tháp :** *Lữ Thiện Nhân*, 9A1, THPT Thị xã Sa Đéc ; **Quảng Trị :** *Dương Bảo Nhân*, THCS Đại Hòa ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 7/4, THCS Ngô Gia Tự.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/309. *Trên một đường thẳng lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AD, AE với đường tròn đường kính BC (D, E là các tiếp điểm). Kẻ DH ⊥ CE tại H. Gọi P là trung điểm của DH. Đường thẳng CP cắt đường tròn lần nữa tại Q. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm A, D, Q tiếp xúc với đường thẳng AC.*



Lời giải. Ta có $ID = IE$, mà $PD = PH$ nên $IP // EH$. Suy ra $\widehat{IPD} = 90^o$ và $\widehat{QPI} = \widehat{QCE} = \widehat{QDI}$. Do đó tứ giác $DQIP$ nội tiếp. Ta có $\widehat{DQI} = 90^o$. Từ đó $\widehat{QIA} = \widehat{QDI}$ (cùng phụ với $\widehat{QID}$). Nên $\widehat{QIA} = \widehat{QEA}$, tức là tứ giác $QIEA$ nội tiếp được. Khi đó $\widehat{QAC} = \widehat{QED} = \widehat{QDA}$. Vì $\widehat{QAC} = \widehat{QDA}$ nên AC là tiếp tuyến của đường tròn đi qua 3 điểm A, D, Q (đpcm).

Nhận xét. 1. Bạn *Trần Như Hải*, 9B, THCS Trần Phú, Hà Nam đã chuyển bài toán thành ABC là cát tuyến và điều phải chứng minh thành điều kiện cần và đủ : AC tiếp xúc với đường tròn $(A, D, Q) \Leftrightarrow P$ là trung điểm DH.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Thái Nguyên :** *Nguyễn Khoa Đức Anh*, 9A2, THCS Hạ Hòa, *Lê Tiến Thành*, 9A, THCS Giấy Phong Châu ; **Vĩnh Phúc :** *Lê Trường Sơn*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Hữu Kiên*, 8A, THCS Yên Lạc ; **Hưng Yên :** *Đỗ Việt Phương*, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; **Hải Phòng :** *Vũ Ngọc Linh*, 9A, THPT NK Trần Phú, *Đào Thị Huệ* : 9A4, THCS Thủy đường, Thủy Nguyên ; **Thanh Hóa :** *Lưu Xuân Thế*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Đậu Thế Linh*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh :** *Lê Minh Ngọc*, 9H, THCS TT. Kỳ Anh ; **Quảng Trị:** *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa ; **Thừa Thiên – Huế :** *Phan Lê Anh Minh*, 9_1, THCS Nguyễn Tri Phương ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Việt*, 9H, THCS Lê Quý Đôn.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/309. *Trên đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC lấy điểm M. Gọi K, H, J lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AB, BC, CA. Hãy xác định vị trí của điểm M để tổng MK + MH + MJ đạt*

a) giá trị lớn nhất

b) giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**).

Đặt $T = MK + MH + MJ$

Trường hợp 1. ΔABC đều thì T bằng độ dài đường cao ΔABC nên T không đổi.

Trường hợp 2 : ΔABC không đều. Nếu không kể đến sự sai khác về kí hiệu thì xảy ra ba trường hợp :

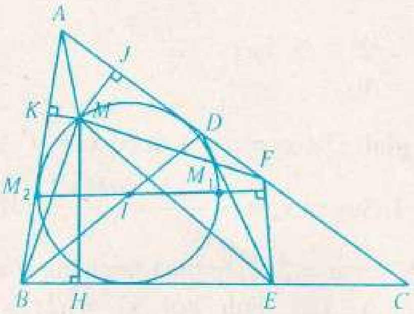
a) $AB < BC < CA$.

b) $AB = BC < CA$

c) $AB < BC = CA$.

Tuy nhiên lời giải bài toán trong ba trường hợp trên hoàn toàn tương tự. Vì vậy, để cho đơn giản, ta chỉ giải bài toán trong trường hợp a).

Lấy E, F thuộc BC, CA (xem hình) sao cho $BE = AF = BA$; BI cắt AC ở D. Tứ giác $ABED$ nhận BD làm trục đối xứng. Vì đường tròn (I) tiếp xúc với AD nên đường tròn (I) tiếp xúc với ED (1).



Mặt khác, $\widehat{ADB} = \widehat{DBC} + \widehat{DCB} > \widehat{DBC} = \widehat{DBA}$ suy ra : $AB > AD \Rightarrow AF > AD$ (2)

Từ (1), (2) suy ra đoạn EF không cắt đường tròn (I) (3)

Gọi M_1, M_2 là giao của đường tròn (I) với đường thẳng qua I, vuông góc với EF. Kí hiệu $d(M, EF)$ là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng EF. Theo (3), $\forall M \in (I)$, ta có :

$$\begin{cases} d(M,EF) \geq d(M_1,EF) & (*) \\ d(M,EF) \leq d(M_2,EF) & (**) \end{cases}$$

Đẳng thức xảy ra ở (*) $\Leftrightarrow M \equiv M_1$

Đẳng thức xảy ra ở (**) $\Leftrightarrow M \equiv M_2$.

Xét $AB.T/2 =$

$= (AB.MK + BE.MH + AF.MJ)/2$

$= S(MAB) + S(MBE) + S(MAF)$

$= S(ABC) - S(CEF) - S(MEF)$

$= S(ABC) - S(CEF) - \dfrac{EF}{2}.d(M,EF)$

Vì $S(ABC)$, $S(CEF)$, AB, EF không đổi nên :

$T_{\max} \Leftrightarrow M \equiv M_1$;

$T_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_2$

Nhận xét : 1) Các bạn : *Lữ Thiện Nhân*, 9A1, THCS Sa Đéc, **Đồng Tháp** ; *Nguyễn Việt Anh*, 9A, THCS Thạch Thất, **Hà Tây** ; *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa, **Quảng Trị** đã đưa ra các lời giải bằng phương pháp đại số nhưng hơi dài.

Bài toán này có thể giải rất ngắn gọn bằng những hiểu biết về tích vô hướng của hai véctơ. Tuy nhiên điều này vượt quá chương trình toán THCS.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Việt, Vũ Nhật Minh, Nguyễn Trung Kiên*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hải Dương :** *Hoàng Đình Phương*, 8/3, *Nguyễn Duy Mạnh*, 9/3, THCS Lê

Quý Đôn ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Thùy Linh*, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T8/309. *Hãy xác định tất cả các dãy số nguyên dương (x_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ thỏa mãn :* $x_1 = 1,\ x_2 > 1,\ x_{n+2} = \dfrac{1+x_{n+1}^4}{x_n}$ *với mọi* $n = 1, 2, 3, ...$

Lời giải. Đặt $x_2 = a > 1$ ta có $x_3 = a^4 + 1$. Suy ra $x + 1$. Suy ra $x_4 = \dfrac{x_3^4+1}{x_2} = \dfrac{aM+2}{a}$ $(M \in N^*)$.

$x_4 \in N^* \Rightarrow a = 2$. Tiếp theo ta chứng minh rằng dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^4+1}{x_n}$ (1) thì $x_n \in N^*$ với mọi n.

Chứng minh bằng quy nạp : với $n = 3$, $x_3 = 17 \in N^*$. Với $n > 3$: giả sử $x_1, ..., x_n \in N^*$. Ta chứng minh $x_{n+1} \in N^*$. Ta có : $x_n = \dfrac{x_{n-1}^4+1}{x_{n-2}}$

do đó $x_n^4 + 1 = \dfrac{(x_{n-1}^4+1)^4}{x_{n-2}^4} + 1 =$

$$= \frac{x_{n-1}^{16} + 4x_{n-1}^{12} + 6x_{n-1}^{8} + 4x_{n-1}^4 + x_{n-3}x_{n-1}}{x_{n-3}x_{n-1} - 1}$$

Vậy $(x_n^4+1)(x_{n-3}x_{n-1}-1)$ chia hết cho x_{n-1}

Nhưng x_{n-1} và $x_{n-3}x_{n-1} - 1$ là nguyên tố cùng nhau. Do đó

$$\left(x_n^4+1\right) \vdots\, x_{n-1} \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{x_n^4+1}{x_{n-1}} \in N^*.$$

Tóm lại chỉ có duy nhất một dãy thỏa mãn điều kiện đầu bài : đó là dãy cho bởi công thức (1).

Nhận xét. 1) Nhiều bạn có nhận xét đúng rằng bài toán có thể mở rộng như sau : Cho $k \in N^*$. Hãy xác định tất cả các dãy (x_n) $(n = 1, 2, ...)$ gồm các số nguyên dương sao cho $x_1 = 1$, $x_2 > 1$, $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^k+1}{x_n}$ với mọi $n = 1, 2, ...$

Câu trả lời là có duy nhất một dãy xác định bởi $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^k+1}{x_n}$. Chứng minh tương tự như trường hợp $k = 4$. Tuy nhiên với $k > 1$ thì dãy (x_n) tăng. Còn với $k = 1$ thì dãy (x_n) tuần hoàn 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, ...

2) Bài này được rất nhiều bạn tham gia giải. Đa số đều giải đúng, chỉ có 3 bài giải sai. Các bạn có lời giải tốt : **Thanh Hóa :** *Nguyễn Ngọc Hưng*, 11T2, Lam Sơn ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Vũ Lân*, 9A, THPT Trần Phú ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1 ; **Phú Thọ :** *Trần Hữu Hiếu*, 10, THPT Hùng Vương ; **Nghệ An :** *Chu Quang Huy*, 11A, THPT Quỳnh Lưu ; **Đà Nẵng :** *Đỗ Quốc Khánh*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Hải Dương :** *Phạm Văn Toàn*, 10, THPT Nguyễn Trãi ; **Phú Yên :** *Lê Hoài Vũ*, 11T2, THPT Lương Văn Chánh ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Tuyết Mai*, 10A, THPT Ngô Sĩ Liên ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Phương Linh*, 10A, THPT Trần Đại Nghĩa, *Lương Minh Thắng*, 10, PTNK, ĐHQG ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thị Thanh Tú*, 10A10, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Hà Nội :** *Nguyễn Ngọc Tuấn*, 10A, ĐHSP Hà Nội.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/309. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \log_2(1+3\cos x) = \log_3(\sin y)+2 \\ \log_2(1+3\sin y) = \log_3(\cos x)+2 \end{cases} \quad (1)$$

Lời giải : (của đa số các bạn).

Điều kiện có nghĩa : $\cos x > 0$, $\sin y > 0$. Từ hệ đã cho, ta có

$\log_2(1 + 3\cos x) + \log_3(\cos x) =$
$= \log_2(1 + 3\sin y) + \log_3(\sin y)$ (2)

Xét hàm số $f(t) = \log_2(1 + 3t) + \log_3 t$, với $t>0$.

Ta có $f'(t) = \dfrac{3}{(1+3t)\ln 2} + \dfrac{1}{t\ln 3} > 0, \forall t > 0.$

Do vậy, $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$. Từ (2) có $f(\cos x) = f(\sin y)$. Do $f(t)$ đồng biến suy ra $\sin y = \cos x$.

Thay vào hệ PT (1) ta được

$\log_2(1 + 3\cos x) - \log_3(\cos x) = 2$ (3)

Xét hàm số $g(v) = \log_2(1 + 3v) - \log_3 v$, với $v = \cos x \in (0, 1]$.

Ta có $g'(v) = \dfrac{3}{(1+3v)\ln 2} - \dfrac{1}{v\ln 3}$ và $g'(v) = 0$ khi $v = v_o = \dfrac{\ln 2}{3(\ln 3 - \ln 2)} \in (0, 1)$

Lập bảng biến thiên, ta thấy $g(v)$ nghịch biến từ $+\infty$ đến $g(v_o)$ trên $(0, v_o]$ và đồng biến từ $g(v_o)$ đến 2 trên $[v_o, 1]$.

Từ đây ta nhận được 2 nghiệm của (3) theo $\cos x$ là $\cos x = 1$ và $\cos x = \dfrac{1}{3}$. Vậy hệ đã cho tương đương với 2 hệ

$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin y = 1 \end{cases} \ (4) \quad \text{và} \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{3} \\ \sin y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \ (5)$$

Giải các hệ (4) và (5) ta được nghiệm

$$\begin{cases} x=2k\pi \\ y=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ k,n\in Z \end{cases}$$

và $$\begin{cases} x=\pm\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi \\ y=(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+n\pi,\ k,n\in Z \end{cases}$$

Nhận xét. Có đến hơn 200 bài giải gửi đến tòa soạn có lời giải đúng và hầu hết đều được giải theo cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/309. *Cho số nguyên dương n, tìm số $t = t(n)$ nhỏ nhất sao cho với mọi số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ luôn có*

$$\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2 \le t\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$$

Lời giải. (của các bạn *Hoàng Trọng Bắc*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, **Thanh Hóa**, *Lê Hùng Việt Bảo*, 11A, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**; *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, PTCTT, ĐHSP **Hà Nội**)

Đặt $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$, suy ra $\sin n\alpha = \sin(n+1)\alpha$, $c_i = \sin i\alpha - \sin(i-1)\alpha$, $i = 1, 2, ..., n$, $c_i > 0$ do $0 \le (i-1)\alpha < i\alpha < \frac{\pi}{2}$, $S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i = \sin k\alpha$, $k = 1, 2, ..., n$.

Với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, áp dụng BĐT Côsi – Bu-nhi-a-côp-xki :

$$(x_1+x_2+...+x_k)^2 \le$$
$$\le (c_1+c_2+...+c_k)\left(\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+...+\frac{x_k^2}{c_k}\right)$$

Do đó :

$$\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2 \le \sum_{k=1}^{n}S_k\left(\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+...+\frac{x_k^2}{c_k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k+S_{k+1}+...+S_n}{c_k}.x_k^2$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{S_1+S_2+...+S_n}{c_1}=\frac{S_2+S_3+...+S_n}{c_2}=...$$
$$=\frac{S_n}{c_n}=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Thật vậy $\frac{S_k+S_{k+1}+...+S_n}{c_k}=$

$$=\frac{\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha+...+\sin n\alpha}{\sin k\alpha-\sin(k-1)\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}(\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha+...+\sin n\alpha)}{2\sin\frac{\alpha}{2}.2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}$$

$$=\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}+$$
$$+\frac{-\cos\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha+...+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}$$

$$=\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha}=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

(vì $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha=0$)

Vậy $\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2$

$$\le\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{c_1}=\frac{x_2}{c_2}=...=\frac{x_n}{c_n}$, ví dụ $x_i=c_i$, $\forall i$, $1 \le i \le n$. Do đẳng thức có xảy ra nên $t = t(n) = \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}$.

Nhận xét. Đây là bài toán thuộc "Phương pháp cân bằng hệ số", một phương pháp quan trọng trong các bài toán bất đẳng thức. Tòa soạn nhận được lời giải của 18 bạn, nhưng chỉ có ba bạn trên giải đúng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/309. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì có*

$$\sin A\cos B + \sin B\cos C + \sin C\cos A \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Nhận xét. Với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Thật vậy, ta có $f'(x) = \cos x + \cos 2x = (\cos x + 1)(2\cos x - 1)$

$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \cos x \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$, suy ra $f(x) \le f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, đặt $P = \sin A\cos B + \sin B\cos C + \sin C.\cos A$. Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả sử rằng $A = \min\{A, B, C\}$. Xảy ra các khả năng :

1) $A \le B \le C$. Khi đó $(\sin A - \sin B)(\cos B - \cos C) \le 0$ và $0 < B < \frac{\pi}{2}$. Vậy $P \le \sin A\cos C + \sin C\cos A + \sin B\cos B = \sin B + \frac{1}{2}\sin 2B \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (theo nhận xét trên).

2) $A \le C \le B$. Khi đó $(\sin B - \sin C)(\cos C - \cos A) \le 0$ và $0 < C < \frac{\pi}{2}$. Suy ra $P \le \sin A\cos B + \sin B\cos A + \sin C\cos C = \sin C + \frac{1}{2}\sin 2C \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Tóm lại trong cả hai khả năng trên ta đều có $P \le \frac{3\sqrt{3}}{4}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt hơn cả :

Vĩnh Phúc : *Hà Đình Thiệu*, 10A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT ch. Hùng Vương ; **Bắc Ninh :** *Phạm Văn Dương, Nguyễn Văn Tuấn*, 10T, *Trương Đình Trường*, 12T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hà Nội :** *Vũ Quang Thanh, Lê Hùng Việt Bảo*, 11A, ĐHKHTN – ĐHQG, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, khối PTCTT– ĐHSP ; **Hải Phòng :** *Đào Thị Huệ*, 9A4, THCS Thủy Đường, Thủy Nguyên ; **Hà Tây :** *Vũ Quang Chung*, 11B1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa ; **Thanh Hóa :** *Phạm Văn Việt*, 11B, THPT Hà Trung, *Bùi Thị Oanh*, 10T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Hoàng Anh Hào, Bùi Đăng Lương*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Tp. Vinh ; **Đà Nẵng :** *Thái Thanh Hải*, 10A1, *Lê Đăng Việt Phương*, 11A1, *Bùi Thiên Kim*, 12A1, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT ch. Lương Văn Chánh ; **Bình Định :** *Đào Thanh Sự*, 10T, *Nguyễn Minh Phương*, 11T, THPT ch. Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn ; **Đồng Tháp :** *Lê Quang Trường*, 11T, THPT Cao Lãnh ; **Đồng Nai :** *Lê Phương*, 12T, THPT ch. Lương Thế Vinh ; **Cần Thơ :** *Vũ Hoàng Hưng*, 10A1, *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ.

HỒ QUANG VINH

Bài T12/309. *Trong không gian cho n điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \ge 2$) và n điểm $K_1, K_2, ..., K_n$ sao cho K_i không trùng A_i với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng tồn tại n hình cầu (bán kính dương) S_i ($i = 1, 2, ..., n$) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện :*

1) Các hình cầu S_i đôi một không giao nhau

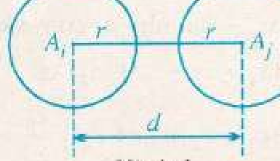
2) Tích $\mathcal{P}_{A_i/S_i}.\mathcal{P}_{K_i/S_i}$ là số âm với mọi $i = 1, 2, ..., n$ trong đó $\mathcal{P}$ chỉ phương tích của điểm đối với hình cầu.

Lời giải. Gọi d là khoảng cách nhỏ nhất trong số các khoảng cách A_iA_j giữa các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ phân biệt ($i \ne j$). Dĩ nhiên $d > 0$. Ta chọn một số r, sao cho : $0 < r < \frac{d}{2}$. Thế thì n hình cầu tâm A_i có cùng bán kính r, đôi một không có điểm chung.

Lại vì A_i và K_i không trùng nhau với mọi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, ta đặt : $r_i = \min\{r, A_iK_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$ rồi chọn ρ_i sao cho :

$0 < \rho_i < r_i$ ($i = 1, 2, ..., n$)

Như vậy các hình cầu S_i (A_i, ρ_i) có tâm ở A_i và bán kính ρ_i, đôi một cũng không có điểm chung (và do đó, thỏa mãn điều kiện 1).

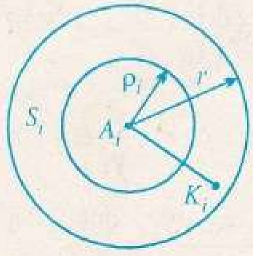


Hình 1

(h. 1). Vì $A_i \in S_i$ và $K_i \notin S_i$ (do $\rho_i < r_i \le A_iK_i$) với mọi $i = 1, 2, ..., n$, nên :

$\mathcal{P}_{A_i/S_i} = -\rho_i^2 < 0$ và

$\mathcal{P}_{K_i/S_i} = A_iK_i^2 - \rho_i^2 > 0$



Hình 2

$(\forall i)$ và từ đó ta được : $\mathscr{P}A_i / S_i . \mathscr{P}K_i / S_i < 0$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., n\}$ và điều kiện 2) được thỏa mãn (h.2)

Nhận xét. 1) Để thuận tiện hơn (và chắc chắn hơn), một số bạn còn sử dụng đến khoảng cách nhỏ nhất $a = \min\{A_iK_i, i = 1, 2, ..., n\}$. Sau đó, các hình cầu S_i được dựng là những hình cầu (A_i, r) có tâm ở A_i và đều có cùng bán kính r, xác định bởi : $0 < r < \min\left\{\frac{d}{2}, a\right\}$

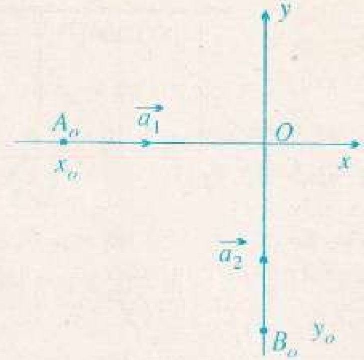
2) Một số bạn không đọc kĩ đề bài, lại hiểu rằng $K_i \neq A_j$ với mọi i và j $(1 \le i, j \le n)$. Tuy nhiên, gọi $d = \min\{A_iA_j, A_iK_h\}$ (với mọi $i, j, h \in \{1, 2, ..., n\}$ rồi xét các hình cầu $S_i = (A_i, r)$ có tâm ở A_i và bán kính $r < \frac{d}{2}$ thì kết quả vẫn đúng.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt, tương đối gọn gàng: **Hà Nội :** *Lê Hùng Việt Bảo*, 11A toán, ĐHKHTN, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, PTCT–T, ĐHSP; **Bắc Giang :** *Nguyễn Tuyết Mai*, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên; **Hòa Bình :** *Lưu Như Hòa*, 10 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT ch. Hùng Vương ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Trọng Bắc*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, *Trần Văn Thiện*, 11C5, THPT Như Thanh ; **Nghệ An :** *Nguyễn Đức Minh*, 10A1, *Lê Đăng Hiếu*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Văn Việt*, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn ; **Đà Nẵng :** *Trương Minh Tiến*, 10A1, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT Lương Văn Chánh, Tx. Tuy Hòa ; **Đồng Nai** *Lê Phương*, 12 Toán 1, THPT ch. Lương Thế Vinh, Tx. Biên Hòa ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Lê Đỗ Tuấn Khanh*, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, Q. 5 ; **Tây Ninh :** *Phan Thị Cẩm Huyền*, 8A1, THCS Trần Bình Trọng, Hòa Thành, *Phạm Hữu Vàng*, 11 Toán, THPT ch. Hoàng Lê Kha, Tx. Tây Ninh ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/309. *Một chất điểm bắt đầu chuyển động từ điểm A_o $(x_o, 0)$ theo chiều dương của trục Ox với gia tốc không đổi $\overrightarrow{a_1}$. Cùng một lúc, chất điểm thứ hai từ điểm B_o $(y_o, 0)$ cũng bắt đầu chuyển động theo chiều dương của trục Oy với gia tốc không đổi $\overrightarrow{a_2}$. Hỏi sau bao lâu hai chất điểm lại gần nhau nhất và tính khoảng cách giữa chúng lúc đó. Với điều kiện nào của a_1, a_2, x_o, y_o thì chúng có thể gặp nhau.*

Lời giải. Phương trình chuyển động của các chất điểm 1 và 2 tương ứng là: $x = \frac{1}{2}a_1t^2 + x_o$ (1), và $y = \frac{1}{2}a_2t^2 + y_o$ (2). Khoảng cách d giữa hai chất điểm ở thời điểm t :



$d^2 = x^2 + y^2$

$= \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2)z^2 + a_1x_o + a_2y_o)z + x_o^2 + y_o^2$, với $z = t^2$. Suy ra : $d_{\min}^2 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{(a_1y_o - a_2x_o)^2}{a_1^2 + a_2^2}$

hay $d_{\min} = \frac{|a_1y_o - a_2x_o|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ (3)

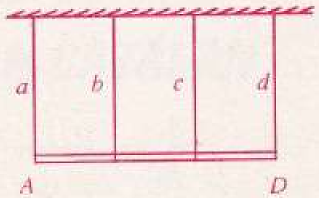
Từ đó $z = t^2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2(a_1x_o + a_2y_o)}{a_1^2 + a_2^2}}$ (4).

Từ (4) ta thấy để bài toán có nghiệm, phải có $\frac{x_o}{a_2} + \frac{y_o}{a_1} \le 0$. Muốn cho 2 chất điểm gặp nhau : $d_{\min} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{x_o}{y_o}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng : **Bắc Ninh:** *Nguyễn Việt Dũng*, 10A1, THPT Tiên Du I ; **Thanh Hóa:** *Vũ Nguyên Thắng*, 10T, THPT Lam Sơn ; **Bình Định :** *Đinh Thành Vinh*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Tuấn Anh*, 12 Lí, THPT ch. Hoàng Văn Thụ ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Hồng Quyên*, 11A3, THPT Lục Nam ; **Vĩnh Phúc :** *Hoàng Thị Hồng Hạnh*, *Nguyễn Chí Đông*, 10A3, *Trần Đức Phú*, *Nguyễn Tiến Lập*, 11A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Hải Dương :** *Hoàng Văn Huynh*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, *Mạc Trường Giang*, 11B5, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Đắc Lắc :** *Lưu Xuân Bách*, 11 Lí, THPT Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, *Nguyễn Chí Linh*, 10A1, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng ; **Quảng Ngãi :** *Ngô An Hòa Kỳ*, *Trần Anh Tuấn*, 11B1, THPT số II, Mộ Đức ; **Phú Thọ :** *Đỗ Trung Kiên*, 10 Lí, THPT ch. Hùng Vương ; *Nguyễn Nhật Minh*, 11E, THPT Đoan Hùng, **Phú Thọ** ; **Nghệ An :** *Hồ Xuân Tú*, 10H, THPT Huỳnh Thúc Kháng, *Thái Bá Sơn*, *Phạm Trọng Trường*, K30, A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh.

MAI ANH

Bài L2/309. *Một thanh đồng chất, tiết diện đều có khối lượng m được treo bằng 4 sợi dây đàn hồi giống nhau, song song với nhau và cách*



đều nhau (hình vẽ). Người ta bỏ sợi dây a đi. Để giảm sự nguy hiểm có người nói phải bỏ bớt sợi dây d, điều đó có đúng không ? Tìm lực căng của các sợi dây b, c, d sau khi bỏ sợi dây a, cho biết các dây đàn hồi tuân theo định luật Huc.

Lời giải. • Nếu bỏ dây d, ta có

$$T'_b = T'_c = \frac{mg}{2} \qquad (1)$$

• Nếu không bỏ dây d ta có :

$T_b + T_c + T_d = mg$ (2), và $mg\frac{l}{2} = T_b\frac{2l}{3} + T_c\frac{l}{3}$ (áp dụng quy tắc momen với trục quay qua D; l là chiều dài của thanh). Suy ra : $2T_b + T_c = \frac{3}{2}mg$ (3). Từ (2) và (3) tìm được : $T_b = \frac{mg}{2} + T_d > \frac{mg}{2}$. Như vậy dây b dễ đứt hơn khi không bỏ dây d. Tức là nên bỏ dây d.

• Giả sử độ giãn các dây b, c, d tương ứng là Δl_b, Δl_c, Δl_d. Từ tính chất đường trung bình hình thang ta có : $\Delta l_b + \Delta l_d = 2\Delta l_c$ hay $T_b + T_d = 2T_c$ (4). Từ (2), (3) và (4) tìm được : $T_b = \frac{7}{12}mg$; $T_c = \frac{mg}{3}$; $T_d = \frac{mg}{12}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Quảng Ngãi : *Nguyễn Thanh Lân*, 11T2, THPT Lê Khiết ; **Nam Định :** *Nguyễn Đặng Phương Đình*, 11E, THPT Giao Thủy A ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Nhật Minh*, 11E, THPT Đoan Hùng ; **Hải Phòng :** *Bùi Phương Hoa*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú ; **Bắc Ninh :** *Nghiêm Văn Thơ*, 11A1, THPT Yên Phong I ; **Hà Tây :** *Đào Xuân Dũng*, 11 Lí 1, THPT Nguyễn Huệ ; **Hà Nội :** *Trịnh Thái Duy*, 10 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Thanh Hóa :** *Lê Minh Tú*, 10F, THPT Lam Sơn, *Trần Ngọc Hưng*, 11A10, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân ; **Bình Định :** *Lê Văn Thông*, *Đinh Thành Vinh*, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Nghệ An :** *Nguyễn Mạnh Thành*, *Võ Hoàng Biên*, 10A3, K31, chuyên Lí, THPT ch. Phan Bội Châu, Vinh ; **Vĩnh Phúc :** *Khổng Trọng Nghĩa*, *Nguyễn Thị Phương Duy*, *Hoàng Thị Hồng Hạnh*, 10A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Tiền Giang :** *Nguyễn Vĩnh Phúc*, 10A18, THPT Chợ Gạo ; *Trần Thị Mỹ Phương*, 10 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho.

MAI ANH

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 63

Problem. A mathematical teacher was asked about the ages of the members of his family. He replied, "All our ages are perfect square integers. My age is the sum of the ages of my wife, son and daughter. My father's age is the sum of my age and the ages of my wife and daughter. Moreover, my father's age is a prime number." Find out the ages of these people.

Solution. Consider the sequence of the perfect square integers 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64. Notice that 65 is the highest retiring age. The age of the man was one of these numbers, which was the sum of three smaller numbers in the list. We can easily check that there is only one possibility, namely

$$49 = 36 + 9 + 4.$$

Hence the man was 49 and his wife 36 years old. If the daughter's age were 9, the grandfather's age would be 49 + 36 + 9 = 94, not a prime. So the daughter's age must be 4 and the grandfather's age was 49 + 36 + 4 = 89 which is a prime number, leaving 9 as the son's age.

Từ mới:

mathematical	= toán học (tính từ)
ask about	= hỏi về (động từ)
age	= tuổi
member	= thành viên (tính từ)
family	= gia đình (thường chỉ tính bố mẹ và con cái)
reply	= trả lời (động từ)
perfect square integer	= số chính phương
prime	= nguyên tố (tính từ), số nguyên tố (danh từ)
find out	= tìm ra, khám phá (động từ)
people	= người (số nhiều)
consider	= xem xét (động từ)
retiring	= về hưu (tính từ)
list	= danh sách, bảng kê khai
possibility	= khả năng
grandfather	= ông nội, ông ngoại

NGÔ VIỆT TRUNG

Giải đáp

VỀ LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN LUYỆN THI

Các bạn đều nhận thấy $A = 2\sqrt{3} > r = \sqrt{3}$ nên điểm A nằm ngoài đường tròn (C). Vậy phải có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài. Lời giải tìm ra một tiếp tuyến và chỉ xét đến trường hợp tiếp tuyến có phương không song song với trục Oy mà không xét trường hợp tiếp tuyến có phương song song với trục đó. Với bài toán này ta thấy đường thẳng có PT $x = 3 - \sqrt{3}$ là tiếp tuyến thứ hai mà lời giải còn thiếu (có thể thử lại bằng điều kiện tiếp xúc).

Tòa soạn nhận được rất nhiều bài bình luận đối với lời giải bài toán này. Sau đây là các bạn có đáp án tốt hơn cả : **Vĩnh Phúc :** *Trịnh Hữu Phước*, 10A10, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Hải Phòng :** *Đào Thị Kim Ngân*, 12 Văn, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THPT Chu Văn An, Thanh Hà ; **Thanh Hóa :** *Trần Văn Giáp*, 11B2, THPT Hoằng Hóa 4, Hoằng Hóa ; **Vĩnh Phúc :**, *Đào Thị Phương Thảo*, K26C Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội 2, Mê Linh.

NGỌC HIỂN

BÀI TOÁN HỌ ĐƯỜNG THẲNG CẮT ĐOẠN THẲNG

Bài toán : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(-1, 3)$ và $B(1, -5)$. Tìm m để đường thẳng (D_m) : $mx + y + 1 = 0$ cắt đoạn AB.

Lời giải. Đặt $f(x, y) = mx + y + 1$. Ta có $f(x_A, y_A).f(x_B, y_B) \le 0 \Leftrightarrow -(m-4)^2 \le 0$, đúng với mọi m. Vậy (D_m) luôn cắt đoạn AB.

Kết quả trên đã chính xác chưa ?

THÁI TĂNG SỸ
(GV trường THPT Phan Bội Châu, Phan Thiết, Bình Thuận)

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 314 (8/2003)

- Khai thác một bất đẳng thức hình học.
- Bài toán xác định một đa thức.
- Bàn luận về cách giải đề toán thi vào Đại học Khối A năm 2003 (tiếp)
- Đề toán thi tuyển sinh vào trường THPT NK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh 2003.
- Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia năm học 2002-2003.
- Toán học và nạn kẹt xe.

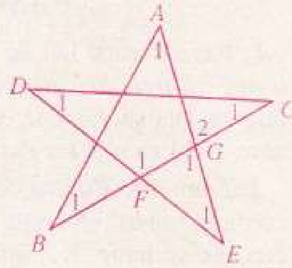
Mời các bạn đặt mua THTT tại các cơ sở bưu điện.

THTT

Giải đáp :

LÀM TOÁN VỚI NGÔI SAO NĂM CÁNH

Kí hiệu các góc như ở hình vẽ. Trong ΔCDF có :



$\widehat{C_1} + \widehat{D_1} + \widehat{F_1} = 180^o$ (1)

Mặt khác :

$\widehat{F_1} = \widehat{E_1} + \widehat{G_1}$ (2)

$\widehat{G_1} = \widehat{G_2} = \widehat{A_1} + \widehat{B_1}$ (3)

Từ (1), (2), (3)

suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} + \widehat{D_1} + \widehat{E_1} = 180^o$.

Bài toán này được 500 bạn gửi lời giải. Trong đó có rất nhiều bạn THCS tham gia và đều giải đúng. Hướng giải chính của các bạn là sử dụng kết quả *Góc ngoài của một tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó* và cho lời giải khá ngắn gọn. Các bạn có nhiều cách giải hơn cả là : *Nguyễn Thị Lan Hương*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Nghệ An** (20 cách giải) ; *Phùng Thị Hoàng Nga*, 10A0, THPT ch. Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc** (12 cách giải) ; *Trịnh Thị Giang*, 8A, THCS Nguyễn Quốc Ân, Tx. Hưng Yên, **Hưng Yên** (10 cách giải), *Phạm Thanh Hòa*, 11C10, THPT Sông Ray, Xuân Lộc, **Đồng Nai** ; *Lê Phương Dung*, 10K1, THPT Lam Sơn, *Lê Thị Tương*, 9C, THCS Hoằng Quý, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa** ; *Bành Trọng Tá*, Lương Thọ II, Hoài Phú, Hoài Nhơn, **Bình Định**.

HỒNG QUANG

TỔNG SỐ BẰNG NHAU

Toàn có 16 quân bài trên đó có ghi các biểu thức bằng chữ như sau : $p, s, r, q, p+s, p+q, p+r, 2p, p+2s, p+r+s, p+2q+r, p+q+2r, p+q+s, 2p+s, p+q+r+s, 2p+q+r$.

Toàn muốn xếp chúng vào bàn cờ 4×4 ô, mỗi quân bài một ô, sao cho tổng các hàng ngang, dọc và chéo đều bằng nhau. Bạn hãy giúp Toàn nhé.

THÀNH NAM

Giải đáp :

PASCAL

1. *Pascal* trước hết đó là *tên nhà toán học, vật lí học và triết học người Pháp*. Tên đầy đủ của ông là Blaise *Pascal*. Ông sinh tại Clermond năm 1623 và mất tại Paris năm 1662.

2. *Tam giác Pascal* cho ta khai triển nhị thức có dạng $(a+b)^n$ nhờ xác định nhanh chóng hệ số của các số hạng. Kết quả này được *Pascal* công bố trong công trình *Nghiên cứu về tam giác số học* (1655).

3. *Máy tính Pascal* là máy tính cơ học do Pascal sáng chế ra. Mỗi trục có bánh xe gắn với mỗi chữ số từ 0 đến 9. Máy có thể thực hiện được 4 phép tính cộng, trừ, nhân, chia (1642-1644).

4. *Định lí Pascal* : Các cạnh đối của một hình 6 cạnh nội tiếp trong một conic cắt nhau tại 3 điểm thẳng hàng. Pascal nêu trong công trình *Nghiên cứu về cônic* (1640) (xem bìa 1).

5. *Ốc Pascal*. Ốc Pascal là một đường cong có phương trình $\rho = a + b\cos\theta$ trong đó a và b là những số thực khác 0. Đường cong này được cha của Pascal nghiên cứu một cách có hệ thống (xem bìa 1).

6. *Định luật Pascal :* Định luật của ông về áp suất khí quyển.

7. *Ngôn ngữ lập trình Pascal :* Trong tin học ngày nay có một ngôn ngữ lập trình mang tên ông có rất nhiều ưu điểm và được sử dụng rộng rãi.

8. Để đánh giá cao công lao của ông trong Vật lí có *1 đơn vị của áp suất* mang tên ông. $1Pa = 1N/m^2$.

9. Pascal còn là *tên của một ngọn núi lửa* trên Mặt trăng.

Có lẽ xoay quanh cái tên Pascal còn nhiều điều thú vị nữa.

Nhận xét. 1. Được nhận phần thưởng của tòa soạn là các bạn : *Trần Thanh Vân*, 10K3, THPT Mỹ Đức A, **Hà Tây**, *Nguyễn Văn Thư*, 11/1, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, **Quảng Nam**, *Ngô Tuấn Anh*, 9A1, THPT DL Lương Thế Vinh, Khương Đình, Thanh Xuân, **Hà Nội**, *Phạm Đình Cường*, 6A, THPT Giấy Phong Châu, **Phú Thọ**.

2. Nhiều bạn chỉ hiểu đó là tên nhà toán học Pascal và chỉ nói về ông.

VŨ KIM THỦY

CÁC ĐƠN VỊ ĐO LƯỜNG THÔNG DỤNG

Đại lượng	Đơn vị		Giải thích
	Tên	Kí hiệu	
Độ dài	mét	m	*Mét* là quãng đường ánh sáng đi được trong chân không trong khoảng thời gian 1/299 792 458 giây.
Góc phẳng	radian	rad	*Radian* là góc phẳng giữa hai bán kính của một vòng tròn cắt trên vòng tròn một cung dài bằng bán kính. $1rad = 1m/1m = 1$
	độ	^{o}	$1^o = (\pi/180)$ rad
	phút	'	$1' = (1/60)^o = (\pi/10800)$ rad
	giây	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648000)$rad
Góc khối	steradian	sr	*Steradian* là góc khối của một hình nón có đỉnh ở tâm hình cầu, cắt trên hình cầu một diện tích bằng diện tích hình vuông có cạnh dài bằng bán kính hình cầu. $1sr = 1m^2/1m^2 = 1$
Diện tích	mét vuông	m^2	*Mét vuông* là diện tích một hình vuông có cạnh 1 mét. $1m^2 = 1m \times 1m$.
	hecta	ha	$1ha = 0{,}01km^2 = 10^4m^2$

Thể tích (dung tích)	mét khối lít	m^3 l	*Mét khối* là thể tích một khối lập phương có cạnh 1 mét. $1m^3 = 1m \times 1m \times 1m$ *Lít* là dung tích bằng một decimét khối $1l = 1dm^3 = 10^{-3}m^{-3}$
Thời gian	giây phút giờ ngày	s min h d	*Giây* là khoảng thời gian bằng 9192631770 chu kì bức xạ ứng với sự chuyển dịch giữa 2 mức siêu tinh tế ở trạng thái cơ bản của nguyên tử xesi 133. 1min = 60 s 1h = 60min = 3600s 1d = 24h = 86 400s
Tần số	hec	Hz	*Héc* là tần số của một quá trình tuần hoàn có chu kì 1 giây. $1Hz = 1s^{-1}$
Vận tốc	mét trên giây kilômét trên giờ	m/s km/h	*Mét trên giây* là vận tốc của một vật chuyển động đều đi được đoạn đường 1 mét trong thời gian 1 giây. $1m/s = 1m.s^{-1}$ *Kilômét trên giờ* là vận tốc của một vật chuyển động đều đi được đoạn được 1000 mét trong thời gian một giờ. 1km/h = (1/3,6)m/s = 0,277778 m/s
Vận tốc góc	radian trên giây	rad/s	*Radian trên giây* là vận tốc góc của một vật quay đều quanh một trục cố định một góc 1radian trong thời gian 1 giây. $1rad/s = 1s^{-1}$
Gia tốc góc	radian trên giây bình phương	rad/s^2	*Radian trên giây bình phương* là gia tốc góc của một vật có vận tốc góc thay đổi đều 1radian trên giây trong thời gian 1 giây. $1rad/s^2 = 1s^{-2}$
Gia tốc	mét trên giây bình phương	m/s^2	*Mét trên giây bình phương* là gia tốc của một vật có vận tốc thay đổi đều 1 mét trên giây trong thời gian 1 giây. $1m/s^2 = 1m.s^{-2}$

Các bạn *Hà Tuấn Huy*, 10A3, *Lê Quang Trung*, 10A10, THPT chuyên **Vĩnh Phúc** ; *Lưu Đức Minh*, 10K2, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương** ; *Trịnh Thị Hà*, 10A10, THPT Thái Phiên, Q. Ngô Quyền, **Hải Phòng** được nhận quà của CLB.

BÍNH NAM HÀ

LỄ TRAO QUÀ CỦA NXB GIÁO DỤC CHO HỌC SINH NGHÈO, VƯỢT KHÓ

Chiều ngày 27.6.2003 tại Hội trường chính NXB Giáo dục đã diễn ra Lễ trao quà của NXBGD cho học sinh nghèo, vượt khó ở Hà Nội đạt thành tích tốt trong học tập. Đến dự buổi lễ có các đại biểu : Phó ban Tuyên giáo Thành ủy Hà Nội ; Phó Chủ tịch thường trực Hội đồng thi đua khen thưởng Tp. Hà Nội ; Phó chủ nhiệm Ủy ban dân số, gia đình và trẻ em, Giám đốc Quỹ bảo trợ trẻ em Tp. Hà Nội ; Các báo, đài Trung ương và Hà Nội ; Phó Giám đốc Tổng biên tập NXBGD Vũ Dương Thụy ; Phó Giám đốc NXBGD Nguyễn Đăng Quang và các đại diện BCH Công đoàn, Đoàn TNCS Hồ Chí Minh NXBGD.

Sau lời phát biểu của PGĐ Tổng biên tập Vũ Dương Thuy đã diễn ra lễ trao quà cho 200 em học sinh nghèo vượt khó đạt thành tích tốt trong học tập bậc tiểu học và trung học cơ sở thuộc các quận của Tp. Hà Nội. Mỗi suất quà trị giá 100.000 đ kèm theo một bộ sách giáo khoa cho năm học mới. Các em học sinh đại diện cho các quận đã cảm ơn NXBGD và hứa sẽ cố gắng phấn đấu hơn nữa trong học tập và tu dưỡng đạo đức.

Đây là một hoạt động xã hội thường niên của NXBGD nhằm góp phần vào sự nghiệp giáo dục của đất nước.

PV

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40
Số 313 (7-2003)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Phạm Thị Việt Thái – Sử dụng phương pháp tham biến để tìm cực trị một biểu thức

2 *Tạ Duy Phượng, Nguyễn Hữu Thảo* – Thi khu vực giải toán trên máy tính Casio lần thứ ba – 2003 (tiếp theo)

5 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Nguyễn Trọng Tuấn – Một dãy số thú vị

7 **Giới thiệu về Toán học cao cấp – Instroduction to Higher Mathematics**
Phan Đức Thành – Mở rộng khái niệm đạo hàm

8 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation.**
Nguyễn Anh Dũng, Đặng Thanh Hải – Bàn luận về cách giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán khối A năm 2003

10 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/313, ..., T12/313, L1, L2/313

12 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 309

20 **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems**
Bài số 63

21 **Giải trí toán học – Math Recreation**

21 **Sai lầm ở đâu – Where's the Mistake ?**

22 **Câu lạc bộ – Math Club**

Bìa 2 : Phỏng đoán Catalan đã thành định lí

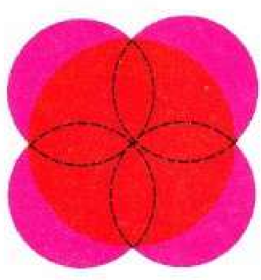
Bìa 3 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics
Hình hoa 2 màu

Bìa 4 : Cuộc thi Ai thông minh nhanh trí.

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

HÌNH HOA HAI MÀU

Một họa sĩ thiết kế mĩ thuật muốn in hình hoa hai màu bằng cách in màu vàng một hình tròn trung tâm đường kính a = 100mm và in màu đỏ một số hình tròn nhỏ bằng nhau sao cho chúng phủ kín hình tròn trung tâm, những phần không giao nhau tạo thành các cánh hoa. Các cánh hoa có thể chờm lên nhau. Lúc đó hình tròn trung tâm có màu da cam.



Dành cho bạn đọc

1) 4 hình tròn nhỏ phải có đường kính nhỏ nhất là bao nhiêu cm (chẳng hạn như hình 1) để chúng phủ kín được hình tròn trung tâm ?

2) Bạn có thể sắp xếp 5 hình tròn nhỏ đều có đường kính b = 61cm để chúng phủ kín hình tròn trung tâm ?

GIẢI ĐÁP : SÀNG NGUYÊN TỐ TRÊN BẢNG SỐ BẬC THANG

Trong bảng số bậc thang kiểu 2 (h. 2) (xem THTT số 309 tháng 3/2003) ta kí hiệu $S(m, n)$ là số của ô ở cột thứ m (từ trái sang) và hàng thứ n (từ trên xuống). Kí hiệu số a, b, c trong bảng như hình 3, ta có các hệ thức sau

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15			
4	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
5	17	18	19	20	21	22	23	24	25	20	20			
6	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36			
7	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
8	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63

$A(x)$ $B(x)$

Hình 2

$a = S(m, n) = (n-1)^2 + m$ (1)

$b = S(m-1, n+1) = n^2 + m - 1$

$= S(m, n) + 2(n-1)$ (2)

$c = S(m+1, n+1) = n^2 + m + 1 = S(m, n) + 2n$ (3)

Để tìm công thức tính các dãy số $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$ với mỗi i ta đặt $P_i(0) = S(i, 1) = S(i-1, 2) = P_i(1)$, $P_i(3) = S(i-2, 3)$, ...

Từ (1), (2) có $P_i(x) = S(i-x, x+1) = S(i-x+1, x) + 2(x-1) = P_i(x-1) + 2(x-1)$. Tiếp tục như thế được $P_i(x) = P_i(1) + 2[(x-1) + (x-2) + ... + 1]$ hay $P_i(x) = S(i-1, 2) + x(x-1)$.

	a	
b		c

Hình 3

Dãy số $B(x)$ ứng với $P_{11}(1) = S(10, 2) = 11$ nên $B(x) = x^2-x+11$ và lấy 10 giá trị *nguyên tố* tương ứng với các giá trị nguyên liên tiếp $x = 0, 1, 2, ..., 9$. Dãy số $C(x)$ ứng với $P_{17}(1) = S(16, 2) = 17$ nên $C(x) = x^2-x+17$ và lấy 16 giá trị *nguyên tố* liên tiếp tương ứng với $x = 0, 1, 2, ..., 15$. Tương tự, dãy số $D(x) = x^2-x+41$ lấy 40 giá trị *nguyên tố* ứng với $x = 0, 1, 2, ..., 39$. (Ơ–le tìm ra đa thức này). Dãy số $E(x) = x^2-x+33$ lấy 17 giá trị *hợp số* ứng với $x = 9, 10, 11, ..., 25$. Quan sát bảng ta cũng tìm được dãy số $F(x) = x^2 - x + 63$ lấy 29 giá trị *hợp số* ứng với $x = 24, 25, ..., 52$.

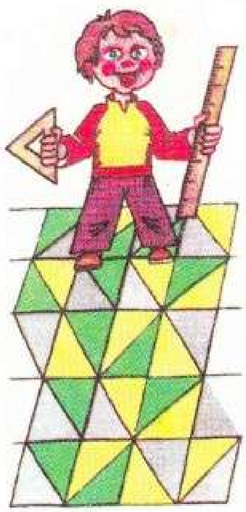
Để tìm công thức tính dãy số $A(x)$ với mỗi j đặt $Q_j(0) = S(1, j)$, $Q_j(1) = S(2, j+1)$, ... Từ (1), (3) có $Q_j(x) = S(x+1, j+x) = S(x, j+x-1) + 2(j+x-1) = Q_j(x-1) + 2(j+x-1)$. Tiếp tục như thế được $Q_j(x) = S(1, j) + x(x + 2j - 1)$. Dãy số $A(x)$ ứng với $S(1, 3) = 5$ nên $A(x) = x(x+5) + 5$ với $x = 0, 1, 2, ...$ Nếu đổi biến số có thể viết $A(x) = x(x-1) - 1 = x^2 - x - 1$ với $x = 3, 4, 5, ...$

Các bạn sau có lời giải tốt được nhận tặng phẩm :

1) *Trương Ngọc Thảo*, 2645/4 Lạc Long Quân, P. 10, Q. Tân Bình, **Tp. Hồ Chí Minh**.

2) *Trần Hoàng Tiến*, 11A6, THPT Phụng Hiệp, **Cần Thơ**.

PHI PHI



CUỘC THI
AI THÔNG MINH NHANH TRÍ ?

*Cuộc thi **Ai thông minh nhanh trí** đã có 3 Câu đố giới thiệu trong đợt 1 trên số 312 (6.2003). Đã có những lời giải đầu tiên gửi về tòa soạn. Số này xin giới thiệu tiếp 3 câu đố đợt 2. Bạn có thể gửi bài giải từng đợt hoặc cả 2 đợt chung 1 phong bì nhưng cần gửi ở bưu điện trước ngày 31.8.2003. Ngoài phong bì bạn ghi rõ **bài gửi dự thi Cuộc thi Ai thông minh nhanh trí của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**. Kết quả cuộc thi sẽ đăng trên số 316 ra ngày 15.10.2003*

Chúc các bạn có một kì hè bổ ích và lí thú.

ĐỢT II

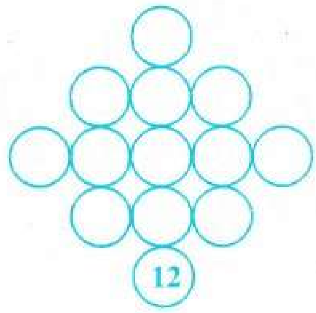
Câu đố 4. UỐNG THỨ GÌ

An, Bình và Chi thường đi bơi với nhau. Sau đó họ cùng vào quán uống trà hoặc cà phê. Thật lạ là cứ An gọi cà phê thì Bình sẽ gọi theo Chi. Nếu Bình gọi cà phê thì An sẽ gọi khác Chi. Nếu Chi uống trà thì An gọi theo Bình. Bạn hãy tìm người luôn luôn gọi một thứ và đó là thứ gì ?

THỦY VŨ

Câu đố 5. TRỒNG HOA

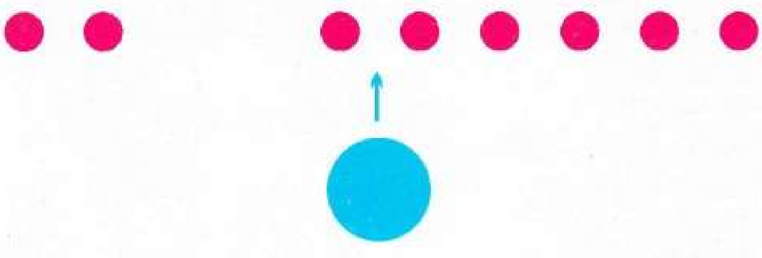
Một người làm vườn yêu toán đã trồng 12 cây hoa vào 1 bồn hoa như hình bên. Anh ta dự định trồng hoa tiếp vào các bồn hoa hình tròn sao cho số cây hoa ở 12 hình tròn còn trống là các số khác nhau từ 1 đến 12 và số cây hoa ở mỗi hình tròn bằng trung bình cộng của số cây hoa ở 4 hình tròn tiếp giáp với nó. Người làm vườn đang lúng túng chờ bạn giải đáp giúp.



VÂN KHANH

Câu đố 6. BẮN BÓNG

Hai người A và B chơi trò thay phiên nhau điều khiển súng để bắn rơi bóng. Ban đầu có 10 quả bóng như nhau nằm theo hàng ngang cách đều nhau trên giá đỡ. Người ta đặt súng để mỗi lần bắn chỉ xảy ra một trong hai trường hợp : hoặc đạn trúng làm rơi 1 quả bóng, hoặc đạn đi vào giữa 2 quả bóng và làm rơi cả 2 quả. Ai bắn rơi quả bóng cuối cùng là thắng. Người A bắn đầu tiên đã làm rơi 2 quả bóng, còn lại một nhóm 2 quả gần nhau và một nhóm 6 quả gần nhau. Bạn hãy mách cho người B cách chơi để chắc chắn thắng cuộc.



VIỆT HẢI

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT15M3

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2003

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng