BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

7
2004

SỐ 325 - NĂM THỨ 41 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Cột cờ Nam Định

Tháp Phổ Minh gần 1000 năm

50 NĂM NAM ĐỊNH
THÀNH PHỐ ĐẦU TIÊN CỦA VIỆT NAM
GIẢI PHÓNG (1.7.1954 - 1.7.2004)

KỈ NIỆM 30 NĂM VIỆT NAM THI TOÁN QUỐC TẾ

Ba mươi năm qua, trên Toán học và Tuổi trẻ đều đặn có tin, bài và ảnh về các cuộc thi Toán Quốc tế của học sinh Việt Nam. Kỉ niệm những chặng đường thành công ấy, THTT xin đăng ba bức ảnh cùng các bài viết và giải đáp CLB ở bìa 3, các trang 25, 26, 27 số báo này. Mong thành tích của đoàn Việt Nam được duy trì và phát huy hơn nữa.

THTT

Ảnh trên : Đại tướng Võ Nguyên Giáp, các lãnh đạo Bộ Giáo dục cùng đoàn VN thi Quốc tế năm 1989

Ảnh giữa : Đoàn VN tại kì thi 1990 Trung Quốc

Ảnh dưới: Đoàn VN tại kì thi 1991 Thụy Điển

Nhà giáo Nguyễn Ngọc Khoa sinh ngày 01.01.1961 quê tại thị trấn Chợ Chùa, huyện Nghĩa Hành, tỉnh Quảng Ngãi, tốt nghiệp ĐHSP Quy Nhơn, dạy tại các trường THPT BC Nguyễn Thái Học, chuyên huyện Nghĩa Hành, THPT BC Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh và nay dạy tại trường chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, có bài trên THTT từ 1997. Ông mong muốn THTT có thêm bài về phương pháp giải toán sát với nội dung sách giáo khoa.

Phần lớn học sinh "rất ngại" phải "chạm trán" với bài toán cực trị. Nguyên nhân chủ quan là các em không định hướng được cách giải, nguyên nhân khách quan là tính đa dạng của bài toán. Trong khi đó kiến thức và thời lượng mà các em được truyền thụ trong trường phổ thông lại quá sơ sài chỉ với bất đẳng thức (BĐT) Cô–si và BĐT chứa dấu giá trị tuyệt đối. Vì vậy việc rèn luyện kĩ năng sử dụng BĐT Cô–si là rất cần thiết. Bài viết này nêu một phương pháp sử dụng BĐT Cô–si để giải một số bài toán cực trị trong phạm vi chương trình Trung học cơ sở. Kí hiệu giá trị nhỏ nhất của biểu thức là Min, lớn nhất là Max.

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI TRONG BÀI TOÁN CỰC TRỊ

NGUYỄN NGỌC KHOA

Bài toán 1. Cho $a, b, c \geq 0$, $a+b+c = 3$. Tính

1) Min $(a^3 + b^3 + c^3)$

2) Min $(a^3 + 64b^3 + c^3)$

3) Max $(\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc})$

4) Max $(\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + \sqrt{bc})$

Lời giải.

1) $a^3 + b^3 + c^3 =$

$= (a^3 + 1 + 1) + (b^3 + 1 + 1) + (c^3 + 1 + 1) - 6$

Theo BĐT Cô–si : $a^3 + 1 + 1 \geq 3a$;

$b^3 + 1 + 1 \geq 3b$; $\quad c^3 + 1 + 1 \geq 3c$. Suy ra

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3(a + b + c) - 6 = 3 \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy $\text{Min}(a^3 + b^3 + c^3) = 3$.

Nhận xét : Việc làm xuất hiện $a+b+c$ đảm bảo cho vế phải của (1) là hằng số.

2) $a^3 + 64b^3 + c^3 =$

$$= \left(a^3 + \frac{24^3}{17^3} + \frac{24^3}{17^3}\right) + \left(64b^3 + \frac{12^3}{17^3} + \frac{12^3}{17^3}\right) +$$

$$+ \left(c^3 + \frac{24^3}{17^3} + \frac{24^3}{17^3}\right) - 2\times\frac{12^3}{17^2}$$

Theo BĐT Cô–si :

$$a^3 + \frac{24^3}{17^3} + \frac{24^3}{17^3} \geq 3\times\frac{24^2}{17^2}\times a \qquad (2)$$

$$64b^3 + \frac{12^3}{17^3} + \frac{12^3}{17^3} \geq 3\times\frac{12^2}{17^2}\times 4b \qquad (3)$$

$$c^3 + \frac{24^3}{17^3} + \frac{24^3}{17^3} \geq 3\times\frac{24^2}{17^2}\times c \qquad (4)$$

$$\Rightarrow a^3 + 64b^3 + c^3 \geq 3\times\frac{24^2}{17^2}(a+b+c) - 2\times\frac{12^3}{17^2}$$

$$= \frac{12^3}{17^2} \qquad (5)$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=c=\dfrac{24}{17} \\ b=\dfrac{3}{17} \end{cases}$

Min $(a^3 + 64b^3 + c^3) = \dfrac{12^3}{17^2}$.

Hẳn các bạn không khỏi thắc mắc về lời giải có vẻ như thiếu tự nhiên trên ! Ở đây vai trò a, c như nhau, ta đưa vào các tham số α, β dương và biến đổi

$a^3 + 64b^3 + c^3 = (a^3+\alpha^3+\alpha^3) + (64b^3+\beta^3+\beta^3) +$
$+ (c^3+\alpha^3+\alpha^3) - 4\alpha^3 - 2\beta^3$

Áp dụng BĐT Cô–si cho 3 số hạng trong các dấu ngoặc, ta có :

$a^3 + 64b^3 + c^3 \geq 3\alpha^2 a + 3\times 4\beta^2 b + 3\alpha^2 c -$
$4\alpha^3 - 2\beta^3$ (*)

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a=c=\alpha \\ b=\beta/4 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha+\beta/4 = 3$

Mặt khác để biểu diễn vế phải của (*) theo $a+b+c$, thì các hệ số $3\alpha^2$, $3\times 4\beta^2$, $3\alpha^2$ phải bằng nhau, lúc đó α, β phải thỏa mãn :

Giải trí toán học

NGHỈ HÈ TRÊN HÀNH TINH SỐ NGUYÊN (INTÉGRA)

Trên hành tinh này, khách du lịch rất đông và thương mại thịnh vượng. Tiền mặt ở đây là đồng Fermat, không có đồng tiền nhỏ hơn và lớn hơn. Giá hàng luôn luôn là số nguyên. Mỗi mặt hàng có thể bán lẻ, theo gói hoặc theo hộp, nhưng vẫn theo giá bán lẻ. Theo tập quán, số mặt hàng trong mỗi gói luôn luôn bằng giá (bằng Fermat) đơn vị mặt hàng. Còn số gói trong mỗi hộp bằng số mặt hàng trong mỗi gói.

1. Mua hàng khi xuống cầu thang. Yvan kể lại chuyện mua hàng của mình ở Intégra. "Trên tầng 2 trung tâm thương mại, tôi mua hai mặt hàng A và B, mỗi thứ một gói. Khi xuống cầu thang tôi ngạc nhiên thấy cửa hàng tầng dưới có khuyến mại nên tôi mua ba gói hàng A và ba gói hàng B, cũng chỉ với số tiền Fermat như đã trả trên tầng 2. Tất nhiên các gói có nhỏ hơn một chút, nhưng không sao"

Yvan nói có hoàn toàn đúng không ?

2. Mua hàng giảm giá liên tục. Michel chỉ thích mua hộp. Hôm đó Michel mua một hộp hàng C. Hôm sau, Michel thấy hàng đó rẻ hơn 1 Fermat mỗi đơn vị hàng nên đã mua một hộp nữa. Năm phút sau đến phố khác lại thấy rẻ hơn 1 Fermat nữa, nên mua thêm một hộp. Đến một cửa hàng khác Michel lại mừng thấy cũng hàng C đó giá rẻ hơn 1 Fermat nữa, nên lại mua một hộp. Ba hộp mua trong ngày sau có tổng giá tiền bằng giá tiền một hộp mua trước.

Michel đã trả bao nhiêu tiền ?

3. Mua hàng quá hăng. Trong kì nghỉ dài ngày (một năm) ở Intégra, một người về hưu đã mua hàng quá hăng. Ngày đầu mua một gói. Ngày thứ hai mua 2 gói, ngày thứ ba mua ba gói... ngày hôm sau mua hơn ngày hôm trước một gói, cho đến tận ngày trước khi ra về hai tuần lễ thì không còn tiền để mua nữa. Tổng số tiền phải trả mỗi ngày không thay đổi. Và có điều trùng hợp kì lạ là số Fermat chi mỗi ngày đúng bằng số ngày nghỉ của người về hưu.

Người về hưu đã nghỉ bao nhiêu ngày ở Intégra ?

4. Giá bán lẻ mặt hàng E. Paul vừa mua một hộp hàng E và nhận thấy rằng tổng các chữ số của số tiền phải trả (bằng Fermat) bằng giá bán lẻ mặt hàng E.

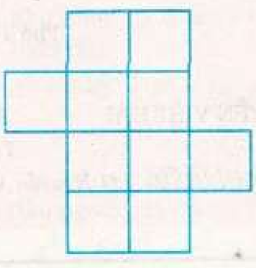
Hỏi giá của mỗi mặt hàng E ?

Vào đầu năm học mới bạn sẽ nhận được quà tặng nếu giải tốt và sớm bốn câu đố về HÀNH TINH SỐ NGUYÊN này.

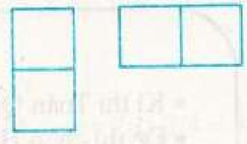
NGUYỄN VĂN THIÊM

*(theo **La Recherche** số 321, tháng 7.1999)*

NGANG VÀ DỌC



Đây là bàn cờ cho hai người. Các quân đô-mi-nô có hai loại gồm 2 ô vuông ngang và dọc. Nam đi quân 2 ô vuông nằm dọc và Hà đi quân 2 ô vuông nằm ngang.



Mỗi người lần lượt đặt một quân đô-mi-nô vào bàn cờ. Đến lượt ai không còn cách đi là thua.

Tìm cách để Hà đi sau và giành phần thắng.

VŨ ĐÔ QUAN

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN THCS TP HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2003 - 2004

(Đề thi đã đăng trên THTT số 321, tháng 3 năm 2004)

I. PHẦN BẮT BUỘC

Bài 1. a) ĐK $\begin{cases} 2x-3 \ge 0 \\ 5-2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm ta có

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x} \le \dfrac{(2x-3)+1}{2}+\dfrac{(5-2x)+1}{2} = 2$ (1)

Mặt khác: $3x^2-12x+14 = 3(x-2)^2+2 \ge 2$ (2)

Từ (1), (2) ta thấy PT

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{5-2x} = 3x^2-12x+14$$

có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) Giải hệ $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y} = 4 \\ x+y = 7 \end{cases}$ (*)

ĐK $x \ge -1$; $y \ge 0$

Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{y}$ $(u \ge 0, v \ge 0)$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u+v = 4 \\ u^2+v^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 4 \\ u.v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 2.$$

Từ đó hệ (*) có nghiệm duy nhất $(x, y) = (3, 4)$

Bài 2. a) Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2+2xy}{(x-y)} = (x-y)+\frac{2}{(x-y)} \ge 2\sqrt{2}$$

b) Từ giả thiết a, b, c là 3 cạnh của tam giác và $a+b+c = 2$ nên $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$, do đó $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$ suy ra

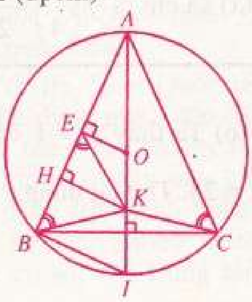
$1 + ab + bc + ca - (a+b+c) - abc > 0$

$\Rightarrow ab + bc + ca - abc > 1$

$\Rightarrow (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2+2abc) > 2$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc < 2$ (đpcm).

Bài 3. (Hình 1) Gọi H là trung điểm của BE thì KH là đường trung bình của hình thang vuông $OEBI$, suy ra $HK \parallel OE \parallel BI$, mà $OE \perp AB \Rightarrow KH \perp BE$. Từ đó ΔKBE cân tại K



Hình 1

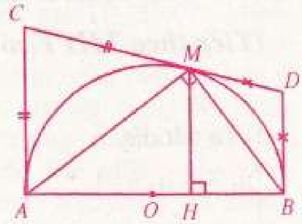
$\Rightarrow \widehat{KEB} = \widehat{KBE}$. Mặt khác $\widehat{KBE} = \widehat{KCA}$. Vậy $\widehat{KEB} = \widehat{KCA}$. Do đó tứ giác $AEKC$ nội tiếp được một đường tròn (đpcm).

Bài 4. (Hình 2) Ta có

$$S_{ABDC} = \frac{(AC+BD).AB}{2} = \frac{CD.AB}{2} \ge \frac{AB^2}{2} = 2R^2 \ (1)$$

Dựng $MH \perp AB$ thì

$S_{AMB} = \dfrac{1}{2}MH.AB \le \dfrac{1}{2}MO.AB = R^2$ (2)



Hình 2

Từ (1), (2) suy ra $S_{ACM} + S_{BDM} = S_{ABDC} - S_{AMB} \ge 2R^2 - R^2 = R^2$. Từ đó giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACM và BDM là R^2, đạt được khi M là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AB}$.

PHẦN CHỌN.

Bài 5a. a) ĐS : $-2 \le m \le 2$.

b) Áp dụng định lí Vi-et cho PT bậc 2 : $2x^2+2mx+m^2-2 = 0$ ta có

$A = |2x_1x_2+x_1+x_2-4| = |(m+2)(m-3)|$.

Vì $m \in [-2, 2]$ nên $m+2 \ge 0$ còn $m-3 < 0$.

Do đó $A = (m+2)(3-m) = -m^2+m+6$

$$= -\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4} \le \frac{25}{4}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\dfrac{25}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $m = \dfrac{1}{2}$.

Bài 5b. a) Ta có $P = \left[1-\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}\right]:$

$$:\left[\frac{(\sqrt{x}-3)(3+\sqrt{x})+(\sqrt{x}-2)(2-\sqrt{x})+9-x}{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\right]$$

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP

CHUỖI và ỨNG DỤNG để NGHIÊN CỨU DÃY SỐ

(Tiếp theo THTT số 323 tháng 5.2004)

ĐÀM VĂN NHỈ

d) Ta xét dãy

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = -1, \\ a_n = -\left(\dfrac{a_{n-1}}{1!} + \dfrac{a_{n-2}}{2!} + \dots + \dfrac{a_1}{(n-1)!}\right), n \geq 3 \end{cases}$$

Tìm công thức tổng quát của a_n.

Ta có $a_n = 2a_n + \dfrac{a_{n-1}}{1!} + \dfrac{a_{n-2}}{2!} + \dots + \dfrac{a_1}{(n-1)!}$, $n \geq 3$.

Xét chuỗi $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ Khi đó

$$f(x)\left[2 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right]$$

$$= 2a_1x + \left(2a_2 + \frac{a_1}{1!}\right)x^2 + \left(2a_3 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_1}{2!}\right)x^3 + \dots$$

$$= 2a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = f(x) + x$$

Vậy $f(x)\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots\right) = x$ hay $f(x)e^x = x$

$$\Rightarrow f(x) = xe^{-x} = x\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}, n \geq 2.$$

3. Tổng và bất đẳng thức liên quan đến dãy số.

Giả sử cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \dots$ theo một quy luật nào đấy. Vấn đề đặt ra là tổng

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

là hữu hạn hay vô hạn hoặc có số α để $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \leq \alpha$ khi $|x| \leq \beta$ với mọi n hay không ? Đây là một vấn đề khó. Khi ta có công thức tường minh tính a_n thì

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

là hữu hạn hay vô hạn đã được xét đến trong nhiều tài liệu về giải tích. Nhưng đối với dãy mà a_n chỉ biết dưới dạng truy hồi thì riêng việc tính toán cũng đã quá phức tạp. Chẳng hạn xét dãy :

$a_1 = 1$, $a_2 = 2.1.a_1$, $a_n = 2.1.a_{n-1} + 3.2.a_{n-2} + \dots + n(n-1)a_1$ với mọi $n \geq 3$.

Xét chuỗi $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

Khi đó

$f(x)(2.1 + 3.2x + 4.3x^2 + \dots) =$

$= (2.1.a_1)x + (2.1a_2 + 3.2a_1)x^2 + \dots$

$= a_2x + a_3x^2 + \dots = \dfrac{f(x) - x}{x}$

Với $|x| < 1$ từ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ ta suy ra

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2.1 + 3.2x + 4.3x^2 + \dots$$

Vậy $f(x).\dfrac{2x}{(1-x)^3} = f(x) - x \Rightarrow f(x) = \dfrac{x(x-1)^3}{(x-1)^3 + 2x}$.

Như đã nói ở trên việc tính toán ở đây rất phức tạp.

Các bạn hãy thử làm bài tập sau :

Cho $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = 1^2a_{n-1} + 2^2a_{n-2} + \dots + (n-1)^2a_1$ với mọi $n \geq 3$.

Đặt $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$ Xét tính hữu tỉ của $f(x)$ và chỉ ra $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{27}{28}$.

☛ $= \left[\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\right] : \left[\dfrac{4\sqrt{x} - x - 4}{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\right]$

$= \left[\dfrac{3}{\sqrt{x}+3}\right]\left[\dfrac{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x}}{-(2-\sqrt{x})^2}\right] = \dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$.

b) Ta thấy $P = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}-2} = 1$. Giải ra được $x = 25$. Thử lại đúng.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Trong bài này, chúng tôi bỏ qua một số câu dễ. Sau khi hướng dẫn giải đề thi, chúng tôi xét các bước giải bài toán tổng quát và đưa ra một số bài luyện tập tương tự.

BÀN LUẬN VỀ CÁCH GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

MÔN TOÁN - KHỐI A (4.7.2004)

NGUYỄN ANH DŨNG, ĐẶNG THANH HẢI

CÂU I. *Cho hàm số* $y = \dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ (1)

1) Khảo sát hàm số (1)

2) Tìm m để đường thẳng y = m cắt đồ thị tại 2 điểm A, B sao cho AB = 1.

Hướng dẫn giải :

1) Bạn đọc tự giải.

2) Xét phương trình (PT) : $\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)} = m$ (1)

Nhận thấy $x = 1$ không thỏa mãn PT với mọi m.

Biến đổi PT ta được :

$$x^2 + (2m-3)x - 2m + 3 = 0 \quad (2)$$

Từ đó đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số (HS) tại 2 điểm A, B khi :

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \Delta = (2m-3)(2m+1) > 0$ hay

$m < -\dfrac{1}{2}$ hoặc $m > \dfrac{3}{2}$ (3)

Giả sử $A(x_1 ; m)$ và $B(x_2 ; m)$. Ta có :

$AB = 1 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$ (4)

Áp dụng định lí Vi–ét cho PT (2) và từ (4) ta có :

$$(2m-3)^2 - 4(3-2m) = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Bài toán tổng quát: Cho hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = ax + b$ trong đó có phụ thuộc tham số m. Tìm m để đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm A, B sao cho $AB = c$ (c cho trước).

Cách giải: Thực hiện theo các bước (B1, B2...) sau :

B1: Xét PT $f(x) = ax + b$ và biến đổi về một PT bậc 2 (trong chương trình toán THPT chủ yếu gặp loại này).

B2: Tìm điều kiện để PT có 2 nghiệm phân biệt ($\Delta > 0$).

B3: Giả sử các giao điểm là $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

Ta có $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$.

Do đó $AB^2 = (1+a)^2(x_1 - x_2)^2 =$

$= (1 + a^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]$

B4: Dùng định lí Vi–ét, tính $x_1 + x_2$, x_1x_2 tìm được AB^2 theo m.

B5: Giải PT $AB^2 = c^2$ và kết hợp với B_2 ta tìm được m.

Bài luyện tập : Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$.

Hãy tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị tại 2 điểm A, B sao cho $AB < 2$.

CÂU II.

1) Giải bất phương trình

$$\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

1) Điều kiện $x \geq 4$ (1). Quy đồng mẫu số dẫn đến $\sqrt{2(x^2-16)} > 10-2x$ (2)

Với $x > 5$: BPT thỏa mãn vì vế phải âm.

Với $4 \leq x \leq 5$ (3). Bình phương 2 vế của BPT (2) ta được :

$x^2 - 20x + 66 < 0 \Leftrightarrow 10 - \sqrt{34} < x < 10+\sqrt{34}$

Kết hợp với điều kiện (3) ta được :

$$10 - \sqrt{34} < x \leq 5$$

Đáp số : $x > 10 - \sqrt{34}$.

2) Điều kiện $\begin{cases} y-x>0 \\ y>0 \end{cases}$

PT (1) $\Leftrightarrow \log_4(y-x)+\log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4\dfrac{y}{y-x} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{y}{y-x} = 4$ hay $y = \dfrac{4x}{3}$. Thay vào PT (2) với $y > 0$ tìm được nghiệm $(x, y) = (3, 4)$.

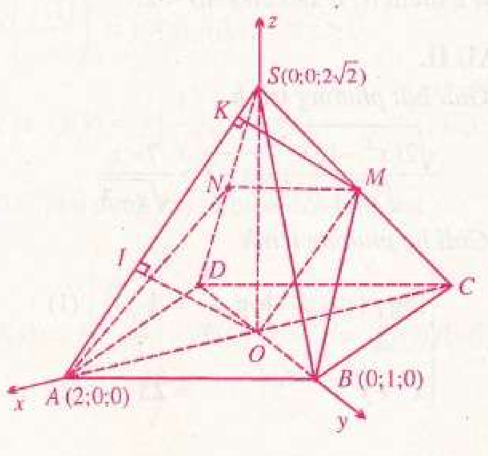
CÂU III.

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A (0; 2) và B $(-\sqrt{3};-1)$. Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A (2; 0; 0), B (0; 1; 0), S$(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp SABMN.



Hướng dẫn giải:

1) *Cách 1* : • Gọi H (a, b) là trực tâm ΔOAB.

$\Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ HA \perp OB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{OB} = 0 \end{cases}$ (1)

Trong đó : $\overrightarrow{OH} = (a, b)$; $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3};-3)$

$\overrightarrow{HA} = (-a, 2-b)$; $\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3}, -1)$. Thay vào (1) tính được $H(\sqrt{3}, -1)$.

Giả sử I (c, d) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB. Ta có hệ $\begin{cases} OI^2 = AI^2 \\ AI^2 = BI^2 \end{cases}$ Giải hệ này ta được I $(-\sqrt{3}, 1)$.

Cách 2 :

• Đường cao AH có PT : $-\sqrt{3}x - (y-2) = 0$, đường cao BH có PT : $y + 1 = 0 \Rightarrow H$ $(\sqrt{3}, -1)$

• Đường trung trực OA có PT : $y - 1 = 0$, đường trung trực OB có PT : $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$

$\Rightarrow I(-\sqrt{3}, 1)$.

2) Ta có $A \in Ox$, $B \in Oy$, $S \in Oz$ và SO là đường cao của hình chóp $SABCD$; $SA = SC = 2\sqrt{3}$.

2a) Vì $OM // SA$ nên gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SA, BM thì $\varphi = \widehat{OMB}$.

Do $OB \perp$ mp$(SAC) \Rightarrow OB \perp OM$, từ tam giác vuông $OBM \Rightarrow$ tg$\varphi = \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^0$.

Trong mp(SAC) dựng $MK \perp SA$. Vì $SA // OM$ nên $MK \perp OM$ (1). Do $OB \perp$ mp(SOA) nên $OB \perp KM$ (2). Từ (1), (2) suy ra $MK \perp$ mp$(OBM) \Rightarrow MK \perp MB$. Vậy MK là khoảng cách giữa SA và BM. Kẻ $OI \perp SA$ thì $MK = OI$.

Từ tam giác vuông SOA có :

$OI = \dfrac{OA.OS}{SA} = \dfrac{2.2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$. Vậy $MK = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

2b) Nhận thấy $MN // CD // AB$ nên N là trung điểm của CD. Ta có :

$V_{SABD} = V_{SBCD} = \dfrac{1}{2}V_{ABCD} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Mặt khác $\dfrac{V_{SABN}}{V_{SABD}} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}$;

$$\frac{V_{SBMN}}{S_{SBCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{SABN} = \frac{2\sqrt{2}}{3}; V_{SBMN} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Vậy $V_{SABMN} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ (đvtt)

Nhận xét. Để tính khoảng cách d giữa 2 đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2 trong không gian bằng phương pháp tổng hợp ta thực hiện các bước :

B1: Tìm mặt phẳng (α) chứa Δ_2 và song song với Δ_1 thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(\Delta_1, (\alpha))$

B2 : Tìm trên (Δ_1) điểm M sao cho xác định được chân đường vuông góc hạ từ M đến mp(α) thì $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \text{mp}(\alpha))$.

Bài luyện tập : Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AC và DC_1 theo a.

CÂU IV.

1) Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$.

2) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1 + x^2(1-x)]^8$.

Hướng dẫn giải :

1) Đặt $t = 1+\sqrt{x-1}$ ta được $\sqrt{x-1} = t - 1 \geq 0$ $\Rightarrow x = t^2 - 2t + 2 \Rightarrow dx = (2t-2)dt$.

Với $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = 2$.

Ta được :

$$I = \int_1^2 \frac{(t^2-2t+2)(2t-2)}{t}dt$$

$$= \int_1^2 \left(2t^2 - 6t + 8 - \frac{4}{t}\right)dt = \frac{11}{3} - 4\ln 2.$$

Bài toán tổng quát : Tính tích phân dạng $I = \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax+b}+c}dx$, trong đó $P(x)$ là một đa thức.

Cách giải: Đặt $t = \sqrt{ax+b}+c$.

Ta được : $\sqrt{ax+b} = t - c \geq 0$

$ax + b = t^2 - 2ct + c^2$; $x = \frac{1}{a}\left(t^2 - 2ct + c^2 - b\right)$;

$dx = \frac{1}{a}(2t - 2c)dt$.

Ta được tích phân của một hàm phân thức mà tử số là một đa thức của t còn mẫu số bằng t.

Bài luyện tập : Tìm tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{4x-3}{2+\sqrt{3x+1}}dx$$

2) Gọi đa thức đã cho là $P(x)$. Khi khai triển $P(x)$ ta được một tổng gồm các số hạng có dạng $C_8^n x^{2n}(1-x)^n$ với $0 \leq n \leq 8, n \in N$.

Mặt khác với mỗi $n > 0$, khai triển $x^{2n}(1-x)^n$ ta lại được một tổng gồm các số hạng có dạng $C_n^k x^{2n}(-x)^k = C_n^k(-1)^k.x^{2n+k}$

Vậy khi khai triển $P(x)$ ta được một tổng gồm các số hạng có dạng

$$C_8^n C_n^k (-1)^k x^{2n+k} \text{ với } 0 \leq k \leq n \leq 8.$$

Số hạng chứa x^8 ứng với $2n + k = 8 \Rightarrow k = 8 - 2n$ là một số chẵn. Bằng cách thử trực tiếp ta tìm được $k = 0$, $n = 4$ và $k = 2$, $n = 3$.

Vậy hệ số của x^8 là $C_8^4 C_4^0 + C_8^3.C_3^2 = 238$.

Bài toán tổng quát : Tìm hệ số của x^m khi khai triển $P(x) = (a + bx^p + cx^q)^n$ trong đó m, p, q là các số hữu tỉ, n là số nguyên dương.

Cách giải: B1. Viết số hạng tổng quát khi khai triển $P(x)$ thành một đa thức theo các lũy thừa của $(bx^p + cx^q)$.

*B2.*Viết số hạng tổng quát khi khai triển các số hạng dạng $(bx^p + cx^q)^k$ thành một đa thức theo các lũy thừa của x.

B3. Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của số hạng chứa x^m.

Bài luyện tập :

1) Tìm số hạng không chứa x khi khai triển $P(x) = \left(1 + 2x - \frac{1}{x^2}\right)^9$.

2. Tìm hệ số của số hạng chứa $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ khi khai triển $P(x) = \left(1 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^7$

Vì khuôn khổ tờ báo mời các bạn xem tiếp các cách giải của câu V trong số báo sau.

KĨ THUẬT CHỌN ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI

TRẦN PHƯƠNG
(Trung tâm CENSIP Hà Nội)

Trong bài này sử dụng kí hiệu Min, Max để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

1. Bất đẳng thức Cô-si.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n.\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \quad \text{với mọi } a_i \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

2. Bài toán xuất phát

Cho $a, b > 0$. Tìm Min của $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Lời giải. Sử dụng BĐT Cô-si :

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}} = 2$$

Với $a = b$ thì Min $S = 2$.

3. Làm quen với điểm rơi trong BĐT Cô–si

Nhận xét. Từ bài toán trên ta có thể thay đổi miền xác định để có các bài toán sau :

***Bài 1.** Cho $a \geq 3$. Tìm Min của $S = a + \frac{1}{a}$*

Bình luận và lời giải

• *Sai lầm thường gặp :*

$$S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a.\frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \text{Min } S = 2.$$

• *Nguyên nhân sai lầm :* Min $S = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} = 1$ mâu thuẫn với giả thiết $a \geq 3$.

• *Phân tích và tìm tòi lời giải :*

Xét bảng biến thiên của a, $\frac{1}{a}$ và S để dự đoán Min S

a	3	4	5	...	19	20
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{20}$
S	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{5}$	...	$19\frac{1}{19}$	$20\frac{1}{20}$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy khi a tăng thì S càng lớn và từ đó dẫn đến dự đoán khi $a = 3$ thì S nhận giá trị nhỏ nhất. Để dễ hiểu và tạo sự ấn tượng ta sẽ nói rằng *Min* $S = \frac{10}{3}$ *đạt tại điểm rơi* $a = 3$.

Do BĐT Cô–si xảy ra dấu bằng tại điều kiện các số tham gia phải bằng nhau nên ta đưa vào tham số α sao cho tại điểm rơi $a = 3$ thì cặp số $\frac{a}{\alpha}$ và $\frac{1}{a}$ phải bằng nhau.

• *Xác định điểm rơi:* $a = 3$ cho cặp số $\frac{a}{\alpha} = \frac{3}{\alpha}$ và $\frac{1}{a} = \frac{1}{3}$ thì phải xảy ra $\frac{1}{3} = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow \alpha = 9$.

Từ đó ta biến đổi S theo điểm rơi này.

• *Lời giải đúng :* $S = a + \frac{1}{a} = \left(\frac{a}{9} + \frac{1}{a}\right) + \frac{8a}{9} \geq$

$2.\sqrt{\frac{a}{9}.\frac{1}{a}} + \frac{8.3}{9} = \frac{10}{3}$. Với $a = 3$ thì Min $S = \frac{10}{3}$

***Bài 2.** Cho $a \geq 2$. Tìm Min của $S = a + \frac{1}{a^2}$*

Bình luận và lời giải

• *Xác định điểm rơi :* $a = 2$ cho cặp số $\frac{a}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$ và $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{4}$ thì phải xảy ra $\frac{1}{4} = \frac{2}{\alpha}$ $\Rightarrow \alpha = 8$.

• *Sai lầm thường gặp:*

$$S = a + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{a}{8} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{7a}{8} \geq$$

$\geq 2.\sqrt{\dfrac{a}{8}.\dfrac{1}{a^2}}+\dfrac{7a}{8}=\dfrac{2}{\sqrt{8a}}+\dfrac{7a}{8}\geq$

$\geq \dfrac{2}{\sqrt{8.2}}+\dfrac{7.2}{8}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{9}{4}$

Với $a=2$ thì Min $S=\dfrac{9}{4}$.

• *Nguyên nhân sai lầm* : Mặc dù đã biến đổi S theo điểm rơi $a=2$ và Min $S=\dfrac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên đã mắc sai lầm trong việc đánh giá mẫu số : "Nếu $a\geq 2$ thì $\dfrac{2}{\sqrt{8a}}\geq\dfrac{2}{\sqrt{8.2}}=\dfrac{2}{4}$ là đánh giá sai"

Trong lời giải đúng ta cần phải biến đổi S sao cho khi sử dụng BĐT Cô–si sẽ khử hết biến số a ở cả mẫu số và tử số.

• *Lời giải đúng* :

$S=a+\dfrac{1}{a^2}=\left(\dfrac{a}{8}+\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{a^2}\right)+\dfrac{6a}{8}\geq$

$\geq 3.\sqrt[3]{\dfrac{a}{8}.\dfrac{a}{8}.\dfrac{1}{a^2}}+\dfrac{6.2}{8}=\dfrac{9}{4}$.

Với $a=2$ thì Min $S=\dfrac{9}{4}$

Bài 3. *Cho* $\begin{cases}a,b>0\\a+b\leq 1\end{cases}$. *Tìm Min của* $S=ab+\dfrac{1}{ab}$

Bình luận và lời giải

• *Sai lầm thường gặp* :

$S=ab+\dfrac{1}{ab}\geq 2.\sqrt{ab.\dfrac{1}{ab}}=2\Rightarrow$ Min $S=2$

• *Nguyên nhân sai lầm* : Min $S=2\Leftrightarrow ab=\dfrac{1}{ab}=1\Rightarrow 1=\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow 1\leq\dfrac{1}{2}$: Vô lí

• *Phân tích và tìm tòi lời giải* : Biểu thức của S chứa 2 biến số a, b nhưng nếu đặt $t=ab$ hoặc $t=\dfrac{1}{ab}$ thì $S=t+\dfrac{1}{t}$ là biểu thức chứa một biến số. Khi đổi biến số ta cần phải tìm miền xác định cho biến số mới, cụ thể là :

Đặt $t=\dfrac{1}{ab}\Rightarrow t=\dfrac{1}{ab}\geq\dfrac{1}{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}\geq\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=4$.

Dẫn đến bài toán phụ :

Cho $t\geq 4$. *Tìm Min của* $S=t+\dfrac{1}{t}$.

• *Xác định điểm rơi* : $t=4$ cho cặp số $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{4}{\alpha}$ và $\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{4}$ thì phải xảy ra $\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{\alpha}\Rightarrow\alpha=16$.

• *Giải bài toán phụ* : $S=t+\dfrac{1}{t}=\left(\dfrac{t}{16}+\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{15t}{16}\geq$

$\geq 2.\sqrt{\dfrac{t}{16}.\dfrac{1}{t}}+\dfrac{15t}{16}=\dfrac{2}{4}+\dfrac{15t}{16}\geq\dfrac{2}{4}+\dfrac{15.4}{16}=\dfrac{17}{4}$.

Với $t=4$ hay $a=b=\dfrac{1}{2}$ thì Min $S=\dfrac{17}{4}$.

• *Lời giải bài 3* : Do $t=4\Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{2}$ nên

$S=ab+\dfrac{1}{ab}=\left(ab+\dfrac{1}{16ab}\right)+\dfrac{15}{16ab}\geq$

$\geq 2.\sqrt{ab.\dfrac{1}{16ab}}+\dfrac{15}{16\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}\geq\dfrac{17}{4}$.

Với $a=b=\dfrac{1}{2}$ thì Min $S=\dfrac{17}{4}$.

Bài 4. *Cho a, b, c > 0 thỏa mãn* : $a+b+c\leq\dfrac{3}{2}$

Tìm Min của $S=a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Bình luận và lời giải

• *Sai lầm thường gặp* :

$S\geq 6.\sqrt[6]{abc.\dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{b}.\dfrac{1}{c}}=6\Rightarrow$ Min $S=6$.

• *Nguyên nhân sai lầm* :

Min S = 6 $\Leftrightarrow$ a = b = c = $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}=1$.

$\Rightarrow a+b+c=3>\dfrac{3}{2}$ trái với giả thiết.

• *Phân tích và tìm tòi lời giải* : Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán Min S đạt tại $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

• *Xác định điểm rơi* : $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ cho các bộ số $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{1}{\alpha a}=\dfrac{1}{\alpha b}=\dfrac{1}{\alpha c}=\dfrac{2}{\alpha}$ thì phải xảy ra $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\alpha}\Rightarrow\alpha=4$.

• *Lời giải đúng :*

$$S=\left(a+b+c+\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\ge 6.\sqrt[6]{abc.\frac{1}{4a}.\frac{1}{4b}.\frac{1}{4c}}+\frac{3}{4}\left(3.\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}\right)$$

$$=3+\frac{9}{4}.\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3+\frac{9}{4}.\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}=3+\frac{27}{4}.\frac{1}{a+b+c}$$

$\ge 3+\dfrac{27}{4}.\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{15}{2}$. Với $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ thì Min $S=\dfrac{15}{2}$.

Bài 5. Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: $a+b+c\le\dfrac{3}{2}$.

Tìm Min $S=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\dfrac{1}{a^2}}$

Bình luận và lời giải

• *Sai lầm thường gặp :*

$$S\ge 3.\sqrt[3]{\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}.\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}.\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}}$$

$$\ge 3.\sqrt[6]{\left(2.\sqrt{a^2.\frac{1}{b^2}}\right)\left(2.\sqrt{b^2.\frac{1}{c^2}}\right)\left(2.\sqrt{c^2.\frac{1}{a^2}}\right)}$$

$=3.\sqrt[6]{8}=3\sqrt{2}\Rightarrow$ Min $S=3\sqrt{2}$.

• *Nguyên nhân sai lầm :*

Min $S=3\sqrt{2}\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}=1\Rightarrow$ $a+b+c=3>\dfrac{3}{2}$ trái với giả thiết.

• *Phân tích và tìm tòi lời giải :* Do S là một biểu thức đối xứng với a, b, c nên dự đoán Min S đạt tại $a=b=c=\dfrac{1}{2}$.

Xác định điểm rơi : $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ cho các bộ số $a^2=b^2=c^2=\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{1}{\alpha a^2}=\dfrac{1}{\alpha b^2}=\dfrac{1}{\alpha c^2}=\dfrac{4}{\alpha}$ thì phải xảy ra $\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{\alpha}\Rightarrow\alpha=16$.

• *Lời giải :*

$$S=\sqrt{a^2+\underbrace{\frac{1}{16b^2}+...+\frac{1}{16b^2}}_{16\text{ số}}}+\sqrt{b^2+\underbrace{\frac{1}{16c^2}+...+\frac{1}{16c^2}}_{16\text{ số}}}+\sqrt{c^2+\underbrace{\frac{1}{16a^2}+...+\frac{1}{16a^2}}_{16\text{ số}}}$$

$$\ge\sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{a^2}{16^{16}b^{32}}}}+\sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{b^2}{16^{16}c^{32}}}}+\sqrt{17.\sqrt[17]{\frac{c^2}{16^{16}a^{32}}}}$$

$$=\sqrt{17}\left[\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}+\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}\right]$$

$$\ge\sqrt{17}\left[3.\sqrt[3]{\sqrt[17]{\frac{a}{16^8b^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{b}{16^8c^{16}}}.\sqrt[17]{\frac{c}{16^8a^{16}}}}\right]$$

$$=3.\sqrt{17}.\sqrt[17]{\frac{1}{16^8a^5b^5c^5}}=\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{(2a.2b.2c)^5}}\ge$$

$$\ge\frac{3\sqrt{17}}{2.\sqrt[17]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Với $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ thì Min $S=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Bài 6. *Cho a, b, c > 0 và* $a+2b+3c\ge 20$.

Tìm Min của $S=a+b+c+\dfrac{3}{a}+\dfrac{9}{2b}+\dfrac{4}{c}$.

• *Lời giải*. Dự đoán $S=1$ tại điểm rơi : $a=2$, $b=3$, $c=4$. Sử dụng BĐT Cô-si ta có :

$$\begin{cases}a+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{a\frac{4}{a}}=4\\ b+\frac{9}{b}\ge 2\sqrt{b.\frac{9}{b}}=6\\ c+\frac{16}{c}\ge 2\sqrt{c.\frac{16}{c}}=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{4}\left(a+\frac{4}{a}\right)\ge\frac{3}{4}.4=3\\ \frac{1}{2}\left(b+\frac{9}{b}\right)\ge\frac{1}{2}.6=3\\ \frac{1}{4}\left(c+\frac{16}{c}\right)\ge\frac{1}{4}.8=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\ge 8\quad(1)$$

Mà $a+2b+3c\ge 20\Rightarrow\dfrac{1}{4}a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{3}{4}c\ge 5$ (2)

Cộng các BĐT (1), (2) theo từng vế được

$S = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c} \geq 13.$

Với $a = 2, b = 3, c = 4$ thì Min $S = 13$.

4. Bài tập dành cho bạn đọc tự giải

Bài 1. Cho $a, b, c, d > 0$. Tìm Min của

$$S = \left(1+\frac{2a}{3b}\right)\left(1+\frac{2b}{3c}\right)\left(1+\frac{2c}{3d}\right)\left(1+\frac{2d}{3a}\right)$$

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leq 1$. Tìm Min của $S = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$.

Bài 3. Cho $\begin{cases} a,b,c > 0 \\ ab \geq 12\,;\, bc \geq 8 \end{cases}$

Chứng minh rằng:

$$S = (a+b+c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{2}.$$

Bài 4. Cho $\begin{cases} a,b,c,d > 0 \\ a+b+c+d \leq 2 \end{cases}$.

Tìm min của

$$S = \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{d}\right)\left(d+\frac{1}{a}\right)$$

Bài 5. Cho $a, b, c > 0$ và $a = \text{Max}\,\{a, b, c\}$.

Tìm Min của $S = \frac{a}{b} + 2\sqrt{1+\frac{b}{c}} + 3\sqrt[3]{1+\frac{c}{a}}$

Bài 6. Cho $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c \leq \text{Min}\{a\sqrt{2}, b\sqrt{3}\}$;

$a + c\sqrt{3} \geq \sqrt{6}$; $b\sqrt{3} + c\sqrt{10} \geq 2\sqrt{5}$

Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^2} \leq \frac{118}{15}.$$

Bài 7. Cho tam giác *ABC*. Tìm Min của

$$T = \sin A + \sin B + \sin C + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$$

Bài 8. Cho tam giác *ABC* nhọn. Tìm Min của

$$T = \sqrt{\sin^2 A + \frac{1}{\cos^2 B}} + \sqrt{\sin^2 B + \frac{1}{\cos^2 C}} + \sqrt{\sin^2 C + \frac{1}{\cos^2 A}}.$$

BẠN CÓ BIẾT ?

MỘT CHÂN TRỜI MỚI CHO GIẢ THUYẾT CỦA GOLDBACH

Mọi số tự nhiên chẵn lớn hơn 2 đều là tổng của hai số nguyên tố ? Trong khi các nhà toán học vẫn chưa tìm ra cách chứng minh mệnh đề đơn giản và hiển nhiên đó thì máy tính đã chứng tỏ điều đó đúng với những số rất lớn. Một số lớn kỉ lục đã được lập ra.

*
* *

Có những nhà toán học gắn chặt tên mình với một lí thuyết, một kết quả mới hoàn toàn mang tên ông ta, hay là một loại bài toán. Lại có những nhà toán học khác tạo chỗ đứng của mình trong lịch sử bằng một số bài toán, giả thuyết bỏ ngỏ, chưa được chứng minh. Một người trong số đó là Christian Goldbach. Ông được nhắc đến hai trăm năm sau ngày qua đời nhờ một giả thuyết nổi tiếng viết trong một bức thư gửi Leonhard Euler ngày 7 tháng 6 năm 1742. Nội dung bức thư là : *Phải chăng mọi số chẵn đều có thể viết dưới dạng tổng của hai số nguyên tố ?*

Cần nhắc lại rằng số nguyên tố là số tự nhiên, lớn hơn 1 chỉ có hai ước số là chính nó và 1. Khi viết 12 = 5 + 7 người ta nói rằng cặp số nguyên tố (5, 7) tạo thành "*một bè*" Goldbach của số 12. Giả thuyết của Goldbach nói về những số nguyên tố, được định nghĩa từ khái niệm ước số, tức là liên hệ với phép nhân, và phép cộng. Đối tượng toán học và phép toán tạo thành giả thuyết Goldbach thật là quá tiết kiệm, quá đơn giản, khó có thể nào ít hơn. Một em bé lớp 6 cũng hiểu được giả thuyết Goldbach. Có thể xếp bài toán Goldbach vào loại kỉ lục về "bài toán dễ hiểu nhất mà lại khó chứng minh nhất" ! Một cách tiếp cận bài toán để xác minh tính đúng đắn của nó là thử trên những con số. Nói cách khác, giả thiết đó đúng cho đến số nào ? Có tìm được một số nào mà giả thuyết đó không đúng hay không ?

Ngay từ năm 1855 A. Desboves đã xác minh giả thuyết trên đúng với 10 ngàn số tự nhiên đầu tiên.

Thời đại máy vi tính đã thúc đẩy nhanh chóng việc xác minh giả thuyết. Năm 1964 đã xác minh

(Xem tiếp trang 15)

MỘT SỐ ĐẶC ĐIỂM CỦA SÁCH GIÁO KHOA TOÁN 8

(Tiếp theo kì trước)

TÔN THÂN

3) Về phương pháp trình bày : Sách Toán 8 cố gắng tránh áp đặt kiến thức mới, tránh đưa ra kiến thức dưới dạng "có sẵn" mà thường tạo ra tình huống làm nảy sinh vấn đề. Học sinh được quan sát, thử nghiệm, dự đoán rồi bằng suy luận để đi đến kiến thức mới.

Chẳng hạn, học sinh được củng cố lại định lí về tổng ba góc của một tam giác rồi nêu dự đoán về tổng bốn góc của một tứ giác. Tiếp đó, học sinh được yêu cầu chứng minh dự đoán đó bằng cách chia tứ giác thành hai tam giác. Trước khi chứng minh định lí về tính chất đường chéo của hình thoi, học sinh được thảo luận để trả lời các câu hỏi sau :

Cho hình thoi ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O.

a) Theo tính chất của hình bình hành, hai đường chéo của hình thoi có tính chất gì ?

b) Hãy phát hiện thêm các tính chất khác của hai đường chéo AC và BD.

Để giúp học sinh tự học, sách thường có các phần trình bày mẫu hoặc nêu gợi ý cần thiết để học sinh có thể tự đọc hiểu và tự làm được bài tập. Các ví dụ về giải phương trình, giải bài toán bằng cách lập phương trình, phần chứng minh các định lí hình học... là những mẫu mực cho học sinh học và làm theo. Cũng giống như các sách Toán 6, Toán 7, sách Toán 8 có hình thức trình bày sinh động, hấp dẫn, ngôn ngữ trong sáng, dễ hiểu. Dưới đầu đề của mỗi bài thường có các câu hỏi hoặc các câu phát biểu kích thích óc tò mò khoa học, thôi thúc học sinh tích cực tìm tòi, khám phá kiến thức mới. Chẳng hạn : *"Phân số được tạo thành từ số nguyên. Phân thức đại số được tạo thành từ ... ?", "Để giải một phương trình, lại phải giải nhiều phương trình. Sao thế nhỉ ?", "Bất đẳng thức $(-2c) < 3c$ có luôn xảy ra với số c bất kì hay không ?", "Với một chếc êke, ta có thể kiểm tra được một tứ giác là hình chữ nhật. Với một chiếc compa, ta cũng có thể làm được điều đó.", "Có thể đo chiều cao của một cây mà không cần lên đến ngọn ?" v.v...*

Hệ thống bài tập trong sách Toán 8 rất đa dạng : các bài tập trắc nghiệm khách quan ; các bài tập rèn từng kĩ năng cụ thể ; các bài tập tổng hợp ; các bài đố vui. Học sinh ở các trình độ khác nhau đều có thể tìm thấy những bài tập phù hợp với khả năng của mình.

Mục *"Có thể em chưa biết"* hấp dẫn học sinh bằng những mẩu chuyện về lịch sử toán học : Năm 1550 trước Công nguyên, người Ai Cập viết phương trình như thế nào ? Vài nét về tiểu sử các nhà toán học Ta-lét, Đi-ô-phăng, Cô-si... ; về tia sáng và đường đi của quả bi-a ; giới thiệu về thước vẽ truyền ; người xưa đã đo chiều cao của Kim tự tháp như thế nào ? ... Mục *"Bài đọc thêm"* giúp học sinh tìm hiểu sâu hơn về một kiến thức quan trọng có liên quan đến bài học, đó là : Giải bài toán bằng cách lập phương trình thông qua lập bảng.

Sách Toán 8 còn giới thiệu nhiều trò chơi toán học : khi học về nhân đơn thức với đa thức có trò chơi "Đoán tuổi" ; khi học về hằng đẳng thức đáng nhớ có trò chơi "Đôi bạn nhanh nhất" ; khi học về giải phương trình có trò chơi "chạy tiếp sức" ; khi học về tứ giác có các trò chơi gấp hình, vẽ hình đối xứng v.v...

Với những đặc điểm như trên, hi vọng sách Toán 8 sẽ là cuốn sách gần gũi, thân thiết, dễ học, bổ ích và lí thú, giúp các em học sinh lớp 8 thêm yêu môn Toán và học toán ngày càng có kết quả.

Chú ý : Các bạn muốn mua quyển đóng tập cả năm 2004 Toán học và Tuổi trẻ cần đăng kí ngay với Tòa soạn.

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ THTT

Đề thi đăng từ số báo 321 (3.2004) đến 325 (7.2004). Thời hạn nhận bài là 2 tháng từ khi đăng đề. Bài giải đăng từ số báo 325 (7.2004) đến 329 (11.2004). Có giải thưởng tập thể dành cho trường có nhiều bạn tham gia.

THTT

CÁC LỚP THCS

Bài T9/THCS. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y sao cho

$$A = x^2y^4 - y^3 + 1$$

là số chính phương.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/THCS. Dãy số $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định theo công thức

$$\begin{cases} x_n = 1 \text{ khi } [(n+1)\sqrt{2004}] - [n\sqrt{2004}] \text{ là một số lẻ} \\ x_n = 0 \text{ khi } [(n+1)\sqrt{2004}] - [n\sqrt{2004}] \text{ là một số chẵn} \end{cases}$$

với mỗi $n = 1, 2, 3, ...$

trong đó $[x]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không lớn hơn x. Tính tổng (41 số hạng)

$$S = x_{1964} + x_{1965} + ... + x_{2004}$$

NGUYỄN VĂN MẬU
(ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T9/THPT. Cho trước số tự nhiên n và số nguyên tố p. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ p số tự nhiên (không kể thứ tự) đôi một khác nhau $(a_0, a_1, ..., a_{p-1})$ thỏa mãn :

a) $1 \le a_i \le n$ với mọi $i = 0, 1, ..., p-1$.

b) $[a_0, a_1, ..., a_{p-1}] = p \min \{a_0, a_1, ..., a_{p-1}\}$,

trong đó $[a_0, a_1, ..., a_{p-1}]$ kí hiệu bội số chung nhỏ nhất của các số $a_0, a_1, ..., a_{p-1}$.

ĐINH VĂN KHÂM
(GV THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài T10/THPT. Xét một lục giác lồi *ABCDEF* nội tiếp một đường tròn và có các cạnh đối diện song song. Chứng minh rằng tổng độ dài các cạnh đối diện của lục giác đó bằng nhau khi và chỉ khi khoảng cách giữa các cặp cạnh đối diện của nó bằng nhau.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

CONTEST ON THE 40th ANNIVERSARY OF THE JOURNAL

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T9/THCS. Find all positive integers x, y such that $A = x^2y^4 - y^3 + 1$ is a perfect square.

T10/THCS. The sequence of numbers $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ is defined by the formulas :

$$\begin{cases} x_n = 1 \text{ when } [(n+1)\sqrt{2004}] - [n\sqrt{2004}] \text{ is odd} \\ x_n = 0 \text{ when } [(n+1)\sqrt{2004}] - [n\sqrt{2004}] \text{ is even} \end{cases}$$

for every $n = 1, 2, 3, ...$ where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x. Find the sum (41 terms)

$$S = x_{1964} + x_{1965} + ... + x_{2004}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T9/THPT. Let be given a natural number n and a prime number p. Determine the number of sets of p distinct natural numbers $\{a_0, a_1, ..., a_{p-1}\}$ satisfying the conditions :

a) $1 \le a_i \le n$ for all $i = 0, 1, ..., p-1$.

b) $[a_0, a_1, ..., a_{p-1}] = p \min \{a_0, a_1, ..., a_{p-1}\}$, where $[a_0, a_1, ..., a_{p-1}]$ denotes the least common multiple of the numbers $a_0, a_1, ..., a_{p-1}$.

T10/THPT. Consider a convex hexagon inscribed in a circle such that the opposite sides are parallel. Prove that the sums of the lengths of opposite sides are the same if and only if the distances of the opposite sides are the same.

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trong THTT số 324 (6/2004) ở trang 11, cột trái, dòng 5 dưới lên xin đọc lại như sau "... có hai điểm cố định $M_1\left(\frac{4-2\sqrt{29}}{5}, \frac{-2+\sqrt{29}}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{4+2\sqrt{29}}{5}, \frac{-2-\sqrt{29}}{5}\right)$".

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

CÁC LỚP THCS

Bài T1/325. (Lớp 6). Chứng tỏ rằng tổng

$$A=\frac{2004}{2003^2+1}+\frac{2004}{2003^2+2}+...+\frac{2004}{2003^2+n}+...+\frac{2004}{2003^2+2003}\ \text{(2003 số hạng)}$$

không phải là số nguyên dương

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

Bài T2/325. (Lớp 7). Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2AD$, M là trung điểm của đoạn AB. Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho $\widehat{ADH} = 15^o$. Hai đường thẳng CH và DM cắt nhau tại K. Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH và DK.

LÊ THỪA THÀNH
(GV THPT BC Nguyễn Hiền, Tp. Đà Nẵng)

Bài T3/325. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 \\ x(y^3-2)=3 \end{cases}$$

TRẦN HỒNG SƠN
(GV THPT BC Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T4/325. Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{xy}$$

TRƯƠNG NGỌC ĐẮC
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T5/325. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi O là trung điểm của cạnh BC và E là điểm đối xứng của D qua O. Một điểm M di động trên cạnh AD, đường thẳng EM cắt OA tại I. Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại K và H. Chứng minh rằng biểu thức $\frac{AB}{AK}+\frac{AC}{AH}-\frac{AD}{AM}$ có giá trị không đổi.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV CĐSP Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/325. Cho $a > 1$, tìm tất cả bộ ba số thực (x, y, z) sao cho $|y| \ge 1$ thỏa mãn phương trình

$$\log_a^2(xy)+\log_a(x^3y^3+xyz)^2+\frac{8+\sqrt{4z-y^2}}{2}=0$$

HOÀNG NGỌC CẢNH
(GV THPT NK Hà Tĩnh)

Bài T7/325. Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện $a^2 + b^2 = 4$ và $c + d = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $ac+bd+cd$

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

Bài T8/325. Giả sử các đường tròn $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ cùng tiếp xúc trong với đường tròn $\mathscr{C}$ lần lượt tại A_1, A_2, A_3 và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. B_1, B_2, B_3 là tiếp điểm của $\mathscr{C}_2$ và $\mathscr{C}_3$, của $\mathscr{C}_3$ và $\mathscr{C}_1$, của $\mathscr{C}_1$ và $\mathscr{C}_2$ theo thứ tự. Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV khối PTCTT ĐHSP Hà Nội)

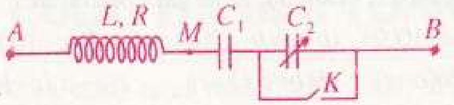
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/325. Một bình kín hình trụ đặt thẳng đứng được ngăn đôi bằng một pittông có trọng lượng P. Mỗi nửa bình chứa m gam không khí ở cùng nhiệt độ. Cho biết khi khí trong bình có nhiệt độ $T_1 = 300K$ thì tỉ số n giữa thể tích của khí ở phía trên pittông và thể tích khí ở phía dưới pittông có trị số là $n_1=\frac{V_t}{V_d}=4$.

Hỏi khi tỉ số đó là $n_2=\frac{V'_t}{V'_d}=3$ thì nhiệt độ của khí trong bình là bao nhiêu ?

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/325. Cho mạch điện như hình vẽ. Biết $U_{AB} = 40\sin 100\pi t$ (V) và không đổi. Tụ điện C_2 có điện dung thay đổi được. Bỏ qua điện trở dây nối và khóa K.



a) Khi $C_2 = C_1 = C$ thì thấy khi K mở và khi K đóng hiệu điện thế hiệu dụng giữa M và B không đổi. Khi K mở, công suất tiêu thụ trên đoạn mạch là $P = 16W$ và hiệu điện thế hiệu dụng ở hai đầu cuộn dây là $U_d = 40$V. Tính R, L, C.

b) Khi K mở, điều chỉnh $C_2 = C'$ để hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai điểm M và B đạt cực đại. Tính C' và giá trị hiệu điện thế cực đại đó.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/325. (for 6th grade)

Prove that the sum

$$A = \frac{2004}{2003^2+1} + \frac{2004}{2003^2+2} + \ldots + \frac{2004}{2003^2+n} + \ldots + \frac{2004}{2003^2+2003} \text{ (2003 terms)}$$

is not an integer.

T2/325. (for 7th grade)

Let $ABCD$ be a rectangle with $AB = 2AD$ and let M be the midpoint of the segment AB. Let H be the point on side AB such that $\widehat{ADH} = 15^\circ$. The lines CH and DM intersect at K. Compare the lengths of the segments DH and DK.

T3/325. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^3(2+3y) = 1 \\ x(y^3-2) = 3 \end{cases}$$

T4/325. Find the least value of the expression

$$A = \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{xy}$$

where x, y are positive real numbers satisfying $x + y = 1$.

T5/325. Let be given a convex quadrilateral $ABCD$. O is the midpoint of side BC, E is symmetric to D with respect to O. A point M moves on the side AD. The line EM cuts OA at I. The line passing through I, parallel to BC, cuts AB and AC respectively at K and H. Prove that the expression $\frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH} - \frac{AD}{AM}$ takes constant value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/325. Let be given $a > 1$. Find all triples (x, y, z) such that $|y| \geq 1$ and

$$\log_a^2(xy) + \log_a(x^3y^3 + xyz)^2 + \frac{8+\sqrt{4z-y^2}}{2} = 0$$

T7/325. Find the greatest value of the expression $ac+bd+cd$ where a, b, c, d are real numbers satisfying the conditions $a^2 + b^2 = 4$ and $c + d = 4$.

T8/325. The circles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ internally touch the circle $\mathscr{C}$ respectively at A_1, A_2, A_3 and they externally touch each other. Let B_1, B_2, B_3 be respectively the touching point of $\mathscr{C}_2$ and $\mathscr{C}_3$, of $\mathscr{C}_3$ and $\mathscr{C}_1$, of $\mathscr{C}_1$ and $\mathscr{C}_2$. Prove that the lines A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 are concurrent.

MỘT CHÂN TRỜI MỚI ...

(Tiếp trang 11)

... giả thuyết trên đúng với 1 triệu số đầu tiên. Năm 1989 đã xác minh trên 1 tỉ số đầu tiên. Ngày 1 tháng 10 năm 2003 Tomas Oliveira de Silva và các cộng tác viên ở Đại học Alveiro, ở Bồ Đào Nha đã phá kỉ lục do Jörg Richstein giữ từ năm 1999, bằng cách đi xa hơn 100 lần. Con số lớn nhất cho đến nay là 6×10^{16}, tức là với những số tự nhiên dưới 6×10^{16} thì giả thuyết Goldbach là đúng. Các tác giả hi vọng sắp đến đây, họ có thể tiến xa đến 10^{17}, 10^{18}. Công trình của họ cho phép phân tích nhiều vấn đề liên quan đến giả thuyết Goldbach. Các tác giả đặc biệt nghiên cứu hàm $S(p)$ cho ứng mỗi số nguyên tố p với số tự nhiên chẵn n nhỏ nhất, nhận một bè Goldbach chứa p, nhưng không nhận một bè Goldbach nào với một số nguyên tố nhỏ hơn p. Ví dụ : Số nguyên tố $p = 3$ thì $S(p) = n = 6$ vì 6 là số chẵn nhỏ nhất nhận (3, 3) làm bè Goldbach ; 6 không nhận một bè Goldbach nào chứa số nguyên tố nhỏ hơn 3. Hàm $S(p)$ như trên có một dạng đặc biệt không phải ngẫu nhiên. Nhiều công trình nghiên cứu về hàm này đang được thực hiện, hứa hẹn mở ra nhiều kết quả mới thú vị về lí thuyết số.

PHAN THANH QUANG
*(Theo **Benoit Ritlaud** trong **La Recherche** số tháng 1 năm 2004)*

Bài T1/321. (Lớp 6). *Viết số 2003^{2004} thành tổng các số nguyên dương. Đem tổng các lập phương tất cả các số hạng đó chia cho 3 thì được dư là bao nhiêu ?*

Lời giải. Giả sử $A = 2003^{2004} = a_1+a_2+...+a_k$, $B = a_1^3+a_2^3+...+a_k^3$, trong đó $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số nguyên dương.

Ta thấy $a^3 - a = a(a^2-1) = a(a-1)(a+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3, do đó

$$B - A = a_1^3+a_2^3+...+a_k^3 - (a_1+a_2+...+a_k)$$
$$= (a_1^3-a_1)+(a_2^3-a_2)+...+(a_k^3-a_k)$$

phải chia hết cho 3, nghĩa là A và B có cùng số dư khi chia cho 3.

Ta có $2003^2 = (3u+2)^2 = 3v+1$, trong đó u, v là các số nguyên dương, suy ra $A = 2003^{2004} = (2003^2)^{1002} = (3v+1)^{1002}$ chia cho 3 dư 1. Vậy số B chia cho 3 cũng có số dư là 1.

Nhận xét. 1) Có thể tổng quát hóa bài toán này bằng cách thay 2003^{2004} bởi a^{2n}, trong đó a không chia hết cho 3. Nhiều bạn giải đúng nhưng trình bày dài dòng, hoặc sử dụng đồng dư thức là kiến thức chưa học ở lớp 6.

2) Các bạn sau có lời giải gọn :

Yên Bái : *Văn Thu Thảo*, 5C, trường Tiểu học Nguyễn Trãi, TP Yên Bái ; **Phú Thọ :** *Ninh Thanh Tùng*, 6A1, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Kiều Oanh*, 6A1, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường, *Nguyễn Trọng Hùng* và *Phí Thị Thúy Hoa*, 6A1, *Lê Thị Ngọc*, 6A5, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Mê Linh ; **Hà Nội :** *Nguyễn Anh Tú*, 6C, THCS Vĩnh Tuy, Q. Hoàng Mai ; **Nam Định :** *Nguyễn Lâm Phúc, Trương Quang Huy*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh ; **Hải Phòng :** *Lê Văn Nhâm*, 6D8, THCS Trần Phú, Q. Lê Chân ; **Nghệ An :** *Tăng Văn Bình*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; *Vũ Đức Hoàn, Trần Trường Giang*, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Bình Định :** *Phan Thị Phương Ly*, 6A2, THPT Ngô Mây, Phù Cát ; **TP Hồ Chí Minh:** *Tăng Bửu Vinh*, 6^1 THCS Chu Văn An, Q. 11.

VIỆT HẢI

Bài T2/321. (Lớp 7). *Đơn giản biểu thức*

$$\frac{(a-2)(a-1002)}{a(a-b)(a-c)}+\frac{(b-2)(b-1002)}{b(b-a)(b-c)}+\frac{(c-2)(c-1002)}{c(c-a)(c-b)}$$

trong đó các số a, b, c đều khác nhau và khác 0.

Lời giải. (Của bạn *Nguyễn Tuấn Anh*, 7B, THCS Lê Quý Đôn, TX Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**).

Ta xét bài toán khái quát hơn : Đơn giản biểu thức :

$$P = \frac{(a-x)(a-y)}{a(a-b)(a-c)}+\frac{(b-x)(b-y)}{b(b-a)(b-c)}+\frac{(c-x)(c-y)}{c(c-a)(c-b)}$$

trong đó a, b, c khác nhau và khác 0.

Ta có :

$$P = \frac{a[a-(x+y)]+xy}{a(a-b)(a-c)}+\frac{b[b-(x+y)]+xy}{b(b-a)(b-c)}+$$
$$+\frac{c[c-(x+y)]+xy}{c(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{[a-(x+y)](c-b)+[b-(x+y)](a-c)+[c-(x+y)](b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$+xy.\left[\frac{bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}\right]=$$
$$=\frac{xy(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{xy}{abc}$$

Trường hợp riêng của bài toán ứng với $x = 2$, $y = 1002$. Kết quả, sau khi rút gọn biểu thức đã cho bằng $\dfrac{2004}{abc}$.

Nhận xét. Nhiều bạn nhận xét rằng bài toán trên tương tự như câu 9, Đề thi tuyển sinh lớp10 chuyên Toán – Tin, ĐHSP Hà Nội 2003 (*THTT số 321, tháng 3 năm 2004*). Hầu hết các bạn đều sử dụng *phương pháp hệ số bất định* để đơn giản biểu thức đã cho. Tuy nhiên phương pháp này vượt quá chương trình toán lớp 7. Những bạn sau có lời giải tốt :

Bắc Ninh : *Đỗ Thị Hiệp*, 7A, THCS Đông Thọ,Yên Phong ; **Vĩnh Phúc :** *Khổng Sơn Tùng*, 7A, THCS Hương Canh II, Bình Xuyên ; **Hà Tây :** *Đinh Hoàng Long*, 7A, THCS Tế Tiêu, Mỹ Đức ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Cao Tuấn*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, *Hoàng Thị Bình*, 7B, THCS Hoằng Đồng, Hoằng Hóa, *Lê Thị Hạnh*, 7A5, THCS Quang Trung, TP Thanh Hóa ; **Hà Tĩnh :** *Vương Bằng Việt*, 7_1, THCS Nam Hà, TX Hà Tĩnh ; **Quảng Trị:** *Lưu Văn Nguyên*, THCS Triệu Vân, Triệu Phong ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Khoa Thi*, 6^2, THCS Phú Thanh, Phú Vang ; **Gia Lai :** *Nguyễn Thị Hồng Phúc*, 4A, TH Kim Đồng, KBang ; **Khánh Hòa :** *Trần Hiếu Hoài*, 7^4, THCS Phan Chu Trinh, Diên Khánh.

HỒ QUANG VINH

Bài T3/321. *Chứng minh rằng*

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

2) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$

trong đó a, b, c, d là các số dương.

Lời giải. (Của nhiều bạn)

1) Áp dụng BĐT Cô–si cho 3 số dương, ta được :

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2}{ac}}=\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}}=\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng từng vế của các BĐT trên ta suy ra $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2) Đặt vế trái của BĐT cần chứng minh là A, vế phải là B. Áp dụng BĐT Cô–si cho 8 số dương : 3 số $\frac{a^2}{b^2}$, 2 số $\frac{b^2}{c^2}$, 1 số $\frac{c^2}{d^2}$ và 2 số 1, ta có :

$$3.\frac{a^2}{b^2}+2\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{d^2}+2 \geq 8\sqrt[8]{\frac{a^6}{b^2c^2d^2}}=\frac{8a}{\sqrt[4]{abcd}}$$

Tương tự, ta cũng có :

$$3\frac{b^2}{c^2}+2\frac{c^2}{d^2}+\frac{d^2}{a^2}+2 \geq \frac{8b}{\sqrt[4]{abcd}}$$

$$3\frac{c^2}{d^2}+2\frac{d^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+2 \geq \frac{8c}{\sqrt[4]{abcd}}$$

$$3\frac{d^2}{a^2}+2\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+2 \geq \frac{8d}{\sqrt[4]{abcd}}$$

Cộng từng vế của các BĐT trên, ta được :

$$6A + 8 \geq 8B$$

Cũng theo BĐT Cô–si thì

$$B = \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}} \geq \frac{\sqrt[4]{abcd}}{\sqrt[4]{abcd}} = 4$$

Do đó : $6A + 8 \geq 8B = 6B + 2B \geq 6B + 8$. Vậy $A \geq B$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

Nhận xét. 1) Dùng BĐT Cô–si, một số bạn đã chứng minh chính xác BĐT tổng quát :

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^k+\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^k+...+\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^k \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}},$$

trong đó $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số dương ; n, k là các số nguyên dương thỏa mãn $n \geq 2, k \geq \frac{n-1}{2}$.

2) Các bạn có lời giải ngắn gọn và các bạn có chứng minh bài toán tổng quát chính xác là :

Phú Thọ : *Trần Mạnh Trung*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Trần Tiến Mạnh*, 9A, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ ; **Vĩnh Phúc :** *Khổng Sơn Tùng*, 7A, THCS Hương Canh II, Bình Xuyên, *Trần Tấn Phong*, 8A, THCS Lập Thạch ; **Bắc Giang :** *Thân Ngọc Thức*, 9A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên ; **Hà Nội :** *Đào Đức Chính*, 9C, THCS Hoàng Liệt, Hoàng Mai ; **Nghệ An :** *Lê Ngọc Thạch*, 9A, *Lê Đình Toán*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Tiến Thịnh*, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà ; **Đắk Lắk :** *Võ Văn Tuấn*, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Thạch Lâm*, 8^1, Trường Hùng Vương, Ninh Hòa.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/321. *Tìm điều kiện cần và đủ của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :*

$$\begin{cases} x^2=(2+m)y^3-3y^2+my & (1) \\ y^2=(2+m)z^3-3z^2+mz & (2) \\ z^2=(2+m)x^3-3x^2+mx & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Để viết gọn ta đặt $F(t) = (2+m)t^2-3t+m$ và $G(t) = (2+m)t^2-4t+m$.

Điều kiện cần. Nếu (x_o, y_o, z_o) là một nghiệm của hệ thì (z_o, x_o, y_o) cũng là nghiệm, do đó, từ giả thiết nghiệm duy nhất, ta có $x_o = y_o = z_o$. Vậy nghiệm của hệ đang xét cũng là nghiệm của phương trình sau :

$x^2=(2+m)x^3-3x^2+mx$ hay $xG(x) = 0$ (4)

Dễ thấy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ là nghiệm của hệ. Từ tính duy nhất của nghiệm và từ (4) suy ra $G(x) \neq 0$ với mọi x vì nếu $0 = G(0) = m$ thì $G(x)$ còn có nghiệm $x = 2$ nữa. Suy ra $\Delta_G = 4 - m(m+2) < 0$. Giải BPT này ta được $m < -1-\sqrt{5}$ hoặc $m > -1+\sqrt{5}$ (*)

Điều kiện đủ. Ta sẽ chứng minh (*) cũng là điều kiện đủ. Từ điều kiện (*) suy ra $G(t) \neq 0$ với mọi t và $(2 + m)G(t) > 0$ với mọi t (5).

Cũng từ điều kiện (*) có $\Delta_F = 3^2-4m(m+2)<0$ và $(2+m)F(t) > 0$ với mọi t. Xét PT (1) có $xF(x) = z^2 \geq 0$ với mọi x suy ra $(2+m)x \geq 0$. Từ đó và (5) suy ra $xG(x) \geq 0$ với mọi x.

Tương tự xét PT(2), PT(3) cũng có $yG(y) \geq 0$ và $zG(z) \geq 0$ với mọi y, z. Cộng theo từng vế của ba phương trình (1), (2), (3) của hệ ta có

$$xG(x) + yG(y) + zG(z) = 0 \qquad (6)$$

Vế phải của (6) là tổng ba số không âm do đó $xG(x) = yG(y) = zG(z) = 0$. Vì $G(t) \neq 0$ với mọi t nên $x = y = z = 0$ và hệ có nghiệm duy nhất.

Kết luận. Điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm duy nhất là $m <-1-\sqrt{5}$ hoặc $m > -1+\sqrt{5}$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn tìm được điều kiện cần, một số chứng minh điều kiện đủ bằng cách xét m trong hai khoảng. Sau đây là một số bạn lớp 8, 9 có lời giải chính xác và ngắn gọn :

Vĩnh Phúc : *Đoàn Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên, TX Vĩnh Yên ; **Phú Thọ :** *Cao Quyết Thắng*, 9A, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ ; **Bắc Giang :** *Giáp Văn Tam*, 9E, THCS Việt Lập, Tân Yên ; **Bắc Ninh :** *Đồng Quốc Bằng*, 7C, THCS Việt Ngọc, Tân Yên, *Đỗ Văn Chuẩn*, 9C, THCS Yên Phong ; **Hà Tây :** *Trịnh Ngọc Tú*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ ; **Nam Định :** *Đoàn Thị Duyên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Cao Mạnh Hùng*, 8A, THCS Yên Định, Hải Hậu ; **Hải Phòng :** *Phạm Thị Thanh Huyền*, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo ; **Thanh Hóa :** *Vương Quốc Bắc*, 9A, THCS Quảng Ngọc, Quảng Xương,*Lê Bá Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 9B, *Lê Quang Trưởng*, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Quảng Nam :** *Nguyễn Dương Nguyên*, 9/1, THCS Nguyễn Du, Tam Kỳ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Thị Hoàng Oanh*, 9[1], THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa, *Võ Thái Thông*, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa.

PHAN DOÃN THOẠI

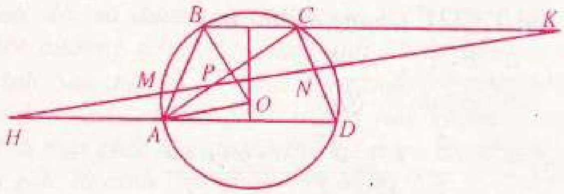
Bài T5/321. *Cho hình thang ABCD nội tiếp trong đường tròn bán kính R = 3cm với BC = 2 cm và AD = 4cm. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho MB = 3MA. Gọi N là trung điểm của cạnh CD. Đường thẳng MN cắt AC tại điểm P. Tính diện tích tứ giác APND.*

Lời giải. Kí hiệu S là diện tích.

Đường thẳng MN cắt các đường thẳng BC, AD lần lượt ở K và H. Áp dụng định lí Ta-let ta có :

$$\frac{HA}{BK} = \frac{MA}{BM} = \frac{1}{3}, \frac{HD}{CK} = \frac{DN}{CN} = 1. \quad (1)$$

Từ (1) và giả thiết suy ra



Hình 1

$2 + CK = 3HA$

$HA + 4 = CK$

nên $HA = 3$ (cm) và $CK = 7$ (cm)

Từ $\frac{CP}{PA} = \frac{CK}{HA} = \frac{7}{3}$ suy ra $\frac{CP}{AC} = \frac{7}{10}$.

Từ đó $\frac{S_{CPN}}{S_{CAD}} = \frac{CP}{CA} \times \frac{CN}{CD} = \frac{7}{20}$.

Nên $S_{APND} = \frac{20-7}{20} \times S_{CAD} = \frac{13}{20} S_{CAD}$

Mà chiều cao ΔCAD bằng chiều cao hình thang $ABCD$ và có 2 trường hợp :

1)Tâm O của đường tròn nằm trong $ABCD$ (h.1)

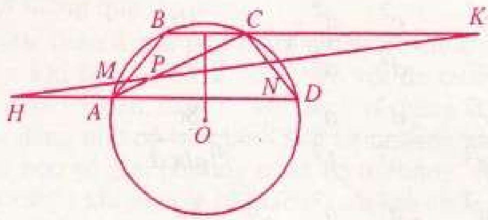
$$h = \sqrt{BO^2 - \frac{BC^2}{4}} + \sqrt{AO^2 - \frac{AD^2}{4}} =$$

$= 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$ (cm).

Lúc đó

$$S_{APND} = \frac{13}{20}(2\sqrt{2}+\sqrt{5}) \times \frac{4}{2} = \frac{13}{10}(2\sqrt{2}+\sqrt{5}) \text{ (cm}^2\text{)}$$

2) Tâm O của đường tròn nằm ngoài $ABCD$) (h. 2)



Hình 2

$$h = \sqrt{BO^2 - \frac{BC^2}{4}} - \sqrt{AO^2 - \frac{AD^2}{4}} =$$

$= 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ (cm)

Lúc đó

$$S_{APND} = \frac{13}{20}(2\sqrt{2}-\sqrt{5}) \times \frac{4}{2} = \frac{13}{10}(2\sqrt{2}-\sqrt{5}) \text{ (cm}^2\text{)}$$

Nhận xét. 1. Số bạn giải bài tập hình chỉ dựa vào hình vẽ còn nhiều, nên nhiều bạn chỉ có 1 đáp số.

2. Giải tốt bài này có các bạn :

Phú Thọ : *Nguyễn Ngọc Thanh*, 9A, THCS Phong Châu, TX PT, *Dương Thu Hiền*, 9A3, THCS Hạ Hòa ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Sơn Tùng*, 9C, *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên, *Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Hưng Yên :** *Bùi Thanh Huyền*, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hà Nam :** *Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lí ; **Nam Định :** *Vũ Thị Thúy Nga*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Bá Tuấn Anh*, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Lê Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Trịnh Văn Nam*, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; *Dương Tuấn Anh*, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Bình :** *Phạm Tiến Đồng*, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Quảng Ngãi :** *Hồ Kim Đức*, 9/1, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn ; **Đồng Nai :** *Hoàng Phúc Hưng*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa

VŨ KIM THỦY

Bài T6/321. *Cho ba số nguyên dương m, n, p sao cho n+1 chia hết cho m. Hãy tìm công thức tính số các bộ $(x_1, x_2, ..., x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $x_1 + x_2 + ... + x_p$ chia hết cho m, trong đó mỗi số $x_1, x_2, ..., x_p$ đều không lớn hơn n.*

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Huỳnh Trung Anh*, 10T1, Hà Nội–Amsterdam, **Hà Nội**).

Giả sử $n = km - 1$. Kí hiệu $E = \{1, 2, ..., km\}$; $D = \{km\}$.

$$A=\left\{(x_1,x_2,...,x_p) | x_1,x_2,...,x_p \in E\setminus D,\ \sum_{i=1}^{m} x_i \vdots m\right\}$$

$$B=\left\{(x_1,...,x_p) | x_1,...,x_p \in E \text{ và } \sum_{i=1}^{p} x_i \vdots m\right\}$$

$$C_i=\left\{(x_1,...,x_p) | x_1,...,x_p \in E \text{ sao cho } x_i \in D, \sum_{i=1}^{p} x_i \vdots m\right\}$$

Ta thấy $|A| = |B| - |C|$ với $C = \bigcup_{i=1}^{p} C_i$

• *Tính* $|B|$: Có km cách chọn x_1, km cách chọn x_2, ..., km cách chọn x_{p-1}. Với mỗi cách chọn $(x_1, ..., x_{p-1})$ thì $x_p \equiv m - \sum_{i=1}^{p-1} x_i \pmod m$ và $x_p \le km$. Do đó x_p chỉ có k cách chọn.

Vậy $|B| = (km)^{p-1}.k = k^p m^{p-1}$

• *Tính* $|C|$: Theo công thức tính số phần tử của hợp của p tập hợp ta có :

$$|C| = \sum_{i=1}^{p} |C_i| - \sum_{1\le i_1 < i_2 \le p} |C_{i_1} \cap C_{i_2}| + ... + (-1)^{j-1} \sum_{1\le i_1 < i_2 < ... < i_j \le p} |C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap ... \cap C_{i_j}| + ... + (-1)^{p-1} |C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_p| \quad (1)$$

Lí luận tương tự như tính $|B|$ ta có

$$|C_{i_1} \cap C_{i_2} ... \cap C_{i_j}| = k^{p-j} m^{p-j-1} \quad (2)$$

và $|C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_p| = 1$

Thay (2) vào (1) ta được

$$|C| = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} C_p^j k^{p-j} m^{p-j-1} + (-1)^{p-1}$$

$$= -\frac{1}{m}\left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^{j-1} C_p^j (km)^{p-j} - (km)^p - (-1)^p\right) + (-1)^{p-1}$$

$$= -\frac{1}{m}\left((km-1)^p - (km)^p - (-1)^p\right) + (-1)^{p-1} \quad (3)$$

Từ đó

$$|A| = |B| - |C| =$$

$$= \frac{k^p m^p}{m} + \frac{1}{m}\left((km-1)^p - (km)^p - (-1)^p\right) + (-1)^p$$

$$= \frac{1}{m}\left(n^p - (-1)^p\right) + (-1)^p$$

Nhận xét: Nhiều bạn cho đáp số là một tổng các tổ hợp. Như thế chưa đáp ứng được yêu cầu.

Các bạn có lời giải tốt : **Bắc Giang :** *Nguyễn Tuyết Mai*, 12A, THPT NK Bắc Giang ; **Vĩnh Phúc :** *Bùi Hữu Đức*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** *Trần Hữu Hiếu*, 11 Toán, THPT Hùng Vương ; **Hà Nội :** *Đỗ Hoàng Khiêm*, 11A1, PTCT Tin, ĐHSP Hà Nội ; **Thanh Hóa :** *Trần Văn Thiện*, 12C5, THPT Lam Sơn ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Tuấn Minh*, 10T, THPT Quốc học Huế ; **Đà Nẵng :** *Trương Minh Tiến*, 11A, THCS Lê Quý Đôn ; **Đắk Lắk :** *Nguyễn Đình Minh Anh*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/321. *Giả sử với hai số dương a, b thì phương trình $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ có ba nghiệm lớn hơn 1. Xác định giá trị a, b để biểu thức $\frac{b^n - 3^n}{a^n}$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị đó (n là số nguyên dương cho trước).*

Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình. Theo định lí Vi–et thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b & (2) \\ x_1x_2x_3 = a & (3) \end{cases}$$

Theo BĐT về trung bình cộng và trung bình nhân, ta được

$x_1 + x_2 + x_3 \ge 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ hay $a \ge 3\sqrt[3]{a}$.

Theo BĐT $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ thì

$b^2 = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 \ge$

$\ge 3(x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = 3a^2$ hay $b \ge \sqrt{3}a$.

Vậy nên

$$P \ge \frac{\sqrt{3^n a^n} - 3^n}{a^n} = \sqrt{3n} - \frac{3^n}{a^n} \ge 3^{n/2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}a = 9$.

Khi đó phương trình có 3 nghiệm trùng nhau và đều bằng $\sqrt{3}$. Vậy $P_{\min} = \frac{3^n - 1}{3^{n/2}}$ khi $a = 3\sqrt{3}$, $b = 9$.

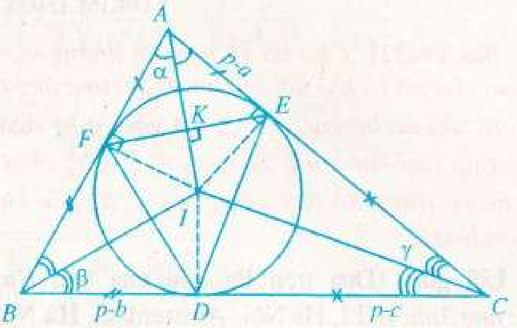
Nhận xét. Đây là một bài tập loại dễ nên có rất nhiều bạn tham gia giải và gửi bài đến Tòa soạn. Các bạn đều giải đúng và đa số giải theo các cách trình bày đã nêu ở trên. Một số bài giải bằng phương pháp lượng giác hoặc BĐT Cô-si nên dài hơn. Tuy trong đề bài ở số báo trước đây không nói đến giá trị số n, nhưng các bạn vẫn hiểu n nguyên dương và là một số cho trước.

Xin nêu tên một số bạn lớp 10 và THCS cũng giải đúng bài này : **Hà Nội :** *Cao Thị Tĩnh*, 10A2, ĐHKHTN, *Nguyễn Hoài Phương*, 10A2, ĐHSP ; **Hà Tây :** *Dư Anh Hùng*, 10T, THPT Nguyễn Huệ, *Nguyễn Viết Nam*, 9C, THCS Thạch Thất ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Tấn Phong*, 8A, THCS Lập Thạch, *Ngô Tuấn Anh*, 9B, THCS Xuân Hòa, *Đỗ Đình Thanh*, *Nguyễn Hữu Kiên*, *Nguyễn Kim Thuật*, *Đoàn Mạnh Hùng*, 9A, THCS Yên lạc, *Lê Công Truyền*, *Lê Trường Sơn*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Dương :** *Bùi Việt Đức*, 10K , THPT Kim Thành, *Nguyễn Đình Trung*, *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Bắc Giang :** *Nguyễn Ngọc Tú*, 10A15, THCS Lục Ngạn, *Phùng Lưu Ly*, 10A2, *Hoàng Minh Tuân*, *Phi Kim Ngân*, 10B, THPT Ngô Sĩ Liên ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Thị Hằng*, 10A11, THPT Ba Bình II ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Quốc Huy*, THPT Hùng Vương ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Quốc Khương*, 10T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Hưng Yên:** *Bùi Quang Huy*, *Vũ Thanh Xuân*, 10T, THPT chuyên ; **Thái Bình :** *Nguyễn Văn Chuyển*, 10T, THPT chuyên ; **Yên Bái :** *Hoàng Thanh Tùng*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Quảng Ninh :** *Nguyễn Đình Long*, *Hoàng Trung Hiếu*, 10T, THPT Yên Hưng ; **Nam Định :** *Nguyễn Văn Trắc*, 10T2, THPT Lê Hồng Phong ; **Thanh Hóa :** *Lê Ngọc Tuấn*, 9B, THCS Như Bá Sỹ, *Trịnh Thành Kiên*, 10T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Phạm Quang Khang*, 10A1, THPT Phan Bội Châu, *Nguyễn Tử Diễn*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, *Nguyễn Lê Phước*, *Trần Duy Hân*, *Lê Hồng Quý*, 10A2, ĐH Vinh ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Thị Bích Liên*, *Lê Viết Ân*, 10G, Quốc học Huế ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Tường Huân*, 10, THPT Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** *Lương Bá Linh*, 10T, THPT Lê Khiết ; **TP Hồ Chí Minh:** *Mai Thanh Long*, 10A6, THPT chuyên, *Nguyễn Ánh Dương*, 10T, ĐHKHTN ; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Minh Trí*, *Lữ Thiện Nhân*, *Bùi Kiệm*, 10T, THPT Sa Đéc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/321. *Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng :*

$$\frac{DE}{\sqrt{BC.CA}} + \frac{EF}{\sqrt{CA.AB}} + \frac{FD}{\sqrt{AB.BC}} \le \frac{3}{2} \quad (*)$$



Lời giải. (Của nhiều bạn). Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; $a+b+c = 2p$; $\widehat{A} = 2\alpha$, $\widehat{B} = 2\beta$, $\widehat{C} = 2\gamma$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, $AI \perp EF$ tại K. Thế thì ta được : $AE = AF = p - a$, $BF = BD = p - b$, $CD = CE = p - c$, và $EF = 2EK = 2(p-a)\sin\alpha$ (1)

Tương tự : $FD = 2(p-b)\sin\beta$ và

$DE = 2(p-c)\sin\gamma$.

Mặt khác, áp dụng định lí hàm số côsin vào ΔABC và công thức $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$, ta thu được hệ thức sau (và hai hệ thức tương tự):

$$\sin^2\alpha = \frac{(p-b)(p-c)}{bc} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$\frac{EF}{\sqrt{CA.AB}} = \frac{2(p-a)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{bc} \quad (3)$$

Áp dụng BĐT về trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương, ta lại được :

$$\begin{cases} b = (p-c) + (p-a) \ge 2\sqrt{(p-c)(p-a)} \\ c = (p-a) + (p-b) \ge 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \end{cases}$$

và từ đó suy ra : $bc \geq 4(p-a)\sqrt{(p-b)(p-c)}$ (4)

Cuối cùng, từ (3) và (4) ta thu được BĐT (5) và hai BĐT tương tự :

$$\frac{EF}{\sqrt{bc}} \leq \frac{1}{2} \qquad (5)$$

Cũng vậy : $\frac{FD}{\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{2}$ và $\frac{DE}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra ở (5) (cũng như ở hai BĐT tương tự) khi và chỉ khi $p-c = p-a$ và $p-a$ và $p-a = p-b$, nghĩa là $a = b = c$.

Từ đó, ta thu được BĐT (*) cần tìm. Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi tam giác ABC là đều.

Nhận xét. 1) Bài toán này thuộc loại dễ, tòa soạn nhận được 346 lời giải của bài toán, và tất cả đều cho lời giải đúng. Điểm mấu chốt của bài toán là chứng minh các BĐT : $2EF \leq \sqrt{bc}$, $2FD \leq \sqrt{ca}$ và $2DE \leq \sqrt{ab}$. Số lời giải trình bày tương đối gọn gàng như trên chỉ chiếm khoảng 20%. Phần đông các bạn sử dụng quá nhiều các đẳng thức và BĐT lượng giác hoặc đại số làm cho lời giải dài dòng hoặc tính toán cồng kềnh, phức tạp. Cũng đa số các bạn không phát hiện được riêng rẽ ba BĐT nói trên mà chỉ chứng minh BĐT (*) cần tìm trên bình diện tổng thể. Một số không ít bạn không chỉ ra khi nào và chỉ khi nào BĐT (*) trở thành đẳng thức.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt hoặc tương đối gọn gàng :

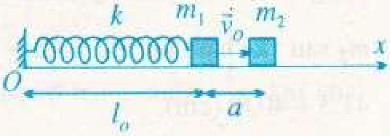
Hà Nội : *Hoàng Trường Minh*, 10D1, THPT Chu Văn An, Q. Tây Hồ ; **Bắc Ninh :** *Ngô Sĩ Liên*, 12A11, THPT Lý Thái Tổ, Từ Sơn, *Nguyễn Tiến Phong*, 10A18, THPT Yên Phong I, *Nguyễn Bá Chuyên*, 12A1, THPT Quế Võ I; **Bắc Giang :** *Phạm Văn Trường*, 10A10, THPT Ngô Sĩ Liên, *La Văn Thịnh*, THPT Hiệp Hòa II ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Tấn Phong*, 8A, THCS Lập Thạch, *Nguyễn Kim Thuật*, 9A, THCS Yên Lạc, *Vũ Văn Quang*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Quang Huy*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Tp. Việt Trì ; **Thái Nguyên :** *Lê Hoàng Mai*, 11A1, THPT Gang thép, Thái Nguyên ; **Yên Bái :** *Văn Đình Lâm*, 10T, *Nguyễn Anh Thế*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Điện Biên :** *Đỗ Phương Thùy*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Hải Dương :** *Vũ Đình Quý*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, *Lê Quang Vinh*, *Vương Thành Liêm*, 11A1, THPT Nam Sách, *Phạm Văn Dương*, *Phạm Hoàng Thái*, 10K, THPT Kim Thành, *Nguyễn Anh Tuấn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Hưng Yên :** *Bùi Quang Huy*, *Nguyễn Duy Lợi*, *Vũ Thanh Xuân*, 10 Toán, *Nguyễn Đức Sơn*, *Nguyễn Anh Tâm*, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên ; **Hà Nam :** *Nguyễn Minh Thành*, 11A1, THPT chuyên Hà Nội ; **Nam Định :** *Phạm Cao Kỳ*, 10A5, THPT Hải Hậu, *Trần Văn Thuấn*, 10A, THPT Trực Ninh, *Đỗ Quang Điển*, 12A2, THPT Nam Trực ; **Thái Bình :** *Nguyễn Đức Thiện*, 11A1, THPT Đông Thuỵ Anh, Thái Thụy, *Chu Văn Thắng*, 10A1, THPT Chu Văn An, Kiến Xương ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Thị Thùy Linh*, 10C2, THPT Tiên Lãng, *Phạm Trung Đoàn*, 11B1, THPT Vĩnh Bảo ; **Quảng Ninh :** *Nguyễn Thị Huyền*, 12A5, THPT Vũ Văn Hiếu, Hà Tu ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Văn Vương*, 9B, THCS Điện Biên, Tp. Thanh Hóa, *Lê Xuân Thống Nhất*, *Lê Hữu Tuấn*, *Lê Ngọc Tuấn*, *Lê Viết Tuấn*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đỗ Thị Hương*, 11A3, THPT Yên Định I, *Phạm Hoàng Hùng*, 10B, THPT Hà Trung ; **Nghệ An :** *Trương Việt Đức*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Phan Quang Anh*, 10A3, *Hồ Văn Dũng*, *Lê Hồng Quý*, 10A2, PTCT, ĐH Vinh, *Bùi Hoàng Vương*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Nguyễn Ngọc Hiển*, 10A1, *Nguyễn Xuân Dũng*, 11A1, THPT Phan Đăng Lưu, *Trần Xuân Tùng*, 10A12, THPT Diễn Châu II ; **Hà Tĩnh** *Đoàn Võ Minh Huệ*, 11A1, THPT Minh Khai, *Lê Đình Lĩnh*, 11A1, THPT Trần Phú, Đức Thọ, *Nguyễn Thị Phong*, 10 Toán, *Hoàng Thanh Hà*, 10 Lý K9, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Quảng Bình :** *Phạm Hùng*, 11T, THPT chuyên Quảng Bình ; **Quảng Trị :** *Nguyễn Tự Hành*, 10T, *Nguyễn Hà Lan Phương*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Nguyễn Trác Việt*, 12A1, THPT Thị xã Quảng Trị ; **Thừa Thiên – Huế :** *Nguyễn Thị Bích Liên*, 10T, *Nguyễn Tuấn Minh*, 10/5, THPT Quốc học Huế ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Tường Huân*, *Nguyễn Đình Tuấn*, 10/1, *Dương Đạt Nguyên*, 111, THPT chuyên Lê Quý Đôn, *Huỳnh Đức Nhã*, 10A12, THPT Phan Châu Trinh ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Văn Cường*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Khiết ; **Phú Yên :** *Nguyễn Quốc Hưng*, 10A3, THPT DL Duy Tân, Thị xã Tuy Hòa ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 8/4 THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Ram Ranh ; **Lâm Đồng :** *Nguyễn Ngọc Quang Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP Đà Lạt ; **Đồng Nai:** *Nguyễn Thị Thùy An*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, *Nguyễn Thanh Tùng*, 11D10, THPT Dầu Giây ; **TP. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Tuấn Tú*, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, *Lê Đăng Khoa*, 11 Toán, THPT NK ĐHQG TP Hồ Chí Minh ; **Đồng Tháp :** *Lữ Thiện Nhân*, *Nguyễn Minh Trí*, 10T, THPT Thị xã Sa Đéc.

Ngoài ra, bạn *Hoàng Vũ Thao*, 10K1, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa** còn đặt thêm một bài toán mới : Chứng minh BĐT sau :

$$\frac{a^2}{a_1^2}+\frac{b^2}{b_1^2}+\frac{c^2}{c_1^2} \geq 12 \text{, trong đó : } \begin{cases} a_1 = EF,\ b_1 = FD \\ \text{và } c_1 = DE \end{cases}$$

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/321. *Một khúc gỗ nhỏ khối lượng $m_1 = 100g$ gắn vào một lò xo không khối lượng, có chiều dài tự nhiên $l_o = 40cm$, độ cứng $k = 100N/m$, một đầu lò xo gắn vào tường. Vật nhỏ khác khối lượng $m_2 = 400g$ đặt trên cùng một mặt phẳng nằm ngang với m_1 dọc theo trục lò xo và cách m_1 một đoạn $a = 2cm$. Hai vật có thể chuyển động không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang. Tại thời điểm $t = 0$ (lúc m_1 đang ở vị trí cân bằng), người ta truyền cho m_1 một vận tốc $v_o = 40\pi$ cm/s theo trục lò xo. Sau khi va chạm với m_2 thì m_1 dao động điều hòa với biên độ $A = \sqrt{7}$ cm.*



Chọn trục tọa độ Ox như hình vẽ. Hãy viết phương trình chuyển động của các vật. Lấy $\pi^2 = 10$.

Lời giải.

• Trước khi m_1 va chạm vào m_2, m_2 có tọa độ $x_{O2} = l_o + a = 42$ (cm) còn m_1 có tọa độ $x_{O2} = l_o = 40$cm. Phương trình dao động của m_1 là $x_1 = x_{O1} + A\sin(\omega t + \varphi)$, với $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\pi$ (rad/s).

Từ điều kiện ban đầu (lúc $t = 0$), $x_{O1} = 40$cm và $v_{O1} = 40\pi$ (cm/s) tìm được A = 4cm và $\varphi = 0$. Phương trình dao động của m_1 lúc $t = 0$ là $x_1 = 40 + 4\sin 10\pi t$ (cm)

Thời gian m_1 chuyển động từ vị trí cân bằng đến khi va chạm với m_2 là : $40\sin 10\pi t = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{60}$ (s).

Sau khi va chạm với m_2, m_1 chuyển động ngược chiều và dao động với biên độ $\sqrt{7}$ (cm), vì vậy phương trình dao động của m_1 khi $t > \frac{1}{60}$ (s) là : $x'_1 = 40 + \sqrt{7}\sin(10\pi t + \varphi)$ (cm), với điều kiện khi $t = \frac{1}{60}$ (s) thì $x'_1 = 42$cm. Suy ra $\varphi \approx 1{,}76$rad. Như vậy, sau khi va chạm với m_2, phương trình dao động của m_1 là : $x'_1 = 42 + \sqrt{7}\sin(10\pi t + 1{,}76)$ (cm)

• Xét chuyển động của m_2 khi $t > \frac{1}{60}(s)$. Vận tốc của m_1 trước và sau khi va chạm với m_2 tương ứng là : $v = 10\pi\sqrt{4^2 - 2^2} = 20\pi\sqrt{3}$ (cm/s) và $v_1 = 10\pi\sqrt{7 - 2^2} = 10\pi\sqrt{3}$(cm/s)

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng tìm được vận tốc của m_2 sau va chạm là : $v_2 = 7{,}5\pi\sqrt{3}$ (cm/s). Sau va chạm m_2 chuyển động đều. Vậy phương trình chuyển động của m_2 sau va chạm là : $x'_2 = 42 + 7{,}5\pi\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{60}\right) = 41{,}3 + 40{,}8t$ (cm).

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Vĩnh Phúc : *Hoàng Thị Hồng Hạnh*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hưng Yên :** *Phạm Quốc Việt*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên.

MAI ANH

Bài L2/321. *Hệ thấu kính đồng trục O_1, O_2 có thấu kính phân kì O_1 và thấu kính hội tụ O_2 với $f_2 = 6cm$. Trước O_1, trên trục chính của hệ có một điểm sáng S cách O_1 một đoạn 10cm. Sau O_2 đặt màn E vuông góc trục chính cách O_1 một đoạn 15cm. Giữ S, O_1, màn E cố định, di chuyển O_2 dọc theo trục chính người ta thấy ở hai vị trí của nó cách nhau một đoạn l = 6cm thì vệt sáng trên màn đều có đường kính bằng 1/3 đường kính rìa của O_2 (nếu dịch màn ra xa kích thước vệt sáng giảm).*

Hãy tính tiêu cự f_1 của thấu kính O_1 ?

Lời giải. Sơ đồ tạo ảnh :

$$S \xrightarrow[d_1 \quad d'_1]{O_1} S_1 \xrightarrow[d_2 \quad d'_2]{O_2} S_2$$

Theo đề bài, S_2 là ảnh thật ($d'_2 > 0$). Kí hiệu x là khoảng cách từ O_2 đến màn E, ta có : $d_2 = 15 - d'_1 - x = a - x$, với $a = 15 - d'_1$ (1) (chú ý là $d'_1 < 0$). Theo đề bài : $\frac{d'_2 - x}{d'_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = 2d'_2$ (2). Mặt khác $d'_2 = \frac{d_2 f_2}{d_2 - f_2}$, với $f_2 = 6$(cm).

Do đó, chú ý đến (1) và (2), ta có : $\frac{3x}{2} = \frac{(a-x)6}{a-x-6} \Rightarrow 3x^2 - (3a - 6)x + 12a = 0$ (3)

Theo đề bài, có hai vị trí của O_2 cách nhau là $l = 6$cm đều cho vệt sáng có cùng kích thước. Muốn vậy hai nghiệm x_1 và x_2 phải thỏa mãn điều kiện : $x_2 - x_1 = l \Rightarrow \Delta = (3a - 6)^2 - 144a = (3 \times 6)^2 = 324 \Rightarrow a^2 - 20a - 32 = 0 \Rightarrow a \approx 21{,}49$ (loại nghiệm âm) $\Rightarrow d'_1 = 15 - a \approx -6{,}49$ cm $\Rightarrow f_1 = \frac{d_1 d'_1}{d_1 + d'_1} \approx 18{,}6$cm.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng :

Bắc Ninh : *Phạm Anh Tú, Trần Văn Hòa*, 11 Lí, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Vĩnh Phúc :** *Hoàng Thị Hồng Hạnh*, 11A3, *Trần Ngọc Linh*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Giang :** *Hồ Năng Tân*, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Ninh Bình :** *Đinh Xuân Lấp*, 12 Lí, THPT Lương Văn Trọng ; **Hà Nội :** *Hoàng Đức Thành*, 10A, khối PT chuyên Lí, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội ; **Quảng Ngãi :** *Lê Hà Kiệt*, 11A2, THPT Đức Phổ I, Đức Phổ ; **Hưng Yên :** *Hoàng Huy Đạt*, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Nam Định :** *Ngô Tiến Đạt*, 12C5, THPT A Hải Hậu ; **Thanh Hóa :** *Đỗ Thanh Thủy*, 12A3, THPT Bỉm Sơn.

MAI ANH

CUỘC THI KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bài T1/THCS. *Viết 2004 số tự nhiên từ 1 đến 2004 theo một thứ tự nào đó được dãy số a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{2003}, a_{2004}. Tìm giá trị lớn nhất của tổng*

$$P = \sqrt{a_1 + a_2} + \sqrt{a_3 + a_4} + ... + \sqrt{a_{2003} + a_{2004}}$$

khi thay đổi thứ tự của dãy số.

Lời giải. Trước hết, ta có tổng của 2004 số tự nhiên liên tiếp đầu tiên bằng

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2003 + 2004 =$
$= (1 + 2004) + (2 + 2003) + ... + (1002 + 1003)$
$= 1002.2005$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được :

$$\sqrt{2005.(a_1+a_2)} \le \frac{2005+(a_1+a_2)}{2}$$

hay $\sqrt{a_1+a_2} \le \dfrac{2005+(a_1+a_2)}{2.\sqrt{2005}}$

Cũng tương tự, lần lượt ta có :

$$\sqrt{a_3+a_4} \le \frac{2005+(a_3+a_4)}{2.\sqrt{2005}}$$

. . . .

$$\sqrt{a_{2003}+a_{2004}} \le \frac{2005+(a_{2003}+a_{2004})}{2.\sqrt{2005}}$$

Cộng theo từng vế tất cả 1002 bất đẳng thức trên, ta được một bất đẳng thức mà vế trái của nó là tổng P còn trong vế phải có

$a_1+a_2+a_3+a_4+...+ a_{2003} + a_{2004} = S = 1002.2005$

Nghĩa là :

$$P \le \frac{1002.2005+S}{2\sqrt{2005}} = \frac{1002.2005+1002.2005}{2\sqrt{2005}}$$

$= 1002.\sqrt{2005}$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = ... = a_{2003} + a_{2004} = 2005$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $1002.\sqrt{2005}$

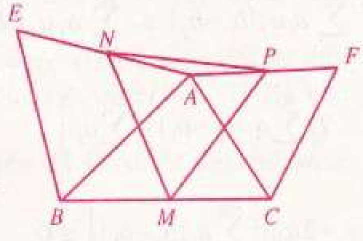
Nhận xét. Nhiều bạn đã sử dụng BĐT Bunhiacôpski tổng quát để giải bài trên nhưng kiến thức này không thuộc chương trình toán cấp THCS.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/THCS. *Cho tứ giác lồi ABCD với AC = BD và AC vuông góc với BD. Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác đều ABX, BCY, CDZ, DAT. Chứng minh rằng XZ = YT và XZ vuông góc với YT.*

Lời giải. Trước hết xin phát biểu (không chứng minh) một bổ đề quen thuộc

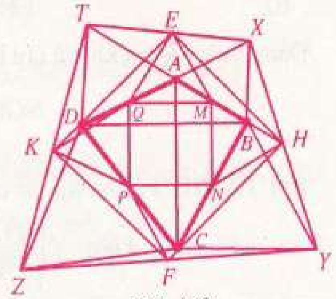
Bổ đề. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài nó (hoặc về phía trong) ta dựng các tam giác đều ABE, ACF. Các điểm M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, AE, AF. Khi đó, tam giác MNP đều (h. 1)



Hình 1

Trở lại bài toán của ta (h. 2)

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Từ giả thiết $AC = BD$; $AC \perp BD$, dễ thấy $MNPQ$ là hình vuông (1)



Hình 2

Gọi H, F, K, E lần lượt là trung điểm của XY, YZ, ZT, TX. Theo bổ đề trên, các tam giác MNH, NPF, PQK, QME là đều (2)

Từ (1), (2) suy ra : $HFKE$ là hình vuông $\Rightarrow$ $EK = EH$; $EK \perp EH$ (3)

Chú ý rằng : $XZ \parallel EK$ và $XZ = 2EK$; $YT \parallel EH$ và $YT = 2EH$ (4)

Từ (3), (4) suy ra : $XZ = YT$; $XZ \perp YT$

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T1/THPT. *Dãy số (a_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi $a_1 = \dfrac{1}{2^{1965}}$, $a_n = \dfrac{-1}{2^{1964+n}}$ với $n = 2, 3, ..., 40$.*

Chứng minh rằng với mọi số thực b_1, b_2, ..., b_{40} thì bất đẳng thức sau đúng

$$\sum_{i,j=1}^{40} a_i a_j \,|\, b_i - b_j \,|\, \le 0$$

Lời giải. *Nhận xét.* Với mọi $i \ge 2$, $j \ge 2$, $a_i a_j > 0$ và $|b_i - b_j| \le |b_i - b_1| + |b_j - b_1|$, nếu trong hai số i, j có một số bằng 1 thì $|b_i - b_j| = |b_i - b_1| + |b_j - b_1|$.

Do đó

$$\sum_{i,j=1}^{40} a_i a_j |b_i - b_j| \le \sum_{i,j=1}^{40} a_i a_j \left(|b_i - b_1| + |b_j - b_1|\right)$$

$$= 2\left(\sum_{i=2}^{40} a_i |b_i - b_1|\right)\left(\sum_{i=1}^{40} a_i\right)$$

$$= -2a_{40}\left(\sum_{i=2}^{40} a_i |b_i - b_1|\right) \le 0$$

vì $\sum_{i=1}^{40} a_i = -a_{40}$ và $a_i < 0$ với mọi $i = 2, 3, \ldots, 40$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b_1 = b_2 = \ldots = b_{40}$.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T2/THPT. *Tìm tất cả các hàm $f : R^+ \to R^+$ thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{f(x)}{y}\right) = y.f(y).f(f(x))$ với mọi số thực dương x, y.*

Lời giải. Xét hệ thức :

$$f\left(\frac{f(x)}{y}\right) = y.f(y)f(f(x)),\ \forall x > 0, \forall y > 0 \quad (1)$$

+ Cho $y = 1$, ta có : $f(f(x)) = f(1).f(f(x))$, $\forall x > 0$ vì $f(f(x)) > 0 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(f(1)) = f(1) = 1$

+ Cho $x = 1$, ta có :

$$f\left(\frac{f(1)}{y}\right) = y.f(y).f(f(1)),\ \forall y > 0$$

suy ra $y.f(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)$, $\forall y > 0$ (2)

Từ (2) sử dụng (1) ta biến đổi như sau :

$$f(f(y)) = f\left(\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y}\right) = y.f(y)f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = y.f(y).f(y.f(y))$$

$$= y.f(y).f\left(\frac{f(y)}{\frac{1}{y}}\right) = y.f(y).\frac{1}{y}.f\left(\frac{1}{y}\right)f(f(y))$$

$$= f(y).f\left(\frac{1}{y}\right).f(f(y)) \Rightarrow f(y).f\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \quad (3)$$

Nhân theo từng vế (2) và (3) rồi giản ước cho $f\left(\frac{1}{y}\right) > 0$ ta được : $y.f^2(y) = 1$, $\forall y > 0$

$\Rightarrow f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $\forall y > 0$ hay $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$

+ Thử lại dễ thấy hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in R^+$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vậy hàm số duy nhất thỏa mãn điều kiện bài toán là $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x > 0$.

Nhận xét. Một số bạn mắc phải sai lầm sau :

Khi có (2) đặt $z = f(x) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$, rồi kết luận luôn $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ là hàm cần tìm. Sai lầm ở chỗ là ta chưa biết $z = f(x)$ có phải là toàn ánh hay không, nghĩa là công thức đó không chắc xác định với mọi $z \in R^+$.

ĐẶNG THANH HẢI

Từ kì thi 1974, từ năm sinh 1974 và ba mươi năm sau

THỊNH VĂN

Mùa hè năm 1974, nghĩa là chỉ sau chưa đầy 9 năm kể từ khi các lớp chuyên Toán được thành lập ở các trường Đại học và ở các tỉnh miền Bắc, hơn một năm sau khi miền Bắc không còn phải hứng chịu bom đạn Mỹ, lần đầu tiên nước ta cử 5 học sinh đi tham dự kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 16. Đó là : *Vũ Đình Hòa, Hoàng Lê Minh, Tạ Hồng Quảng, Đặng Hoàng Trung và Nguyễn Quốc Thắng*, học sinh lớp 10 (hệ phổ thông 10 năm) chuyên Toán của Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội I. Đoàn học sinh được thầy giáo Lê Hải Châu làm trưởng đoàn và GS Phan Đức Chính làm phó đoàn dẫn đi thi. Lần đó đoàn học sinh Việt Nam đem về cho nước nhà 1 giải nhất (*Hoàng Lê Minh*), 1 giải nhì (*Vũ Đình Hòa*) và 2 giải ba. Hiếm có một đội nào lần đầu tham gia đã có nhiều giải như vậy và có cả giải nhất nữa. Thành tích ngoài sự mong đợi này làm nức lòng mọi người. Nó không chỉ khẳng định sự đúng đắn của chủ trương của Đảng và Nhà nước về việc thành lập các lớp chuyên Toán nhằm phát hiện, bồi dưỡng những "mầm non toán học" Việt Nam mà còn chứng tỏ năng lực học toán của học sinh, trình độ giảng dạy môn Toán học trong trường phổ thông của nước ta.

Kể từ đó, hàng năm chúng ta đều cử các đoàn học sinh giỏi tham dự các kì thi Olympic Toán Quốc tế và ở tất cả các kì thi ấy, học sinh chúng ta đều giành được nhiều giải cao ; trong số đó có nhiều học sinh đoạt giải nhất với số điểm tuyệt đối như : *Đàm Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình, Lê Tự Quốc Thắng, Ngô Bảo Châu, Đinh Tiến Cường, Ngô Đắc Tuấn, Đỗ Quốc Anh, Lê Hùng Việt Bảo, Nguyễn Trọng Cảnh*...

Những học sinh từng "đi thi Toán Quốc tế" của chúng ta phần lớn đều được nhà nước cấp học bổng hoặc gửi đi đào tạo ở các trường đại học danh tiếng trên thế giới và ngày nay khá đông trong số họ đã và đang trở thành những người làm toán chuyên nghiệp. Nhiều người đang làm việc trong các cơ sở, các trung tâm nghiên cứu và ứng dụng toán học, tin học, các trường đại học của nước ta : TS *Nguyễn Quốc Thắng*, GS. TSKH *Hà Huy Bảng*, TS *Phùng Hồ Hải* đều đang công tác ở Viện Toán học Việt Nam ; PGS. TS *Lê Hải Khôi* hiện là Viện trưởng Viện Công nghệ thông tin. TS *Nguyễn Minh Đức* làm việc tại Viện Công nghệ thông tin và TSKH *Vũ Đình Hòa* công tác tại Khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội vẫn luôn tham gia bồi dưỡng các thế hệ đàn em. TSKH *Vũ Đình Hòa* nhiều lần dẫn các đoàn học sinh nước ta đi tham dự các kì thi Toán Quốc tế những năm gần đây ; GS. TSKH *Đỗ Đức Thái* giảng dạy tại trường ĐHSP Hà Nội, TS *Hoàng Lê Minh* hiện là Phó Giám đốc Sở Khoa học và Công nghệ TP Hồ Chí Minh, TS *Lê Bá Khánh Trình* đang công tác tại trường Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh. TS Tạ Hồng Quảng làm việc ở Vũng Tàu. Nhiều người sau khi bảo vệ thành công luận án tiến sĩ đã tiếp tục nghiên cứu tại các viện, các trung tâm lớn hoặc giảng dạy trong các trường đại học của các nước khác trên thế giới : *Ngô Bảo Châu, Đinh Tiến Cường, Nguyễn Tiến Dũng, Phan Thị Hà Dương*... ở Pháp ; *Phạm Hữu Tiệp, Vũ Kim Tuấn, Đàm Thanh Sơn, Lê Tự Quốc Thắng, Bùi Hải Hưng, Hà Huy Tài, Đỗ Ngọc Minh*... đang giảng dạy và nghiên cứu ở Mỹ... Có người đã trở thành giáo sư, phó giáo sư, nhiều công trình nghiên cứu của họ đã được công bố trên các tạp chí hàng đầu của thế giới... Đặc biệt luận án tiến sĩ của *Đoàn An Hải* (dự thi Toán Quốc tế lần thứ 29) đã được giải thưởng dành cho luận án tiến sĩ ACM xuất sắc trong năm 2003. *Đoàn An Hải* và *Đỗ Ngọc Minh* vừa qua còn nhận được *Giải thưởng Career* của Hội khoa học Mỹ dành cho những nhà nghiên cứu trẻ ở Mỹ.

Cũng vào năm Giáp Dần 1974 ấy có 6 người bạn của chúng ta chào đời : *Nguyễn Việt Anh, Nguyễn Hải Hà, Hà Huy Tài* ở Hà Nội, *Ngô Diên Hy, Đỗ Ngọc Minh* ở Thanh Hóa và *Phan Huy Tú* ở Nghệ An.

Dường như tạo hóa đã "sắp xếp" cho họ ra đời đúng cái năm mà lần đầu tiên các bậc đàn anh đi trước của họ đã đánh lên những hồi chuông dóng dả trên đấu trường thế giới để rồi dần dần nó trở thành luồng gió mát thổi vào tâm trí, giúp họ có được lòng say mê toán học, giúp họ nuôi dần hoài bão trở thành những người làm toán. Mười bảy năm sau, sáu người bạn của chúng ta đã được hai thầy là GS. TSKH *Nguyễn Văn Mậu* (hiện là Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội) và TS *Nguyễn Việt Hải* (hiện là Trưởng ban biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ) lên đường sang Thụy Điển tham dự kì thi Toán Quốc tế lần thứ 32 (trong 6 thành viên của đoàn, *Hà Huy Tài* đã được tham gia kì thi lần thứ 31 tổ chức ở Bắc Kinh, Trung Quốc). Lần đó đoàn Việt Nam nhận được 4 giải nhì và 2 giải ba, xếp thứ 8 đồng đội.

Cả sáu thành viên này về sau đều nghiên cứu Toán và Tin học. Một người tốt nghiệp tại Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, những người khác được cử đi học tại Cộng hòa Australia và Nhật Bản. Năm 2000, hai thành viên đầu tiên của đoàn, *Nguyễn Việt Anh* và *Hà Huy Tài* đã bảo vệ thành công luận án tiến sĩ Toán học. Tiếp đó, năm 2001 *Đỗ Ngọc Minh* cũng hoàn thành luận án tiến sĩ ngành Điện tử viễn thông. Hiện nay, TS *Nguyễn Việt Anh* đang làm việc tại Đức, TS *Đỗ Ngọc Minh* và TS *Hà Huy Tài* đều đang là "trợ lí Giáo sư" (assistant professor) ở các trường Đại học của Mỹ, *Phan Huy Tú* đang làm nghiên cứu sinh về Tin học tại Mỹ, *Nguyễn Hải Hà* và *Ngô Diên Hy* đều đã là thạc sĩ... Ở môi trường khoa học nào, họ cũng phát huy được truyền thống hiếu học, hăng say nghiên cứu, có người đã công bố hàng chục công trình khoa học trên các tạp chí chuyên ngành của thế giới. Họ đang trên đường trở thành những nhà khoa học thực sự.

Ba mươi năm, một khoảng thời gian không dài nhưng cũng đủ để những vườn ươm tài năng của nước ta tuyển chọn được gần 200 học sinh đi dự các kì thi toán Quốc tế và đa số đều được giải; cũng đủ để thế giới thừa nhận Việt Nam là một trong những cường quốc trong lĩnh vực này. Nhiều học sinh chuyên toán tuy không được tham gia dự thi Quốc tế nhưng với hoài bão khoa học to lớn họ cũng đã gặt hái được nhiều thành công. Chỉ tính riêng lớp chuyên Toán thế hệ tuổi ba mươi của trường Đại học Khoa học Tự nhiên, hiện nay đã có gần một nửa là những "ông nghè", "bà nghè".

Nhìn lại quãng đường đã qua, chúng ta càng tin tưởng là với chính sách khuyến khích phát triển nhân tài, với đội ngũ thầy giáo tài năng và tâm huyết, với lòng ham mê khoa học và năng khiếu "được trời phú cho" của học sinh Việt Nam, đội ngũ những người làm khoa học của nước nhà sẽ thường xuyên được bổ sung, tiến kịp các nước có nền khoa học phát triển.

Người viết bài này chưa đủ thông tin về hàng trăm con người từng tham dự 27 kì thi từ năm 1974 đến 2003. Bài viết này chỉ là một vài nét phác thảo về chân dung của họ nhân kỉ niệm 30 năm Việt Nam tham dự cuộc thi Toán Quốc tế.

Giải đáp :

VIỆT NAM VÀ IMO

1. Kì thi Toán Quốc tế lần đầu tiên diễn ra vào năm 1959, tổ chức tại Ru-ma-ni với 7 nước tham gia : Liên Xô, CHDC Đức, Tiệp Khắc, Ba Lan, Hung-ga-ri, Bun-ga-ri và Ru-ma-ni.

2. Đoàn Việt Nam dự thi Toán Quốc tế lần đầu tiên vào 7.1974 tại Ec-phuốc, CHDC Đức. Có 18 nước gồm 140 học sinh dự thi (trong đó có 2 nữ). Kết quả đoàn Việt Nam có *Hoàng Lê Minh*, lớp 10, ĐH Tổng hợp Hà Nội, quê Thừa Thiên giành giải Nhất, *Vũ Đình Hòa*, lớp 10 ĐH Sư phạm Hà Nội, quê Thanh Hóa, giải Nhì, *Đặng Hoàng Trung*, lớp 10, ĐH Tổng hợp Hà Nội, quê Nam Định, giải Ba, *Tạ Hồng Quảng*, lớp 10, ĐH Sư phạm Hà Nội, quê Hà Tây, giải Ba (trong số 5 người tham gia). Cuộc thi có 10 giải Nhất, 24 giải Nhì và 37 giải Ba. Một sự trùng hợp là năm này đoàn Hoa Kỳ cũng tham gia thi lần đầu, nhưng không có giải Nhất.

3. Việt Nam đã giành được tất cả 147 Huy chương Vàng, 68 Huy chương Bạc, 48 Huy chương Đồng qua 27 kì thi (có 2 năm nước ta không dự thi là 1977, 1982 còn năm 1980 không tổ chức thi IMO).

4. Những học sinh Việt Nam được 2 Huy chương Vàng Toán Quốc tế trong hai lần thi là *Ngô Bảo Châu, Ngô Đắc Tuấn, Đào Hải Long.*

Năm 2004 này chúng ta kỉ niệm 30 năm ngày Việt Nam tham dự *International Mathematical Olympiad (IMO).*

Các bạn được giải thưởng của CLB :

Lê Thị Thu Huyền, 11 Toán, THPT Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái** ; *Nguyễn Công Khanh*, 10^4, THPT Vinh Lộc, huyện Phú Lộc, **Thừa Thiên - Huế** ; *Vũ Hồng Phúc*, 7C, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc, **Thanh Hóa**.

VKT

NGHỈ HÈ TRÊN HÀNH TINH SỐ NGUYÊN (INTÉGRA)

Trên hành tinh này, khách du lịch rất đông và thương mại thịnh vượng. Tiền mặt ở đây là đồng Fermat, không có đồng tiền nhỏ hơn và lớn hơn. Giá hàng luôn luôn là số nguyên. Mỗi mặt hàng có thể bán lẻ, theo gói hoặc theo hộp, nhưng vẫn theo giá bán lẻ. Theo tập quán, số mặt hàng trong mỗi gói luôn luôn bằng giá (bằng Fermat) đơn vị mặt hàng. Còn số gói trong mỗi hộp bằng số mặt hàng trong mỗi gói.

1. Mua hàng khi xuống cầu thang. Yvan kể lại chuyện mua hàng của mình ở Intégra. "Trên tầng 2 trung tâm thương mại, tôi mua hai mặt hàng A và B, mỗi thứ một gói. Khi xuống cầu thang tôi ngạc nhiên thấy cửa hàng tầng dưới có khuyến mại nên tôi mua ba gói hàng A và ba gói hàng B, cũng chỉ với số tiền Fermat như đã trả trên tầng 2. Tất nhiên các gói có nhỏ hơn một chút, nhưng không sao"

Yvan nói có hoàn toàn đúng không ?

2. Mua hàng giảm giá liên tục. Michel chỉ thích mua hộp. Hôm đó Michel mua một hộp hàng C. Hôm sau, Michel thấy hàng đó rẻ hơn 1 Fermat mỗi đơn vị hàng nên đã mua một hộp nữa. Năm phút sau đến phố khác lại thấy rẻ hơn 1 Fermat nữa, nên mua thêm một hộp. Đến một cửa hàng khác Michel lại mừng thấy cũng hàng C đó giá rẻ hơn 1 Fermat nữa, nên lại mua một hộp. Ba hộp mua trong ngày sau có tổng giá tiền bằng giá tiền một hộp mua trước.

Michel đã trả bao nhiêu tiền ?

3. Mua hàng quá hăng. Trong kì nghỉ dài ngày (một năm) ở Intégra, một người về hưu đã mua hàng quá hăng. Ngày đầu mua một gói. Ngày thứ hai mua 2 gói, ngày thứ ba mua ba gói... ngày hôm sau mua hơn ngày hôm trước một gói, cho đến tận ngày trước khi ra về hai tuần lễ thì không còn tiền để mua nữa. Tổng số tiền phải trả mỗi ngày không thay đổi. Và có điều trùng hợp kì lạ là số Fermat chi mỗi ngày đúng bằng số ngày nghỉ của người về hưu.

Người về hưu đã nghỉ bao nhiêu ngày ở Intégra ?

4. Giá bán lẻ mặt hàng E. Paul vừa mua một hộp hàng E và nhận thấy rằng tổng các chữ số của số tiền phải trả (bằng Fermat) bằng giá bán lẻ mặt hàng E.

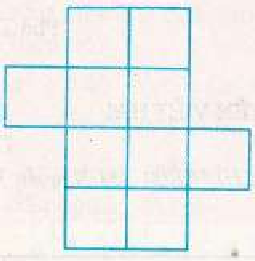
Hỏi giá của mỗi mặt hàng E ?

Vào đầu năm học mới bạn sẽ nhận được quà tặng nếu giải tốt và sớm bốn câu đố về HÀNH TINH SỐ NGUYÊN này.

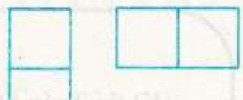
NGUYỄN VĂN THIÊM

*(theo **La Recherche** số 321, tháng 7.1999)*

NGANG VÀ DỌC



Đây là bàn cờ cho hai người. Các quân đô-mi-nô có hai loại gồm 2 ô vuông ngang và dọc. Nam đi quân 2 ô vuông nằm dọc và Hà đi quân 2 ô vuông nằm ngang.



Mỗi người lần lượt đặt một quân đô-mi-nô vào bàn cờ. Đến lượt ai không còn cách đi là thua.

Tìm cách để Hà đi sau và giành phần thắng.

VŨ ĐÔ QUAN

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41
Số 325 (7-2004)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.
Biên tập : VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.
Trị sự : VŨ ANH THƯ.
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 326 (8/2004)

- Kì thi Toán Quốc tế lần thứ 45 (2004).
- Đề thi chọn HS giỏi THCS Thừa Thiên Huế 2004.
- Bàn luận về cách giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán, khối A (4.7.2004) (tiếp theo).
- Lời giải Cuộc thi giải toán kỉ niệm 40 năm THTT (tiếp theo).
- Thi Olympic Toán Singapore 2004 - Vòng 1.
- Hàm số về hạnh phúc lứa đôi.

Mời các bạn đặt mua THTT tại các cơ sở Bưu điện !

THTT

THÀNH TÍCH DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ (IMO) CỦA ĐOÀN HỌC SINH VIỆT NAM

Lần thi IMO	*Nơi tổ chức*	*Năm*	*Lần VN dự*	*Số HS VN*	*Nữ*	*Số HS được giải*	*HC Vàng*	*HC Bạc*	*HC Đồng*	*Xếp hạng*
16th	CHDC Đức	1974	1	5	0	4/5	1	1	2	4/18
17th	Bun-ga-ri	1975	2	8	1	4/8	0	1	3	10/17
18th	Áo	1976	3	8	1	4/8	0	1	3	14/19
20th	Ru-ma-ni	1978	4	8	0	8/8	0	2	6	4/17
21th	Anh	1979	5	4	0	4/4	1	3	0	/22
23th	Hung-ga-ri	1982	6	4	0	4/4	1	2	1	5/30
24th	Pháp	1983	7	6	0	6/6	0	3	3	6/32
25th	Tiệp Khắc	1984	8	6	1	6/6	1	2	3	7/34
26th	Phần Lan	1985	9	6	0	5/6	1	3	1	5/38
27th	Ba Lan	1986	10	6	0	5/6	1	2	2	10/37
28th	Cu Ba	1987	11	6	0	6/6	0	1	5	11/42
29th	Ô-xtrây-li-a	1988	12	6	0	5/6	1	4	0	5/49
30th	CHLB Đức	1989	13	6	0	6/6	2	1	3	9/50
31th	Trung Quốc	1990	14	6	1	4/6	0	1	3	22/54
32th	Thụy Điển	1991	15	6	0	6/6	0	4	2	8/54
33th	LB Nga	1992	16	6	1	6/6	1	2	3	10/64
34th	Thổ Nhĩ Kỳ	1993	17	6	1	6/6	1	4	1	9/73
35th	Hồng Kông	1994	18	6	0	6/6	1	5	0	6/69
36th	Ca-na-đa	1995	19	6	0	6/6	2	4	0	4/73
37th	Ấn Độ	1996	20	6	0	5/6	3	1	1	7/75
38th	Ac-hen-ti-na	1997	21	6	0	6/6	1	5	0	10/83
39th	Đài Loan	1998	22	6	1	6/6	1	3	2	9/76
40th	Ru-ma-ni	1999	23	6	0	6/6	3	3	0	3/82
41th	Hàn Quốc	2000	24	6	1	6/6	3	2	1	5/82
42th	Hoa Kì	2001	25	6	0	5/6	1	4	0	10/83
43th	Anh	2002	26	6	0	6/6	3	1	2	5/84
44th	Nhật Bản	2003	27	6	0	6/6	2	3	1	4/83
	Tổng số			163	8	147	31	68	48	

Ghi chú :
- Năm 1980 không tổ chức thi IMO
- Các năm 1977, 1981 : VN không dự thi.
- Năm 1979 VN cử 4 HS (mỗi đội 8 HS) nên không tính điểm xếp hạng.
- Số học sinh trong mỗi đội : Từ 1959 đến 1981 : Mỗi đội ≤ 8 học sinh
  Năm 1982 : Mỗi đội ≤ 4 học sinh
  Từ 1983 đến nay : Mỗi đội ≤ 6 học sinh

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT27M4

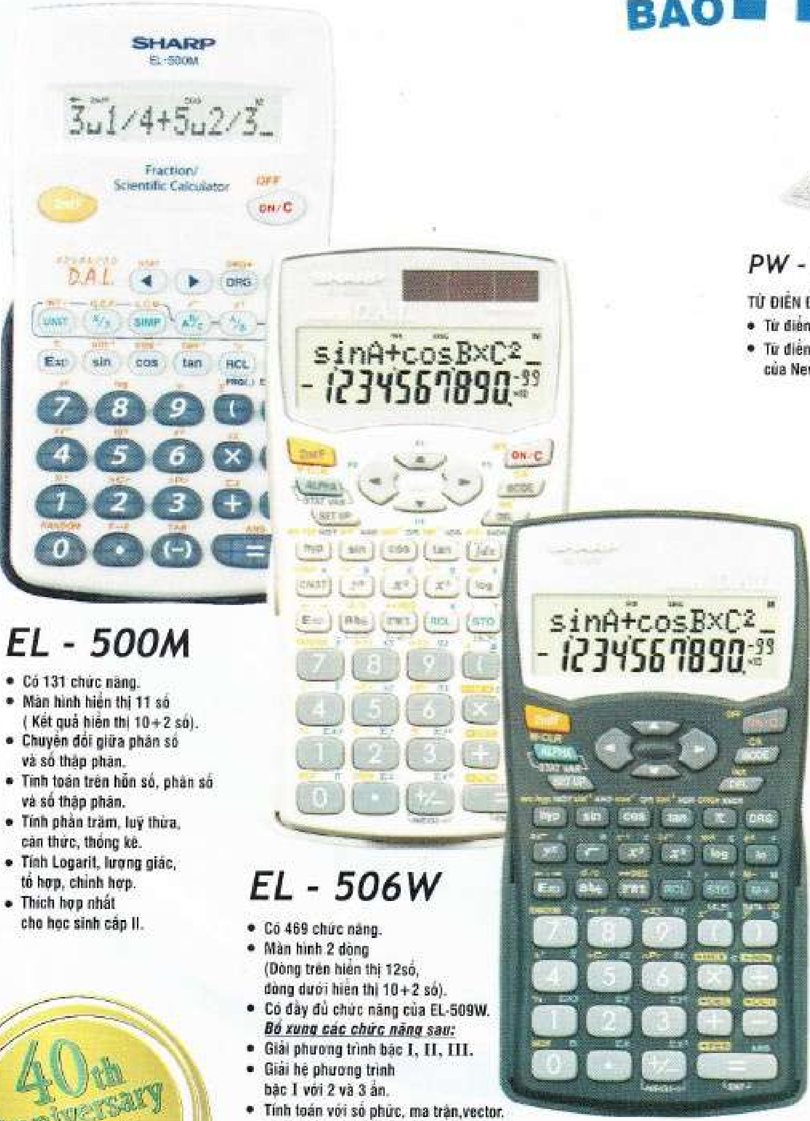
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2004

Giá : 3500 đồng
Ba nghìn năm trăm đồng

SHARP®
SHARP CORPORATION OSAKA, JAPAN

MÁY TÍNH KHOA HỌC

SẢN PHẨM CHÍNH HIỆU
CHẤT LƯỢNG HÀNG ĐẦU THẾ GIỚI
BẢO HÀNH 1 NĂM



PW - E300

TỪ ĐIỂN ĐIỆN TỬ:

- Từ điển Anh ngữ Oxford (335.000 từ).
- Từ điển Anh ngữ chuyên ngành của New Oxford (600.000 từ).

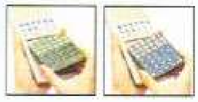
PW - E500

TỪ ĐIỂN ĐIỆN TỬ:

- Từ điển Anh ngữ Oxford (335.000 từ).
- Từ điển Anh ngữ chuyên ngành của New Oxford (600.000 từ).
- Từ điển trích dẫn của Oxford (20.000 từ).

EL - 9900

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 827 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 64 KB.
- Có đầy đủ các chức năng của máy EL-9400.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Bàn phím với 2 chế độ (chuyên sâu & cơ bản).
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.



EL - 500M

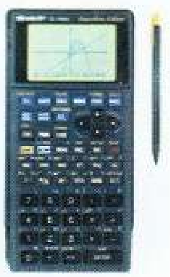
- Có 131 chức năng.
- Màn hình hiển thị 11 số (Kết quả hiển thị 10+2 số).
- Chuyển đổi giữa phân số và số thập phân.
- Tính toán trên hỗn số, phân số và số thập phân.
- Tính phần trăm, luỹ thừa, căn thức, thống kê.
- Tính Logarit, lượng giác, tổ hợp, chỉnh hợp.
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp II.

EL - 506W

- Có 469 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Có đầy đủ chức năng của EL-509W.

Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải hệ phương trình bậc I với 2 và 3 ẩn.
- Tính toán với số phức, ma trận,vector. trong dạng đại số và lượng giác.
- Thích hợp nhất cho SV Đại học.



EL - 9400

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 801 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 32 KB.
- Tính thống kê nâng cao.
- Giải phương trình.
- Giải hệ phương trình tuyến tính.
- Giải phương trình vi phân.
- Sử dụng được bút cảm ứng.
- Kết nối được với máy vi tính.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.

EL - 509W

- Có 272 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.

- Đầy đủ các chức năng của máy EL-500M.

Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình hồi quy.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.

40th Anniversary World's First SHARP

TEM CHỐNG HÀNG GIẢ SHARP BẢO HÀNH 1 NĂM

- Toàn bộ máy tính SHARP chính hiệu đều được dán tem chống hàng giả. Tem do Trung tâm kỹ thuật tài liệu nghiệp vụ - Bộ Công An phát hành
- Máy tính SHARP chính hiệu được bảo hành 1 năm.

Đơn vị Nhập khẩu & Phân phối duy nhất tại Việt Nam

limex
CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU LÊ MINH
LEMINH IMPORT EXPORTATION JOINT STOCK COMPANY

VĂN PHÒNG TẠI HÀ NỘI
111A - Thụy Khuê - Quận Tây Hồ, Hà Nội
ĐT: 84.4.8474577 - Fax: 84.4.8474592
E-mail: limexhn@hn.vnn.vn

VĂN PHÒNG TẠI HỒ CHÍ MINH
164 Đường Cộng Hoà, P12, Quận Tân Bình, HCM
ĐT: 84.8.8116417 - Fax: 84.8.8424237
E-mail: limexhcm@hcm.vnn.vn