https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

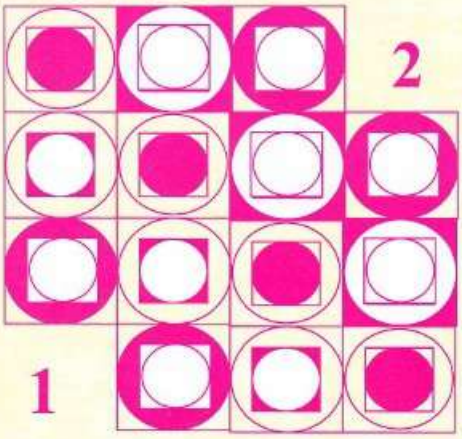
6 2012 Số 420

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 49
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Tru sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Tri sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM THAM DỰ KÌ THI IMO 2012

CUỘC THI
ĐỐ VUI NGÀY HÈ 2012
Đợt 2

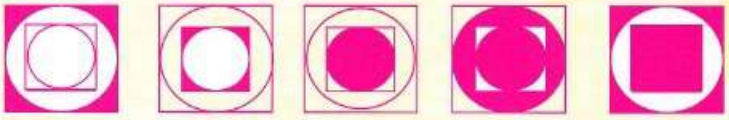
Toán học và Tuổi trẻ số 419, tháng 5 năm 2012 đã giới thiệu ba bài đố vui Đợt 1. Lần này chúng tôi xin giới thiệu tiếp ba bài đố vui mới. Bạn hãy gửi lời giải ba bài này về Tòa soạn trước ngày 31.8.2912 (theo dấu Bưu điện). Lời giải ba bài Đợt 1 sẽ đăng trong TH&TT số 423 (tháng 9.2012). Lời giải ba bài Đợt 2 và danh sách các bạn đoạt giải sẽ đăng trong TH&TT số 424 (tháng 10.2012) Mong các bạn trẻ yêu toán hưởng ứng.



Bài 4. HÌNH NÀO PHÙ HỢP?

Hãy tìm trong các hình **A, B, C, D, E** bên cạnh, hình nào phù hợp để điền vào vị trí số **1** và vị trí số **2**.

TUẤN MINH

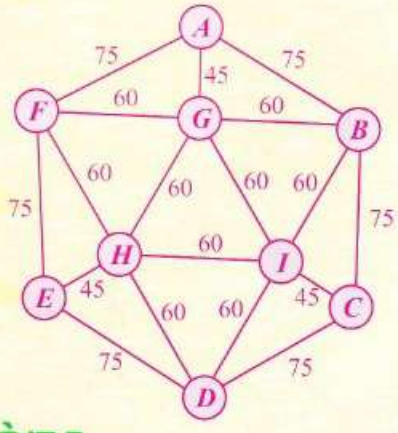


A B C D E

Bài 5. ĐƯỜNG ĐI TUẦN

Hình bên là sơ đồ của một nhà máy nguyên tử, gồm có phòng trực *A* và 8 phòng thí nghiệm (*B, C, D, E, F, G, H, I*), những con số chỉ khoảng cách (tính theo đơn vị mét) của con đường giữa các phòng trong nhà máy. Từ phòng trực *A*, bác bảo vệ phải đi tuần đêm đến hết mọi con đường rồi sau cùng trở về đúng phòng trực. Theo bạn, bác bảo vệ phải đi theo lộ trình nào để đoạn đường đi của bác là ngắn nhất?

GIA LINH



Bài 6. PHÂN CHIA MẢNH VƯỜN

Bốn anh em được giao việc dọn cỏ ở một mảnh vườn hình tam giác *ABC*, nhưng chưa thỏa thuận xem ai làm phần nào của một mảnh vườn. Người ông là giáo viên Toán đi đến, liền ra bài toán đố sau: Hãy chia mảnh vườn thành bốn phần bằng cách lấy ba điểm *D, E, F* theo thứ tự trên ba cạnh *BC, CA, AB* sao cho số đo diện tích của các mảnh vườn *DEF, AFE, CED, BDF* tỉ lệ với tuổi của các cháu là 25, 15, 12 và 8. Bạn hãy tìm cách phân chia mảnh vườn giúp bốn anh em đó.

AN MINH

Vận dụng hệ thức Viète để giải một số bài toán tính giá trị của biểu thức

ĐINH VĂN ĐÔNG
(GV THCS Thanh An - Thanh Hà - Hải Dương)

Tính giá trị của biểu thức là một dạng toán thường gặp trong chương trình THCS, trong đó một số bài toán tính giá trị của biểu thức có liên quan đến việc vận dụng định lí Viète đòi hỏi sự vận dụng sáng tạo và linh hoạt. Bài viết này xin đưa ra một số bài tập để bạn đọc tham khảo.

Bài toán 1. *Gọi x_1, x_2 $(x_1 > x_2)$ là các nghiệm của phương trình bậc hai*

$$x^2 - \frac{\sqrt{85}}{4}x + \frac{21}{16} = 0.$$

Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $x_1^3 - x_2^3$.

Lời giải. Phương trình đã cho có $\Delta = \frac{1}{16} > 0$, nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 > x_2)$. Áp dụng định lí Viète, ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{85}}{4},\ x_1x_2 = \frac{21}{16}.$$

Do $x_1 > x_2$ nên

$$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}$$
$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}.$$

Từ đó $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$

$$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}.\left((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{85}{16} - \frac{84}{16}}.\left(\frac{85}{16} - \frac{21}{16}\right) = 1. \square$$

Bài toán 2. *Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là bốn nghiệm của phương trình*

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) = 1.$$

Tính giá trị của biểu thức $x_1x_2x_3x_4$.

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT, tỉnh Hải Dương, năm học 2005–2006)

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) = 1$$
$$\Leftrightarrow ((x^2 + 8x + 11) - 4)((x^2 + 8x + 11) + 4) = 1$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 11)^2 - 16 = 1$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 8x + 11)^2 = 17$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 + 8x + 11 - \sqrt{17} = 0 & (1) \\ x^2 + 8x + 11 + \sqrt{17} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có $\Delta'_1 = 5 + \sqrt{17} > 0$, nên luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

Phương trình (2) có $\Delta'_2 = 5 - \sqrt{17} > 0$, nên luôn có hai nghiệm x_3, x_4.

Theo định lí Viète, ta có

$x_1x_2 = 11 - \sqrt{17}$; $x_3x_4 = 11 + \sqrt{17}$. Suy ra

$x_1x_2x_3x_4 = (11 - \sqrt{17})(11 + \sqrt{17}) = 104$. $\square$

Bài toán 3. *Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2004x + 1 = 0$ và x_3, x_4 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2005x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức*

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4).$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9, tỉnh Hải Dương, năm học 2004 – 2005)

Lời giải. Dễ thấy các PT đã cho luôn có hai nghiệm, nên theo định lí Viète ta có

$x_1 + x_2 = -2004$; $x_3 + x_4 = -2005$; $x_1x_2 = x_3x_4 = 1$.

Do vậy

$$(x_1+x_3)(x_2+x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_4)$$
$$=(x_1x_2+(x_1+x_2)x_3+x_3^2)(x_1x_2-(x_1+x_2)x_4+x_4^2)$$
$$=(1-2004x_3+x_3^2)(1+2004x_4+x_4^2)$$
$$=(x_3^2+2005x_3+1-4009x_3)(x_4^2+2005x_4+1-x_4)$$
$$=(-4009x_3)(-x_4)=4009x_3x_4=4009.\ \square$$

Bài toán 4. *Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-3\sqrt{2}x-\sqrt{2}=0$. Tính giá trị của biểu thức*

$$A=\frac{2}{3\sqrt{2}x_1+x_2^2-3\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}x_2+x_1^2-3\sqrt{2}}{2}.$$

Lời giải. Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-3\sqrt{2}.x-\sqrt{2}=0$ nên ta có $x_1^2=3\sqrt{2}.x_1+\sqrt{2}$; $x_2^2=3\sqrt{2}.x_2+\sqrt{2}$ và $x_1+x_2=3\sqrt{2}$. Do đó

$$A=\frac{2}{3\sqrt{2}x_1+3\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}-3\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}x_2+3\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}(x_1+x_2)-2\sqrt{2}}+\frac{3\sqrt{2}(x_1+x_2)-2\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2}{9.2-2\sqrt{2}}+\frac{9.2-2\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{9-\sqrt{2}}+9-\sqrt{2}$$
$$=\frac{84-18\sqrt{2}}{9-\sqrt{2}}.\ \square$$

Bài toán 5. *Giả sử phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $ax_1+bx_2+c=0$. Tính giá trị của biểu thức $M=a^2c+ac^2+b^3-3abc$.*

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương, năm học 2005-2006)

Lời giải. Theo định lí Viète, ta có

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$, suy ra

$$0=x_1+\frac{b}{a}x_2+\frac{c}{a}=x_1-x_2(x_1+x_2)+x_1x_2=x_1-x_2^2$$

$\Rightarrow x_1=x_2^2$.

Từ đó có $x_2+x_2^2=-\frac{b}{a}$; $x_2^3=\frac{c}{a}$.

Do đó $\frac{M}{a^3}=\frac{c}{a}+\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^3-3.\frac{b}{a}.\frac{c}{a}$

$$=x_2^3+x_2^6-(x_2+x_2^2)^3+3(x_2+x_2^2)x_2^3=0.$$

Vậy $M=0$. $\square$

Bài toán 6. *Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $(7+4\sqrt{3})^7$.*

Lời giải. Đặt $x=7+4\sqrt{3}$; $y=7-4\sqrt{3}$, thì $x+y=14$, $xy=1$.

Từ đó suy ra x, y là nghiệm của phương trình $x^2-14x+1=0$. Ta có

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=14^2-2=194$.

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=14.193=2702$.

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=194^2-2=37634$.

$$x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$$
$$=2702.37634-14=1016870454.$$

Vì $0<y^7=(7-4\sqrt{3})^7<1$ nên

$$1016870453<x^7<1016870454.$$

Suy ra số nguyên lớn nhất không vượt quá $(7+4\sqrt{3})^7$ là 1016870453. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là bốn nghiệm của phương trình $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)=1$.

Tính giá trị của biểu thức $x_1x_2x_3x_4$.

2. Cho phương trình $x^2-3ax-a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

a) Tính theo a giá trị của biểu thức

$$A=\frac{a^2}{3ax_1+x_2^2+3a}+\frac{3ax_2+x_1^2+3a}{a^2}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Quảng Ninh, năm học 2004 – 2005)

3. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2+ax+1=0$ và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2+bx+1=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$M=(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4).$$

Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - THỪA THIÊN HUẾ

NĂM HỌC 2011 - 2012

(ĐỀ THI ĐÃ ĐĂNG TRÊN THTT SỐ 419, THÁNG 5 NĂM 2012)

Câu 1. Đặt $S = x + y$ và $P = xy$. HPT đã cho trở thành $\begin{cases} S^2 - 3P = 19 \\ S^3 - 3SP + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -6. \end{cases}$

Với $x + y = -1$ và $xy = -6$, ta có x và y là các nghiệm của phương trình $t^2 + t - 6 = 0$. Giải ra được $t_1 = -3$; $t_2 = 2$.

Vậy HPT có hai cặp nghiệm $(x; y)$ là $(-3; 2)$, $(2; -3)$.

Câu 2. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 - ax + a = 0$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a < 0$ hoặc $a > 4$ (1)

Lúc đó x_1, x_2 đều khác 0. Ta có

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1x_2| = x_1^2x_2^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 2|x_1x_2| = 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 \quad (2)$$

Do $x_1 + x_2 = a = x_1x_2$ nên (2) trở thành $|a| = a$ $\Leftrightarrow a \geq 0$. Kết hợp với (1), ta được $a > 4$.

Câu 3. a) Điều kiện $x \geq -1$. PT đã cho trở thành

$$\sqrt{(1+\sqrt{x+1})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{x+1})^2} = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x+1} + \left|1 - \sqrt{x+1}\right| = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x+1} \geq 0 \\ 1 + \sqrt{x+1} + 1 - \sqrt{x+1} = 1 + x \end{cases} \text{ hoặc}$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x+1} < 0 \\ 1 + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} - 1 = 1 + x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 3$.

b) Khi $2(p+1)$ là số chính phương thì đó là số chính phương chẵn và p là số nguyên tố lẻ.

Đặt $2(p+1) = (2x)^2$ và $2(p^2+1) = (2y)^2$ với x, y nguyên dương, $0 < x < y < p$.

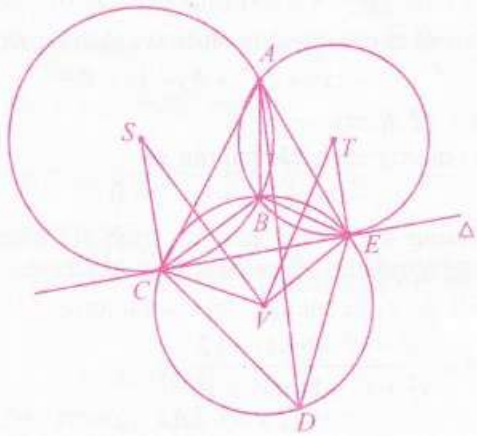
Ta có $2(y^2 - x^2) = p(p-1)$ nên $2(y-x)(y+x)$ chia hết cho p.

Do p lẻ và $1 < y - x < p$, $1 < y + x < 2p$ nên phải có $y + x = p$ (1). Suy ra $2(y - x) = p - 1$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $p + 1 = 4x$. Do đó $2(p+1) = 2(4x) = 4x^2$. Suy ra $x = 2$ và $p = 7$.

Kiểm tra lại ta thấy số nguyên tố $p = 7$ thỏa mãn bài toán.

Câu 4



a) Ta có $\widehat{CDE} = \widehat{CAE} = \widehat{CAB} + \widehat{EAB}$.

Mà $\widehat{CAB} = \widehat{BCE}$; $\widehat{EAB} = \widehat{BEC}$. Do đó $\widehat{CDE} + \widehat{CBE} = \widehat{BCE} + \widehat{BEC} + \widehat{CBE} = 180^\circ$.

Suy ra tứ giác $BCDE$ nội tiếp được trong một đường tròn (V).

b) Dễ thấy $\widehat{CSV} = \widehat{BCE} = \widehat{TVE}$, $\widehat{CVS} = \widehat{CEB} = \widehat{VTE}$.

Từ đó, ta có $\Delta VCS \backsim \Delta TEV$ (g.g) $\Rightarrow \frac{VC}{TE} = \frac{SC}{VE}$ hay $SC.TE = VC.VE$.

Mà $SC = R_S, TE = R_T$, $VC = VE = R_V$ nên thu được $R_S.R_T = R_V^2$. (đpcm).

Đề thi tuyển sinh vào lớp 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ KHIẾT, QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 2011 - 2012

(THỜI GIAN LÀM BÀI : 150 PHÚT)

Câu 1. (1,5 *điểm*) 1) Cho biểu thức

$$A=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}-b$$

với $a>0$ và $b>0$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của b để giá trị của biểu thức A bằng 1.

2) Giải phương trình

$$x^2-x+3=3\sqrt{x^2-x+1}.$$

Câu 2. (1,5 *điểm*)

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

2) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x\,;y)$ thỏa mãn

$$x^2-2xy+2y^2+4y-13=0.$$

Câu 3. (2 *điểm*)

Cho phương trình bậc hai (ẩn x)

$$x^2-2(m-1)x+m-3=0 \qquad (1)$$

1) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) và $A=\dfrac{x_1^2+x_2^2+6x_1x_2+12}{x_1^2+x_2^2+14x_1x_2+36}$.

a) Tính A theo m.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để A nhận giá trị nguyên.

Câu 4. (4 *điểm*)

1) Từ một điểm A bất kì ở bên ngoài đường tròn tâm O kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Lấy điểm I thuộc đoạn thẳng BC (I khác B, I khác C và I khác trung điểm của đoạn BC). Đường thẳng vuông góc với OI tại I cắt đường thẳng AB tại E và cắt đường thẳng AC tại F.

a) Chứng minh rằng tam giác EOF cân.

b) Chứng minh rằng $AEOF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

2) Cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích bằng a^2 (với a là số dương cho trước). Chứng minh bất đẳng thức

$$BC+2a\le\sqrt{2}(AB+AC).$$

Câu 5. (1 *điểm*)

Chứng minh rằng trong 17 số tự nhiên bất kì ta luôn chọn ra được 5 số có tổng chia hết cho 5.

TRẦN VĂN HẠNH
(GV Khoa Cơ Bản, ĐH Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi)
sưu tầm và giới thiệu

Câu 5. a) Ta có $x+y+z=8-t$;

$xy+yz+zx=18-t(8-t)$. Nên

$2(x+y+z)^2=2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)$

$=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2+6(xy+yz+zx)$

$\ge 6(xy+yz+zx)$. Do đó

$2(8-t)^2\ge 6(18-t(8-t))\Leftrightarrow t^2-4t-5\le 0$

$\Leftrightarrow (t-2)^2\le 9\Leftrightarrow -1\le t\le 5$.

Khi $x=y=z=3$ thì $t=-1$. Giá trị nhỏ nhất của t là -1 đạt được khi $x=y=z=3$.

b) Giả sử tồn tại hình vuông diện tích bằng S và có độ dài cạnh là a ($a\in\mathbb{Z}^+$).

Theo bài ra ta có

$(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+5)^2$

$(n+6)^2+(n+7)^2+(n+8)^2+(n+9)^2=a^2$.

Hay $9n^2+90n+285=a^2$. Do $9n^2+90n+285$ là số nguyên chia cho 9 dư 6.

Mặt khác, số chính phương a^2 chia cho 9 chỉ có thể dư 1; 4; 7.

Vậy không tồn tại hình vuông nào thỏa mãn đề bài.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)
sưu tầm và giới thiệu

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

LÊ HỒ QUÝ (*GV THPT Duy Tân, KonTum*)
PHẠM LÊ THÀNH ĐẠT (*GV THPT Lê Lợi, KonTum*)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0. Khi đó $f'(x_0)$ bằng hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

2. Phương trình tiếp tuyến

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, (với $y_0 = f(x_0)$) (*)

3. Điều kiện tiếp xúc

Đường thẳng $y = kx + b$ tiếp xúc với đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi hệ PT

$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$$

có nghiệm. Khi đó nghiệm của hệ là hoành độ tiếp điểm của hai đường trên.

II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

DẠNG 1. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số

Bài toán 1. *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M thuộc đồ thị.*

Cách giải. Để giải các bài toán loại này ta cần tìm tọa độ tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ và hệ số góc $f'(x_0)$, sau đó sử dụng công thức (*).

★Thí dụ 1. *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ tại điểm M thuộc (C), biết rằng M cùng với hai điểm cực trị của (C) tạo thành một tam giác có diện tích bằng 6.*

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Đồ thị (C) có điểm cực tiểu là $A(3;-2)$, điểm cực đại là $B(1;2)$. Giả sử $M(x_0; x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 2) \in (C)$ (với $x_0 \neq 3, x_0 \neq 1$).

PT đường thẳng $AB: 2x + y - 4 = 0$.

Ta có $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.d(M, AB) = 6$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-4)^2}\,\frac{|2x_0 + x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 6$$

$\Leftrightarrow |x_0^3 - 6x_0^2 + 11x_0 - 6| = 6 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 4$.

Suy ra $M(0;-2)$ hoặc $M(4;2)$.

- PT tiếp tuyến với (C) tại $M(0;-2)$ là $y = y'(0)(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = 9x - 2$.
- PT tiếp tuyến với (C) tại $M(4;2)$ là $y = y'(4)(x - 4) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 34$. ❑

Bài toán 2. *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết hệ số góc k cho trước.*

Cách giải. Giả sử hoành độ tiếp điểm là x_0. Giải PT $f'(x_0) = k$ (với ẩn x_0) tìm được x_0. Khi đó PT tiếp tuyến cần tìm có dạng $y = k(x - x_0) + f(x_0)$.

★Thí dụ 2. *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, biết rằng tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho tam giác IAB cân, với I là giao điểm của hai đường tiệm cận.*

Lời giải. Vì tam giác IAB cân tại I nên tiếp tuyến phải song song với một trong hai đường thẳng có PT $y = x$ hoặc $y = -x$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$. Nếu $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm thì $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 + 2)^2} = 1$

$\Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = -3$. Có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài là $y = x + 1$; $y = x + 5$. ❑

Bài toán 3. *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(x_0; y_0)$.*

Cách giải. Lược đồ chung để giải bài toán này như sau:

• Sử dụng mệnh đề về điều kiện tiếp xúc của hai đường đã trình bày trong phần kiến thức cần nhớ.

• Quy về Bài toán 1 (tức là quy về tìm tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị).

★Thí dụ 3. *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(0;4)$.*

Lời giải. Đường thẳng d đi qua M với hệ số góc k có PT $y = k(x - 0) + 4 \Leftrightarrow y = kx + 4$.

Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^4 - 4x^2 + 4 = kx + 4 \\ 4x^3 - 8x = k. \end{cases}$$

Thay k từ PT thứ hai vào PT đầu của hệ và thu gọn, ta được $3x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ hoặc $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Có ba tiếp tuyến thỏa mãn với PT là $y = 4$; $y = -\frac{16\sqrt{3}}{9}x + 4$; $y = \frac{16\sqrt{3}}{9}x + 4$. ❑

DẠNG 2. Tìm các điểm trên đồ thị sao cho tiếp tuyến tại đó thỏa mãn tính chất cho trước

★Thí dụ 4. *Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Tìm các điểm M trên (C) để tiếp tuyến với (C) tại M cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-1}{(x-2)^2}$, $\forall x \neq 2$.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}\right) \in (C)$.

PT tiếp tuyến với (C) tại M có dạng

$$y = \frac{-1}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2}.$$

Khi đó $A\left(2; \frac{2x_0 - 2}{x_0 - 2}\right)$, $B(2x_0 - 2; 2)$.

Nhận thấy $\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 2x_0 - 2}{2} = x_0$, nên M là trung điểm của AB.

Ta có $I(2;2)$ và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích là

$$S = \pi.IM^2 = \pi\left((x_0 - 2)^2 + \left(\frac{2x_0 - 3}{x_0 - 2} - 2\right)^2\right)$$

$$= \pi\left((x_0 - 2)^2 + \frac{1}{(x_0 - 2)^2}\right) \geq 2\pi \text{ (BĐT Cauchy).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x_0 - 2)^2 = \frac{1}{(x_0 - 2)^2} \Leftrightarrow x_0 = 1$ hoặc $x_0 = 3$.

Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1(1;1)$ và $M_2(3;3)$. ❑

★Thí dụ 5. *Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Tìm trên (C) điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại đó vuông góc với đường thẳng IM.*

Lời giải. Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$. Giao điểm hai đường tiệm cận là $I(1;2)$. Giả sử $M\left(x_0; 2 + \frac{1}{x_0 - 1}\right) \in (C)$. Khi đó, hệ số góc của tiếp tuyến Δ với (C) tại M là $k_1 = \frac{-1}{(x_0 - 1)^2}$. Ta có $\overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{1}{x_0 - 1}\right)$ nên đường thẳng IM có hệ số góc $k_2 = \frac{1}{(x_0 - 1)^2}$.

$IM \perp \Delta \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^4 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 2$. Vậy có hai điểm cần tìm là $M_1(0;1)$ và $M_2(2;3)$. ❑

DẠNG 3. Bài toán liên quan đến số tiếp tuyến của đồ thị hàm số

★**Thí dụ 6.** *Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm những điểm trên đường thẳng $y = 2$ mà từ đó kẻ đúng ba tiếp tuyến đến (C).*

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Giả sử $M(x_0;2)$ thuộc đường thẳng $y = 2$.

Đường thẳng d đi qua M với hệ số góc k có PT $y = k(x - x_0) + 2$.

d tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x^3 - 3x = k(x - x_0) + 2 \\ 3x^2 - 3 = k. \end{cases}$

Thay k từ PT thứ hai vào PT đầu của hệ và thu gọn, ta được

$$(x+1)\left(2x^2 - (3x_0+2)x + 3x_0 + 2\right) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f(x) = 2x^2 - (3x_0+2)x + 3x_0 + 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với PT (1) có ba nghiệm phân biệt, tức là PT(2) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 9x_0^2 - 12x_0 - 12 > 0 \\ f(-1) = 6(x_0+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 > 2 \\ x_0 < -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \quad (3)$$

Vậy $M(x_0;2)$ (với x_0 thỏa mãn (3)) là các điểm cần tìm trên đường thẳng $y = 2$. ❑

DẠNG 4. Tìm điều kiện của tham số để hai đường tiếp xúc nhau

★**Thí dụ 7.** *Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ (m là tham số). Tìm m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành.*

Lời giải. Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+3)x + 18m$. (C_m) tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm $\begin{cases} 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8 = 0 \\ 6x^2 - 6(m+3)x + 18m = 0. \end{cases}$

Nhận thấy PT thứ hai của hệ có hai nghiệm $x = 3$; $x = m$.

• Với $x = 3$, thay vào PT đầu của hệ, ta được

$$54 - 27(m+3) + 54m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{35}{27}.$$

• Với $x = m$, thay vào PT đầu của hệ và thu gọn, ta được

$(m-1)(m^2 - 8m - 8) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 4 + 2\sqrt{6}$ hoặc $m = 4 - 2\sqrt{6}$.

Vậy có bốn giá trị cần tìm của m là $\frac{35}{27}$; 1 ; $4 + 2\sqrt{6}$; $4 - 2\sqrt{6}$. ❑

BÀI TẬP

1. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}$, sao cho khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đến tiếp tuyến đó là lớn nhất.

2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x+3}$. Biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B phân biệt sao cho tam giác OAB cân tại O.

3. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = -4x^3 + 3x$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(1;3)$.

4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến của đồ thị tại M tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm trên đường thẳng $x = 2$ các điểm mà từ đó kẻ đúng ba tiếp tuyến đến (C).

6. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số

$$y = \frac{(m-1)x + m}{x - m} \quad (m \text{ là tham số}).$$

Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$, họ đồ thị (C_m) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 9

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 *điểm*) Cho hàm số

$$y = x^4 - 2mx^2 - 3 \qquad (1)$$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác tạo bởi các điểm cực trị đó đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu II. (2 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$\frac{2(\cos^4 x - \sin^4 x) + 1}{2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\cos x + \sin x.$$

2) Giải bất phương trình

$$\sqrt[3]{x+6} - 2\sqrt{5x-1} > x^2 - 2x - 4.$$

Câu III. (1 *điểm*) Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x.\sqrt{2 + \sin 2x}}.$$

Câu IV. (1 *điểm*) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = 2a$. Mặt bên (SBC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 30°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB theo a.

Câu V. (1 *điểm*) Chứng minh rằng với các số thực dương x, y, z thoả mãn $\left(\frac{x+y+z}{2012}\right)^2 \le 4xyz$, ta có $\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{yz}} + \frac{\sqrt{y}}{y+\sqrt{zx}} + \frac{\sqrt{z}}{z+\sqrt{xy}} \le 2012$.

PHẦN RIÊNG

(Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VIa. (2 *điểm*)

1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(3;-1)$ và đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d qua M, cắt (T) theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

2) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-5}$; $d_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng Δ cắt d_1 và d_2 tương ứng ở A và B, đồng thời khoảng cách từ Δ đến mặt phẳng (α) bằng $\sqrt{6}$. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết rằng điểm A có hoành độ dương.

Câu VII.a (1 *điểm*)

Cho số phức z thoả mãn $z + 1 = i^{2011} + i^{2012}$. Tìm môđun của số phức $iz + \overline{z}$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VIb. (2 *điểm*) 1) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(-3;4)$ và hai đường thẳng $d_1: x - 2y - 3 = 0$; $d_2: x - y = 0$. Đường thẳng d qua M, cắt d_1 và d_2 tương ứng ở A và B sao cho $MA = 3MB$. Viết phương trình đường thẳng d, biết rằng điểm A có tung độ dương.

2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;1)$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{1-y}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Gọi A là giao điểm của d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ chứa M, cắt d và (P) tương ứng ở B và C sao cho ABC là tam giác cân tại B.

Câu VIIb. (1 *điểm*) Với mỗi số thực a, gọi z là nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + a^2 - 2a + 5 = 0$. Tìm a để $|z|$ nhỏ nhất.

ĐỖ BÁ CHỦ

(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 7

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Ta có $I(1;0); M(0;2)$ thứ tự là điểm uốn và điểm cực đại của đồ thị (C).

PT đường thẳng qua I có hệ số góc k là $y=k(x-1)$.

PT hoành độ giao điểm của (d) và (C) là

$x^3-3x^2+2=k(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2-k)=0$.

(d) cắt (C) tại hai điểm A, B khác M khi PT $x^2-2x-2-k=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow k>-3$.

Giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$, chú ý rằng I là tâm đối xứng của (C) nên để tam giác MAB vuông tại M thì $AB=2MI=2\sqrt{5}$. Có ba đường thẳng thỏa mãn đề bài là $y=-2(x-1)$; $y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}(x-1)$; $y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}(x-1)$.

Câu II. 1) ĐK $\sin 2x \neq 0$. PT tương đương với

$$\cos^2 3x=\cos 2x \Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}=\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x-1)(4\cos^2 2x+4\cos 2x-1)=0.$$

Đáp số. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

2) ĐK $x\geq 0, y\geq 0$. Cộng theo vế của hai PT được

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+3(\sqrt{x}+\sqrt{y})-40=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=5$.

Đáp số. $-6\leq m\leq 4$.

Câu III. $I=\int_0^1(2x^2+x)e^{x^2+x+1}dx+\int_0^1 e^{x^2+x+1}dx$,

sử dụng tích phân từng phần tính $\int_0^1 e^{x^2+x+1}dx$.

Đáp số. $I=e^3$.

Câu IV. $V_{\text{nón}}=\frac{2\pi a^3}{27}$.

Câu V. Biến đổi

$$\frac{\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}=\frac{a\sqrt{ac}}{b(\sqrt{ab}+c)}=\frac{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}{\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}}.$$

Đặt $x=\sqrt{\frac{a}{b}}; y=\sqrt{\frac{b}{c}}; z=\sqrt{\frac{c}{a}}$ thì $x>0$; $y>0$; $z>0$ và $xyz=1$.

Khi đó $P=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$.

Mà $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z+x}{4}+\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\geq x+y+z$

nên $P\geq\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3}{2}$.

Vậy $\max P=\frac{3}{2}$ đạt được khi $a=b=c$.

Câu VIa. 1) Hạ $IH\perp d$ thì $IH=1$.

Có hai đường tròn $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ và $(x-11)^2+(y+8)^2=4$ thỏa mãn đề bài.

2) Giả sử $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ thì $I\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)$. Ta có

$$MA^2+2MB^2+3MC^2$$
$$=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})^2$$
$$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2.$$

Để $MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất thì MI nhỏ nhất, khi đó M là hình chiếu của I lên (P).

Đáp số. $M\left(-\frac{5}{18};-\frac{5}{18};-\frac{13}{9}\right)$.

Câu VIIa. ĐK $\cos x\neq 0$, $\tan x>0$ hay $\sin x\neq 0$. Đưa PT về dạng

$$\sin x.2012^{\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin x}=\cos x.2012^{\frac{1}{\sqrt{2}}.\cos x} \qquad (*)$$

Ta chỉ cần xét miền nghiệm mà $\sin x>0$, $\cos x>0$.

Hàm số $f(t)=t.2012^{\frac{1}{\sqrt{2}}t}$ đồng biến trên $(0;1)$, dẫn đến PT $(*) \Leftrightarrow \sin x=\cos x$.

Đáp số. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu VIb. 1) $\Delta: y=-1$ hoặc $\Delta: y=5$.

2) PT mặt phẳng (P): $x-2y+z+4=0$

hoặc $(P): x-2y+z+\frac{4}{3}=0$.

Câu VIIb. Cách giải tương tự câu VIIa.

Đáp số. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

NGUYỄN LÁI

(GV THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên)

XUNG QUANH ĐIỂM FERMAT-TORRICELLI

PHẠM HUY HOÀNG
(Lớp 11A1 Toán, THPT Chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

I. MỞ ĐẦU

Pierre de Fermat đã từng đưa ra bài toán sau:

Bài toán 1. (Bài toán Fermat). *Tìm điểm trong một tam giác có góc lớn nhất không vượt quá 120° sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến ba đỉnh của tam giác là ngắn nhất.*

Nhà toán học, vật lí học *Evangelista Torricelli* đã chứng minh được bài toán này và phát biểu thành một định lí, thường gọi là định lí Torricelli dưới đây.

Định lí 1. (Định lí Torricelli). *Nếu trong tam giác ABC cho trước có góc lớn nhất không vượt quá 120° dựng được điểm F_+ thỏa mãn tính chất $\widehat{AF_+B} = \widehat{BF_+C} = \widehat{CF_+A} = 120^\circ$ thì F_+ chính là điểm thỏa mãn bài toán Fermat đặt ra. Ta gọi điểm này là điểm Fermat - Torricelli, hay gọi gọn là điểm Fermat thứ nhất.*

Định lí này khá quen thuộc với bạn đọc, xin không chứng minh tại đây. Cách dựng điểm Torricelli hay điểm Fermat thứ nhất có liên quan với bài toán Napoleon sau đây.

Bài toán 2. (Bài toán Napoleon thứ nhất). *Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Khi đó tâm ba tam giác đều BCA', CAB', ABC' tạo thành một tam giác đều và ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm Fermat thứ nhất.*

Cùng với bài toán này dẫn đến bài toán Napoleon thứ hai.

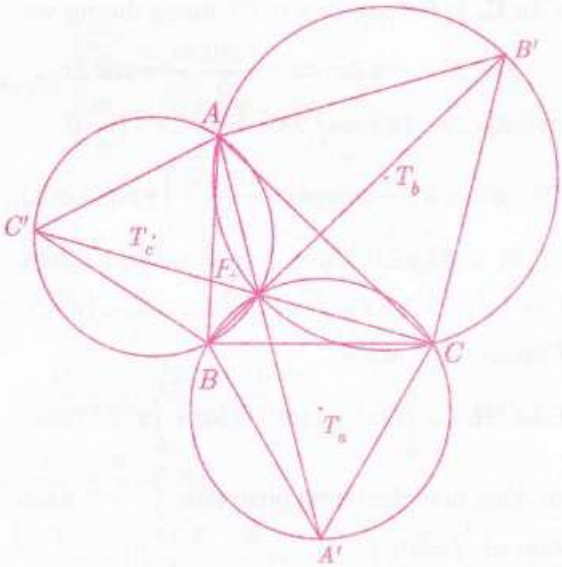
Bài toán 3. (Bài toán Napoleon thứ hai). *Cho tam giác ABC. Về phía trong tam giác dựng ba tam giác đều BCA'', CAB'', ABC''. Khi đó ba tam giác đều BCA'', CAB'', ABC'' tạo thành một tam giác đều và ba đường thẳng AA'', BB'', CC'' đồng quy tại điểm Fermat thứ hai, kí hiệu là F_-.*

Cả hai bài toán Napoleon đều khá quen thuộc với các bạn học sinh, xin không chứng minh tại đây. Để thuận tiện cho phần sau, ta kí hiệu tâm của ba tam giác đều *BCA', CAB', ABC'* lần lượt là T_a, T_b, T_c và tâm ba tam giác đều *BCA'', CAB'', ABC''* lần lượt là S_a, S_b, S_c.

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT

Tính chất 1. *F_+ nằm trên đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCA', CAB', ABC'.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử đường tròn (*ABC'*) cắt đường tròn (*CAB'*) tại *F'* (h. 1).



Hình 1

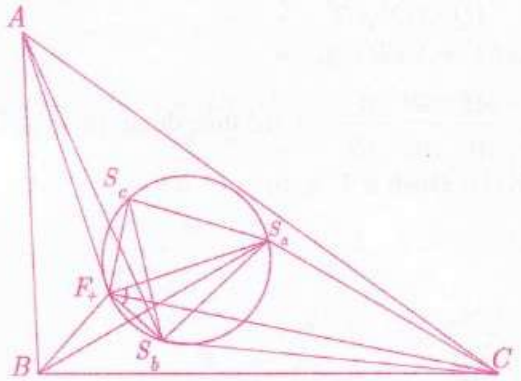
Khi đó $\widehat{CF'A} = 180^\circ - \widehat{AB'C} = 120^\circ$. Tương tự $\widehat{AF'B} = 120^\circ$. Khi đó ta có $\widehat{BF'C} = 120^\circ$ suy ra $F' \in (BCA')$ và $F' \equiv F_+$. ❐

Chứng minh tương tự ta thu được

Tính chất 2. *Điểm Fermat thứ hai là tâm đẳng phương của ba đường tròn (ABC''), (BCA''), (CAB'').*

Tính chất 3. *Điểm Fermat thứ nhất nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $S_aS_bS_c$.*

Chứng minh. (h. 2).



Hình 2

Sử dụng tính chất của góc nội tiếp cho các tứ giác AF_+S_bC và F_+BCS_a ta có

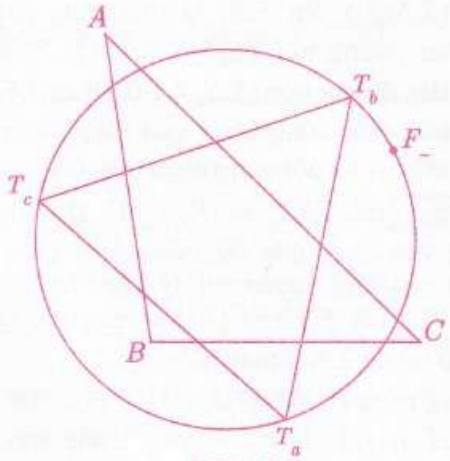
$\widehat{S_aF_+S_b} = \widehat{S_aF_+C} + \widehat{CF_+S_b} = \widehat{S_aBC} + \widehat{S_bAC}$

$= 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{S_aF_+S_b} = 60^\circ = \widehat{S_aS_cS_b}$ nên F_+ nằm trên đường tròn $(S_aS_bS_c)$. ❐

Chứng minh tương tự ta có

★**Tính chất 4.** *Điểm Fermat thứ hai F_- nằm trên đường tròn $(T_aT_bT_c)$* (h. 3).

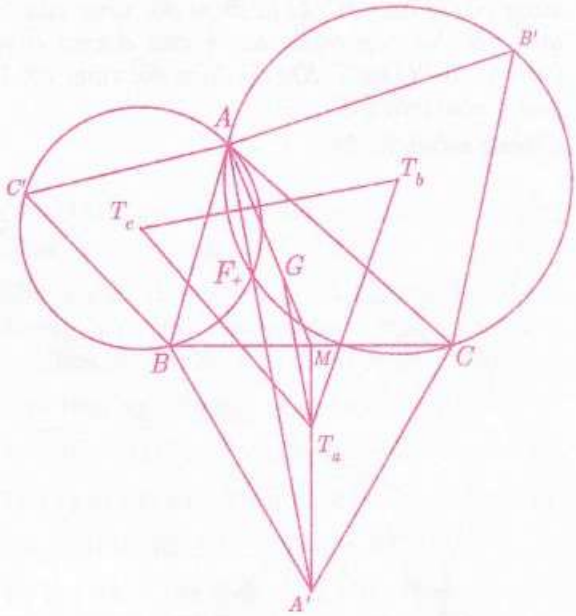


Hình 3

★**Tính chất 5.** *Tâm của hai tam giác đều $T_aT_bT_c$ và $S_aS_bS_c$ trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.*

Chứng minh. Gọi M là trung điểm BC (h. 4). Ta có F_+ nằm trên AA', theo tính chất 1 thì AF_+ là trục đẳng phương của hai đường tròn (ABC') và (ACB'), nên $T_bT_c \perp AA'$. Theo tính chất của trọng tâm tam giác ta có (chú ý T_a là trọng tâm của tam giác BCA')

$$\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} = \frac{MT_a}{MA'}.$$



Hình 4

Theo định lí Thales đảo ta có $T_aG \,//\, AA'$, hay $T_aG \perp T_bT_c$. Tương tự $T_bG \perp T_cT_a$, $T_cG \perp T_aT_b$, hay G là tâm tam giác đều $T_aT_bT_c$. Tương tự, ta thu được G cũng là tâm tam giác đều $S_aS_bS_c$. ❐

Từ các tính chất trên dây ta đi đến một định lí nổi tiếng trong hình học Euclid, do nhà hình học *June A.Lester* nêu ra vào năm 1996.

❖**Định lí 2.** (Định lí Lester). *Trong tam giác ABC, hai điểm Fermat F_+ và F_-, tâm đường tròn ngoại tiếp O, tâm đường tròn Euler N cùng nằm trên một đường tròn.*

Chứng minh. (Theo Nikolai Ivanov Beluhov). Để chứng minh định lí ta cần một số kết quả sau:

Bổ đề 2.1. *Tâm N đường tròn Euler của tam giác ABC chia đoạn OG theo tỉ lệ $\overline{NO}:\overline{NG}=2:1$.*

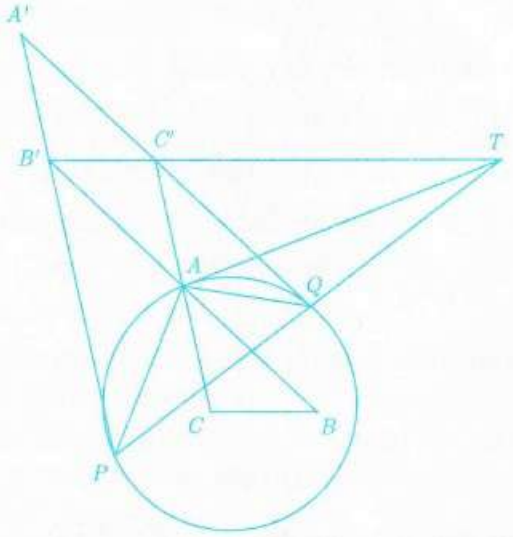
Bổ đề này khá quen thuộc, bạn đọc tự chứng minh.

Bổ đề 2.2. *Cho tam giác ABC. Gọi T là giao điểm của tiếp tuyến tại A của đường tròn (ABC) với BC. Khi đó ta có* $\frac{TC}{TB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.

Chứng minh. Ta thấy $\Delta TAC \backsim \Delta TBA$, vì vậy $\frac{TC}{TB} = \frac{TC}{TA}.\frac{TA}{TB} = \frac{AC}{AB}.\frac{AC}{AB} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ (đpcm). ❐

Bổ đề 2.3. *Cho tam giác ABC. P là điểm đối xứng của B qua AC, Q là điểm đối xứng của C qua AB. Kẻ tiếp tuyến tại A của đường tròn (APQ) cắt PQ tại T. Khi đó điểm đối xứng với T qua A nằm trên BC.*

Chứng minh. (h. 5).



Hình 5

Lấy B', C' lần lượt đối xứng với B, C qua A. Ta có tam giác $AB'P$ cân tại A và $\widehat{B'AP} = 180^\circ - \widehat{B'AC'} - \widehat{PAC} = 180^\circ - 2\widehat{BAC}$.

Do đó $\widehat{AB'P} = \widehat{APB'} = \widehat{BAC}$, nên $B'P \parallel AC$. Tương tự $C'Q \parallel AB$, suy ra $B'P$ và $C'Q$ luôn cắt nhau. Gọi giao điểm của chúng là A', dễ dàng chứng minh được $\Delta A'B'C' = \Delta ABC$. Ngoài ra $\Delta AB'P \backsim \Delta AC'Q$. Dễ thấy $B' \in [A'P], C' \in [A'Q]$ và T nằm ngoài đoạn PQ.

Bổ đề 2.3 được chứng minh nếu ta chỉ ra T, B', C' thẳng hàng. Sử dụng định lí Menelaus cho tam giác $A'PQ$ ta thấy

T, B', C' thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{\overline{B'P}}{\overline{B'A'}}.\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'Q}}.\frac{\overline{TQ}}{\overline{TP}} = 1$

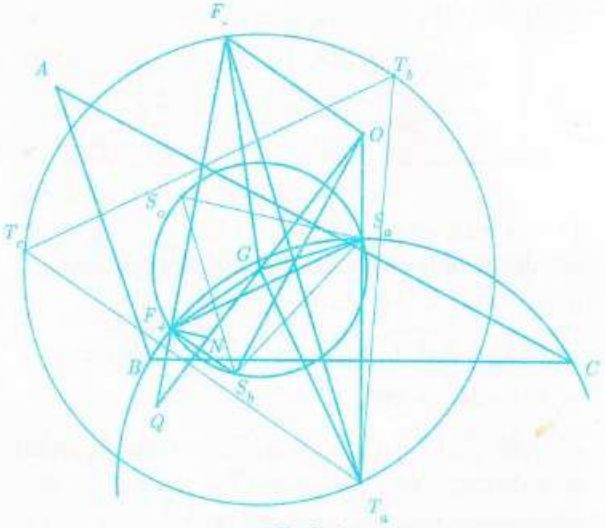
$\Leftrightarrow \frac{B'P}{B'A'}.\frac{C'A'}{C'Q}.\frac{TQ}{TP} = 1$ $(B' \in [A'P], C' \in [A'Q], T \notin [PQ])$

$\Leftrightarrow \frac{B'P}{C'Q}.\frac{C'A'}{B'A'}.\frac{TQ}{TP} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{AP}{AQ}.\frac{AB}{AC}.\frac{AQ^2}{AP^2} = 1$ (Theo bổ đề 2.2 và do $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$).

$\Leftrightarrow \frac{AB}{AC}.\frac{AB}{AC}.\frac{AC^2}{AB^2} = 1$ (hệ thức đúng) (đpcm). ❐

Trở lại **Định lí 2** (h. 6)



Hình 6

Theo tính chất 1, F_+ nằm trên đường tròn tâm T_a bán kính T_aB ; theo tính chất 3, F_+ nằm trên $(S_aS_bS_c)$ nên F_+S_a là trục đẳng phương của hai đường tròn $(S_aS_bS_c)$ và $(T_a;T_aB)$. Vì G là tâm đường tròn $(S_aS_bS_c)$ (tính chất 5) nên F_+ và S_a đối xứng nhau qua GT_a. Tương tự ta có F_- và T_a đối xứng nhau qua GS_a.

Xét tam giác GS_aT_a có F_+ và F_- lần lượt đối xứng với S_a, T_a qua GT_a, GS_a. Gọi Q là giao điểm của tiếp tuyến tại G của đường tròn (GF_+F_-) với F_+F_- và O' đối xứng với Q qua G. Từ bổ đề 2.3 ta thấy $O' \in T_aS_a$.

Tương tự ta có $O' \in T_bS_b$, $O' \in T_cS_c$. Dễ thấy T_aS_a, T_bS_b, T_cS_c là các đường trung trực của BC, CA, AB nên O' chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, suy ra $O \equiv O'$ và O đối xứng với Q qua G.

Từ bổ đề 2.1, ta có $\overline{NO} : \overline{NG} = 2:1$, mà G là trung điểm OQ, nên N là trung điểm đoạn QG.

Do đó $\overline{QF_+}.\overline{QF_-} = \overline{QG}^2 = 2\overline{QN}.\frac{1}{2}\overline{QO} = \overline{QN}.\overline{QO}$.

Suy ra F_+, F_-, O, N cùng nằm trên một đường tròn. Định lí 2 được chứng minh hoàn toàn. ❐

GIỚI THIỆU NỘI DUNG KHẢO SÁT MÔN TOÁN HỌC KÌ I LỚP 11, NĂM HỌC 2011 - 2012

NGUYỄN HẢI CHÂU
(Phó Vụ trưởng Vụ Giáo dục Trung học,
Giám đốc Chương trình Phát triển Giáo dục Trung học, Bộ GD&ĐT)

Kì khảo sát chính thức kết quả học tập của học sinh lớp 11 đối với các môn Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh năm học 2011–2012 của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã được tổ chức từ 29 đến 30/12/2011 với quy mô 340 trường THPT tại 63 tỉnh - thành phố, mỗi trường chọn ngẫu nhiên 30 học sinh. Bài viết này xin giới thiệu về Nội dung khảo sát môn Toán.

I- MỤC ĐÍCH

Khảo sát nhằm đánh giá thực trạng chất lượng, hiệu quả dạy học môn Toán lớp 11 THPT sau khi học xong nội dung tính đến thời điểm tuần 4 tháng 12, về cả bề rộng và chiều sâu của kiến thức và năng lực tư duy; nhằm cung cấp thông tin cho các cơ quan quản lí giáo dục trong xây dựng các giải pháp hợp lí đối với phát triển giáo dục trung học. Từ đó góp phần vào việc chỉnh lí, điều chỉnh chương trình- sách giáo khoa Toán và tạo cơ sở cho việc thiết kế chương trình-sách giáo khoa THPT cho giai đoạn tiếp theo.

II- NỘI DUNG

Nội dung được lựa chọn thiết kế đề kiểm tra gồm 5 chương với 21 chủ đề và 33 chủ điểm chính sau đây.

Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác

- Hàm số lượng giác (Hàm số lượng giác, chiều biến thiên, đồ thị).
- Phương trình lượng giác cơ bản ($\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$).
- Phương trình lượng giác thường gặp ($at+b=0$, $at^2+bt+c=0$, ($t = \sin x, \cos x, ...$) $a\sin x+b\cos x=c$).

Tổ hợp - Xác suất

- Quy tắc đếm (Quy tắc cộng, quy tắc nhân).
- Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp (Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp).
- Nhị thức Newton (Công thức nhị thức Newton, Tam giác Pascal).
- Phép thử và biến cố (Phép thử, không gian mẫu, biến cố).
- Xác suất của biến cố.

Dãy số - Cấp số cộng và cấp số nhân

- Phương pháp quy nạp toán học.
- Dãy số (Định nghĩa, cách cho dãy số, biểu diễn dãy số; dãy số tăng, giảm, bị chặn).
- Cấp số cộng (Định nghĩa, số hạng tổng quát; tính chất, tổng của n số hạng đầu).
- Cấp số nhân (Định nghĩa, số hạng tổng quát; tính chất, tổng của n số hạng đầu).

Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng

- Phép biến hình.
- Phép dời hình.
- Phép tịnh tiến.
- Phép vị tự.
- Phép quay.
- Phép đồng dạng.

Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song

- Đại cương về đường thẳng.
- Hai đường thẳng chéo nhau.
- Đường thẳng và mặt phẳng song song.

III- BIÊN SOẠN ĐỀ KHẢO SÁT

Thời gian làm bài 120 phút, trong đó phần trắc nghiệm khách quan (TNKQ) được HS làm trong 40 phút, phần tự luận (TL) được HS làm trong 80 phút.

Ma trận đề

Chủ đề \ Mức độ nhận thức			Mức độ						Tổng điểm	
			Nhận biết		Thông hiểu		Vận dụng			
			TNKQ	TL	TNKQ	TL	TNKQ	TL		
Hàm số LG	HS LG	HS LG	Câu 1						3 câu 3 điểm	9 câu 24 điểm 24%
		Chiều B.thiên	Câu 2							
		Đồ thị	Câu 3							
	PT LG cơ bản	$\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$	Câu 4			I.1 6 điểm			2 câu 7 điểm	
Phương trình LG	PT LG thường gặp	$at+b=0$ ($t = \sin x, \cos x, ...$)			Câu 21				4 câu 14 điểm	
		$at^2+bt+c=0$ ($t = \sin x, \cos x, ...$)						I.3 6 điểm		
		$a\sin x+b\cos x=c$				I.2 6 điểm	Câu 25			
Tổ hợp Xác suất	Quy tắc đếm	Quy tắc cộng	Câu 5						2 câu 6 điểm	10 câu 24 điểm 24%
		Quy tắc nhân		II.1 5 điểm						
	Hoán vị - Chỉnh hợp – Tổ hợp	Hoán vị	Câu 6						3 câu 8 điểm	
		Chỉnh hợp	Câu 7							
		Tổ hợp				II.2 6 điểm				
	Nhị thức Newton	Nhị thức			Câu 22				2 câu 7 điểm	
		Tam giác Pascal						II.3 6 điểm		
	Phép thử và biến cố	Phép thử, KG mẫu	Câu 8						2 câu 2 điểm	
		Biến cố	Câu 9							
	Xác suất	Xác suất					Câu 26		1 câu 1 điểm	
Dãy số Cấp số cộng Cấp số nhân	PP quy nạp							III.2 6 điểm	1 câu 6 điểm	7 câu 17 điểm 17%
	Dãy số	ĐN, cách cho DS, biểu diễn DS	Câu 10						2 câu 2 điểm	
		Dãy số tăng, giảm, bị chặn	Câu 11							
	Cấp số cộng	ĐN, số hạng tổng quát			Câu 23				2 câu 7 điểm	
		Tính chất, tổng của n số hạng đầu				III.1 6 điểm				
	Cấp số nhân	ĐN, số hạng tổng quát	Câu 12						2 câu 2 điểm	
		Tính chất, tổng của n số hạng đầu			Câu 24					

Phép biến hình	Phép biến hình	Câu 13						1 câu; 1 điểm	8 câu 13 điểm 13%
	Phép tịnh tiến	Câu 14						1 câu; 1 điểm	
	Phép quay	Câu 15			V 6 điểm			2 câu; 7 điểm	
	Phép dời hình	Câu 16				Câu 27		2 câu; 2 điểm	
	Phép vị tự	Câu 17						1 câu; 1 điểm	
	Phép đồng dạng					Câu 28		1 câu; 1 điểm	
Đường thẳng trong MP Quan hệ song song	Đại cương về ĐT	Câu 18	IV.1 5điểm					2 câu; 6 điểm	8 câu 22 điểm 22%
	Hai ĐT chéo nhau	Câu 19			IV.2 6điểm	Câu 29		3 câu; 8 điểm	
	ĐT và MP song song	Câu 20				Câu 30	IV.3 6 điểm	3 câu; 8 điểm	
Tổng		20TNKQ=20 điểm 2TL=10 điểm Tổng: 30 điểm 30%		4 TNKQ=4 điểm 6TL = 36 điểm Tổng: 40 điểm 40%		6 TNKQ = 6 điểm 4 TL = 24 điểm Tổng: 30 điểm 30%		30TNKQ=30 điểm 30% 12TL = 70 điểm 70% Tổng: 100 điểm	

Mô tả ma trận

• Về cấu trúc

Phần Đại số với 65 điểm, gồm 26 câu, kiểm tra kiến thức trong 3 chương.

Phần Hình học với 35 điểm, gồm 16 câu, kiểm tra kiến thức trong 2 chương.

Tổng số 42 câu, trong đó có 30 câu TNKQ và 12 câu TL.

30 câu TNKQ = 30 điểm (mỗi câu 1 điểm).

12 câu TL = 70 điểm (mỗi câu ở mức nhận biết 5 điểm, mỗi câu ở mức thông hiểu 6 điểm và mỗi câu ở mức vận dụng 6 điểm).

• Về mức độ nhận thức

Mức độ	Mô tả
Biết	Học sinh nhận ra, nhớ lại, xác định được, tái hiện được các dữ liệu, sự kiện, khái niệm, định lí, quy tắc, tính chất, … đã được học.
Hiểu	Học sinh biết được kiến thức đã học và ý nghĩa của nó, sử dụng kiến thức đó nhưng chưa có sự liên kết cần thiết với các kiến thức khác hoặc chưa thấy được các ứng dụng đầy đủ của nó. Ở mức độ này, học sinh có thể dùng ngôn ngữ của mình để giải thích được, minh họa được, chứng minh được các dữ liệu, sự kiện, khái niệm, định lí, quy tắc, tính chất,… đã học.
Vận dụng	Học sinh sử dụng các kiến thức đã học vào một hoàn cảnh cụ thể để giải quyết những vấn đề, bài toán trong tình huống quen thuộc, hoặc tương tự như những tình huống đã biết, hoặc tình huống mới không quen thuộc.

LTS. *Do khuôn khổ tờ tạp chí có hạn, phần giới thiệu đề chi tiết sẽ được đăng trong Đặc san của Tạp chí. Mời các bạn đón đọc.*

CÁC LỚP THCS

Bài T1/420. (Lớp 6). Tìm các giá trị nguyên của biểu thức $f(x;y)=\dfrac{x^2+x+2}{xy-1}$, trong đó x, y là các số nguyên dương.

TRỊNH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T2/420. (Lớp 7). Cho tam giác ABC nhọn, không cân tại A. Đường trung trực của các cạnh AB, AC theo thứ tự cắt trung tuyến AM tại E, F. Gọi giao điểm của BE và CF là K. Chứng minh rằng $\widehat{AKB}=\widehat{AKC}, \widehat{MAB}=\widehat{KAC}$.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T3/420. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn đẳng thức

$$2xy+6yz+3zx-|x-2y-z|=x^2+4y^2+9z^2-1.$$

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(Học viên Cao học Toán, Khóa 2010-2012, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T4/420. Với mỗi số nguyên dương n $(n=1,2,...)$, đặt $a_n=\dfrac{4n}{n^4+4}$. Chứng minh rằng

$$a_1+a_2+...+a_n<\frac{3}{2}.$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T5/420. Cho tam giác nhọn ABC, tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC, K là giao điểm của CE và BF, H là giao điểm của BF với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEK. Chứng minh rằng DH vuông góc với BF.

ĐÀO HUY TRƯỜNG
(GV THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/420. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+6\sqrt{xy}-y=6 \\ x+\dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)}=3. \end{cases}$$

TRẦN VĂN THƯỜNG
(GV THPT Phú Mỹ, Tân Thành, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T7/420. Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\ge\left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

TRẦN TUẤN ANH
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T8/420. Cho tam giác ABC có diện tích S. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ một điểm M trong tam giác đến ba đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng $(x+y+z)^2\ge 4\sqrt{3}S$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

LỤC ĐỨC BÌNH
(GV THPT Nguyễn Huệ, Quảng Trị)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/420. Cho một tập hợp khác rỗng $S\subseteq\mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện sau

(i) Tồn tại hai phần tử $a, b\in S$ mà

$$(a,b)=(a-2,b-2)=1.$$

(ii) Nếu $x, y\in S$ thì $x^2-y\in S$ (x, y không nhất thiết khác nhau). Chứng minh rằng $S=\mathbb{Z}$.

(Kí hiệu (a, b) chỉ ước chung lớn nhất của hai số nguyên a và b).

TRẦN VŨ LINH
(SV lớp K45.11.06, Học viện Tài chính)

Bài T10/420. Tìm số k lớn nhất sao cho

$$\sqrt{a+2b+3c}+\sqrt{b+2c+3a}+\sqrt{c+2a+3b}$$
$$\ge k(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$ đúng với mọi số dương a, b, c.

TẠ HOÀNG THÔNG
(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T11/420. Cho dãy (x_n) $(n = 1, 2, ...)$ được xác định như sau

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1001}{1003} \\ x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3 - x_n^4 + ... + x_n^{2011} - x_n^{2012} \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Hãy tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} (nx_n)$.

HOÀNG NGỌC TUẤN
(SV lớp K27E Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội II)

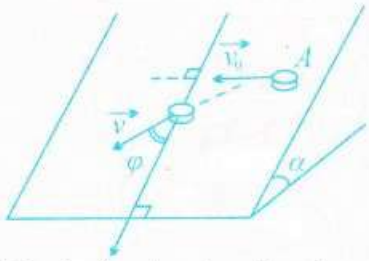
Bài T12/420. Cho bốn điểm A, B, C, D khác nhau và cùng nằm trên một đường tròn tâm O. Gọi I, J theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của C xuống đường thẳng AB và AD; K, L theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D xuống đường thẳng BC và BA; N là trung điểm của CD; M là giao điểm của đường thẳng IJ và KL. Giả sử đường thẳng IJ và OD cắt nhau tại E, đường thẳng KL và OC cắt nhau tại F.

Chứng minh năm điểm M, N, O, E và F cùng nằm trên một đường tròn.

TRẦN VIỆT HÙNG
(Sở Giáo dục – Đào tạo Sóc Trăng)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/420. Người ta truyền vận tốc v_0 cho một vòng đệm nhỏ A đặt trên mặt phẳng nghiêng góc α với mặt nằm ngang (hình vẽ).



Xác định vận tốc của vòng đệm theo góc φ, biết hệ số ma sát $\mu = \tan\alpha$ và ban đầu $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

TRẦN KHÁNH HẢI
(GV THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế)

Bài L2/420. Một thấu kính hội tụ O_1 tiêu cực $f_1 = 15$cm đặt trước một thấu kính phân kì O_2 tiêu cự $f_2 = -21$cm. Hai thấu kính cách nhau $l = O_1O_2 = 18$cm và có cùng trục chính. Một vật AB đặt trước thấu kính hội tụ, vuông góc với trục chính, điểm A nằm trên trục chính.

a) Phải đặt vật AB trong khoảng nào trước O_1 để ảnh cuối cùng A_2B_2 tạo bởi hệ hai thấu kính này ngược chiều với vật AB?

b) Xác định vị trí của AB để ảnh A_2B_2 cao gấp đôi vật AB.

c) Xác định vị trí của AB để ảnh A_2B_2 cao bằng một nửa vật AB.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/420. (For 6th grade). Find the integer value of the expression $f(x;y) = \dfrac{x^2 + x + 2}{xy - 1}$, where x, y are positive integers.

T2/420. (For 7th grade). Let ABC be an acute triangle which is not isosceles at A. The perpendicular bisectors of AB, AC cut the median AM at E, F respectively. BE and CF meet at K. Prove that $\widehat{AKB} = \widehat{AKC}$, $\widehat{MAB} = \widehat{KAC}$.

T3/420. Find all triples of integers $(x; y; z)$ such that

$$2xy + 6yz + 3zx - |x - 2y - z| = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1.$$

T4/420. For each positive integer n $(n = 1, 2, ...)$, put $a_n = \dfrac{4n}{n^4 + 4}$. Prove that

$$a_1 + a_2 + ... + a_n < \frac{3}{2}.$$

T5/420. Let ABC be an acute triangle. The internal angle-bisector of angle BAC cuts BC at D. E, F are the orthogonal projections of point D on AB and AC respectively, K is the intersection of CE and BF, H is the intersection of BF with the circumcircle of triangle AEK. Prove that DH is perpendicular to BF.

(Xem tiếp trang 27)

★**Bài T1/416.** *Tìm tất cả các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn* $2010^x + 2011^y = 2012^z$.

Lời giải. Với mỗi số tự nhiên x, y thì $2010^x \geq 1$ và $2011^y \geq 1$ nên từ

$$2010^x + 2011^y = 2012^z \quad (1)$$

suy ra $2012^z \geq 2$, tức là $z \geq 1$ và 2012^z là số chẵn. Hơn nữa, 2011^y là số lẻ nên 2010^x là số lẻ, suy ra $x = 0$ và $2010^x = 1$. Ta đưa về xét các số tự nhiên y, z thỏa mãn

$$1 + 2011^y = 2012^z \quad (2)$$

a) Với $z = 1$ thì $1 + 2011^y = 2012$, suy ra $y = 1$ thỏa mãn (2).

b) Với $z \geq 2$ thì $2012^z = 4^z . 503^z$ chia hết cho 8 (3)

Ta có $2011 = 8k + 3$ với $k = 251$.

• Khi $y = 2n$ thì $(8k+3)^{2n} = (8h+1)^n = 8t+1$, với n, h, t là các số nguyên dương.

• Khi $y = 2n + 1$ thì

$$(8k+3)^{2n+1} = (8k+3)^{2n}.(8k+3)$$
$$= (8t+1)(8k+3) = 8s+3,$$

với s là số nguyên dương.

Từ trên suy ra tổng $1 + 2011^y = 1 + (8k+3)^y$ không chia hết cho 8. Từ đó và (3) suy ra không tồn tại các số nguyên dương y và $z \geq 2$ thỏa mãn (3).

Vậy chỉ có một bộ số tự nhiên $x = 0, y = 1, z = 1$ thỏa mãn (1). ❐

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn chỉ ra được đáp số, nhưng chưa lập luận chặt chẽ rằng *chỉ có một* bộ số tự nhiên $x = 0, y = 1, z = 1$ thỏa mãn (2). Các bạn sau có lời giải đúng :

Nghệ An: *Thạch Đức Anh, Trần Diệu Linh, Nguyễn Thanh Lâm, Lương Quang Vũ, Đặng Phi Long*, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

VIỆT HẢI

★**Bài T2/416.** *Cho 100 số tự nhiên* $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ *thỏa mãn*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{100}} = \frac{101}{2}.$$

Chứng minh rằng ít nhất hai trong 100 số tự nhiên trên bằng nhau.

Lời giải. Giả sử không có hai số nào trong 100 số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_{100}$ là bằng nhau. Khi đó ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_{100}} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{100}$$

$$< 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2}}_{99 \text{ số hạng}} = 1 + \frac{99}{2} = \frac{101}{2}, \text{ trái giả thiết.}$$

Vậy ít nhất hai trong 100 số tự nhiên đã cho phải bằng nhau. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn tham gia giải và đều cho lời giải đúng.

2) Bằng cách chứng minh tương tự, ta có kết quả tổng quát sau:

Cho n số tự nhiên $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n > 2)$ *thỏa mãn*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = \frac{n+1}{2}.$$

Khi đó có ít nhất hai trong số n số tự nhiên trên bằng nhau.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Chu Mai Anh, Hoàng Thị Minh Anh*, 7A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngọc Anh*, 7C, THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam ; **Bắc Ninh:** *Mẫn Văn Tiến*, 7A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trần Thị Diệu Hương*, 6B, *Nguyễn Thanh Lâm*, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Linh Đan, Phan Thị*

CÔNG TY RUNSYSTEM, BCĐ PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIỆN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Phối hợp tổ chức trao thưởng thường xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

Dung, Ngô Linh Hương, Nguyễn Thị Như Quỳnh, Võ Lộc Anh, 7A, *Võ Thị Hương Trà, Phan Hồng Ngọc, Bùi Thị Khánh Linh, Ngô Thục Mây, Nguyễn Văn Quang, Bùi Thị Quỳnh Trang*, 7B, *Nguyễn Thị Vân Anh, Phan Thị Hiền, Nguyễn Thị Sông Hương*, 7C, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Phạm Thị Mỹ Hằng, Nguyễn Thúy Phượng, Đặng Lưu Việt Quý, Nguyễn Thị Hạ Vy, Phạm Quang Nghĩa, Vũ Thi Thi, Cao Thị Thúy Điểm, Nguyễn Thị Hạnh*, 7A, *Nguyễn Tấn Phúc*, 6A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Quảng Trị:** *Hoàng Quang Hiển*, 7B, THCS Hiếu Giang, TP. Đông Hà; **Trà Vinh:** *Trương Hoàng Việt*, 7/4, THCS Cầu Quan, Tiểu Cần.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/416. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}$$
$$\geq 9+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \quad (1)$$

Lời giải. (Theo bạn *Chu Văn Trang*, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**).

Ta có $A=\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}$

$$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2;\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2.$$

Từ đó suy ra $A\geq 12$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ (*)

với $x>0, y>0$, ta cũng có

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{4a}{b+c};\ \frac{b}{a}+\frac{b}{c}\geq\frac{4b}{a+c};$$
$$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq\frac{4c}{a+b}.$$

Suy ra $A\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+6$ (3)

Từ (2) và (3), ta có

$$2A\geq 18+4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

hay $A\geq 9+2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$.

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ❐

➢**Nhận xét.** Các bạn tham gia đều giải được bài toán này với nhiều cách giải khác nhau. Nhưng chủ yếu cách giải của các bạn sử dụng bất đẳng thức (*) và bất đẳng thức Nesbit:

Với $a>0, b>0, c>0$ thì $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Ngoài bạn *Trang*, các bạn có lời giải tốt là: **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tài*, 9A, THCS Yên Phong, *Nguyễn Đình Mười*, 9A4, THCS Mão Điền, Thuận Thành; **Phú Thọ:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8A3, *Nguyễn Hồng Quân*, 9A3, THCS Lâm Thao; *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Trương Lỗ, Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Trương Thị Hoài Thu*, 8A, *Nguyễn Đức Đại*, 9A1, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** *Phạm Văn Phú*, 9A2, THCS Lương Thế Vinh, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Lương Đình An*, 7B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; *Hoàng Thị Khánh Linh, Trần Thị Diệu Hương*, 8B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Hà Tĩnh:** *Trần Sỹ Luận*, 8B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Mỹ Linh*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Cao Thị Thùy Điểm*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Phạm Thị Thanh Ngân*, 7A8, THCS phường Đập Đá, TX. An Nhơn; **Hà Nội:** *Nguyễn Chí Tùng*, 9A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T4/416. *Giải phương trình*

$$4x^2+14x+11=4\sqrt{6x+10} \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện $x\geq\frac{-5}{3}$.

$(1)\Leftrightarrow 4x^2+20x+25=6x+10+4\sqrt{6x+10}+4$

$\Leftrightarrow (2x+5)^2=\left(\sqrt{6x+10}+2\right)^2$

$\Leftrightarrow |2x+5|=\sqrt{6x+10}+2$ (2)

Do $x\geq\frac{-5}{3}$ nên $2x+5\geq 2.\frac{-5}{3}+5>0$, suy ra

$(2)\Leftrightarrow 2x+5=\sqrt{6x+10}+2$

$\Leftrightarrow 2x+3=\sqrt{6x+10}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+3\geq 0\\(2x+3)^2=6x+10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-\frac{3}{2}\\4x^2+6x-1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{13}}{4}$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy PT (1) có nghiệm duy nhất $x=\frac{-3+\sqrt{13}}{4}$. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài này và đưa ra nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, bình phương hai vế và đưa về phương trình tích

$$(4x^2+6x-1)(4x^2+22x+39)=0.$$

Hoặc đặt $t=\sqrt{6x+10}$ $(t\ge 0)$, rồi chuyển về phương trình

$$(t^2+3t+11)(t^2-3t-1)=0$$

cũng cho kết quả đúng, tuy nhiên lời giải dài dòng hơn.

2) Một số bạn không chú ý đến điều kiện của ẩn dẫn đến kết luận PT (1) có hai nghiệm $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{4}$ (!!)

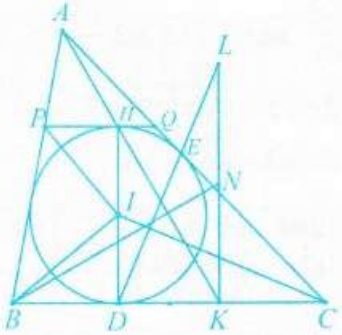
3) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Lê Thị Thu Hiền*, 9A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, *Bùi Tuấn Nam*, 9A, THCS Lương Lỗ, Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Ngô Tuấn Anh*, 8T, THCS Đồng Xuân, TX. Phúc Yên, *Nguyễn Thị Thanh Hoa*, 9A, THCS Lập Thạch; **Hà Nội:** *Nguyễn Trường Sơn*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Bắc Ninh:** *Trần Anh Tài, Lưu Đức Mạnh*, 9A, THCS Yên Phong, *Nguyễn Đình Mười*, 9A4, THCS Mão Điền, Thuận Thành; **Nam Định:** *Phạm Văn Phúc*, 9A2, THCS Lương Thế Vinh, TP. Nam Định; **Nghệ An:** *Lương Đình Ân*, 7B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, *Dương Khánh Linh*, 9A1, THCS Nghĩa Hồng, Nghĩa Đàn; **Hà Tĩnh:** *Đặng Văn Sang*, 7A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Trần Thị Mỹ Ninh*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, *Nguyễn Thúy Phương*, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Võ Thế Duy*, 9A1, THCS TTr. Phù Mỹ, H. Phù Mỹ; **Tiền Giang:** *Nguyễn Minh Tuyền*, 6^0, THCS Lê Ngọc Hân, TP. Mỹ Tho.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ **Bài T5/416.** *Cho tam giác ABC. Gọi D, E theo thứ tự là tiếp điểm đường tròn (I) nội tiếp tam giác với các cạnh BC, CA. Gọi K là điểm đối xứng của D qua trung điểm cạnh BC, đường thẳng qua K vuông góc với BC cắt DE tại L. Gọi N là trung điểm của KL, chứng minh rằng BN vuông góc với AK.*

Lời giải



Trước hết ta chứng minh rằng, nếu H là điểm đối xứng của D qua I thì ba điểm A, H, K thẳng hàng.

Thật vậy, gọi PQ là tiếp tuyến của đường tròn (I) tại tiếp điểm H $(P\in AB; Q\in AC)$ và K' là giao điểm của AH với BC. Khi đó ta dễ thấy

$$\Delta PHI \backsim \Delta IDB \Rightarrow \frac{PH}{ID}=\frac{IH}{DB}\Rightarrow PH.DB=r^2$$

(r là bán kính của đường tròn (I)).

Tương tự $HQ.DC=r^2$, suy ra $PH.DB=HQ.DC$.

Suy ra $\frac{PH}{DC}=\frac{HQ}{DB}=\frac{PH+HQ}{DB+DC}=\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AB}=\frac{PH}{BK'}$.

Do đó $BK'=DC$, mà $BK=DC$ nên $K\equiv K'$.

Vậy ba điểm A, H, K thẳng hàng (1)

Vì $DE\perp IC$ nên $\widehat{DLK}=\widehat{ICD}\Rightarrow \tan\widehat{DLK}=\tan\widehat{ICD}$

$$\Rightarrow \frac{DK}{LK}=\frac{ID}{CD}\Rightarrow \frac{DK}{2KN}=\frac{HD}{2CD}\Rightarrow \frac{DK}{KN}=\frac{HD}{BK}$$

$\Rightarrow \Delta DKH \backsim \Delta KNB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{DHK}=\widehat{KBN}\Rightarrow HK\perp BN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AK\perp BN$. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Chỉ có bốn bạn giải bài này và đều cho lời giải đúng. Các bạn đều chứng minh theo hai ý (1) và (2). Để chứng minh (2), bạn *Trang* (**Bắc Ninh**) đưa ra một cách khác cũng thú vị là: Lấy G là điểm đối xứng với N qua trung điểm M của BC, để chứng minh $HK\perp BN$, bạn chứng minh $IM\perp GC$.

2) Bốn bạn cho lời giải đúng là:

Bắc Ninh: *Chu Văn Trang*, 9A, THCS Yên Phong; **TP. Hồ Chí Minh**: *Phạm Lê Vương Đoàn*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Nghệ An**: *Lê Trần Kiên*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh. Và một bạn quên ghi địa chỉ ở bài làm.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/416.** *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$A=\frac{mn}{(m+1)(n+1)(m+n+1)}$$

trong đó m, n là các số tự nhiên.

Lời giải. Không giảm tính tổng quát giả sử $m\le n$.

• Nếu $m=0$ thì $A=0$ (1)

• Nếu $m=1$ thì $A=\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$.

Sử dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta thấy

$$(n+1)(n+2)>4n\sqrt{2}\Rightarrow A<\frac{1}{8\sqrt{2}} \quad (2)$$

• Nếu $2 \le m \le n$ thì ta có

$$\frac{1}{A} = m+n+3+\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{1}{mn}+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}.$$

Sử dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m} \ge 2 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{mn}+\frac{m}{8}+\frac{n}{8} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{3}{4} \qquad (4)$$

$$\frac{m}{2}+\frac{n}{2}+\frac{2}{m}+\frac{2}{n} \ge 4 \qquad (5)$$

Các đẳng thức xảy ra khi $m = n = 2$.

Lại có $m \ge 2$, $n \ge 2$ nên $\frac{3m}{8}+\frac{3n}{8} \ge \frac{3}{2}$ (6)

Cộng (3), (4), (5), (6) theo vế ta có

$$m+n+\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{1}{mn}+\frac{m}{n}+\frac{n}{m} \ge \frac{33}{4}.$$

Suy ra $\frac{1}{A} \ge \frac{33}{4}+3 = \frac{45}{4}$. Vậy $A \le \frac{4}{45}$ (7)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = n = 2$.

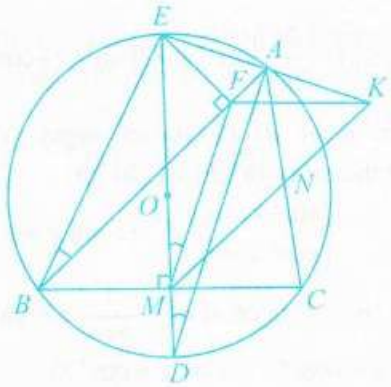
Từ (1), (2) và (7) suy ra GTLN của A là $\frac{4}{45}$ đạt được khi và chỉ khi $m=n=2$. ❐

➢ **Nhận xét.** Có ít bạn tham gia giải bài toán trên và đa số đều cho lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 10A1, *Hoàng Đỗ Kiên*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Đình Tùng*, 10 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nam Định:** *Vũ Tuấn Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Lương Văn Minh*, 10A1, THPT Xuân Trường B; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Quỳnh Loan*, 10T1, THPT Đô Lương 1; *Lê Hoàng Hiệp*, 11A1, THPT Thái Hoà; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/416.** *Cho tam giác ABC (AB > AC) nội tiếp đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc BAC cắt lại đường tròn (O) tại điểm E; M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA; F là hình chiếu của E trên AB, K là giao điểm của MN và AE. Chứng minh rằng KF song song với BC.*

Lời giải



Gọi D là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A, ta thấy $AD \perp AE$ (1)

Mặt khác, dễ thấy ED là đường kính của đường tròn (O) vuông góc với dây cung BC tại điểm M. Từ đó bốn điểm B, E, F, M cùng nằm trên một đường tròn, suy ra $\widehat{FME} = \widehat{FBE} = \widehat{ABE} = \widehat{ADE}$, dẫn đến $MF // AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MF \perp AE$ (3)

Lại vì $MN // AB$; $EF \perp AB$ nên $EF \perp MN$ (4)

Từ (3) và (4) ta thấy F là trực tâm tam giác MEK. Từ đó $KF \perp EM$, mà $EM \perp BC$ suy ra $KF // BC$ (đpcm). ❐

➢ **Nhận xét.** Số bài giải gửi về Tòa soạn rất nhiều, tất cả đều giải đúng. Sau đây là danh sách các bạn học sinh bậc THCS có lời giải gọn hơn cả: **Phú Thọ:** *Cao Trung Đức*, 9A4, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** *Chu Văn Trang*, 9A, THCS Yên Phong; **Thanh Hóa:** *Lê Quang Dũng*, 7D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Trần Trung Đức*, 9H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Lê Phi Anh*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Lương Đình Ân*, 7B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Quảng Ngãi:** *Tống Thành Nguyện*, 9A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; **Bình Định:** *Võ Thế Duy*, 9A1, THCS TTr. Phù Mỹ, Phù Mỹ.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T8/416.** *Giải phương trình*

$$\sin^{2n+1}x + \sin^n 2x + (\sin^n x - \cos^n x)^2 - 2 = 0$$

với n là số nguyên dương cho trước.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sin^{2n+1}x + \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\sin^n 2x + \sin^{2n}x + \cos^{2n}x = 2 \quad (1)$$

Ta chứng minh rằng $VT(1) \le 2$ (2)

Thật vậy, dễ thấy rằng $\cos^{2n}x \le 2\cos^{2n}x$ và $\sin^{2n+1}x \le \sin^{2n}x$ (vì $|\sin x| \le 1$), nên

$$\mathrm{VT}(1) \le \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\sin^n 2x + 2\left(\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\right) \quad (3)$$

• Với $n=1$, từ (3) ta có ngay $\mathrm{VT}(1)\le 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin^3 x=\sin^2 x\\ \cos^2 x=0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1.$$

• Với $n\ge 2$, ta có $0<1-\dfrac{1}{2^{n-1}}<1$ và

$\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\le \sin^4 x+\cos^4 x$;

$\sin^n 2x\le \sin^2 2x = 4\sin^2 x\cos^2 x$,

(vì $|\cos x|\le 1$; $|\sin 2x|\le 1$) nên từ (3) suy ra

$$\mathrm{VT}(1)\le 4\sin^2 x\cos^2 x+2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$$
$$=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin^{2n+1}x=\sin^{2n}x=\sin^4 x\\ \cos^{2n}x=\cos^4 x=0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x=1.$$

Như vậy bất đẳng thức (2) thỏa mãn với mọi số nguyên dương n.

Phương trình (1) được thỏa mãn khi và chỉ khi dấu đẳng thức của (2) xảy ra.

Điều đó tương đương với

$$\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}). \square$$

➢**Nhận xét.** Có ít bạn tham gia gửi bài giải. Một số bạn sử dụng bất đẳng thức Cauchy tổng quát và công thức khai triển nhị thức Newton để chứng minh (2). Làm như vậy dài và phức tạp.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: *Hồ Bá Đức*, 11A12, THPT Diễn châu II; **Đồng Nai**: *Phạm Văn Minh*, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa; **Bến Tre**: *Lê Thị Minh Thảo*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN ANH DŨNG

★**Bài T9/416.** *Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ sao cho*

$$\begin{cases}P(2)=12\\ P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x), \forall x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Lời giải. Giả sử $P(x)$ là đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán. Kí hiệu n là bậc của đa thức. So sánh bậc của hai vế ta có $2n=4+n \Rightarrow n=4$.

Từ giả thiết ta suy ra $P(x)\vdots x(x+1)$ và nếu cho $x=0$ ta nhận được $P(0)=0$. Do đó $P(x^2)=x^2(x^2+1)P(x)\vdots x^3$.

Từ các nhận xét trên ta suy ra

$$P(x)=x(x+1)(ax^2+bx).$$

Như vậy $P(x^2)=x^2(x^2+1)(ax^4+bx^2)$. Do đó

$$x^2(x^2+1)(ax^4+bx^2)=x^2(x^2+1).x(x+1)(ax^2+bx).$$

Chia cả hai vế cho $x^4(x^2+1)$ ta có

$$ax^2+b=(x+1)(ax+b)$$
$$\Leftrightarrow ax^2+b=ax^2+(a+b)x+b$$
$$\Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow b=-a.$$

Suy ra $P(x)=x(x+1)(ax^2-ax)=ax^2(x^2-1)$.

Chú ý $P(2)=12 \Rightarrow 12=a.2^2.(2^2-1) \Rightarrow a=1$

$\Rightarrow P(x)=x^2(x^2-1)=x^4-x^2$.

Vậy $P(x)=x^4-x^2$ là đa thức duy nhất thỏa mãn các điều kiện bài toán. $\square$

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán đa thức dạng đơn giản. Một số bạn giải theo cách đơn giản hơn: $n=4 \Rightarrow P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Thay vào và đồng nhất hệ số, kết hợp với $P(2)=12$ ta tính được $a=1$, $c=-1$, $b=d=e=0$. Cách giải này không phải dùng các lí luận của đa thức nhưng phải tính toán nhiều hơn. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Tiến Thép*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Nguyễn Trung Hiếu*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Trường Sơn*, 9A1, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Vũ Tuấn Anh*, *Nguyễn Đình Tùng*, 10T1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Nam Định:** *Lương Văn Minh*, 10A1, THPT Xuân Trường B, Xuân Trường; **Thái Bình:** *Trần Hồng Quân*, 10T1, THPT chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Dũng*, 10A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Trần Quốc Khánh*, 10A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đồng Nai:** *Đặng Ngọc Sơn*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Thành Thi*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T10/416.** *Cho n số hữu tỉ $r_1, r_2, \ldots, r_n$ thỏa mãn $0<r_i\le\frac{1}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} r_i=1\,(n>1)$, và hàm số $f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P(k)=2k-\sum_{i=1}^{n} f(kr_i)$ khi k chạy trên tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$ (kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số thực x).*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x] \quad (1)$$

Thật vậy đặt $a=x-[x], 0\le a<1$. Khi đó

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+\left[a+[x]+\frac{1}{2}\right]=2[x]+\left[a+\frac{1}{2}\right] \quad (2)$$

$$[2x]=[2[x]+2a]=2[x]+[2a] \quad (3)$$

Nếu $0\le a<\frac{1}{2}$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]=0$.

Nếu $\frac{1}{2}\le a<1$ thì $\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]=1$.

Từ (2) và (3) ta suy ra (1).

Thành thử $f(x)=[2x]>2x-1$.

Vậy $P(k)=2k-\sum_{i=1}^{n}f(kr_i)<2k-\sum_{i=1}^{n}(2kr_i-1)$

$$=2k-2k\sum_{i=1}^{n}r_i+n=n.$$

Do $P(k)$ là số nguyên nên suy ra $P(k)\le n-1$ $\forall k\in\mathbb{Z}$.

Bây giờ ta sẽ tìm k để $P(k)=n-1$. Giả sử $r_i=\frac{a_i}{b_i}$ với $a_i,b_i\in\mathbb{N}^*$; $0<a_i\le\frac{b_i}{2}$, $i=1,2,...,n$.

Lấy $k=b_1b_2...b_n-1\in\mathbb{Z}$. Khi đó

$$kr_i=(b_1b_2...b_n-1)r_i=(b_1b_2...b_n-b_i)r_i+b_ir_i-r_i$$
$$=h_i+a_i-r_i$$

trong đó $h_i=(b_1b_2...b_n-b_i)r_i\in\mathbb{Z}$, vì $b_ir_i=a_i\in\mathbb{Z}$.

Thành thử

$$2kr_i-f(kr_i)=2(h_i+a_i-r_i)-[2h_i+2a_i-2r_i]$$
$$=1-r_i.$$

Suy ra $P(k)=2k\sum_{i=1}^{n}r_i-\sum_{i=1}^{n}f(kr_i)$

$$=\sum_{i=1}^{n}[2kr_i-f(k.r_i)]=\sum_{i=1}^{n}(1-r_i)=n-1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $P(k)$ là $n-1$. ❐

➢ **Nhận xét.** Bài toán này có rất ít bạn tham gia giải và đều chưa có lời giải đúng. Có hai bạn đã chứng minh được $P(k)\le n-1$ tuy nhiên khi chọn giá trị k để đạt dấu bằng đã hiểu sai đầu bài là các số $r_1,...r_n$ có thể thay đổi. Đầu bài là "cho trước n số hữu tỉ $r_1,...r_n$".

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★**Bài T11/416.** *Giả sử hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(x+1006)$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $x\in\mathbb{R}$, $f(x+20)+f(x+12)+f(x+2012)$ là số vô tỉ. Chứng minh rằng $f(x)=f(x+2012)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.*

Lời giải. (Theo bạn *Lê Nhật Thăng*, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**).

Nhận xét rằng nếu một hàm số $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và chỉ nhận các giá trị vô tỉ thì $g\equiv c$ với c là một số vô tỉ nào đó.

Thật vậy, nếu không như vậy thì tồn tại cặp số thực phân biệt x_1, x_2 ($x_1<x_2$) sao cho $g(x_1)\ne g(x_2)$. Do tính chất liên tục của hàm g nên với số hữu tỉ $q\in(\min\{g(x_1),g(x_2)\},\max\{g(x_1),g(x_2)\})$ cho trước, đều tồn tại $x_3\in(x_1,x_2)$ để $g(x_3)=q$, điều này là không thể vì g chỉ nhận các giá trị vô tỉ.

Theo bài ra hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(x+1006)$ là số hữu tỉ khi và chỉ khi $x\in\mathbb{R}$, $f(x+20)+f(x+12)+f(x+2012)$ là số vô tỉ. Điều này tương đương với hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(x+1006)$ là số vô tỉ khi và chỉ khi với $x\in\mathbb{R}$, số $f(x+20)+f(x+12)+f(x+2012)$ là số hữu tỉ.

Do vậy, cặp hàm

$$\begin{cases} h_1(x)=f(x)+f(x+1006)+f(x+20)\\ \qquad +f(x+12)+f(x+2012)\\ h_2(x)=f(x)+f(x+1006)-f(x+20)\\ \qquad -f(x+12)-f(x+2012)\end{cases}$$

là các hàm liên tục và luôn nhận giá trị vô tỉ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy theo nhận xét ở trên thì $h_1\equiv c_1, h_2\equiv c_2$ (với c_1, c_2 là các hằng số vô tỉ nào đó).

Suy ra $f(x)+f(x+1006)=\frac{c_1+c_2}{2}, \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

và vì vậy

$$f(x+1006)+f(x+2012)=\frac{c_1+c_2}{2}, \forall x\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) cho ta $f(x)=f(x+2012)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, (đpcm). ❐

➢ **Nhận xét.** Có ít bạn tham gia gửi bài giải và chỉ có bạn *Lê Nhật Thăng* giải đúng bài toán này.

NGUYỄN VĂN MẬU

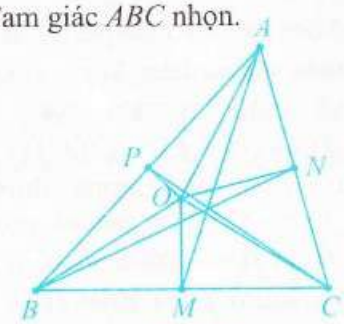
★Bài T12/416. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng* $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\le 1+\frac{R}{r}$, *trong đó* m_a, m_b, m_c *theo thứ tự là độ dài các đường trung tuyến;* h_a, h_b, h_c *theo thứ tự là độ dài các đường cao xuất phát từ A, B, C và R, r theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của tam giác.*

Lời giải. Trong lời giải này, kí hiệu *a, b, c* theo thứ tự là độ dài các cạnh *BC, CA, AB* của tam giác *ABC*, *A, B, C* theo thứ tự chỉ số đo của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$ của tam giác *ABC*, S_{XYZ} chỉ diện tích tam giác *XYZ*.

Có hai trường hợp xảy ra.

• *Trường hợp 1.* Tam giác *ABC* nhọn.

Gọi *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* và *M, N, P* theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của *O* trên *BC, CA, AB* (h.1).



Hình 1

Chú ý rằng $\begin{cases} MA \le MO + OA \\ NB \le NO + OB \\ PC \le PO + OC \end{cases}$

và $2S_{ABC} = a.h_a = b.h_b = c.h_c = (a+b+c)r$, ta có

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}=\frac{m_a.a}{h_a.a}+\frac{m_b.b}{h_b.b}+\frac{m_c.c}{h_c.c}$$

$$\le \frac{(MO+OA)a}{2S_{ABC}}+\frac{(NO+OB)b}{2S_{ABC}}+\frac{(PO+OC)c}{2S_{ABC}}$$

$$=\frac{OM.a}{2S_{ABC}}+\frac{ON.b}{2S_{ABC}}+\frac{OP.c}{2S_{ABC}}+\frac{R(a+b+c)}{2S_{ABC}}$$

$$=\frac{2S_{BOC}+2S_{AOC}+2S_{AOB}}{2S_{ABC}}+\frac{R(a+b+c)}{r(a+b+c)}$$

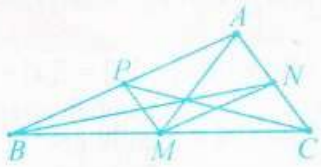
$$=1+\frac{R}{r}.$$

Đẳng thức xảy ra khi tam giác *ABC* đều.

• *Trường hợp 2.* Tam giác *ABC* không nhọn.

Không mất tính tổng quát giả sử $\widehat{BAC} \ge 90°$.

Gọi *M, N, P* theo thứ tự là trung điểm của *BC, CA, AB* (h.2).



Hình 2

Vì $\widehat{BAC} \ge 90°$ nên $AM \le \frac{1}{2}BC$.

Do đó $\frac{m_a}{h_a} \le \frac{a^2}{2h_a.a} = \frac{a^2}{4S_{ABC}}$ (1)

Mặt khác $\begin{cases} BN < BM + MN = \frac{1}{2}(BC+BA) \\ CP < CM + MP = \frac{1}{2}(CB+CA). \end{cases}$

Do đó $\begin{cases} \frac{m_b}{h_b} < \frac{(a+c)b}{2h_b.b} = \frac{(a+c)b}{4S_{ABC}} \\ \frac{m_c}{h_c} < \frac{(a+b)c}{2h_c.c} = \frac{(a+b)c}{4S_{ABC}} \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý rằng $a = 2R\sin A$ và $bc\sin A = 2S_{ABC} = (a+b+c)r$, suy ra

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c} < \frac{2bc}{4S_{ABC}}+\frac{a(a+b+c)}{4S_{ABC}}$$

$$=\frac{2bc}{2bc\sin A}+\frac{2R\sin A(a+b+c)}{2r(a+b+c)}$$

$$=\frac{1}{\sin A}+\frac{R}{r}\sin A$$

$$=\left(\frac{1}{\sin A}-1\right)-\left(\frac{R}{r}-\frac{R}{r}\sin A\right)+1+\frac{R}{r}$$

$$=\frac{1-\sin A}{\sin A}-(1-\sin A)\frac{R}{r}+1+\frac{R}{r}$$

$$=(1-\sin A)\left(\frac{1}{\sin A}-\frac{R}{r}\right)+1+\frac{R}{r} \quad (3)$$

Lại có

• $1-\sin A \ge 0$ (4)

• $r < h_a \le m_a \le \frac{a}{2} = R\sin A$ (những kết quả quen thuộc).

Do đó $\frac{1}{\sin A} - \frac{R}{r} < 0$ (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} < 1 + \frac{R}{r}.$$

Tóm lại, trong cả hai trường hợp ta đều có

$$\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \le 1 + \frac{R}{r}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❐

➢ **Nhận xét.** Đây là bài toán khó, đặc biệt là trường hợp tam giác ABC không nhọn.

Rất nhiều bạn tham gia giải nhưng chỉ có hai bạn giải đúng (chú ý đến trường hợp tam giác ABC không nhọn). Xin nêu tên cả hai bạn: **Đồng Nai:** *Nguyễn Văn Minh*, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hoà; **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Lâm*, 11A1, THPT Liên Hà, Đông Anh.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/416.** *Hai lò xo nhẹ L_1 và L_2 có độ cứng lần lượt là k_1 = 100N/m, k_2= 400N/m. Hai vật nhỏ (1) và (2) có thể trượt không ma sát trên mặt bàn nằm ngang và có khối lượng lần lượt là m_1 = 100g, m_2 = 400g. Người ta bố trí hệ như hình vẽ.*

Hai đầu mỗi lò xo gắn cố định vào tường tại điểm M và điểm N, hai đầu còn lại gắn vào hai vật sao cho trục hai lò xo trùng nhau và luôn luôn nằm trên đường thẳng nằm ngang MN. Ở vị trí cân bằng, hai vật cách nhau một đoạn a = 2cm. Lúc đầu vật (2) đứng yên, còn vật (1) được đưa đến vị trí để lò xo L_1 bị nén một đoạn $\Delta l_1 = 2\sqrt{5}$cm rồi thả nhẹ. Biết rằng vật (1) sau va chạm lần đầu tiên với vật (2) thì lò xo L_1 bị nén cực đại một đoạn $\Delta l_2 = 2\sqrt{2}$cm. Tính khoảng thời gian từ lần va chạm đầu tiên đến lần va chạm thứ hai của hai vật.

Lời giải. Do $\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = 1000$ nên trước và sau va chạm cả hai vật dao động cùng tần số góc $\omega = 10\sqrt{10}$ rad/s. Gọi vận tốc của vật (1) ngay trước và sau va chạm đầu tiên là v_0 và v_1, vận tốc của vật (2) ngay sau va chạm là v_2. Ta có

$v_0 = \omega\sqrt{\Delta l_1^2 - a^2} = 40\sqrt{10}$ (cm/s);

$v_1 = \omega\sqrt{\Delta l_2^2 - a^2} = 20\sqrt{10}$ (cm/s).

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng ta có

$$m_1 v_0 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{v_0 + v_1}{m_2} m_1 = 15\sqrt{10}\,(\text{cm/s}).$$

Sau va chạm đầu tiên các vật dao động điều hòa với biên độ

$$A_1 = \Delta l_2 = 2\sqrt{2}(\text{cm});\ A_2 = \frac{v_2}{\omega} = 1{,}5(\text{cm}).$$

Chọn gốc tọa độ trùng với vị trí cân bằng của vật (1), chiều dương từ M tới N, gốc thời gian là lúc va chạm đầu tiên thì phương trình dao động của các vật có dạng

$$x_1 = 2\sqrt{2}\cos\left(10\sqrt{10}t + \frac{\pi}{4}\right)(\text{cm});$$

$$x_2 = 2 + 1{,}5\cos\left(10\sqrt{10}t - \frac{\pi}{2}\right)(\text{cm}).$$

Khi hai vật gặp nhau thì $x_1 = x_2$. Giải phương trình ẩn t và lấy nghiệm t nhỏ nhất ta được khoảng thời gian từ va chạm đầu tiên đến va chạm lần thứ hai là $t \approx 0{,}165$s. ❐

➢ **Nhận xét.** 1) Va chạm trong bài toán không phải va chạm tuyệt đối đàn hồi hay va chạm mềm.

2) Không có bạn nào giải đúng bài toán này.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/416. *Cho đoạn mạch điện xoay chiều R, L, C có hai đầu A và D; B là một điểm trên AD.*

a) *Khi cho dòng điện qua mạch có cường độ $i = 10^{-3}\sin 1000t$(A) thì*

$u_{AB} = 1\sin 1000t$(V); $u_{BD} = \sqrt{3}\sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right)$(V).

Có thể viết $i = \frac{u_{AB}}{Z_{AB}}$, $i = \frac{u_{BD}}{Z_{BD}}$ được không? Tại sao?

b) *Cho dòng điện qua mạch có cường độ $i' = 10^{-3}\sin 2000t$(A) thì*

$$u'_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(2000t + \frac{\pi}{6}\right)(\text{V});$$

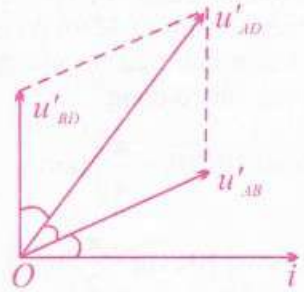
$$u'_{BD} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(2000t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{V}).$$

Tìm u'_{AD}.

c) Trên AB và BD có những linh kiện gì? Xác định độ lớn của chúng. Vẽ sơ đồ mạch AD.

Lời giải. a) Do u_{AB} cùng pha với i nên $u_{AB} = i.Z_{AB}$. Suy ra $i = \frac{u_{AB}}{Z_{AB}}$. Vì u_{BD} không cùng pha với i nên $i \neq \frac{u_{BD}}{Z_{BD}}$.

b) Trong trường hợp này ta có *giản đồ vectơ Fresnel* như hình 1.



Hình 1

Từ giả thiết của bài toán và hình 1, ta có

$$U'_{0(AB)} = U'_{0(BD)} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\text{V}),\ \widehat{u'_{AB}Oi} = \frac{\pi}{6}.$$

Suy ra $\widehat{u'_{BD}Ou'_{AB}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$;

$$\widehat{u'_{BD}Ou'_{AD}} = \widehat{u'_{AD}Ou'_{AB}} = \widehat{u'_{AB}Oi} = \frac{\pi}{6}.$$

Do đó $U'_{0(AD)} = 2U'_{0(AB)}.\cos\frac{\pi}{6} = 2.\frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2(\text{V})$.

Vậy ta tìm được $u'_{AD} = 2\sin\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)(\text{V})$.

c) Giả sử đoạn mạch AB có R_1, L_1, C_1, đoạn mạch BD có R_2, L_2, C_2.

** Trường hợp $\omega = 1000$ (rad/s).*

Trên đoạn AB thì u_{AB} cùng pha với i nên $Z_{AB} = R_1 = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{1}{10^{-3}} = 1000(\Omega)$.

$Z_{L_1} = Z_{C_1} \Rightarrow 1000L_1 = \frac{1}{1000C_1}$, hay $L_1C_1 = 10^{-6}$ (1)

Trên đoạn BD thì u_{BD} vuông pha với i nên $R_2 = 0$.

Vì u_{BD} trễ pha hơn i nên

$Z_{L2} < Z_{C2}$, $Z_{BD} = Z_{C_2} - Z_{L_2}$.

$$Z_{BD} = \frac{U_{BD}}{I} = 1000\sqrt{3}\ (\Omega);$$

$$Z_{C_2} - Z_{L_2} = \frac{1}{1000C_2} - 1000L_2.$$

Suy ra $1000\sqrt{3} = \frac{1}{1000C_2} - 1000L_2$, hay

$$\left(L_2 + \sqrt{3}\right)C_2 = 10^{-6} \quad (2)$$

** Trường hợp $\omega' = 2000$ (rad/s)*

Trên đoạn mạch BD thì u'_{BD} vuông pha với i' nên $R_2 = 0$.

Do u'_{BD} sớm pha hơn i' nên $Z'_{L_2} > Z'_{C_2}$.

Tương tự trường hợp trên, ta có

$\frac{2000}{\sqrt{3}} = 2000L_2 - \frac{1}{2000C_2}$, suy ra

$$\left(L_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)C_2 = 2{,}5.10^{-7} \quad (3)$$

Trên đoạn mạch AB, ta có

$$\tan\varphi'_{AB} = \frac{Z'_{L_1} - Z'_{C_1}}{R_1} = \frac{2000L_1 - \frac{1}{2000C_1}}{1000}$$

$$= 2L_1 - \frac{0{,}5.10^{-6}}{C_1}.$$

Ta lại có $\tan\varphi'_{AB} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $2L_1 - \frac{0{,}5.10^{-6}}{C_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra

$L_1 \approx 0{,}3849(\text{H})$; $C_1 \approx 2{,}5982.10^{-6}$ (F).

Từ (2) và (3) suy ra

$L_2 \approx 1{,}3472(\text{H})$; $C_2 \approx 0{,}3248.10^{-6}$ (F).

PROBLEMS... *(Tiếp trang 17)*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/420. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x+6\sqrt{xy}-y=6 \\ x+\dfrac{6(x^3+y^3)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2(x^2+y^2)}=3. \end{cases}$$

T7/420. Let a, b, c be non-negative real numbers whose sum equals 1. Prove that

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\ge\left(\frac{10}{9}\right)^3.$$

T8/420. Point M inside the triangle ABC with area S. Let x, y, z be distances of M to A, B, C respectively. Prove that $(x+y+z)^2\ge 4\sqrt{3}S$. When does the equality hold?

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/420. A nonempty set $S\subseteq\mathbb{Z}$ posesses the following properties :

(i) There exist $a, b\in S$ such that

$$(a,b)=(a-2,b-2)=1.$$

(ii) If $x, y\in S$ then $x^2-y\in S$ (x, y may be identical). Prove that $S=\mathbb{Z}$.

((a, b) is the greatest common divisor of two integers a and b).

T10/420. Find the greatest number k such that the inequality

$\sqrt{a+2b+3c}+\sqrt{b+2c+3a}+\sqrt{c+2a+3b}$ $\ge k(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$ holds for all positive numbers a, b, c.

T11/420. Let (x_n) (n = 1, 2, ...) be a sequence defined by

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1001}{1003} \\ x_{n+1}=x_n-x_n^2+x_n^3-x_n^4+...+x_n^{2011}-x_n^{2012}, \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Find $\lim\limits_{n\to+\infty}(nx_n)$.

T12/420. Given four distinct points A, B, C, D lying on a circle with center O. Let I, J be the feet of the perpendicular to AB and AD through C; K, L are the feet of the perpendicular to BC and BA through D; N is the midpoint of CD; M is the intersection of IJ and KL. IJ meets OD at E, and KL meets OC at F. Prove that the five points M, N, O, E and F lie on the same circle.

Translated by LE MINH HA

Hình 2 là sơ đồ mạch điện AD.

Hình 2

➢ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: *Hà Thị Huyền Nhung*, 12K1, THPT chuyên Hùng Vương; **Đồng Tháp:** *Huỳnh Thanh Dư*, 11L, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu; **Hải Dương:** *Vũ Đình Việt*, 12A1, THPT Kẻ Sặt, Bình Giang; **Hà Nam:** *Trương Công Minh*, 12A1, THPT A Duy Tiên, *Đinh Ngọc Hải*, 12 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý; **Thái Bình:** *Nguyễn Văn Minh*, 11A2, THPT Bắc Đông Quan; **Nam Định:** *Đặng Phúc Cường*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong.

NGUYỄN VĂN THUẬN

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trên TH&TT số 419, tháng 5 năm 2012, trong lời giải bài T8/415 có sự nhầm lẫn khi tính $f'(y)$. Xin được sửa chữa lại lời giải như sau:

Lập luận đến PT $4.2^y+2\log_2(-y)-2=0$ (5)

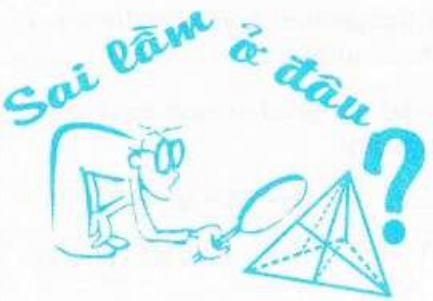
Đặt $-y=t$ ($t>0$) ta được PT $2^{1-t}=1-\log_2 t$.

Khảo sát đồ thị của các hàm số $f(t)=2^{1-t}$ và $g(t)=1-\log_2 t$ trên cùng một hệ trục tọa độ, ta thấy chúng giao nhau tại một điểm có hoành độ $t=1$. Từ đó suy ra hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(4;-1)$.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

Các bạn nhớ đặt mua TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ cho Quý III năm 2012 và CÁC ẤN PHẨM CỦA TÒA SOẠN tại các bưu điện trên cả nước



Giải đáp bài

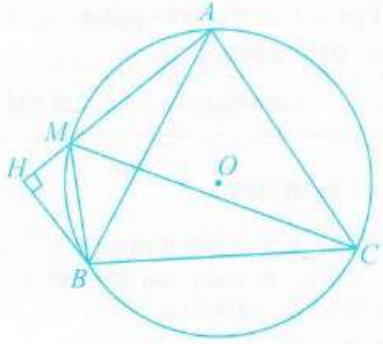
MỘT CÁCH TÍNH TỔNG

(Đề đăng trên THTT số 415, tháng 1 năm 2012)

Các bạn gửi bài toán đến Tòa soạn đều chỉ đúng chỗ sai trong lời giải bài toán. Nguyên nhân là hằng đẳng thức

$$(a-b)^4 = a^4 + b^4 + 6a^2b^2 - 4ab(a^2+b^2)$$

không thể áp dụng được cho các vectơ. Từ đó ta thấy $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 24R^4$ là kết quả không đúng! Sau đây là một cách giải đúng cho bài toán này:



• Nếu M trùng với một trong ba đỉnh A, B, C thì $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 2a^4$ (a là cạnh của tam giác đều ABC), hay $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$.

• Giả sử M thuộc cung $\overset{\frown}{AB}$ (không chứa C). Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $MACB$, ta có $MA.BC + MB.AC = MC.AB \Rightarrow MA + MB = MC$. Kẻ $BH \perp AM$ ($H \in AM$).

Do $\widehat{BMH} = \widehat{ACB} = 60^\circ$, nên $MH = \dfrac{MB}{2}$, $BH = \dfrac{MB.\sqrt{3}}{2}$. Từ định lí Pythagore cho tam giác vuông AHB ta thấy

$$a^2 = AB^2 = AH^2 + BH^2 = \left(MA + \frac{MB}{2}\right)^2 + \frac{3MB^2}{4}$$

$= MA^2 + MB^2 + MA.MB$. Từ đó

$MA^4 + MB^4 + MC^4 = MA^4 + MB^4 + (MA+MB)^4$

$= 2(MA^4 + MB^4 + 2MA^3.MB + 3MA^2.MB^2 + 2MA.MB^3)$

$= 2(MA^2 + MB^2 + MA.MB)^2 = 2a^4$, hay

$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 18R^4$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời bình tốt hơn cả, gửi bài sớm về Tòa soạn:

Bùi Đình Hiếu, 11A1, THPT Quỳnh Côi, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**; *Lương Thị Mai Hương*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Chu Tự Tài* 11A12, THPT Diễn Châu 2, **Nghệ An;** *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 10A1, THPT Hắc Dịch, Tân Thành, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; *Nguyễn Anh Huy*, 10CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**.

NGỌC HIỀN

Tình huống và xử lí

Trong tiết ôn tập, thầy giáo cho cả lớp luyện tập bằng một bài toán:

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành chỉ tại một điểm.

Sau khi tổ chức hoạt động nhóm tìm lời giải. Có ba trong bốn nhóm đồng tình với hướng giải dưới đây:

Lời giải. Ta có $y' = 3x^2 + m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = x^3 + mx + 2$ cắt trục hoành chỉ tại một điểm khi và chỉ khi phương trình $y' = 3x^2 + m = 0$ có một nghiệm kép hoặc vô nghiệm, điều này tương đương với

$$-\frac{m}{3} \le 0 \Leftrightarrow m \ge 0.$$

Một lời giải ngắn gọn! Tuy nhiên nhóm còn lại vẫn chưa bằng lòng, mặc dù không đưa ra được lời giải khác. Trong tình huống này, chúng ta xử lí như thế nào?

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH VÀO ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA... *(Tiếp Bìa 4)*

2. CHẤM THI VÀ KẾT QUẢ

Căn cứ kết quả chấm thi và Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp Quốc gia hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định chọn 6 học sinh có điểm thi cao nhất (có tên dưới đây) vào Đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2012 (xem ảnh ở Bìa 1).

1. *Lê Quang Lâm*, lớp 12 Trường THPT chuyên Lam Sơn, Tỉnh Thanh Hóa, 27 điểm (thứ hai, từ trái sang);

2. *Nguyễn Phương Minh*, lớp 12 Trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, 24 điểm (thứ ba, từ trái sang);

3. *Nguyễn Tạ Duy*, lớp 12 Trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, 23.5 điểm (thứ sáu, từ trái sang);

4. *Trần Hoàng Bảo Linh*, lớp 11 Trường PTNK, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 22.5 điểm (thứ nhất, từ trái sang);

5. *Đậu Hải Đăng*, lớp 12 Trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, 21.5 điểm (thứ năm, từ trái sang);

6. *Nguyễn Hùng Tâm*, lớp 12 Trường THPT chuyên Hà Nội - Amsterdam, TP. Hà Nội, 20.5 điểm (thứ tư, từ trái sang).

Ngày 12/5/2012, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 6 học sinh của Đội tuyển về Hà Nội tham dự lớp tập huấn chuyên môn chuẩn bị cho Kì thi IMO 2012. Trường Đại học Sư phạm Hà Nội được Bộ Giáo dục và Đào tạo giao nhiệm vụ chủ trì công tác tập huấn đội tuyển, dưới sự giám sát của Bộ.

Vào đầu tháng 7/2012, Đoàn cán bộ, học sinh Việt Nam sẽ lên đường tham dự IMO 2012, tổ chức tại Argentina từ ngày 4/7 đến ngày 16/7/2012.

LTS. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nhiệt liệt chúc mừng 6 học sinh đã được tuyển chọn vào Đội tuyển Quốc gia môn Toán và chúc các em giữ gìn sức khỏe thật tốt, nỗ lực học tập và trau dồi kiến thức để chuẩn bị tốt nhất cho Kì thi IMO 2012.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ vừa ra mắt 2 cuốn sách

TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI VÀO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

Sách Mới

Tập 1: ĐẠI SỐ
Tập 2: SỐ HỌC - HÌNH HỌC
Mỗi cuốn dày 200 trang, khổ 17 x 24cm
Giá bìa: 35.000 đồng /cuốn

Bộ sách tuyển chọn những bài viết hay của các nhà giáo có kinh nghiệm trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, đồng thời bổ sung thêm một số bài viết được sắp xếp theo chuyên đề giúp các bạn học sinh THCS ôn tập, ôn thi vào lớp 10 các trường THPT và THPT chuyên, giúp các thầy cô giáo có thêm tư liệu giảng dạy.

Mọi chi tiết xin liên hệ :

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B Giảng Võ, Hà Nội
ĐT: 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

DANH MỤC SÁCH THAM KHẢO CỦA NXBGD VIỆT NAM

ĐỂ NGƯỜI DỰ THI VIẾT GIỚI THIỆU

Tiếp theo kì trước

SÁCH MẦM NON

STT	Tên sách, bộ sách	Tác giả, dịch giả
77	100 truyện cổ tích Việt Nam Tập 1: Sự tích Hồ Gươm; Tập 2: Nợ như Chúa Chổm; Tập 3: Bé thần đồng; Tập 4: Cây tre trăm đốt ; Tập 5: Lọ nước thần; Tập 6: Thạch Sanh	Tô Hoài
78	100 truyện cổ tích Việt Nam Tập 7: Sự tích chú Cuội trên cung trăng Tập 8: Truyện nỏ thần	Tô Hoài, Tạ Huy Long
79	100 truyện cổ tích Việt Nam Tập 9: Quan Âm thị Kính	Tô Hoài, Lý Thu Hà
80	100 truyện cổ tích Việt Nam Tập 10: Con thỏ và con hổ	Tô Hoài, Phạm Ngọc Tuấn
81	**Bộ sách: Thế giới - những điều em cần biết (5 tập)** Tập 1: Động vật; Tập 2: Thực vật; Tập 3: Bí mật cơ thể người; Tập 4: Thiên văn học; Tập 5: Thường thức.	Lê Quang Long
82	Giấc mơ tuổi thần tiên - Tập 1, Tập 2, Tập 3 (Những tác phẩm chọn lọc dành cho thiếu nhi)	Trần Hoài Dương (tuyển chọn)
83	Kể chuyện lịch sử cho tuổi thơ	Lê Văn Lan
84	Khi chúng tớ là trẻ con Tập 1: Những con thú nhỏ nơi hoang dã; Tập 2: Những bạn nhỏ quanh nhà; Tập 3: Chúng tớ có đôi cánh; Tập 4: Chúng tớ tung tăng bơi lội; Tập 5: Chuyện Rắn, chuyện Rùa; Tập 6: Chuyện chị Bướm, cô Nhện	Nguyễn Như Mai
85	Thơ - truyện dành cho bé - Tập 1, Tập 2	Lê Thị Ánh Tuyết, ...
86	Tủ sách kiến thức tuổi thơ: Đời sống côn trùng quanh ta - Tập 1, Tập 2	Vũ Quang Mạnh
87	Tủ sách kiến thức tuổi thơ: Khám phá vũ trụ	Trần Mạnh Toàn, Đặng Thanh Hải
88	Tủ sách kiến thức tuổi thơ: Khoa học và huyền thoại về nhật thực, nguyệt thực	Nguyễn Thị Vượng, Nguyễn Mậu Tùng
89	Tủ sách kiến thức tuổi thơ: Không khí và nước - rất quen mà rất lạ	Nguyễn Thanh Giang, Nguyễn Tích Tùng
90	Tủ sách kiến thức tuổi thơ: Môi trường của chúng ta	Nguyễn Thị Thanh Thủy
91	Tuyển tập thơ cho trẻ mầm non	Lê Thị Ánh Tuyết
92	Tự nhiên, vũ trụ và quan niệm của người xưa - Gia đình mặt trời	Đào Thanh Hùng
93	Tự nhiên, vũ trụ và quan niệm của người xưa - Mưa, cầu vồng và sấm chớp	Đào Thanh Hùng
94	Tự nhiên, vũ trụ và quan niệm của người xưa - Mặt trăng, các vì sao và hiện tượng nguyệt thực	Đào Thanh Hùng
95	Tự nhiên, vũ trụ và quan niệm của người xưa - Mặt trời, đêm tối và hiện tượng nhật thực	Đào Thanh Hùng

TỪ ĐIỂN - TRANH ẢNH GIÁO DỤC

STT	Tên sách, bộ sách	Tác giả, dịch giả
96	Từ điển hiện vật văn hóa các dân tộc Việt Nam	Nguyễn Văn Huy (CB)
97	Từ điển địa danh văn hóa lịch sử Việt Nam	Nguyễn Như Ý (CB)
98	Tuyển chọn tranh đẹp học sinh tiểu học	Trịnh Đức Minh (tuyển chọn)
99	Từ điển văn hóa, phong tục cổ truyền Việt Nam	Chu Huy, Nguyễn Như Ý
100	Từ điển tranh về các loài thú	Lê Quang Long (CB)
101	Từ điển tranh về các loài hoa	Lê Quang Long (CB)
102	Từ điển tranh về các loài củ, quả	Lê Quang Long (CB)
103	Từ điển tranh về các loài chim	Lê Quang Long (CB)
104	Từ điển tranh về các loài cây	Lê Quang Long (CB)
105	Từ điển tranh về các con vật	Lê Quang Long (CB)
106	Từ điển tranh cho trẻ mầm non	Đặng Thu Quỳnh, Nguyễn Thị Thư

SÁCH DỊCH

STT	Tên sách, bộ sách	Tác giả, dịch giả
107	Cha mẹ tốt, con cái tốt - Tập 1, Tập 2	Dương Minh Hào (biên dịch)
108	Hoạt động thực tiễn và tìm hiểu - Kỹ năng sống dành cho học sinh lớp 3 - Tập 1, Tập 2	Dương Minh Hào (biên dịch)
109	Hoạt động thực tiễn và tìm hiểu - Kỹ năng sống dành cho học sinh lớp 7 - Tập 1, Tập 2	Dương Minh Hào (biên dịch)
110	Hoạt động thực tiễn và tìm hiểu - Kỹ năng sống dành cho học sinh lớp 9 - Tập 1, Tập 2	Dương Minh Hào (biên dịch)
111	**Bộ sách I-Science từ lớp 1 đến lớp 6** I-Science 1 - Khoa học 1 (song ngữ Anh - Việt) I-Science 2 - Khoa học 2 (song ngữ Anh - Việt) I-Science 2 (workbook) - Bài tập Khoa học 2 (song ngữ Anh - Việt) I-Science 3 - Khoa học 3 I-Science 3 (workbook A) - Bài tập Khoa học 3A (song ngữ Anh - Việt) I-Science 3 (workbook B) - Bài tập Khoa học 3B (song ngữ Anh - Việt) I-Science 4 - Khoa học 4 (song ngữ Anh - Việt) I-Science 4 (workbook A) - Bài tập Khoa học 4A I-Science 4 (workbook B) - Bài tập Khoa học 4B I-Science 5 - Khoa học 5 I-Science 5 (workbook) - Bài tập Khoa học 5 I-Science 6 - Khoa học 6 I-Science 6 (workbook) - Bài tập Khoa học 6	Lê Quang Long (CB)
112	**Bộ sách Đổi mới phương pháp dạy học (6 cuốn)** Tập 1: Các phương pháp dạy học hiệu quả Tập 2: Đa trí tuệ trong lớp học Tập 3: Nghệ thuật và khoa học dạy học Tập 4: Những phẩm chất của người giáo viên hiệu quả Tập 5: Quản lý lớp học hiệu quả Tập 6: Tâm đổi mới để trở thành người giáo viên giỏi	 Nguyễn Hồng Vân (dịch) Lê Quang Long (dịch) Nguyễn Hữu Châu (dịch) Lê Văn Canh (dịch) Phạm Trần Long (dịch) Lê Văn Canh (dịch)
113	**Bộ sách cho các bạn trẻ thế kỉ XXI (11 cuốn)** Biến đổi khí hậu - giải thích cho con Cái chết - giải thích cho con Đạo lý - giải thích cho mọi người Darwin và học thuyết tiến hóa - giải thích cho cháu Li hôn - giải thích cho con Nhân đạo - giải thích cho con Tinh thần hiệp sĩ - giải thích cho cháu Tình yêu - giải thích cho con Toán học - giải thích cho con Trọng nam khinh nữ - giải thích cho em Văn hóa - giải thích cho con	 Phạm Việt Hưng (dịch) Đỗ Thị Minh Nguyệt (dịch) Lê Thu Lam (dịch) Phạm Việt Hưng (dịch) Phạm Thị Thanh Vân (dịch) Phạm Thị Kiều Ly (dịch) Phạm Thị Kiều Ly (dịch) Đỗ Thị Minh Nguyệt (dịch) Lê Quang Long (dịch) Nguyễn Giáng Hương, Phạm Thị Kiều Ly (dịch) Nguyễn Thế Công (dịch)
114	**Tác dăng - Tập truyện hay dành cho thiếu nhi (5 cuốn)** Tác dăng: Tập 1 - Con của rừng xanh Tác dăng: Tập 2 - Chiếc hòm bí mật Tác dăng: Tập 3 - Trở lại rừng già Tác dăng: Tập 4 - Cuộc chiến trên sa mạc Tác dăng: Tập 5 - Thủ lĩnh da trắng	Phạm Thành Hưng (dịch)
115	**Bộ sách rèn luyện kĩ năng sống cho học sinh (6 cuốn)** Rèn luyện kĩ năng sống cho học sinh - Học lễ nghĩa Rèn luyện kĩ năng sống cho học sinh - Sống hòa hợp với môi trường Rèn luyện kĩ năng sống cho học sinh - Thưởng thức an toàn Rèn luyện kĩ năng sống cho học sinh tránh xa những cám dỗ nguy hiểm: Internet - Ma túy - Tình dục - Cờ bạc Rèn luyện kĩ năng sống cho học sinh -Tìm hiểu vũ trụ: Tri thức về thiên văn học Rèn luyện kĩ năng sống cho học sinh - Tự bảo vệ bản thân: Phòng tránh cứu nạn	Dương Minh Hào, Dương Thùy Trang (biên dịch) Dương Minh Hào, Phạm Quỳnh Hoa (biên dịch) Dương Minh Hào, Vũ Hoàng Vinh (biên dịch) Dương Minh Hào, Cù Thúy Lan (biên dịch) Dương Minh Hào, Nguyễn Bá Thính (biên dịch) Dương Minh Hào, Nguyễn Thị Bình Yên (biên dịch)

BAN TỔ CHỨC CUỘC THI

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 420 (6.2012)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam
NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam
TS. NGUYỄN QUÝ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOÃN THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School**
Đinh Văn Đông – Vận dụng hệ thức Viète để giải một số bài toán tính giá trị của biểu thức.

3 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế, năm học 2011 – 2012.

4 Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 Trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, năm học 2011 – 2012.

5 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Lê Hồ Quý, Phạm Lê Thành Đạt – Tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

8 **Thử sức trước kì thi** – *Đề số 9.*

9 *Hướng dẫn giải Đề số 7.*

10 **Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contributions**
Phạm Huy Hoàng – Xung quanh điểm Fermat-Torricelli.

13 *Nguyễn Hải Châu* – Giới thiệu nội dung khảo sát môn Toán, Học kì I lớp 11, năm học 2011-2012.

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/420..., T12/420, L1/420, L2/420.

18 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 416.

28 **Sai lầm ở đâu – Where's Mistake?**

30 Danh mục sách tham khảo của NXBGD Việt Nam để người dự thi viết giới thiệu.

Ảnh Bìa 1. **Đội tuyển Việt Nam tham dự kì thi IMO 2012.**

Bìa 2. **Cuộc thi Đố vui Ngày hè 2012 (Đợt 2).**

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ
Mĩ thuật : QUỐC HIỆP, THANH LONG
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

45 NĂM SEMINAR PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG LIÊN TRƯỜNG BÁCH KHOA-TỔNG HỢP HÀ NỘI

TRẦN HUY HỔ
(*Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội*)

9 giờ sáng ngày 17 tháng 5 năm 2012 trong một hội trường với bài trí giản dị nhưng trang trọng của Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, hơn năm chục đại biểu từ các trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Bách khoa, Đại học Sư phạm Hà Nội, Viện Toán học Việt Nam, Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ, đại diện cho ba thế hệ cán bộ toán học nghiên cứu các vấn đề về lí thuyết phương trình vi phân và tích phân đã có mặt để dự buổi tọa đàm, kỉ niệm 45 năm (1967-2012) thành lập seminar Phương trình Đạo hàm riêng. GS.TSKH *Nguyễn Văn Mậu* - người đề dẫn buổi tọa đàm thân mật cho khán phòng biết đây là lần thứ ba ***những người làm phương trình trưởng thành từ seminar*** tổ chức cuộc gặp mặt để ôn lại những năm tháng chúng ta đi lên hầu như từ số không. Chúng tôi cùng bồi hồi xúc động trở về với những năm tháng của 45 năm trước qua lời kể của các nhân chứng sự kiện.

Hà Nội vào những ngày đầu năm học 1966-1967 không đông như bây giờ. Thời chiến, các trường đi sơ tán. Vậy mà chúng tôi vẫn hẹn nhau vào sáng thứ sáu tại tầng 3 nhà C3 Đại học Bách khoa Hà Nội để làm seminar Phương trình Đạo hàm riêng. Từ Bách khoa có anh *Nguyễn Đình Trí* vừa bảo vệ thành công luận văn Phó Tiến sĩ tại MGU (Tổng hợp Moskva, Liên Xô), bên Tổng hợp có anh *Nguyễn Thừa Hợp* cũng vừa hoàn thành 2 năm thực tập sinh tại Novosimbirsk (Liên Xô) với gia tài khoa học là 4 bài báo đăng trên các tạp chí Xô Viết hàng đầu. Còn chúng tôi chừng mươi người, những cán bộ giảng dạy Toán, tuổi mới ngoài đôi mươi của Bách khoa và Tổng hợp Hà nội. Chúng tôi nghe, háo hức ghi chép những khái niệm vỡ lòng của Phương trình Đạo hàm riêng về hàm suy rộng, định lí nhúng Sobolev, định lí vết, phân hoạch đơn vị...Với những vốn liếng này không ít thành viên đã bắt đầu tự tin nhập cuộc vào nghiên cứu khoa học. Sau 10 năm seminar thoát khỏi khuôn khổ một seminar học tập trở thành một seminar nghiên cứu. Những thành viên của seminar trưởng thành sau những luận văn tiến sĩ được bảo vệ vừa từ nguồn đào tạo ngoài nước vừa từ nguồn đào tạo trong nước cho đến những 80, 90 của thế kỉ trước đã vượt qua hàng hai chữ số. Đấy không chỉ là thành công mà là một kì tích. Chất lượng của seminar ngày một nâng cao mà công tác đào tạo trên đại học của seminar đã nói lên điều đó. Cho đến nay số nghiên cứu sinh do các nhà toán học hàng đầu của seminar hướng dẫn đã lên đến trên hai mươi người. Hơn mười nhà khoa học trưởng thành từ seminar đã được phong học hàm Giáo sư và Phó Giáo sư cùng với các danh hiệu Nhà giáo Nhân dân và Nhà giáo Ưu tú.

Với những gì tôi lĩnh hội được qua buổi mạn đàm: Thế hệ thứ nhất của seminar, xứng đáng vinh danh là GS. *Nguyễn Đình Trí*, GS. *Nguyễn Thừa Hợp*. Thế hệ thứ hai của seminar, niềm vinh dự dành cho hai ngọn cờ đầu: GS. *Nguyễn Văn Mậu* (ĐHKHTN Hà Nội) và GS. *Lê Hùng Sơn* (ĐHBK Hà Nội). Chúc các anh sức khỏe và giữ cho được ngọn lửa seminar đã được các bậc đàn anh nhóm lên mà nay các anh đang là những người chèo lái.

Kết thúc buổi mạn đàm thân mật, bên bàn tiệc chúc mừng tuổi 45 seminar, GS. *Nguyễn Văn Mậu*, GS. *Lê Hùng Sơn*, PGS. *Nguyễn Cảnh Lương* (Phó Hiệu trưởng Trường ĐHBK Hà Nội) đã tặng hoa và quà lưu niệm cho những nhà khoa học đã qua tuổi xưa nay hiếm. Một không khí thật cảm động kết nối giữa ba thế hệ của seminar với những lời chúc tốt đẹp nhất.

Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia Dự thi IMO 2012

NGUYỄN KHẮC MINH
(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Kì thi chọn học sinh vào Đội tuyển Quốc gia dự thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 53 năm 2012 (IMO 2012) đã được tổ chức tại Hà Nội, trong hai ngày 16 -17/4/2012.

Căn cứ Quy chế thi chọn học sinh giỏi cấp quốc gia hiện hành, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã triệu tập 42 học sinh, gồm 5 học sinh đoạt giải Nhất và 37 học sinh đoạt giải Nhì trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán THPT năm 2012 tham dự Kì thi tuyển chọn nói trên. Nhằm tiếp cận phương thức tổ chức thi của IMO, ở kì thi năm nay, trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh được đề nghị giải 3 bài toán trong thời gian 270 phút; điểm tối đa của mỗi ngày thi là 21 điểm.

1. ĐỀ THI

NGÀY THI THỨ NHẤT (16/4/2012)

Bài 1. *(7 điểm).* Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O) sao cho BC không là đường kính của (O). Điểm A thay đổi trên (O) $(A \neq B, C)$. Gọi D, K, J tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB; E, M, N tương ứng là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên BC, DJ, DK. Các tiếp tuyến tại M và N của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN cắt nhau tại T. Chứng minh rằng T là điểm cố định.

Bài 2. *(7 điểm).* Trên một cánh đồng hình chữ nhật kích thước $m \times n$ ô vuông (gồm m hàng và n cột) người ta đặt máy tưới nước vào bên trong một số các ô vuông. Mỗi máy trong một ô vuông không chỉ tưới được ô vuông này và các ô vuông có cạnh chung với nó, mà còn tưới đến được các ô vuông cùng cột với nó và cách nó đúng một ô. Hãy tính số máy ít nhất để có thể tưới được toàn bộ cánh đồng trong hai trường hợp sau:

a) $m = 4$,

b) $m = 3$.

Bài 3. *(7 điểm).* Cho trước một số nguyên tố p không nhỏ hơn 17. Chứng minh rằng $t = 3$ là số nguyên dương lớn nhất có tính chất: Với mọi bộ số nguyên a, b, c, d sao cho abc không chia hết cho p, nhưng $a+b+c$ chia hết cho p thì luôn tồn tại x, y, z $\in \left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{p}{t}\right]-1\right\}$ để $ax+by+cz+d$ chia hết cho p. ($\left[\frac{p}{t}\right]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất không vượt quá $\frac{p}{t}$).

NGÀY THI THỨ HAI (17/4/2012)

Bài 4. *(7 điểm).* Cho dãy số x_1, x_2, ... được xác định như sau: $x_1 = 1$, $x_2 = 2011$, $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng $\frac{x_{2012}+1}{2012}$ là số chính phương.

Bài 5. *(7 điểm).* Chứng minh rằng $c = 10\sqrt{24}$ là số thực dương lớn nhất có tính chất: Nếu $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$ là 17 số thực dương thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\sum_{i=1}^{17} a_i^2 = 24$, $\sum_{i=1}^{17} a_i^3 + \sum_{i=1}^{17} a_i < c$ thì với mọi $1 \leq i < j < k \leq 17$ ta có a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 6. *(7 điểm).* Có 42 thí sinh tham gia Kì thi chọn đội tuyển Olympic Toán Quốc tế. Biết rằng mỗi thí sinh quen đúng 20 thí sinh khác. Chứng minh rằng có thể chia các thí sinh hoặc thành 2 nhóm hoặc thành 21 nhóm, sao cho trong mỗi cách chia số người của các nhóm bằng nhau và hai người bất kì trong cùng nhóm thì quen nhau.

(Xem tiếp trang 29)

ISSN :0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT06M2
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2012
Giá: 8000 đồng
Tám nghìn đồng