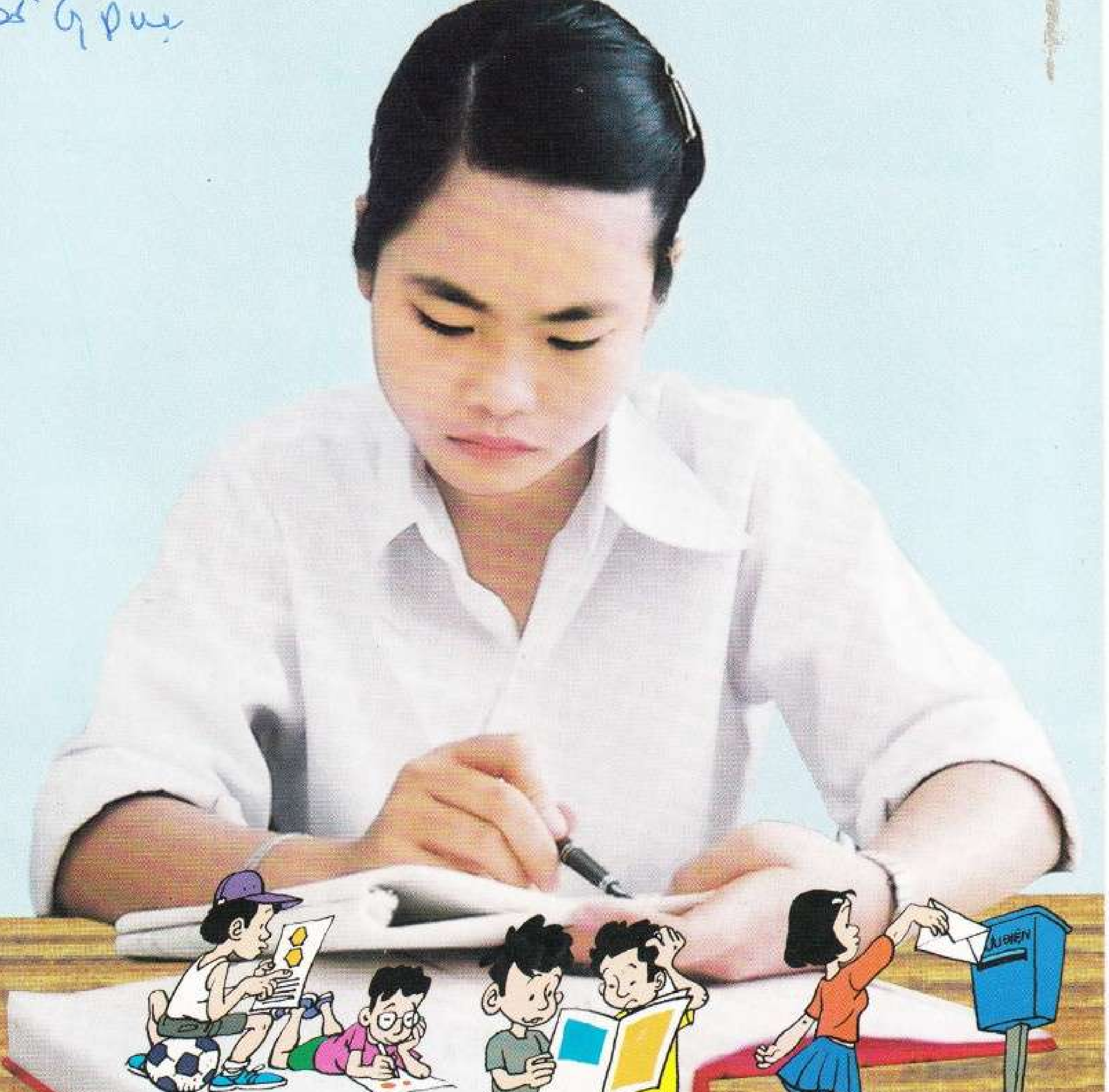
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

6
2000

SỐ 276 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Số 9 phụ

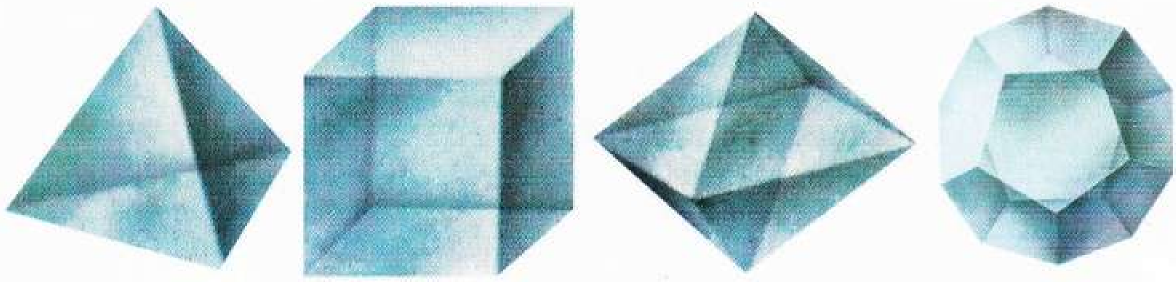


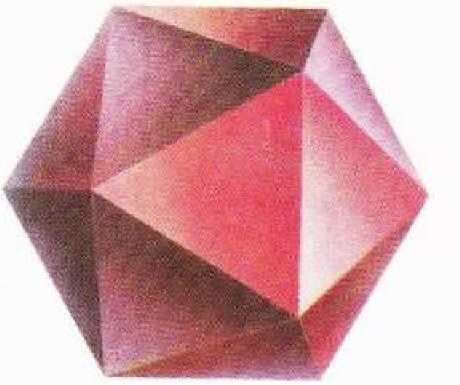
TOÁN HỌC MUÔN MẦU

TỪ ĐỊNH LÍ ƠLE ĐẾN NĂM "CỦA HIẾM"

Lêôna Ơle (Leonhard Euler) sinh ngày 15.4.1707 tại Baden, Thụy Sĩ. Sau khi ông mất (18.9.1783), tạp chí của Viện Hàn lâm Petecbua (LB Nga) đã đăng những công trình chưa công bố của ông trong suốt 47 năm mới hết. Cả cuộc đời nghiên cứu của ông đã để lại khoảng 800 công trình khoa học. Một trong nhiều định lí nổi tiếng của ông là định lí liên hệ số cạnh (C), số đỉnh ($Đ$) và số mặt (M) của một khối đa diện lồi : $Đ + M = C + 2$

Từ định lí này, có thể chứng minh được chỉ có 5 loại khối đa diện đều (có các mặt là các đa giác đều bằng nhau và các góc nhị diện giữa hai mặt bằng nhau). Thật là năm "của hiếm" trong các khối đa diện lồi.





• Dành cho bạn đọc

1. Chứng minh rằng : Nếu khối đa diện ở mỗi đỉnh có đúng $C_đ$ cạnh và mỗi mặt có đúng C_m cạnh thì

$$\frac{1}{C_đ} + \frac{1}{C_m} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2}$$

2. Bạn có nói được gì về $C_đ$ và C_m không ? Tại sao lại chỉ có 5 loại khối đa diện đều ?

Năm phần thưởng dành cho 5 bạn giải đáp được đúng nhất, nhanh nhất

GALLERY

Sự nghiên cứu các công trình của Ơle là trường học tốt nhất trong các lĩnh vực khác nhau của toán học và không điều gì khác có thể thay thế được.

Nhà toán học Đức K. Gauxơ

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 276 (6-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ

SUY LUẬN HỢP LÍ trong lời giải có vẻ thiếu tự nhiên

VŨ ĐỨC CẢNH
(D27C–CK1, Đại học An Ninh, Hà Nội)

Khi xem xét lời giải của một bài toán thường xuất hiện câu hỏi : Tại sao người ta lại nghĩ ra cách giải như vậy ? Có những lời giải xem ra ***thiếu tự nhiên***, có phải do sự may mắn trong quá trình tìm kiếm cách giải hay chúng bắt nguồn từ sự suy luận hợp lí trên cơ sở phân tích các giả thiết của bài toán. Sau đây là một vài ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. (Bài T3/255). *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng :*

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^2}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le a+b+c$$

Dạng bất đẳng thức trong bài toán gợi ý ta thử dùng phương pháp đánh giá một hạng tử ở vế trái.

Căn cứ vào bậc của tử (bậc 3) và bậc của mẫu (bậc 2) ta có thể dự đoán, có một bất đẳng thức dạng : $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le xa+yb$ (1) với mọi số dương a, b. Nếu vậy ta sẽ có 2 bất đẳng thức tương tự : $\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}\le xb+yc$ và $\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le xc+ya$

Từ đó, cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta có vế phải là : $(x+y)(a+b+c)$. Nếu chọn được x, y sao cho $x+y=1$ và các bất đẳng trên đúng là bài toán giải quyết xong. Ta thế $y=1-x$ thì (1) trở thành $\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le x.a+(1-x)b.$ (2)

Thử các giá trị đặc biệt của a, b ta thấy có thể chọn $x=-1$ thì (2) đúng và dự đoán :

$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}\le 2b-a$ (3) với mọi số dương a, b

Việc chứng minh (3) xin dành cho các bạn. Tất nhiên lời giải sẽ bắt đầu bởi một câu có vẻ thiếu tự nhiên : "Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức (3)" (!).

Bằng cách suy nghĩ tương tự, có thể giải được bài toán : "Cho các số dương a, b. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{2}$$

nhờ việc tìm ra bất đẳng thức $\frac{a^2}{a+b}\ge\frac{3a-b}{4}$ (với a, $b>0$).

Ví dụ 2. *Cho các số dương a, b, c và $a^2+b^2+c^2=27$. Chứng minh rằng : $a^3+b^3+c^3\ge 81$.*

Vai trò bình đẳng của a, b, c gợi ta dự đoán dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi $a=b=c=3$.

Ta cần tìm một bất đẳng thức thể hiện quan hệ giữa $a^2+b^2+c^2$ và $a^3+b^3+c^3$. Từ sự chênh lệch số mũ của a^3 và a^2 ta nghĩ đến áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương a^3, a^3 và hằng số k. Nhưng cần chọn k là số nào ? Để ý rằng dấu bằng trong bất đẳng thức Côsi xảy ra khi $a=b=c$, lúc đó $3a^2=27\Rightarrow a=3$. Do đó ta nghĩ đến thử chọn $k=3^3=27$.

Ta có : $a^3+a^3+27\ge 3\sqrt[3]{a^3.a^3.27}=9a^2$,

Tương tự : $b^3+b^3+27\ge 9b^2$

$c^3+c^3+27\ge 9c^2$.

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được :

$$2(a^3+b^3+c^3)+3.27\ge 9(a^2+b^2+c^2).$$

Suy ra : $a^3+b^3+c^3\ge 81$.

Ví dụ 3. *Giải phương trình*

$$4x^2+\sqrt{2x+1}+5=12x.$$

Nhờ kinh nghiệm giải một số bài tương tự, ta thử chuyển phương trình này thành hệ phương trình đối xứng loại 2 bằng cách đặt $\sqrt{2x+1}=ay+b$ với các hằng số a, b nào đó.

Khi đó, ta có : $\begin{cases}4x^2+ay+b+5=12x\\ 2x+1=(ay+b)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-12x+ay+b+5=0\\ a^2y^2+2aby-2x+b^2-1=0\end{cases}$

Xác định a, b sao cho hệ trên là hệ đối xứng loại 2, tức là :

$$\frac{a^2}{4}=\frac{2ab}{-12}=\frac{-2}{a}=\frac{b^2-1}{b+5}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$$

Vậy, nếu đặt $\sqrt{2x+1} = -2y+3$ với điều kiện $-2y+3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{2}$, ta có hệ :

$$\begin{cases} 4x^2-2y+3+5 = 12x \\ 2x+1 = (-2y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-6x-y+4 = 0 \\ 2y^2-6y-x+4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2-6x-y+4) - (2y^2-6y-x+4) = 0 \\ 2x^2-6x-y+4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(2x+2y-5) = 0 \\ 2x^2-6x-y+4 = 0 \end{cases}$$

Đến đây việc giải phương trình đã cho không còn mấy khó khăn.

Qua một số ví dụ trên có thể thấy những lời giải *thiếu tự nhiên* cũng nhiều khi là xuất phát từ sự tìm tòi, khai thác giả thiết kết hợp với việc nhận xét, đánh giá để đưa ra những dự đoán hợp lí, rồi chứng minh các bài toán trung gian đơn giản.

ĐỘI TUYỂN HỌC SINH VIỆT NAM DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ 2000

Cuộc thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 41 sẽ được tổ chức vào tháng 7 năm 2000 tại Hàn Quốc. Đội tuyển Việt Nam đã được tập trung huấn luyện để dự thi. Đoàn gồm 6 học sinh :

1. Bùi Viết Lộc
2. Cao Vũ Dân
3. Nguyễn Minh Hoài
4. Đỗ Đức Nhật Quang

Bốn bạn đều ở lớp 12 khối Phổ thông chuyên Toán - Tin, trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

5. Nguyễn Phi Lê, nữ, lớp 12, trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa

6. Bùi Việt Hà, lớp 11, trường THPT chuyên Thái Bình

Chúc các bạn đạt thành tích tốt trong kì thi Toán quốc tế.

THTT

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 30

Problem. Let us consider the infinite decimal P = 0,12345678910111213141 5..., where all the whole numbers are consecutively written after the decimal comma. Is P periodic ?

Solution. Suppose that P is a periodic decimal whose period consists of n digits, the number of the digits preceding the period being equal to k. Let us consider the number $N = 10^m$, where m is an integer not smaller than $n+k$. In the decimal notation this number is written as 1 with m noughts following it. When forming the decimal P, we consecutively write all the whole numbers. Consequently, the number N is placed somewhere after the decimal comma of P. Now, since we have supposed that the decimal P is periodic and since there are $m \geq n + k$ noughts standing side by side somewhere in P, we conclude that the period of P consists of noughts only, which is obviously impossible. Thus the decimal P can not be periodic.

Từ mới:

infinite = vô hạn (tính từ)
decimal = số thập phân (danh từ), thập phân (tính từ)
whole number = số nguyên
consecutively = liên tiếp, lần lượt
comma = dấu phẩy
periodic = tuần hoàn (tính từ)
period = chu kì
consist = gồm (động từ)
digit = chữ số
precede = đi trước, đứng trước
equal = bằng
notation = kí hiệu
nought = số không
form = tạo (động từ)
place = đặt (động từ)
somewhere = một chỗ nào đó
side by side = bên cạnh nhau, liền nhau (thành ngữ)
conclude = kết luận
obviously = hiển nhiên
impossible = không thể được (tính từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐH QUỐC GIA HÀ NỘI 1999

ĐỀ TOÁN

Ngày thứ nhất. Thời gian : 150 phút
(Dành cho các lớp Khoa học Tự nhiên. Thí vào chuyên Sinh không phải làm bài 5)

Bài 1. Các số a, b, c thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=14 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức :

$$P=1+a^4+b^4+c^4$$

Bài 2. 1) Giải phương trình

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=\sqrt{2x-8}$$

2) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ xy+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho : n^2+9n-2 chia hết cho $n+11$.

Bài 4. Cho vòng tròn ($\mathscr{C}$) và điểm I ở trong vòng tròn. Dựng qua I hai dây cung bất kì MIN và EIF. Gọi M', N', E', F' là các trung điểm của IM, IN, IE, IF.

1) Chứng minh rằng tứ giác $M'E'N'F'$ là tứ giác nội tiếp.

2) Giả sử I thay đổi, các dây cung MIN, EIF thay đổi. Chứng minh rằng vòng tròn ngoại tiếp tứ giác $M'E'N'F'$ có bán kính không đổi.

3) Giả sử I cố định, các dây cung MIN, EIF thay đổi nhưng luôn luôn vuông góc với nhau. Tìm vị trí của các dây cung MIN và EIF sao cho tứ giác $M'E'N'F'$ có diện tích lớn nhất.

Bài 5. Các số dương x và y thay đổi thỏa mãn điều kiện : $x+y=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

ĐỀ TOÁN

Ngày thứ hai. Thời gian : 150 phút
(Dành cho các lớp chuyên Toán - Tin)

Bài 6. Giải phương trình :

$$\sqrt{\frac{x+7}{x+1}}+8=2x^2+\sqrt{2x-1}$$

Bài 7. Các số a_1, a_2, ... được xác định bởi công thức :

$$a_k=\frac{3k^2+3k+1}{(k^2+k)^3} \text{ với mọi } k\geq 1.$$

Hãy tính giá trị của tổng :

$$1+a_1+a_2+...+a_9.$$

Bài 8. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 1999 và tổng các chữ số của số đó bằng 1999.

Bài 9. Cho vòng tròn tâm O bán kính R. Giả sử A và B là hai điểm cố định trên vòng tròn với $AB=R\sqrt{3}$.

1) Giả sử M là một điểm thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn. Vòng tròn nội tiếp ΔMAB tiếp xúc với MA tại E và tiếp xúc với MB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M thay đổi.

2) Tìm tập hợp tất cả các điểm P sao cho đường thẳng Δ vuông góc với OP tại P cắt đoạn thẳng AB.

Bài 10. Cho hình tròn ($\mathscr{C}$) bán kính bằng 1. Giả sử A_1, A_2, ..., A_8 là 8 điểm bất kì nằm trong hình tròn (kể cả trên biên). Chứng minh rằng trong các điểm đã cho luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

DÀNH CHO CÁC BẠN THI VÀO ĐẠI HỌC

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

NGUYỄN LƯU
(GV trường THPT Năng khiếu Hà Tĩnh)

Bài báo này đề cập đến hai ứng dụng của nguyên hàm và tích phân đã từng xuất hiện trong các đề thi vào đại học và một số kì thi học sinh giỏi.

I) Sử dụng nguyên hàm để chứng minh một phương trình có nghiệm

Trước hết ta nhớ lại định lí Lagrange : Nếu $F(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và khả vi trong $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $F'(c) = \dfrac{F(b) - F(a)}{b-a}$.
Như vậy nếu $F(b) = F(a)$ thì phương trình $F'(x) = 0$ có nghiệm $x = c \in (a; b)$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình :
$$5x^4 + 40x^3 + 105x^2 + 100x + 24 = 0$$
có 4 nghiệm phân biệt.

Giải. Đặt $f(x) = 5x^4+40x^3+105x^2+100x+24$

Ta có : $\int f(x)dx = x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x+C$

Chọn $C = 0$. Xét hàm số
$F(x) = x^5 + 10x^4 + 35x^3 + 50x^2 + 24x$ liên tục và khả vi trên R.
$$F(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4).$$

Áp dụng định lí Lagrange lần lượt trên các đoạn $[-4; -3]$; $[-3, -2]$; $[-2, -1]$ và $[-1, 0]$ ta dễ dàng suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Qua ví dụ trên ta thấy mặc dầu $F(x)$ có bậc cao hơn $f(x)$ song việc phân tích $F(x)$ thành nhân tử dễ dàng hơn việc chọn và phân khoảng rồi áp dụng định lí về hàm số liên tục đối với hàm $f(x)$ hoặc tiện lợi hơn việc khảo sát hàm số $f(x)$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với a, b, c tùy ý cho trước, phương trình
$$a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x = 0$$
luôn có nghiệm thuộc $[0, 2\pi]$

(Đề thi khối A – Đại học Quốc gia 1999)

Giải. Đặt
$$f(x) = a\cos 3x + b\cos 2x + c\cos x + \sin x$$
Ta có :
$$\int f(x)dx = \frac{1}{3}a\sin 3x + \frac{1}{2}b\sin 2x + c\sin x - \cos x + C$$
Chọn $C = 0$. Xét hàm số
$F(x) = \dfrac{1}{3}a\sin 3x + \dfrac{1}{2}b\sin 2x + c\sin x - \cos x$ liên tục và khả vi trên $[0, 2\pi]$. Áp dụng định lí Lagrange thì tồn tại $x_o \in (0; 2\pi)$ sao cho :
$\dfrac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi - 0} = F'(x_o) \Leftrightarrow 0 = f(x_o)$ hay phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_o \in (0, 2\pi)$.

Ví dụ 3: Cho
$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_o$$
thỏa mãn $\dfrac{a_n}{n+1} + \dfrac{a_{n-1}}{n} + ... + \dfrac{a_1}{2} + a_o = 0.$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Giải. Ta có :
$$\int f(x)dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + a_ox + C$$
Chọn $C = 0$. Xét hàm số
$$F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}.x^n + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + a_ox$$
liên tục và khả vi trên $[0, 1]$. Áp dụng định lí Lagrange thì tồn tại $x_o \in (0, 1)$ sao cho $F'(x_o) = \dfrac{F(1) - F(0)}{1-0} \Leftrightarrow f(x_o) = 0$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_o \in (0, 1)$.

Qua ba ví dụ nêu trên các bạn tự rút ra các bước để chứng minh phương trình có nghiệm theo phương pháp này.

II) Sử dụng tích phân xác định để phát biểu và chứng minh các bất đẳng thức.

Ta bắt đầu từ một bất đẳng thức hiển nhiên
$$\cos t \le 1 \text{ với mọi } t \qquad (1)$$
Từ đó với $x > 0$ thì
$$\int_0^x \cos t dt < \int_0^x dt \Rightarrow \sin t \Big|_o^x < x \Rightarrow \sin x < x \quad (2)$$
Từ (2) với mọi $x > 0$ thì :
$$\int_0^x \sin t dt < \int_0^x t dt \Rightarrow -\cos t \Big|_0^x < \frac{t^2}{2}\Big|_o^x$$
$$\Leftrightarrow \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \text{ với } x > 0 \qquad (3)$$

Ta lại có một bất đẳng thức quen thuộc. Tiếp tục từ (3) với $x > 0$ thì
$$\int_0^x \cos t dt > \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)dt \Rightarrow \sin t \Big|_o^x > \left(t - \frac{t^3}{3!}\right)\Big|_o^x$$
hay $\sin x > x - \dfrac{x^3}{3!}$ với $x > 0$ (4)

Tiếp tục với cách làm như trên ta chứng minh được các bất đẳng thức sau :
$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \text{với } x > 0 \qquad (5)$$

$$\sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \text{ với } x > 0 \quad (6)$$

Sử dụng lập luận như trên và chứng minh bằng phương pháp quy nạp các bạn có thể nhận được bất đẳng thức tổng quát.

Từ (4) có : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 =$

$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216}$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Từ (5) với $x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có :

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} > 1 - x^2 + \frac{x^4}{24} > \cos x$$

Dẫn đến một bất đẳng thức mới

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x \text{ với } x \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

(Đề thi Olympic 30-4 Đà Nẵng 1999)

Từ (7) có : với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\frac{1}{x^3} > \frac{\cos x}{\sin^3 x} \Rightarrow \int_x^{\pi/2} \frac{1}{t^3}\,dt > \int_x^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sin^3 t}\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \le 1 - \frac{4}{\pi^2} \text{ với } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Đến đây ta có một bất đẳng thức khá đẹp :

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} \le 3 - \frac{12}{\pi^2}$$

với $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 - Hà Tĩnh 1999).

Một số bài tập

1) Chứng minh rằng nếu $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình $ax^2+bx+c = 0$ có nghiệm thuộc $(0, 1)$.

2) Chứng minh rằng phương trình :
$a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \ldots + a_n \cos nx = 0$
luôn có nghiệm với $a_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3) Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $x - 1 > \ln x > 1 - \frac{1}{x}$ với $x > 1$

b) $1 - \cos x \ge \frac{x^2}{\pi}$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ với $x > 0$.

4) Chứng minh rằng nếu phương trình :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x = 0$$

có nghiệm dương thì phương trình

$$na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 = 0$$

cũng có nghiệm dương.

Mời các bạn tiếp tục tìm tòi và phát biểu các bất đẳng thức mới bằng con đường đã nêu./.

MỚI GIẢI THƯỞNG CHO NGƯỜI CHỨNG MINH GIẢ THUYẾT CỦA GOLDBACH

Trong lịch sử toán học có nhiều giả thuyết chưa được chứng minh về các số nguyên tố. Trong thư trao đổi với nhà toán học Ơle năm 1742, nhà toán học Gônbac (Ch. Goldbach : 1690–1764) đã nêu lên giả thuyết, tóm tắt như sau :

1) Mỗi số nguyên chẵn $n \ge 4$ đều là tổng của hai số nguyên tố.

2) Mỗi số nguyên lẻ $m \ge 7$ đều là tổng của ba số nguyên tố.

Nếu (1) đúng, viết $m = 3+n$ thì (2) đúng nhưng không thể suy ngược lại. Rất nhiều nhà toán học đã thử chứng minh giả thuyết trên, trong đó thành tựu quan trọng nhất của nhà toán học Nga Vinôgradôp (1891-1983) là đã chứng minh được (1937) "Tồn tại hằng số N sao cho mỗi số nguyên lẻ lớn hơn N đều biểu diễn được thành tổng 3 số nguyên tố".

Năm 1956, nhà toán học Nga Bôrôkin đã đánh giá được số N trong định lí Vinôgradôp là $N = e^{e^{16,038}}$, trong đó $e \approx 2,7182\ldots$ Như vậy giả thuyết (2) của Goldbach sẽ được giải quyết xong nếu chứng minh được nó cũng đúng với mọi số lẻ $m < N$. Nhiều nhà toán học đã kiểm tra giả thuyết (1) đúng đối với mọi số chẵn $n \le 2000$ nhưng lời giải tổng quát vẫn là một sự thách thức đối với các nhà toán học của Thế kỉ 21.

Mới đây nhân năm Toán học thế giới và cũng nhân dịp xuất bản quyển sách *Bác Petros và giả thuyết Goldbach* của tác giả *Apostolos Doxiadis* (3/2000), nhà xuất bản Faber và Faber (Anh Quốc) công bố thưởng 1 triệu USD cho bất cứ ai chứng minh được giả thuyết (1) của Goldbach trong vòng 2 năm tới. Nếu bạn muốn biết thêm chi tiết, hãy truy cập vào trang Web của Faber và Faber (www.faber.co.uk.).

NGUYỄN THANH GIANG
(st)

VUI MỘT TÍ

CÒN TÙY

Mập : 500 có chia hết cho 40 không nhỉ ?

Còm : Còn tùy.

Mập : Sao lại tùy ?

Còm : À... nếu có 500 quả mận mà chia cho 40 đứa con gái thì thiếu nhưng chia cho 40 con trai như tớ với cậu thì còn thừa.

Mập : !!!

BNH

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH PARABOL BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHÙM

PHẠM QUỐC PHONG
(GV trường THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Viết phương trình parabol là bài toán quen thuộc. Những lời giải **đơn giản** lại là vấn đề khác.

Phương pháp đã trở thành "lối mòn" được áp dụng giải bài toán này là phương pháp hệ số bất định 3 tham số :

- Gọi parabol cần tìm là $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

- Từ các giả thiết của bài toán, thiết lập và giải hệ 3 phương trình 3 ẩn đối với a, b, c sẽ thu được parabol cần tìm.

Bài viết này trình bày cách viết parabol bằng **phương pháp chùm parabol** một tham số.

1. Chùm parabol

Chùm parabol đưa ra xét ở bài viết này là chùm parabol có trục đối xứng song song với trục tung, tức parabol có phương trình dạng :

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

• **Định nghĩa.** Tập hợp các parabol cùng đi qua 2 điểm A, B cố định gọi là *chùm parabol*.

Đường thẳng AB gọi là *trục của chùm parabol.*

• **Phương trình của chùm:**

Gọi $A(x_A\,;y_A)$ và $B(x_B\,;y_B)$ là 2 điểm thuộc đường thẳng $(d): y = px + q$.

Dễ dàng kiểm nghiệm phương trình của chùm parabol qua A, B là :

$$y = m(x - x_A)(x - x_B) + px + q, \text{ với } m \neq 0$$

• Trường hợp tổng quát khi $p \neq 0$; $y_A \neq y_B$ chùm parabol được gọi là *chùm parabol lệch tung* (h.1)

• Khi $p = 0$ $(\Leftrightarrow y_A = y_B)$ chùm parabol được gọi là *chùm parabol đẳng tung* và phương trình có dạng

$$y = m(x - x_A)(x - x_B) + y_A \quad (m \neq 0) \quad \text{(h.2)}$$

• Khi $p \neq 0$, $A \equiv B$ chùm parabol được gọi là *chùm parabol tiếp xúc* với tiếp điểm $A(x_A\,;y_A)$ và phương trình có dạng

$$y = m(x - x_A)^2 + px + q \ (m \neq 0) \quad \text{(h.3)}$$

• Khi $p = 0$, $A \equiv B$ chùm parabol được gọi là *chùm parabol chung đỉnh* với đỉnh chung $A(x_A\,;y_A)$ và phương trình có dạng

$$y = m(x - x_A)^2 + y_A \ (m \neq 0) \quad \text{(h.4)}$$

2. Các thí dụ minh họa

Thí dụ 1: *Viết phương trình parabol (P) có đỉnh là A(1; −2) và (P) chắn trên đường thẳng (d) : $y = x + 1$ một dây cung $MN = \sqrt{34}$*

• Phương trình chùm parabol đỉnh A (1; −2) là (P): $y = m(x-1)^2 - 2$ $(m \neq 0)$ (1)

• Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là : $m(x-1)^2 - 2 = x + 1$

$$\Leftrightarrow mx^2 - (2m+1)x + m - 3 = 0 \quad (2)$$

Với $0 \neq m > -\dfrac{1}{16}$, phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 - đó là hoành độ giao điểm M, N của (P) và (d).

• Từ (2) suy ra $(x_1 - x_2)^2 = \dfrac{\Delta}{m^2}$.

• $M, N \in (d) \Rightarrow y_1 - y_2 = x_1 - x_2$

$\Rightarrow MN^2 = 2\dfrac{\Delta}{m^2}$; $MN = \sqrt{34} \Rightarrow \dfrac{2\Delta}{m^2} = 34$

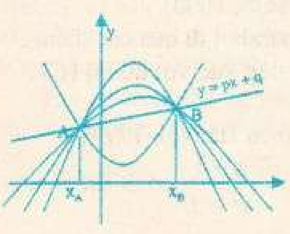
$\Rightarrow 17m^2 - 16m - 1 = 0$ có 2 nghiệm $m = 1$ và $m = -\dfrac{1}{17}$ thỏa mãn $0 \neq m > -\dfrac{1}{16}$

Thay các giá trị của m vừa tìm được vào (1), ta có 2 phương trình parabol cần tìm là :

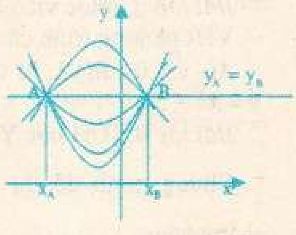
$$(P_1): y = x^2 - 2x - 1\,;\ (P_2): y = -\frac{1}{17}(x^2 - 2x - 35)$$

Thí dụ 2. (Đại học An ninh, khối A, 1999)

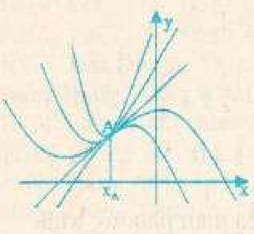
Viết phương trình parabol P qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 9}{x - 1}$ (C) và (P) tiếp xúc với đường thẳng (d) : $2x - y - 10 = 0$



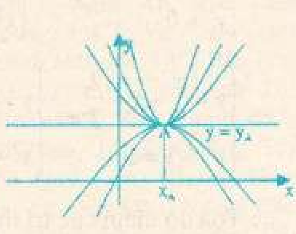
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Lời giải.

Tọa độ các điểm cực trị là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-x+9}{x-1} \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2-x+9+(x^2-2x-8)}{x-1} \\ x^2-2x-8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm cực trị thỏa mãn phương trình

$$y = 2x-1 + m(x^2-2x-8) \quad (2)$$

Thấy rằng $x^2 - 2x - 8 = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt, bởi thế (2) với $m \neq 0$ là phương trình chùm parabol đi qua các điểm cực trị của (C).

(P) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow$ phương trình sau có nghiệm kép :

$2x-1 + m(x^2-2x-8) = 2x-10$

$\Leftrightarrow mx^2 - 2mx - 8m + 9 = 0 \Leftrightarrow \{m \neq 0, \Delta' = 0\}$

$\Leftrightarrow m = 1$. Thay $m = 1$ vào (2) ta có phương trình của parabol cần tìm là (P) : $y = x^2 - 9$.

Lời bình:

• Bài toán không yêu cầu tìm điểm cực đại, cực tiểu. Lời giải trên đã tránh không tính cụ thể các yếu tố đó.

• Hệ phương trình $\begin{cases} y = \dfrac{x^2-x+9}{x-1} \\ x^2-2x-8=0 \end{cases}$

được gọi là **hệ đặc trưng** của chùm parabol. Lúc này, ở hệ đặc trưng chưa xuất hiện phương trình của trục. Phép biến đổi dẫn ra phương trình (1) là để tìm trục của chùm parabol. Đó cũng là : **Kĩ thuật viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm hữu tỉ và kĩ thuật chứng minh tính thẳng hàng của 3 điểm uốn của đồ thị một số hàm phân thức.**

Thí dụ 3: *[(Đại học Thái Nguyên, khối A+B, câu I (1999–2000)]*

Viết phương trình parabol qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{2}{3}$ *và (P) tiếp xúc với đường thẳng (d) :* $y = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải. Tọa độ điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{2}{3} \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{3}x^2 - x + \dfrac{2}{3} \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x}{3} - x + \dfrac{2}{3} \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3} \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tọa độ điểm cực trị thỏa mãn phương trình

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + m(x^2-1),\ m \neq 0 \quad (1)$$

Hiển nhiên phương trình $x^2-1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ (1) là phương trình chùm parabol (P) đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

(P) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow$ phương trình sau có nghiệm kép

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + m(x^2-1) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Thay $m = -\dfrac{1}{3}$ vào (1) ta có phương trình parabol phải tìm là $y = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3}x + 1$

Thí dụ 4. *Cho hàm số* $y = x^4 - 6x^2 + 4x + 6$

1) Chứng minh hàm số có 3 điểm cực trị.

2) Viết phương trình parabol (P) đi qua 3 điểm cực trị ấy.

Lời giải. • $y' = 4(x^3 - 3x + 1)$, gọi $h(x) = x^3 - 3x + 1$.

Để ý rằng $h(-2) = -1 < 0$; $h(-1) = 1 > 0$; $h(1) = -1 < 0$; $h(2) = 3 > 0$ suy ra $y' = 0$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3 < 2 \Rightarrow$ Hàm số có 3 điểm cực trị.

• Tọa độ điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x^4-6x^2+4x+6 \\ y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = xx^3 - 6x^2 + 4x + 6 \\ x^3 = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x(3x-1) - 6x^2 + 4x + 6 \\ x^3 = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x^2 + 3x + 6 \\ x^3 = 3x - 1 \end{cases}$$

Tọa độ các điểm cực trị là nghiệm phương trình $y = -3x^2 + 3x + 6$, đây là phương trình parabol (P) đi qua 3 điểm cực trị hàm số đã cho.

3. Các bài tập tương tự

Bài tập 1. Viết phương trình parabol (P), biết rằng (P) cắt hyperbol (H) $y = \dfrac{1}{x-4}$ tại các điểm có hoành độ nghiệm đúng phương trình $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$

Bài tập 2. [Đại học An ninh (khối A), 1998]

Viết phương trình parabol đi qua điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ và tiếp xúc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 3. [Học viện KTQS, 1998]

Viết phương trình của parabol đi qua các điểm : $A(-\sqrt{3}, 0)$; $B(\sqrt{3}, 0)$ và tiếp xúc với đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x$.

Bài tập 4. [Đại học Y khoa Hà Nội, 1999]

Chứng minh đồ thị $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn thẳng hàng.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN ĐẠI HỌC KIẾN TRÚC HÀ NỘI NĂM 1999

Câu 1. Cho hàm số

$$y = kx^4 + (k-1)x^2 + (1-2k)$$

1) Xác định các giá trị của tham số k để đồ thị của ham số chỉ có một điểm cực trị.

2) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $k = \frac{1}{2}$.

3) Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị ở phần 2) đi qua gốc tọa độ.

Câu II. 1) Giải bất phương trình :

$$2\log_{25}^2 (x-1) \geq \left(\log_5 \frac{1}{\sqrt{2x-1}-1} \right) . \log_{1/5}(x-1)$$

2) Tìm các giá trị của m để mọi nghiệm của bất phương trình ở phần 1) đều thỏa mãn bất phương trình $x|x-3| \leq m$.

Câu III. 1) Giải phương trình lượng giác :

$$3\text{tg}^3x - \text{tg}x + \frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

2) Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $C \leq B \leq A \leq 90^o$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M = \cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

Câu IV. Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc $Oxyz$ cho một hình tứ diện có bốn đỉnh : $O(0, 0, 0)$; $A(6, 3, 0)$; $B(-2, 9, 1)$; $S(0, 5, 8)$.

1) Chứng minh SB vuông góc với OA.

2) Chứng minh hình chiếu của cạnh SB lên mặt phẳng OAB vuông góc với cạnh OA. Gọi K là giao điểm của hình chiếu đó với OA. Hãy tìm tọa độ điểm K.

3) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SO và AB. Tìm tọa độ điểm M trên SB sao cho PQ và KM cắt nhau.

Câu V. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có :

$$C_n^o + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải. Kết quả $k \leq 0$ hoặc $k \geq 1$.

2) Bạn đọc tự giải.

3) Họ đường thẳng qua gốc tọa độ có phương trình là $y = kx$

Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị $\Leftrightarrow$ hệ sau phải có nghiệm :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x^4 - x^2) = kx & (1) \\ 2x^3 - x = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) sẽ được $x^2(3x^2-1) = 0$

$$\Rightarrow x_1 = 0; x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow k_1 = 0; k_{2,3} = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Vậy có ba tiếp tuyến qua gốc tọa độ là :

$$y = 0, y = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}x$$

Câu II. 1) Với điều kiện $x > 1$ bất phương trình đưa về dạng :

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5^2(x-1) \geq \log_5(\sqrt{2x-1}-1).\log_5(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(x-1)[\log_5(x-1) - 2\log_5(\sqrt{2x-1}-1)] \geq 0$$

Dẫn tới hai hệ sau :

a) $\begin{cases} \log_5(x-1) \geq 0 \\ \log_5(x-1) \geq \log_5(\sqrt{2x-1}-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$

b) $\begin{cases} \log_5(x-1) \leq 0 \\ \log_5(x-1) \leq \log_5(\sqrt{2x-1}-1)^2 \end{cases}$

Hệ này vô nghiệm.

• Đáp số : $2 \leq x \leq 5$.

2) Bất phương trình $x|x-3| \leq m$ thỏa mãn với $\forall x \in [2, 5] \Leftrightarrow$ GTLN của $y = x|x-3|$ trên đoạn $[2,5]$ không vượt quá m.

Với $x \in [2, 3]$ thì $y = -x(x-3) = -x^2 + 3x$, dễ thấy $\max y = y(2) = 2$.

Với $x \in [3, 5]$ thì $y = x(x-3) = x^2 - 3x$, dễ thấy $\max y = y(5) = 10$.

Vậy với $x \in [2, 5]$ thì $\max y = 10$.

• Đáp số : $10 \leq m$.

Câu III. 1) • $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

• Biến đổi phương trình về dạng tích :

$(3\text{tg}^2x - 1)(\text{tg}x + \sin x + 1) = 0$

a) $3\text{tg}^2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

b) $\text{tg}x + \sin x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0$

Đặt $\sin x+\cos x = t$, $|t|\le \sqrt{2}$, từ đó sẽ tìm được $t_1 = -1 - \sqrt{2}$ (loại) và $t_2 = -1 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

2) • $M = \frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \frac{1}{4}(\cos A + \cos B)$

$= \frac{1}{4}[1 + \cos(A-B) - (\cos A+\cos B)]$

• Ta sẽ chứng minh

$N = \cos(A-B) - (\cos A+\cos B) \ge 0$

khi $C \le B \le A \le 90^o$.

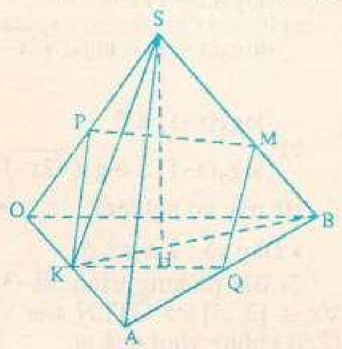
Ta có $\sin C\cos(A-B) = \sin(A+B)\cos(A-B) =$
$= \sin A\cos A + \sin B\cos B$

$\Rightarrow \cos(A-B)=\frac{\sin A}{\sin C}\cos A + \frac{\sin B}{\sin C}\cos B \ge \cos A+\cos B$

Đẳng thức xảy ra khi $A = 90^o$ và $B = C$.

• Vậy $N \ge 0 \Rightarrow M \ge \frac{1}{4}$, đẳng thức xảy ra khi $A = 90^o$, $B = C \Rightarrow \min M = \frac{1}{4}$.

Câu IV. 1) Hãy chứng minh $\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{OA} = 0$, bạn đọc tự giải.



2) • Kẻ $SH \perp (OAB)$. Hình chiếu của SB lên mp (OAB) là đường thẳng BK đi qua H.

Theo câu 1) : $OA \perp SB$, mặt khác $OA \perp SH \Rightarrow OA \perp$ mp(SKB) $\Rightarrow OA \perp BK$.

• $\overrightarrow{OA} = (6, 3, 0) \Rightarrow$ Phương trình đường thẳng OA là $x = 6t$, $y = 3t$, $z = 0$ (1)

Mặt phẳng (SBK) có vectơ pháp là $\overrightarrow{OA} = (6, 3, 0) \Rightarrow$ Phương trình mp(SBK) là

$6(x-0) + 3(y-5) + 0 = 0 \Leftrightarrow 2x+y - 5 = 0$ (2)

Thay (1) vào (2) tìm được $t = \frac{1}{3} \Rightarrow$ giao điểm K của mp(SBK) với OA là $K(2, 1, 0)$.

3) • Tìm tọa độ các trung điểm P và Q ta được $P(0, \frac{5}{2}, 4)$; $Q(2, 6, \frac{1}{2})$.

Điểm $M \in SB$ cần tìm là giao điểm của mp(PQK) với SB.

Phương trình đường thẳng SB là:

$$x = 2t,\ y = -4t+5,\ z = 7t+8 \qquad (3)$$

Phương trình mp(PQK) là

$$77x - 4y + 40z - 150 = 0 \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4) tìm được $t = -\frac{1}{3}$.

Vậy giao điểm M của SB và mp(PQK) có tọa độ

$$M\left(-\frac{2}{3}, \frac{19}{3}, \frac{17}{3}\right)$$

Câu V. Từ khai triển Newton

$$(1 + x)^n = C_o^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n \qquad (2)$$

lấy tích phân hai vế trên $[0;1]$ dẫn đến đpcm.

L.T.N

SỬA LẠI LỜI GIẢI

Trong số 274 THTT (4/2000) các bài giải T1/270 và T6/270 có sai sót. Xin sửa lại như sau :

Bài T1/270. Trong lời giải xét thiếu trường hợp $y=1$ và $x\ge 2$, $z\ge 2$, lúc đó phương trình $3^x + 4 = 7^z \Leftrightarrow 7(7^{z-1} - 1) = 3(3^{x-1} - 1)$ (*)

Đặt $z-1 = u \ge 1$; $x-1 = v \ge 1$ thì (*) trở thành $7(7^u - 1) = 3(3^v - 1)$ (**)

Suy ra $3^v - 1 \,\vdots\, 7$ (1)

Kiểm tra thấy $v_o = 6$ là số mũ nhỏ nhất thỏa mãn (1). Thay $v=6t$ vào (**) được $7(7^u - 1) = 3(27^{2t} - 1)$ (***) $\Rightarrow 7^u - 1$ chia hết cho $27-1 = 26 = 2.13$ (2)

Kiểm tra thấy $u_o = 12$ là số mũ nhỏ nhất thỏa mãn (2). Thay $u = 12s$ vào (***) được $7(343^{4s} - 1) = 3(27^{2t} - 1) \Rightarrow$ Vế trái của đẳng thức chia hết cho 9 còn vế phải không chia hết cho 9 nên với $y=1$, $x\ge 2$, $z\ge 2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài T6/270. Đặt $x = t^3$ và $y = t^2$, ta có

$$t^4 + t^3 + 988|t| - 2000 = 0 \qquad (*)$$

Đặt vế trái của (*) là $f(t)$.

Với $t > 0$ thì $f(t) = (t-2)g(t)$ mà $g(t) > 0 \Rightarrow f(t) = 0$ chỉ có 1 nghiệm dương $t=2$.

Với $t \le 0$ thì $f(t) = t^4 + t^3 - 988t - 2000$. Ta có $f'(t) < 0$ với mọi $t \le 0$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0]$. Ta có $f(0) = -2000$ và $f(-3) = 1018$ nên $f(t)$ có chỉ 1 một nghiệm âm. Vậy phương trình (*) có đúng 2 nghiệm.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

MỘT SỐ NGHỊCH LÍ CỦA XÁC SUẤT

NGUYỄN DUY TIẾN
(ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

Đầu năm 1988 tôi có dịp vào thăm Quy Nhơn, quê hương của người anh hùng dân tộc Quang Trung và của nhiều nhà thơ : Phạm Hổ, Yến Lan, Vương Linh, Đào Xuân Quý. Hàn Mạc Tử quê ở Quảng Bình (1912-1940) yên nghỉ nơi đây, thơ ông có lẽ còn sống mãi. GS. Lê Văn Thiêm (1918-1992) đã có thời gian sống và làm việc tại Quy Nhơn. Anh bạn cùng đi với tôi nói rằng : Có lẽ Sư phạm Quy Nhơn là trường Đại học đẹp nhất vùng duyên hải nước ta ! Trong cảnh đất trời, biển cả hòa quyện vào nhau, tôi thường nghĩ về nghịch lí của cuộc đời.

* Tài ba như Quang Trung mà sao chết lúc còn rất trẻ. Chết rồi mà mồ mả cũng không yên.

* Thơ hay như Hàn Mạc Tử, mà sao lúc sống bị căn bệnh hiểm nghèo đến thế.

* Hiền lành chân thực như GS. Lê Văn Thiêm mà cả cuộc đời lại nghiên cứu Hàm phức.

Thật là tình cờ (ngẫu nhiên !) một người bạn trẻ của tôi, anh Phạm Xuân Bình ở Quy Nhơn đưa cho tôi mượn cuốn sách bằng tiếng Nga: *Các nguyên lí trong lí thuyết xác suất và thống kê toán học* của tác giả Hunggari Gábor J. Székely "Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics, Budapest, 1986" (Bản tiếng Nga, xuất bản năm 1990).

Anh Bình tâm sự với tôi rằng anh biết cuốn sách này rất hay và bổ ích, rất tiếc anh không thạo tiếng Nga, chứ nếu có bản tiếng Anh thì anh đã dịch ra tiếng Việt rồi. Anh Bình đề nghị tôi dịch sách này ra tiếng Việt. Đúng như anh Bình cảm nhận, tôi bị cuốn sách này cuốn hút ngay, vì sách có nhiều nghịch lí thú vị, đơn giản mà rất thực chất, được viết rất khoa học và có nhiều chú thích hay.

Tuy nhiên, sách dày 240 trang, lại đề cập nhiều vấn đề, dịch ra tiếng Việt chắc gì đã có nhiều người mua. Tôi hứa với anh Bình là tôi sẽ lần lượt giới thiệu vài nghịch lí có trong cuốn sách trên cho báo Toán học và Tuổi trẻ.

Nghịch lí 1. Tung hai con súc sắc cân đối, thì tổng của số các chấm nằm giữa 2 và 12. Số 9 và số 10 có hai cách biểu diễn khác nhau theo các số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Đó là $9 = 3 + 6 = 4 + 5$;

$$10 = 4 + 6 = 5 + 5.$$

Tung 3 con súc sắc cân đối thì 9 và 10 có sáu cách biểu diễn khác nhau theo các số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Đó là

$$\begin{aligned} 9 &= 1 + 2 + 6 = 2 + 2 + 5 \\ &= 1 + 3 + 5 = 2 + 3 + 4 \\ &= 1 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 \\ 10 &= 1 + 3 + 6 = 2 + 3 + 5 \\ &= 1 + 4 + 5 = 2 + 4 + 4 \\ &= 2 + 2 + 6 = 3 + 3 + 4. \end{aligned}$$

Vậy thì vì sao 9 thường xuất hiện nhiều hơn khi tung 2 con, còn 10 thì thường xuất hiện nhiều hơn khi tung 3 con súc sắc ?

Giải thích. Vấn đề là ở chỗ cần phải tính đến thứ tự xuất hiện các số. Trong trường hợp tung 2 con thì số 9 có tới 4 cách biểu diễn : $9 = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4$, còn 10 thì có 3 cách biểu diễn : $10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5$ (do đó xác suất xuất hiện 9 bằng 4/36, còn xác suất xuất hiện 10 là 3/36). Trong trường hợp tung 3 con thì 9 có 25 cách biểu diễn, còn 10 có 27 cách (bạn thử tính mà xem).

Chú thích. Có lẽ Cardano (1501-1576) là người đầu tiên viết sách về xác suất. Tác phẩm "Sách về trò chơi súc sắc" của ông xuất bản năm 1663 (tức là 100 năm sau khi ông viết tác phẩm này) được xem là cuốn sách xác suất cổ nhất. Vào thời kì ấy, nghịch lí 1 được xem là cực kì khó giải thích. Cardano và sau đó là Galilei đã tìm ra cách giải thích trên.

* Nhiều nhà toán học lớn đã mắc sai lầm khi giải thích những vấn đề tương tự, trong số đó có Leibniz (người sáng lập ra phép tính vi phân, tích phân), D'Alambert (nhà bách khoa toàn thư Pháp). Chẳng hạn D'Alambert đã từng cho rằng khi tung một đồng tiền hai lần thì xác suất để xuất hiện ít nhất 1 lần xấp bằng 2/3, thực ra xác suất này bằng 3/4 (nhờ bạn tính cụ thể).

* Bài toán về súc sắc có liên quan đến các vấn đề vật lí. Mỗi con súc sắc tương tự như một hạt cơ bản, mỗi mặt của con súc sắc tương ứng với trạng thái của hạt. Trong trường hợp này trò chơi súc sắc tương đương với mô hình Maxwell - Bolzman (M-B). Trong vật lí còn có nhiều mô hình khác như mô hình Bore - Einstein (B-E), Femi - Dirac (F-D)...

Mô hình (M-B) cho rằng các hạt là có thể phân biệt được, và mỗi hạt có thể ở vào trạng thái bất kì.

Mô hình (B-E) cho rằng các hạt là không thể phân biệt được (giống như ta không thể phân biệt được các con vi khuẩn) và mỗi hạt có thể ở vào trạng thái bất kì.

Mô hình (F-D) cho rằng mỗi trạng thái chỉ giành cho nhiều nhất là 1 hạt (tức là nếu đã có 1 hạt ở vào trạng thái S thì các hạt còn lại không được rơi vào trạng thái S. Giống như chuyện lấy vợ theo luật hôn nhân; nếu đã có 1 chàng trai lấy nàng S rồi thì các chàng trai khác không được lấy nàng S nữa)./.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/276. Lập dãy số nguyên (a_n) ($n = 1, 2, 3, ...$) như sau : $a_1 = 2$; số a_n bằng tổng các lũy thừa bậc 10 của tất cả các chữ số của số a_{n-1} với mọi $n = 2, 3, ...$ Chứng minh rằng trong dãy số đó tồn tại 2 số bằng nhau.

BÙI ĐỨC HIỀN
(GV ĐHSP Vinh)

Bài T2/276. Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn $P(1) = 3$, $P(3) = 11$, $P(5) = 27$. Tính giá trị của $P(-2) + 7P(6)$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV trường Colette Tp Hồ Chí Minh)

Bài T3/276. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

trong đó a, b, c là các số thực thuộc $[1; 2]$

VŨ ĐỨC CẢNH
(SV ĐH An Ninh Hà Nội)

Bài T4/276. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq 4 - \frac{2r}{R}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
(GV ĐH SP Vinh)

Bài T5/276. Cho tam giác ABC. Lấy điểm P trên cạnh BC. Gọi H; K lần lượt là hình chiếu của P lên AB, AC. Gọi M, N là các điểm trên AB, AC tương ứng sao cho $PM//AC$ và $PN//AB$. So sánh diện tích các tam giác PHK và PMN.

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV ĐHSP Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/276. Chứng minh rằng

$$a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \geq 0$$

trong đó a, b, c là các số thực.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T7/276. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^{1999}.e^{2x}.dx > \frac{\pi^{2001}}{2001} + \frac{\pi^{2002}}{2002}$$

TRẦN VIỆT THẠCH
(Sở GD–ĐT Hải Phòng)

Bài T8/276. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau, trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ.

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T9/276. Cho tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{\sqrt{1+2\cos^2 A}}{\sin B} + \frac{\sqrt{1+2\cos^2 B}}{\sin C} + \frac{\sqrt{1+2\cos^2 C}}{\sin A}$$

HÀ DUY HƯNG
(SV ĐHSP Hà Nội)

Bài T10/276. Cho tứ diện $ABCD$ vuông tại D. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa đường cao DH với các cạnh DA, DB, DC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta}$$

NGUYỄN THẾ BÌNH
(GV THPT chuyên Hà Giang)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/276. Một thanh AB đồng chất, thiết diện đều có chiều dài $l = 100$cm và thiết diện $S = 50cm^2$. Đầu A được gắn với trụ quay cố định cách mặt nước $h = 30$cm. Đầu A được gắn với trụ quay cố định cách mặt nước $h = 30$cm. Đầu B được thả vào nước và có thể chuyển động trên mặt phẳng song song với dòng chảy. Ở trạng thái cân bằng thanh ngập 1/4 chiều dài. Lấy $D_{\text{nước}} = 1000\text{kg/m}^3$, $g = 10\text{m/s}^2$.

1) Xác định khối lượng riêng D_0 của thanh

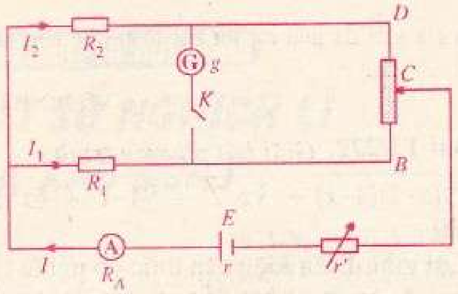
2) Khi nước chảy với vận tốc đều ta thấy thanh bị ngập 1/3 chiều dài. Biết rằng lực ép của nước chảy tác dụng vào thanh là $F_v = \mu v$, trong đó v là vận tốc chảy của nước, $M = 0{,}5$kg/s. Hãy xác định chiều chảy và vận tốc của nước.

LẠI THẾ HIỀN
(GV THPT Lương Thế Vinh, Hà Nội)

Bài L2/276. Cho mạch điện như hình vẽ bên : $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_A = 0$, $g = 6\Omega$, $I = 1{,}56A$, $E = 15{,}6V$, $r = 1\Omega$, $R_{BD} = 18\Omega$.

1) Khi K mở, con chạy C ở đầu trên D của biến trở ($R_{CD} = 0$).

Hãy tính r' và điện trở tương đương R của đoạn mạch ngoài từ A đến C.



2) Đóng K, di chuyển con chạy C. Muốn giữ cho I luôn luôn vẫn bằng $1{,}56(A)$ như ở câu (1), đồng thời biến đổi R_{CD} người ta phải biến đổi cả r'.

Tính R_{CD}, R, I_1, I_2, I_g trong các trường hợp :

a) Vẫn giữ r' như ở câu (1)

b) $r' = 0{,}6\Omega$

c) $r' = 2{,}4\Omega$.

Chiều của dòng I_g phụ thuộc R_{CD} như thế nào ?

TRẦN VĂN MINH
(GV Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/276. The sequence of integers (a_n) ($n = 1, 2, 3, ...$) is defined by : $a_1 = 2$, a_n (for $n \geq 2$) equals the sum of the tenth powers of the digits of a_{n-1}.

Prove that there exist two equal numbers in this sequence.

T2/276. The polynomial $P(x)$ of degree 4, with leading coefficient 1, satisfies the conditions : $P(1) = 3$, $P(3) = 11$, $P(5) = 27$.

Find the value of $P(-2) + 7P(6)$.

T3/276. Find the greatest value of the expression $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ where a, b, c are real numbers belonging to $[1; 2]$.

T4/276. Let be given a triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Let R and r be respectively its circumradius and inradius. Prove that $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq 4 - \dfrac{2r}{R}$

Where does equality occur ?

T5/276. Let be given a triangle ABC and a point P on the side BC. Let H, K be respectively the orthogonal projections of P on AB and AC and let M, N be respectively the points on AB, AC such that $PM//AC$, $PN//AB$. Compare the areas of the triangles PHK and PMN.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/276. Prove that

$$a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \geq 0$$

for arbitrary real numbers a, b, c.

T7/276. Prove that

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^{1999}.e^{2x}.dx > \frac{\pi^{2001}}{2001} + \frac{\pi^{2002}}{2002}$$

T8/276. How many are there natural 6-digit numbers, the digits of which are distinct and two arbitrary consecutive digits can not be simultaneously odd numbers ?

T9/276. Find the least value of the expression

$$\frac{\sqrt{1+2\cos^2 A}}{\sin B} + \frac{\sqrt{1+2\cos^2 B}}{\sin C} + \frac{\sqrt{1+2\cos^2 C}}{\sin A}$$

where A, B, C are the angles of a triangle.

T10/276. Let be given a tetrahedron $ABCD$, right at D. Let α, β, γ be respectively the angles formed by the altitude DH with the edges DA, DB, DC. Find the least value of the expression

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta}$$

KẾT QUẢ CUỘC THI APMO 2000

Ban tổ chức cuộc thi Olympic Toán châu Á - Thái Bình Dương lần thứ 12 (3-2000) đã công bố kết quả cuộc thi. Tất cả 10 thí sinh của Việt Nam dưới đây đã đoạt giải.

1 Huy chương Vàng : Nguyễn Trung Lập (Vĩnh Phúc)

2 Huy chương Bạc : Vũ Việt Tài (Nam Định), Bùi Viết Lộc (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội).

4 Huy chương Đồng : Tạ Anh Sơn (Phú Thọ), Đỗ Trường Giang (Hà Nội), Nguyễn Quang Bằng (Hải Dương), Nguyễn Anh Quân (Hải Phòng).

3 Bằng khen : Trần Đức Sơn (ĐHSP Vinh), Trần Tuấn Anh (Khánh Hòa), Trần Quang Vinh (Tp Hồ Chí Minh).

Đề thi APMO 2000 sẽ đăng trong tạp chí THTT số 277 (7/2000).

THTT

Bài T1/272. *Giải phương trình nghiệm nguyên :*

$$x^3 + 8 = 7\sqrt{8x+1} \qquad (1)$$

Lời giải.

Để phương trình (1) có nghĩa thì $x \geq 0$

Do x nguyên và $x \geq 0$ nên phương trình (1) tương đương với

$(1) \Leftrightarrow (x^3+8)^2 = 49(8x+1)$

$\Leftrightarrow x^6 + 16x^3 - 392x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^5+3x^4+9x^3+43x^2+129x-5) = 0$

Đặt $P(x) = x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 43x^2 + 129x - 5$

Ta có : $P(0) = -5$, với $x \geq 1$thì $P(x) > 0$

Vậy phương trình (1) chỉ có 1 nghiệm nguyên.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn có lời giải đúng như trên.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/272. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\left(\frac{4a}{b+c}+1\right)\left(\frac{4b}{a+c}+1\right)\left(\frac{4c}{a+b}+1\right) > 25$$

trong a, b, c là các số dương.

Lời giải: Vì vai trò của a, b, c là như nhau cho nên ta có thể giả sử rằng $0 < a \leq b \leq c$.

Đặt $S = a+b+c$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$(S+3a)(S+3b)(S+3c) > 25(S-a)(S-b)(S-c) \Leftrightarrow$

$S^3+3S^2(a+b+c) + 9S(ab+bc+ca) + 27abc >$

$> 25S^3-25S^2(a+b+c)+ 25S(ab+bc+ca)- 25abc$

$\Leftrightarrow 4S^3 -16S(ab+bc+ca)+52abc>0$

$\Leftrightarrow S(S^2 - 4(ab+bc+ca)) + 13abc > 0$

$\Leftrightarrow S((a+b-c)^2 - 4ab) + 13abc > 0$

$\Leftrightarrow S(a+b-c)^2 + ab(13c-4S) > 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì

$13c - 4S = 13c - 4(a+b+c) = 9c - 4(a+b) > 0.$

Nhận xét. Có một số bạn giải sai khi chứng minh $\left(\frac{4a}{b+c}+1\right)\left(\frac{4b}{a+c}+1\right)\left(\frac{4c}{a+b}+1\right) \geq 27$. Các bạn gửi bài nên lưu ý rằng phải giải mỗi bài trên một tờ riêng biệt, không ghi nhiều bài vào một tờ giấy. Hầu hết các bạn tham gia giải đã giải rất tốt bài toán này như lời giải trên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/272. *Giải bất phương trình :*

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} + \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} + 6x\sqrt{3x} \leq x^3+30$$

Lời giải. Điều kiện căn thức có nghĩa : $2 \leq x \leq 4$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\sqrt[4]{(x-2)(4-x)} \leq \sqrt{\frac{(x-2)+(4-x)}{2}} = 1 \quad (1)$$

$$6x\sqrt{3x} = 2\sqrt{27.x^3} \leq 27 + x^3 \qquad (2)$$

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Bunhiacôpski thì :

$(\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x})^2 \leq 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})$

$\leq 2\sqrt{2(x-2+4-x)} = 4$

$\Rightarrow \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} \leq 2 \qquad (3)$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta thấy bất phương trình thỏa mãn với mọi x thuộc $[2; 4]$.

Nhận xét. 1) Việc đánh giá các biểu thức có thể theo nhiều con đường khác nhau. Nhiều bạn đã viết được : $x^3 - 6x\sqrt{3x} + 30 = (x\sqrt{x} - 3\sqrt{3})^2 + 3 \geq 3$ và từ đó có kết luận đúng. Nhiều bạn đã có nhận xét đúng : hai vế của bất phương trình bằng nhau $\Leftrightarrow x = 3$. Một số bạn sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số để đánh giá các căn bậc bốn.

2) Các bạn làm đúng và diễn đạt tốt là :

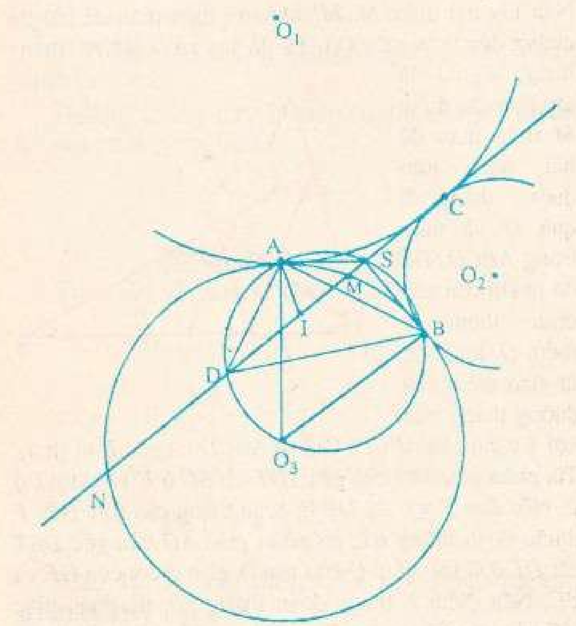
Đồng Nai: *Lê Phương, Trần Võ Huy*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Nam:** *Đặng Quang Hải*, 8/2, THCS Chu Văn An, Duy Xuyên; **Bình Thuận:** *Nguyễn Tiên Phúc*, 9^1, THCS Trần Hưng Đạo, Phan Thiết; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh* và *Nguyễn Thành Duyên*, 9C, *Đào Thanh Dung, Nguyễn Mai Linh*, 9A, THCS Việt Trì; **Nghệ An:** *Nguyễn Như Phong*, 9B và *Nguyễn Gia Phong*, 8B, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh, *Nguyễn Thanh Sơn, Quan Minh Vương*, 9B, THCS Sông Hiếu, Nghĩa Đàn : **Thanh Hóa:** *Phạm Quốc Đạt*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, **Quảng Ngãi;** *Vũ Thị Phương Thúy*, 5D, trường tiểu học số 1, Phổ Cường, Đức Phổ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Tâm*, 9A, THCS Tam Đảo, Tam Dương, *Nguyễn Hồng Điệp*, 8A, THCS Vĩnh Tường; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Danh Dũng*, 9A, PT Thực hành Sư phạm; **Hà Nội:** *Trần Anh Tuấn*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh; *Vũ Quốc Mỹ, Tô Thùy Linh, Lê Đức Phương*, 9H, THCS Trưng Vương; *Hoàng Thu Thủy*, 9E, THCS Tô Hoàng; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trãi; **Hà Tây:** *Lê Trung Nghĩa*, 9A2, THCS Mỹ Đức; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Ba, Vương Thành Nam*, 9A, THCS Thuận Thành; **Đồng Tháp:** *Hoàng Công Thiệu, Nguyễn Công Thắng*, 9A1, THCB thị xã Cao Lãnh; **Hà Tĩnh:** *Đặng Đình Đông*, 9A, THCS Nguyễn Tuấn Thiện, Hương Sơn; **Thái Bình:** *Lưu Thị Hạnh*, 8A1, THCS An Bài, Quỳnh Phụ; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lý Quốc Vinh*, 5B, THCS Hồng Bàng, Q5 *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, P15, Q Phú Nhuận; **Tiền Giang:** *Phạm Thị Kim Chi*, 8/1, THCS Tân Hương, Châu Thành; **KonTum:** *Nguyễn Lương Thúy Vân, Nguyễn Thị Kim Hạnh*, 7A, TH chuyên KonTum; **Đà Nẵng:** *Phạm Đỗ Hồng Quý*, 9/2, THCS Nguyễn Khuyến; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Minh Châu*, 9[15], THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hải Phòng:** *Hà Hồng Nhung*, 9A4, THCS Trần Phú, *Bùi Hải Nam*, 9B, NK Trần Phú.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/272. *Cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một. Gọi A, B, C lần lượt là tiếp điểm của các cặp đường tròn (O_1) và (O_3), (O_2) và (O_3), (O_1) và (O_2). Tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) qua C cắt đường tròn (O_3) tại M và N. Gọi D là trung điểm của MN. Chứng minh rằng C là tâm đường tròn bàng tiếp của ΔABD.*

Lời giải. Kẻ 2 tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_3), (O_3) và (O_2) chúng cắt nhau tại S. Như vậy $S \in CD$.

Năm điểm A, B, D, S, O_3 cùng nằm trên một đường tròn đường kính SO_3. Ta có $SA = SB$ nên $\angle AO_3S = \angle BO_3S$



Mặt khác $\angle ADS = \angle AO_3S$, $\angle BDS = \angle BO_3S$ Vậy $\angle ADS = \angle BDS$

Do đó SD là phân giác trong của $\angle ADB$.

Trên đoạn SD lấy điểm I sao cho $SI = SA$.

Ta có $\angle SAI = \angle SIA$

Nên $\angle SAB + \angle BAI = \angle IDA + \angle IAD$

Mà $\angle SAB = \angle SDB = \angle IDA$ nên $\angle IAD = \angle IAB$

Vậy AI là phân giác trong của góc $\angle BAD$.

Do $SA = SC = SI$ nên ΔACI vuông ở A hay $AC \perp AI$. Vậy AC là phân giác ngoài của góc $\angle BAD$ suy ra C là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABD.

Nhận xét: Giải tốt bài này có các bạn :

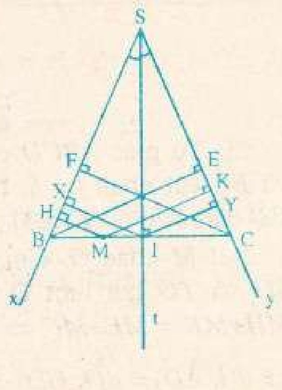
Yên Bái: *Trần Bình Minh*, 9K, Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì, *Vũ Hà*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Lê Tiến Dũng*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Trung, Nguyễn Thành Nam*, 9A, PTCS Nguyễn Trãi; **Hà Nam:** *Trần Quang Dũng*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Hải Phòng:** *Hà Hồng Nhung*, 9A4, THCS Trần Phú; **Hà Nội:** *Tô Thùy Linh*, 9H, *Vũ Quốc My*, 9H, THCS Trưng Vương, *Đặng Quang Khải*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh; **Nam Định:** *Phạm Thanh Hải*, 8A2, Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu, *Phùng Văn Doanh*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Nghệ An:** *Trần Nhật Thu*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Phan Đức Thiện*, 9C, THCS Nguyễn Du, *Chu Lê Long*, 9G THCS Kỳ Anh; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 9/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Bạc Liêu:** *Nguyễn Danh Dũng*, 9A, PT Thực hành Sư phạm Bạc Liêu.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/272. *Cho tứ giác lồi ABCD với AB+CD = BC+DA. Tìm tập hợp các điểm M nằm bên trong tứ giác ABCD sao cho tổng các khoảng cách từ M đến AB và CD bằng tổng các khoảng cách từ M đến BC và DA.*

Lời giải. Bạn đọc tự chứng minh bổ đề sau (h.1) :

Bổ đề: *Tập hợp những điểm M nằm trong góc xSy có tổng khoảng cách từ M tới hai cạnh của góc bằng k không đổi là đoạn thẳng BC, sao cho* $k = d(B, Sy) = d(C, Sx) = 2d(I, Sy) = 2d(I, Sx)$, trong đó I là hình chiếu



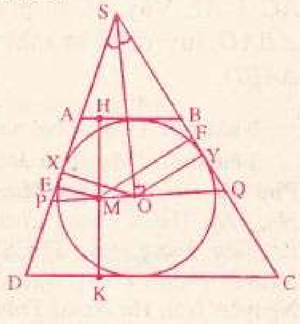
h.1

của M lên tia phân giác St của góc xSy, còn $d(I, \Delta)$ kí hiệu khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ.

Trở về bài toán. Gọi ME, MF, MH, MK lần lượt là khoảng cách từ M tới AD, BC, AB, CD. Điều kiện $AB+CD = BC+DA$ tương đương với $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn tâm O bán kính r.

Ta xét 3 trường hợp sau :

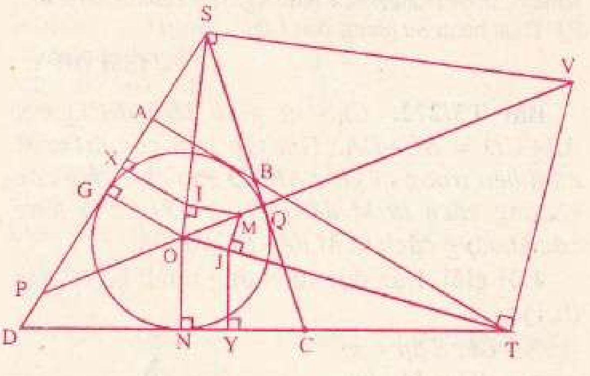
(1) Tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Dễ thấy tập hợp các điểm M thỏa mãn đề bài là tất cả các điểm nằm trong (kể cả các cạnh) hình thoi $ABCD$.



h.2

(2) Tứ giác $ABCD$ có $AB//CD$, hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại S (h.2) Kẻ $MI \perp SO$ thì theo bổ đề có $ME+MF=MH + MK \Leftrightarrow ME+MF = 2r \Leftrightarrow 2d(I, SD) = 2r$ nghĩa là I trùng với O.

Từ đó suy ra : Tập hợp các điểm M thỏa mãn đề bài là đoạn thẳng PQ ($P \in AD$, $Q \in BC$) sao cho PQ vuông góc với SO tại O.



h.3

(3) Tứ giác $ABCD$ có hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại S, hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại T (h.3).

Xét M khác O. Gọi hình chiếu của M lên SO và TO lần lượt là I và J. Từ giả thiết : $MH+MK = ME+MF \Leftrightarrow 2d(I, AD) = 2d(J, CD)$ $\Leftrightarrow d(I, AD) = d(J, CD) \Leftrightarrow \dfrac{IX}{OG} = \dfrac{JY}{ON}$

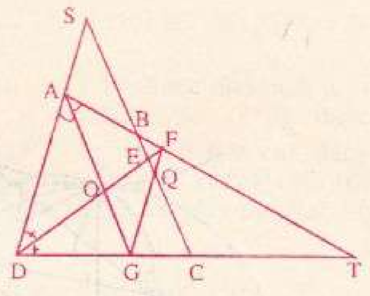
$$\Leftrightarrow \frac{IS}{OS} = \frac{JT}{OT} \Leftrightarrow \frac{OI}{OS} = \frac{OJ}{OT} \qquad (1)$$

• Thuận : Qua S kẻ $SV \perp SO$, hai đường thẳng SV và OM cắt nhau tại V. Theo định lí Talet $\dfrac{OI}{OS} = \dfrac{OM}{OV}$ (2)

Từ (1) và (2) theo định lí đảo Talet có : $\dfrac{OJ}{OT} = \dfrac{OM}{OV} \Rightarrow MJ//VT \Rightarrow VT \perp OT$. Giao điểm V của SV và VT là điểm cố định và điểm M nằm trên đường thẳng VO. Giả sử đường thẳng VO cắt 2 cạnh của $ABCD$ tại P và Q thì tập hợp các điểm M thỏa mãn đề bài thuộc đoạn thẳng PQ.

• Đảo : Giả sử điểm M thuộc đoạn thẳng PQ xác định như trên. Gọi hình chiếu của M lên SO và TO lần lượt là I và J. Do sự xác định điểm V thì $\dfrac{OI}{OS} = \dfrac{OM}{OV} = \dfrac{OJ}{OT}$ thỏa mãn (1) $\Rightarrow$ điểm M thỏa mãn đề bài. Kết luận của trường hợp (3) : tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đoạn thẳng PQ xác định như trên.

Nhận xét. 1) Trong trường hợp (3) sau khi có (1) nghĩa là $\dfrac{OI}{OS} = \dfrac{OJ}{OT} \Leftrightarrow IJ//ST$, có thể làm cách khác. Nếu lấy hai điểm M, M' khác O thỏa mãn đề bài thì chúng đều thỏa mãn (1). Từ đó suy ra O, M, M' thẳng hàng, nghĩa là tập hợp các điểm M thỏa mãn đề bài nằm trên đường thẳng đi qua O và nằm trong $ABCD$. Do đó ta chỉ cần xác định thêm 1 điểm Q, khác O, là giao điểm của đường thẳng trên với 1 cạnh của $ABCD$. Giả sử $ABCD$ có góc B tù (h.4).



h.4

Tia phân giác DO của góc SDT cắt SC ở E và cắt AT ở F. Nếu $E \equiv F \equiv B$ thì DB là đoạn thẳng cần tìm. Nếu F thuộc đoạn thẳng BT, tia phân giác AO của góc DAT cắt DT ở G thì điểm Q cần tìm là giao điểm của GF và BC. Nếu điểm E thuộc đoạn thẳng SB, tia phân giác CO của góc SCD cắt AD tại G' thì điểm Q phải tìm là giao điểm của $G'E$ và AB. Các bạn tự chứng minh (hoặc xem lời giải bài T4/261 số 265 THTT 7/1999) : Trong ΔADT với các đường phân giác AG và DF thì điểm Q bất kì thuộc đoạn thẳng GF có tính chất $d(Q, AT) + d(Q, DT) = d(Q, AD)$.

2) Các bạn sau có lời giải đúng :

Hà Nội: *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, THCS Trưng Vương ; **Yên Bái:** *Trần Văn Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, thị xã Yên Bái; **Nghệ An:** *Võ Văn Thành*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, *Đậu Thị Ngọc Ánh*, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 9/15, THCS Thái Nguyên, Nha Trang

VIỆT HẢI

Bài T6/272. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho*

$f(p) = (2+3) - (2^2+3^2) + (2^3+3^3) - \dots - (2^{p-1}+3^{p-1}) + (2^p+3^p)$ *chia hết cho 5.*

Lời giải. (của bạn *Hà Minh Cường*, 10A, ĐHSP, **Hà Nội**)

Ta có với k lẻ thì $2^k + 3^k \equiv 0 \pmod 5$. Vậy

$$f(p) \equiv 0 \pmod 5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (2^{2i} + 3^{2i}) \equiv 0 \pmod 5$$

Mà $3^{2i} \equiv (-2)^{2i} \equiv 2^{2i} \pmod 5 \Rightarrow f(p) \equiv 0$

$$\pmod 5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 2^{2i} \equiv 0 \pmod 5 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^i \equiv 0$$

$$\pmod 5 \Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2k \Leftrightarrow p = 4k+1. \quad (k \in N^*)$$

Nhận xét. Đây là bài toán tương đối dễ nên có rất nhiều bạn tham gia giải. Các bạn có lời giải tốt : *Trần Quốc Tuấn*, 11A1, THPT **Bạc Liêu**, *Nguyễn Văn Anh*, 9B Nghi Lộc, **Nghệ An**; *Lê Phương* 9/3 THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Đồng Nai**, *Trần Anh Tuấn*, 9A, PTDL Lương Thế Vinh, **Hà Nội**; *Hoàng Trọng Minh Vỹ*, 7/1 Nguyễn Tri Phương, **Thừa Thiên - Huế**, *Trần Đình Nguyên*, 12 Toán, PTNK Hồ Chí Minh, *Đặng Đình Trung*, THCS Long Thành, Đồng Nai, *Võ Trần Thành*, 10T, PTNK **Quảng Bình**; *Lê Tất Thắng*, 11A, ĐHSP Vinh, *Trần Văn Hinh*, 10A, THCS Nghĩa Hưng, **Nam Định**...

Bạn *Nguyễn Thị Hạnh*, 10A, Kinh Môn, **Hải Dương** và bạn *Hà Xuân Giáp*, 10T, Lam Sơn, **Thanh Hóa** có nhận xét đúng rằng có thể thay số nguyên tố bằng số nguyên dương lẻ.

Tuy nhiên có thể thay bằng số nguyên dương n bất kì và giải tương tự ta đi đến kết quả là $n = 4k$ hoặc $n = 4k+1$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/292. *Tìm số các nghiệm của phương trình sau theo tham số k:*

$$(1-x)\ln\frac{2k+1-2kx}{2kx-2k+1} - 1 = 0$$

Lời giải. (*Trần Tất Đạt*, 12B Toán, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**; *Nguyễn Hồng Kiên*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và nhiều bạn khác).

Với $k = 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $k \neq 0$ ta đặt $2k(1-x) = t$ và được phương trình theo t là $t\ln\dfrac{1+t}{1-t} = 2k$ với $-1 < t < 1$,

Xét hàm số $f(t) = t\ln\dfrac{1+t}{1-t}$ với $-1 < t < 1$, Nhận xét rằng $f(0) = 0$ và $\lim\limits_{t \to \pm 1} f(t) = +\infty$.

Ta có $f'(t) = \ln\dfrac{1+t}{1-t} + \dfrac{2t}{1-t^2}$, $f'(0) = 0$,

$f''(t) = \dfrac{4}{(1-t^2)^2} > 0$, $\forall t \in (-1, 1)$. Vậy $t = 0$ là cực tiểu của hàm và hàm $f'(t)$ đồng biến trong $(0, 1)$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trong $(-1, 0)$ và đồng biến trong $(0, 1)$. Do vậy, khi $k \leq 0$ phương trình đã cho vô nghiệm và khi $k > 0$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét. Một số bạn giải bằng phương pháp đồ thị cũng cho kết quả đúng. Các bạn sau đây có bài giải đúng.

Đỗ Ngọc Ánh, 12CT, *Nguyễn Trung Lập*, 12CT, *Tạ Việt Tô*, 11A, chuyên **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Mạnh Cường*, 11T, Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; *Hoàng Thanh Lâm*, ĐHKHTN, *Bạch Văn Sơn*, ĐHNN, *Nguyễn Tuấn Anh*, THPT Nguyễn Gia Thiều, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 10T, Amsterdam, **Hà Nội**; *Nguyễn Văn Thắng*, 10CT, Lê Hồng Phong, *Bùi Văn Tùng*, 11B, Trần Nhật Duật, **Nam Định**; *Nguyễn Kim Cương*, 11CT, **Hà Giang**, *Nguyễn Duy Đạt*, 11L, Kỳ Anh, *Nguyễn Thừa Thắng*, 11CT, *Trương Quang Dũng*, 11CT, **Hà Tĩnh**;*Lê Thế Nhân*, 11CT, *Nguyễn Phú Sĩ*, 11A, Lê Hồng Phong, *Trần Quang*, 10CT, *Lâm Hoàng Nguyên*, 11CT, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh, *Trần Quốc Tuấn*, 11CT Bạc Liêu. *Trần Đình Khiêm*, 11CT, QH Huế, *Nguyễn Đức Trường*, 11A, ĐHSP Vinh, *Phan Tuấn Anh*, 11K Nam Đàn 1, **Nghệ An**; *Ngô Xuân Bách*, 10CT, *Tô Minh Hoàng*, 11CT, *Vũ Xuân Nam*, 10CT, **Hải Dương** *Phan Đình Hải*, 11 THPT Bảo Lộc, **Nam Đồng**; *Trần Mạnh Hùng*, 11CT, *Lưu Đức Thi*, 10CT Lam Sơn, Thanh Hóa, *Trần Văn Cường*, 12A, THPT Đông Hà, *Lê Anh Tuấn*, 11CT, **Quảng Trị**; *Trần Tuấn Anh*, 12T, Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**; *Hoàng Nam Phương*, 11A, Lê Quý Đôn, **Vũng Tàu**; *Đặng Văn Cường*, 12A, THPT Hàn Thuyên, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Mạnh Cường*, 11T, THPT Hoàng Văn

Thụ, Hòa Bình, *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt trì, **Phú Thọ :** Triệu Thanh Hải, 11CT, **Yên Bái**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/272. *Gọi m và M lần lượt là số nhỏ nhất và số lớn nhất trong tập hợp các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ($n \ge 2$). Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big) \le n^2 + \frac{n(n-1)}{2}\Big(\sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}}\Big)^2 \ (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (của bạn *Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** và một số bạn)

Ta có $\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{a_i}{a_j}+\frac{a_j}{a_i}\Big)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(2 + \Big(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}} - \sqrt{\frac{a_j}{a_i}}\Big)^2\Big)$$

$$= n^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}} - \sqrt{\frac{a_j}{a_i}}\Big)^2 \quad (1)$$

Chú ý với mọi $i, j = 1, 2, ..., n$ có

$m \le a_i \le M, m \le a_j \le M$

$$\Rightarrow \frac{m}{M} \le \frac{a_i}{a_j} \le \frac{M}{m}, \quad \frac{m}{M} \le \frac{a_j}{a_i} \le \frac{M}{m}$$

$$\Rightarrow \Big(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}} - \sqrt{\frac{a_j}{a_i}}\Big)^2 \le \Big(\sqrt{\frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{m}{M}}\Big)^2 \quad (2)$$

Với $i = j$ thì $\sqrt{\frac{a_i}{a_j}} - \sqrt{\frac{a_j}{a_i}} = 0$, còn với $i \ne j$ (có $n(n-1)$ cặp i, j như thế) thì ta dùng bất đẳng thức (2). Do đó, từ (1) và (2) ta nhận được bất đẳng thức (*) cần phải chứng minh. Trong bất đẳng thức (2) dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_i}{a_j} = \frac{m}{M}$ hoặc $\frac{a_i}{a_j} = \frac{M}{m}$. Bởi vậy bất đẳng thức (*) trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $n=2$ hoặc $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Nhận xét. 1. Đây là bài toán dạng cơ bản của THCS. Tòa soạn nhận được lời giải của gần 350 bạn, đa số các bạn giải đúng.

2. Các bạn THCS sau có lời giải tốt : **Phú Thọ:** *Trần Thanh Hải, Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Nội:** *Tô Thùy Linh*, 9H, THCS Trưng Vương, *Đặng Xuân Khánh*, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Đinh Ngọc Thắng*, PTDL Châu Phong; **Hà Tây:** *Phạm Tuấn*, 9A, THCS Thạch Thất; **Hải Dương:** *Vũ Đình Thế*, 90A, THCS Phả Lại, *Nguyễn Thành Nam, Phạm Thành Trung*, 9A, THPT Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Phùng Đại Diện*, 9, THCS Nguyễn Du; **Ninh Bình:** *Phạm Quang Huy, Đinh Quyết Tiến*, 9, THCS Yên Ninh; **Hà Tĩnh:** *Đặng Đình Đông*, 9A^T, THCS Nguyễn Tuấn Thiện; **Nghệ An:** *Trung Tuấn Dũng, Trần Nhật Thu*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, *Đậu Thị Ngọc Ánh*, 9C, THCS Nam Đàn; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Minh Châu, Trần Minh Bình*, 9, THCS Thái Nguyên; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Công Thắng, Hoàng Công Thiện*, 9A1, THCS Cao lãnh.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/272. *Gọi r, r_b, r_c lần lượt là bán kính, đường tròn nội tiếp, đường tròn bàng tiếp tương ứng với góc B và góc C của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $r+r_b+r_c = p$ (nửa chu vi của tam giác ABC) thì tam giác ABC vuông ở A.*

Lời giải.

Cách 1. (của bạn *Võ Huy Phương*, 10T, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên, **An Giang**)

Từ giả thiết :

$$r+r_b+r_c = p \Rightarrow \frac{S}{p} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{S}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{a}{(p-b)(p-c)} = \frac{p-r}{pr}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{(p-a)(p-b)} = \frac{p-r}{a} \Rightarrow \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = \frac{p-r}{a}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = \frac{p-r}{a} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{p-a}{r} = \frac{p-r}{a} \quad \Rightarrow a(p-a) = r(p-r)$$

$$\Rightarrow ap - a^2 = rp - r^2 \quad \Rightarrow (a-r)(p-a-r) = 0$$

Vì $a \ge h_b > r \Rightarrow a-r > 0$ nên từ đẳng thức trên suy ra : $p-a-r = 0 \Rightarrow \frac{p-r}{a} = 1$.

Từ đó, kết hợp với (1), ta có $cotg\frac{A}{2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = 45^\circ \Rightarrow A = 90^\circ \text{ (đpcm)}$$

Cách 2. (của bạn *Võ Trần Thành*, 10T, THPT Năng Khiếu, **Quảng Bình**)

Ta có : $r = p\, tg\frac{A}{2}\, tg\frac{B}{2}\, tg\frac{C}{2}$, $r_b = p\, tg\frac{B}{2}$, $r_c = p\, tg\frac{C}{2}$, $tg\frac{B}{2}\, tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2} tg\frac{A}{2} + tg\frac{A}{2} tg\frac{B}{2} = 1$ (1)

Vì vậy, từ giả thiết $r + r_b + r_c = p$ suy ra :

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} =$$

$$= tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} + tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \left(tg\frac{A}{2} - 1\right)\left(tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} - tg\frac{B}{2} - tg\frac{C}{2}\right) = 0 \ (2)$$

Nếu $tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} - tg\frac{B}{2} - tg\frac{C}{2} = 0$ thì

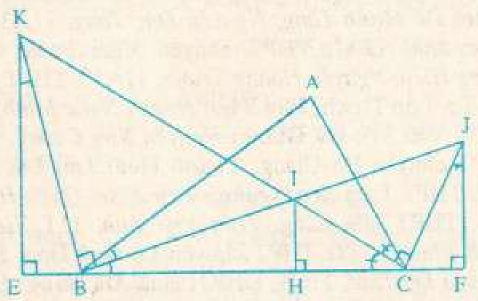
$$tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = tg\frac{A}{2} + tg\frac{C}{2} \geq 2\sqrt{tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}}$$

$\Rightarrow tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} \geq 4$, mâu thuẫn với (1)

Vậy $tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} - tg\frac{A}{2} - tg\frac{C}{2} \neq 0$: kết hợp với (2) ta có :

$$tg\frac{A}{2} - 1 = 0 \Rightarrow A = 90^o \text{ (đpcm).}$$

Cách 3. (của bạn *Nguyễn Văn Thích*, Ngũ Kiên, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**)



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, J, K là tâm các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các đỉnh B, C của tam giác ABC (xem hình), H, F, E lần lượt là hình chiếu của I, J, K trên BC.

Dễ thấy : $BF = CE (= p) \Rightarrow BE = CF$ (1)

Dễ thấy : $\Delta KEB \backsim \Delta BHI$; $\Delta JFC \backsim \Delta CHI$

Suy ra : $\frac{KE}{BH} = \frac{BE}{IH}$ (2); $\frac{JF}{CH} = \frac{CF}{IH}$ (3)

Từ (1), (2), (3) và theo tính chất của tỉ lệ thức ta có :

$$\frac{KE}{BH} = \frac{BE}{IH} = \frac{CF}{IH} = \frac{JF}{CH} = \frac{KE + JF - BE}{BH + CH - IH} =$$

$\frac{r_b + r_c - BE}{p - r - BE} = 1$ (vì theo giả thiết $r + r_b + r_c = p$

$\Rightarrow r_b + r_c = p - r$)

$\Rightarrow KE = BH \Rightarrow KB = IB \Rightarrow \Delta KBI$ vuông cân tại $B \Rightarrow \angle CIB = 135^o \Rightarrow \frac{A}{2} + 90^o = 135^o$

$\Rightarrow A = 90^o$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ. Rất nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên số bạn giải sai khá nhiều. Sai lầm cơ bản thể hiện ở quá trình suy luận sau :

- ΔABC vuông tại $A \Leftrightarrow r + r_b + r_c = r_a$ (1)
- $r + r_b + r_c = p \Rightarrow r_a = p$ (2)

Đẳng thức (1) là bài toán quen thuộc. Nhưng nếu chứng minh (2) mà lại dựa vào giả thiết $\hat{A} = 90^o$, thì chẳng đạt được mục đích mà ta mong muốn

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Hải Dương:** *Tô Minh Hoàng*, 11T, PTNK, Kinh Môn; **Tiền Giang:** *Lê Đình Giáp, Trương Nguyễn Minh Đoàn*, 10T, THPT chuyên; **Quảng Bình:** *Nguyễn Đức Anh, Lê Đức Anh, Lê Nguyên Hồng, Ngô Việt Dũng*, 10T, THPTNK Vĩnh Phúc; *Nguyễn Xuân Huy, Phùng Anh Đức, Bùi Việt Hải*, 10A1, THPT chuyên....

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/272. *Xét các tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ cùng ngoại tiếp một mặt cầu cho trước. Mỗi tiếp diện của mặt cầu, song song với một mặt của mỗi tứ diện này, cắt ra khỏi tứ diện đó một tứ diện nhỏ. Gọi v_i (i = 1, 2, 3, 4) là thể tích của tứ diện nhỏ có đỉnh A_i và V là thể tích của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Tính giá trị nhỏ nhất của $\frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_3}{V}$ và xác định dạng của những tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ như thế.*

Lời giải. Gọi r là bán kính mặt cầu $(\mathscr{C})$ đã cho, h_i là chiều cao của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ hạ từ đỉnh A_i xuống mặt đối diện $A_jA_kA_l$ (với $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$) và h'_i là chiều cao của tứ diện nhỏ $A_iA'_jA'_kA'_l$ hạ từ đỉnh A_i đến mặt đối diện $A'_jA'_kA'_l$. Vì $A'_jA'_kA'_l$ là tiếp diện của mặt cầu $(\mathscr{C})$ và song song với $A_jA_kA_l$ nên $d(A'_jA'_kA'_l, A_jA_kA_l) = 2r$ và do đó : $h'_i = h_i - 2r$, đồng thời $A_iA'_jA'_kA'_l \sim A_iA_jA_kA_l$ với tỉ số đồng dạng (ở đây là vị tự) $k_i = \frac{h'_i}{h_i} = 1 - \frac{2r}{h_i}$ (i = 1, 2, 3, 4) (1). Từ đó ta được :

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{v_i}{V} = \sum_{i=1}^{4}k_i^3 = \sum_{i=1}^{4}\left(1 - \frac{2r}{h_i}\right)^3 (2)$$

Mặt khác, ta có hệ thức :

$$k_1^3 + k_2^3 = (k_1+k_2)(k_1^2 - k_1k_2 + k_2^2)$$
$$= (k_1+k_2)[(k_1+k_2)^2 - 3k_1k_2]$$
$$= \frac{1}{4}(k_1 + k_2)[(k_1+k_2)^2 + 3(k_1-k_2)^2]$$

Từ đó suy ra BĐT sau (do k_1, k_2 đều dương) :

$$k_1^3 + k_2^3 \geq \frac{1}{4}(k_1 + k_2)^3 \quad \text{(a)}$$

Chứng minh tương tự,

$$k_3^3 + k_4^3 \geq \frac{1}{4}(k_3 + k_4)^3 \quad \text{(b)}$$

Từ hai BĐT (a) và (b) ta được BĐT sau :

$$\sum_{i=1}^{4} k_i^3 \geq \frac{1}{16}\Big(\sum_{i=1}^{4} k_i\Big)^3 \quad (3)$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi các BĐT (a), (b) và (3) đồng thời trở thành đẳng thức, nghĩa là $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$, và do đó theo (1) thì :

$h_1 = h_2 = h_3 = h_4$

$\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4$, trong đó $S_i = s(A_jA_kA_l)$ là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\sum_{i=1}^{4} \frac{v_i}{V}$ đạt được khi và chỉ khi các tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ (ngoại tiếp mặt cầu ($\mathscr{C}$) đã cho) thuộc vào lớp các tứ diện có diện tích các mặt bằng nhau và do đó, cả 4 mặt là những tam giác bằng nhau ($\Delta A_2A_3A_4 = \Delta A_1A_4A_3 = \Delta A_4A_1A_2 = \Delta A_3A_2A_1$), các cạnh đối diện bằng nhau ($A_2A_3 = A_4A_1$, $A_3A_1 = A_4A_2$, $A_1A_2 = A_4A_3$) tức là các *tứ diện gần đều*.

Mặt khác, lại có :

$$\sum_{i=1}^{4} k_i = \sum_{i=1}^{4}\Big(1 - \frac{2r}{h_i}\Big) = 4 - 2r\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i} = 4 - 2 = 2 \quad (4)$$

(vì $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i} = \frac{1}{r}$, hệ thức này dễ dàng được chứng minh bằng phương pháp thể tích).

Từ (2), (3) và (4) ta được $\min \sum_{i=1}^{4}\frac{v_i}{V} = \frac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất này đạt được khi và chỉ khi $A_1A_2A_3A_4$ là những tứ diện gần đều.

Nhận xét. 1) Để chứng minh BĐT (3) nhiều bạn đã sử dụng BĐT Côsi-Bunhiacôpski hai lần hoặc các BĐT khác phức tạp hơn lời giải đã nêu ra. BĐT này có ý nghĩa là : "Trung bình lập phương của nhiều số dương không nhỏ hơn lập phương của trung bình cộng của các số đó" :

$$\frac{1}{4}(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + a_4^3) \geq \Big(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\Big)^3$$

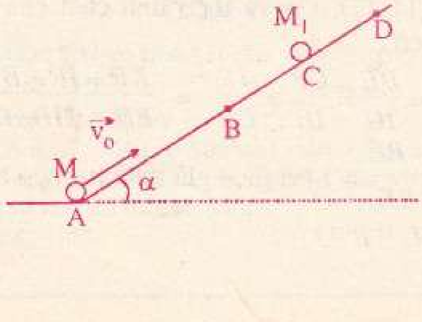
2) Khá nhiều bạn tính sai giá trị nhỏ nhất của $\sum_{i=1}^{4}\frac{v_i}{V}$ hoặc kết luận sai rằng những tứ diện $A_1A_2A_3\ A_4$ là đều !!!

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: *Nguyễn Tuấn Dương*, 10A, *Hoàng Tùng*, 12A, chuyên toán ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Tuấn Thiện*, 12A1, CT ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 10T, THPT Hà Nội - Amsterdam, *Nguyễn Hồng Phúc*, 11A2, THPT Nguyễn Tất Thành. **Hà Tây:** *Trần Ngọc Diệp*, 11T1, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hải Dương:** *Nguyễn Phương Thảo*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 10T, PTNK Trần Phú, *Trịnh Quang Hiếu*, 11A, *Nguyễn Phi Long*, 12A4, THPT Ngô Quyền; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Mạnh Tùng*, *Nguyễn Đức Tùng*, 11A3, *Đỗ Ngọc ánh*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Trần Trung Hiếu*, *Nguyễn Hoàng Trung*, 11A10, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Giang:** *Nguyễn Kim Cương*, 11T, THPT chuyên Hà Giang; **Thanh Hóa:** *Lưu Đức Thi*, 10T, THPT Lam Sơn; **Quảng Trị:** *Phan Quốc Hưng*, 10B, THPT Hải Lăng, *Trần Việt Anh*, 11T, *Hoàng Minh Phụng*, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Huế:** *Nguyễn Du Thái*, 11CT, ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** *Đặng Quang Huy*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Hải Viễn*, 11t, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 11T, *Trần Tuấn Anh*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/272. *Một vật M lăn từ chân của một mặt phẳng nghiêng lên phía trên với vận tốc ban đầu v_o. Điểm B ở trên mặt phẳng nghiêng cách A là 30cm. Điểm C ở chính giữa của điểm*



B và điểm cao nhất D mà vật M sẽ đạt được nếu không có va chạm. Tại điểm C người ta giữ một vật M_1 cùng khối lượng với vật M. Khi lăn đến C vật M va chạm xuyên tâm, đàn hồi với vật M_1 (khi bắt đầu va chạm vật M_1 coi là hoàn toàn tự do). Sau đó vật M đi xuống qua điểm B trước vật M_1 là 2s và qua điểm A trước vật M_1 là 1,9s. Tìm v_o và gia tốc của vật M. Bỏ qua ma sát.

Hướng dẫn giải. Trong quá trình chuyển động trên mặt phẳng nghiêng các vật M và M_1 chỉ chịu tác dụng của trọng lực và phản lực của mặt nghiêng; hai vật có cùng khối lượng và cùng gia tốc với độ lớn $a = g\sin\alpha$. Kí hiệu D là điểm cao nhất mà M đạt được nếu không có va chạm, ta có : $AD = \frac{v_o^2}{2a} = AB+2BC \Rightarrow v_o^2 = 2a(AB+2BC)$ (1). Kí hiệu v, v' lần lượt là các vận tốc của M trước và sau va chạm, v_1 là vận tốc của M_1 sau va chạm. Áp dụng các định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn cơ năng suy ra $v' = 0$; $v_1 = v$ (hai vật trao đổi vật tốc cho nhau).

Ta có : $v_o^2 - v^2 = 2a(AB+BC) \Rightarrow v = \sqrt{2a.BC}$ (chú ý đến (1)) (2). Thời gian vật M đi xuống qua B và A lần lượt là :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2BC}{a}}; \quad t'_1 = \sqrt{\frac{2(BC+AB)}{a}}$$

Sau va chạm vật M_1 đi lên được quãng đường là : $\frac{v^2}{2a} = BC$ (theo (2)), nghĩa là nó lên tới được điểm D, trong khoảng thời gian $t' = \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{2BC}{a}}$. Thời gian vật M_1 đi xuống qua B và A lần lượt là : $t_1 = t'+\sqrt{\frac{2(BC+AB)}{a}}$;

$$t'_2 = t' + \sqrt{\frac{2(2BC+AB)}{a}} \quad (3)$$

Theo đề bài ta có : $t_2 - t_1 = 2$ và $t'_2 - t'_1 = 1,9$ (4). Từ các phương trình đó tìm được : $BC \approx 0,46$m; $a = 0,46$m/s^2; $v_o \approx 1,07$m/s.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Thái Nguyên: *Vũ Quốc Việt*, Lí 10, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hà Nam:** *Trần Gia Phương*, 11 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Hà Tây:** *Nguyễn Minh Chính*, 11 Toán I, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Nội:** *Lê Cường*, B12A, chuyên Lí, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Ninh Bình:** *Dương Mạnh Toàn*, 11 Lí, THPT Lương Văn Tụy; **Hà Tĩnh:** *Trương Hữu Cát*, 12 Lí, THPT Năng khiếu Hà Tĩnh; **Đồng Tháp:** *Châu Hoàng Huy*, 11T, THCB thị xã Cao Lãnh; **Yên Bái:** *Hoàng Trọng Huy*, 11A2, THPT chuyên Yên Bái; **Đồng Nai:** *Nguyễn Kim Huy*, 10 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Nghệ An:** *Lưu Anh Tú*, 10A3, THPT Phan Bội Châu; **Thanh Hóa:** *Trần Trọng*, 11B, THPT Bỉm Sơn; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, THPT Gia Bình 1; **Vĩnh Phúc:** THPT chuyên Vĩnh Phúc : *Nguyễn Minh Kiên*, 10A1, *Dương Quốc Huy*, 10A3.

MAI ANH

Bài L2/272. *Một dây dẫn bằng đồng, tiết diện tròn được uốn thành một vòng tròn đường kính d = 40cm. Thả vòng rơi vào một từ trường. Mặt phẳng của vòng dây luôn luôn nằm ngang. Biết năng độ lớn của véctơ cảm ứng từ biến thiên với độ cao theo quy luật :* $|B| = B_o(1 + \alpha H)$ *(T), với* $B_o = 0,2T$, $\alpha = 0,8$. *Tìm vận tốc rơi đều của vòng. Bỏ qua sức cản của không khí.*

Hướng dẫn giải. Suất điện động cảm ứng xuất hiện trong vòng :

$$E_C = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \frac{\pi d^2}{4} B_o.\alpha . \frac{\Delta H}{\Delta t}.$$

Kí hiệu $v = \frac{\Delta H}{\Delta t}$ là vận tốc rơi đều của vòng, ta có : $E_C = \frac{\pi\alpha^2}{4} B_o\alpha v.$

Dòng điện chạy trong vòng :

$$I = \frac{E_C}{R} = \frac{\pi d^2 B_o\alpha v}{4R} \quad (1)$$

Khi vòng rơi đều, động năng của nó không thay đổi, độ biến thiên thế năng bằng nhiệt lượng tỏa ra của vòng : $mgh = I^2Rt$, với h là độ cao mà vòng rơi được trong thời gian t.

Vì $\frac{h}{t} = v$, nên $mgv = I^2R$. Thay biểu thức (1) của I vào rút ra $v = \frac{16mgR}{\pi^2 d^4 B_o^2\alpha^2} = \frac{16gD\rho}{d^2B_o^2\alpha^2}$, với D, ρ là khối lượng riêng và điện trở suất của đồng ($D = 8,9.10^3$kg/m^3, và $\rho = 1,7.10^{-8}\Omega$. m). Suy ra $v \approx 5,9$m/s.

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng :

Đồng Tháp: *Châu Hoàng Huy*, 11T, THCB thị xã Cao Lãnh; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 11, THPT Trần Cao Vân, Tam Kì; **Nghệ An:** *Đào Vinh Quang*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Vĩnh Phúc:** THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Ngọc Anh*, 10A3 và *Dương Trung Kiên*, 10A3.

MAI ANH

BẠN CÓ BIẾT

THUẬT TOÁN SLOWINSKY VÀ SỐ NGUYÊN TỐ MERSENNE

BÙI NGỌC HIỂN
(Bà Rịa – Vũng Tàu)

Trong quyển *Số học – Bà Chúa của Toán học* (Hoàng Chúng, NXB Giáo dục - 1997), tác giả có viết :

"... Với một số A rất lớn, việc xác định A có là số nguyên tố (SNT) hay không là vấn đề không đơn giản, vì phải thực hiện rất nhiều phép tính. Cho đến 1985, SNT lớn nhất mà người ta biết được là số $2^{132049} - 1$, gồm 39751 chữ số trong hệ ghi số thập phân... Gần đây, hai sinh viên Mĩ đã tìm ra một SNT lớn hơn nữa, đó là số $2^{216091} - 1$, gồm 65050 chữ số !...".

Như vậy, với cách thử quen thuộc và đơn giản nhất mà học sinh lớp 6 nào cũng biết, lần lượt tìm xem A có chia hết cho số nào trong các số nhỏ hơn A không, thì muốn tìm tất cả các SNT có ít hơn 20 chữ số, ngay với những máy siêu điện toán cũng phải mất hàng thế kỉ !

Vì thế, những *nhà săn tìm SNT*, trong đó có D. Slôuynxki (*David Slowinky*), thường giới hạn sự tìm kiếm của mình vào một nhóm số nào đó, thí dụ các *số* Mecxen (*Mersenne*), là những số có dạng $2^p - 1$, trong đó bản thân số p cũng là một SNT. Hai SNT lớn vừa kể trên đều có dạng này.

David Slowinsky là một nhà khoa học làm việc trên các máy siêu điện toán *Cray* – những máy vi tính do S. Cray *(Seymour Cray* : 1925-1996), kĩ sư điện tử người Mĩ thiết kế - tại phòng thí nghiệm *Harwell* của Viện Kĩ thuật AEA, Anh quốc. Slowinsky đã soạn một phần mềm kiểm tra tính nguyên tố của một số *Mersenne* với một thuật toán đơn giản như sau :

Với một số *Mersenne* $M = 2^p - 1$. Đầu tiên lấy $L = 4$; $S = L^2 \to S_2 = S-2 \to R \equiv S_2$ (mod$M$). Lấy $L = R<M$. Lặp lại quá trình sau $p-2$ lần, nếu $P = 0$, thì M là một SNT.

Thí dụ 1. $M = 2^5 - 1 = 31; p-2 = 5-2 = 3$.

1) $L = 4 \to S = 4^2 = 16 \to S_2 = 16 - 2 = 14 \to R \equiv 14$ (mod 31) lấy $R = 14$.

2) $L = 14 \to S = 14^2 = 196 \to S_2 = 196 - 2 = 194 \to R \equiv 194$ (mod31) lấy $R = 8$.

3) $L = 8 \to 8^2 = 64 \to S_2 = 64 - 2 = 62 \to R \equiv 62$ (mod31) lấy $R = 0$.

Vậy $M = 2^5 - 1 = 31$ là một SNT.

Thí dụ 2: $M = 2^7 - 1 = 127; p-2 = 7-2 = 5$.

1) $L = 4 \to S = 4^2 = 16 \to S_2 = 16 - 2 = 14 \to R \equiv 14$ (mod 127) lấy $R = 14$.

2) $L = 14 \to S = 14^2 = 196 \to S_2 = 196 - 2 = 194 \to R \equiv 194$ (mod 127) lấy $R = 67$.

3) $L = 67 \to S = 67^2 = 4489 \to S_2 = 4489 - 2 = 4487 \to R \equiv 4487$ (mod 127) lấy $R = 42$.

4) $L = 42 \to S = 42^2 = 1764 \to S_2 = 1764 - 2 = 1762 \to R \equiv 1762$ (mod 127) lấy $R = 111$.

5) $L = 111 \to S = 111^2 = 12321 \to S_2 = 12321 - 2 = 12319 \to R \equiv 12319$ (mod 127), lấy $R = 0$.

Vậy $M = 2^7 - 1 = 127$ là một SNT.

Đối với những số p lớn, thuật toán này nhanh hơn thuật toán phân tích ra thừa số rất nhiều lần. Tuy vậy, chương trình phải thực hiện những phép tính bình phương của những số có hàng trăm ngàn chữ số. *Slowinsky* đã tích hợp những *shortcut* về phép nhân để tăng tốc cho chương trình. Nhờ đó máy siêu điện toán *Cray* – 2 của ông đã chỉ mất 19 giờ để kiểm tra một con số lớn đến nỗi, theo *Slowinsky*, nếu tất cả các hạt vi mô của các nguyên tử trong toàn vũ trụ đều là những máy *Cray*, và đã làm việc từ khi có thời gian đến nay, chỉ dùng cách phân tích ra thừa số nguyên tố, thì vẫn còn chưa xong (!).

SNT mà *Slowinsky* tìm ra với thuật toán trên là số $\mathbf{2^{756839} - 1}$. Số này nếu viết trong hệ thập phân sẽ có tất cả **227832** chữ số – ở đây xin nhắc lại lưu ý của tác giả *Số học – Bà Chúa của Toán học* rằng *số một tỉ* cũng *mới có 10 chữ số* mà thôi; nên SNT mới này nếu viết ra (trong hệ thập phân) thì phải mất khoảng 30 trang văn bản bình thường.

(Theo A Broken Record của *Carl Zimmer*).

SAI LẦM Ở ĐÂU *(Tiếp trang 24)*

MỘT BÀI TOÁN – nhiều cuốn sách giải... sai !

Bài toán. *Đường tròn (O, r) nội tiếp trong tam giác ABC. Đường thẳng kẻ qua O cắt hai cạnh CA và CB tại M và N. Đường thẳng MN ở vị trí nào thì tam giác CMN có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải. (trong nhiều sách).

Đặt $S_{CMN} = S$. Ta có $S = \frac{1}{2}(CM+CN).r$.

Theo bất đẳng thức Côsi :

$$\frac{1}{2}(CM + CN) \geq \sqrt{CM.CN} \geq \sqrt{2S}$$

Do đó $S \geq r\sqrt{2S} \Leftrightarrow S^2 \geq 2S.r^2 \Leftrightarrow S \geq 2r^2$

Đẳng thức xảy ra khi $CM = CN \Rightarrow$ tam giác CMN cân tại C; mà CO là phân giác nên $CO \perp MN$, nghĩa là khi đường thẳng MN vuông góc với CO tại O thì diện tích tam giác CMN nhỏ nhất.

- Lời giải sai ở đâu ?
- Bạn có giải đúng được không ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp Hồ Chí Minh)

Trả lời bạn đọc

Hỏi: *Em đã nhìn thấy cuốn "Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ" của bạn em. Em rất muốn có cuốn sách này, vậy em phải tìm mua ở đâu ?*

Đặng Ngọc Quang (16, Ngô Quyền, Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc) và một số bạn

Đáp: Cuốn sách mà em đang mong đã phát hành đến 25.000 bản mà cũng chưa thỏa mãn yêu cầu của bạn đọc. Xin báo tin vui với em, cuốn sách đã in tái bản và sắp phát hành. Em có thể tìm mua ở các Công ty Sách và Thiết bị trường học thuộc Sở Giáo dục và Đào tạo. Các đơn vị, tập thể mua với số lượng nhiều sẽ được giảm giá theo quy định về phát hành phí.

Hỏi: *Trong một bài viết về phương trình lượng giác ở số tạp chí tháng 3 năm nay, có một đoạn biến đổi mà em nghĩ là nhầm lẫn :*

$\cos 2x(\sin^6 x-\cos^6 x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^2 x-\cos^2 x)(1+\sin^2 x\cos^2 x)$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$

Nguyễn Đức Cảnh (Đội I, Lê Hợp, Tam Đa, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Đáp: Dễ dàng có :

$\sin^6 x-\cos^6 x = (\sin^2 x-\cos^2 x)(1-\sin^2 x.\cos^2 x)$

Như vậy là tạp chí đã in nhầm dấu "–" thành dấu "+". Lưu ý : $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ thì sẽ thấy bước tiếp theo không có gì là khó hiểu. Cám ơn em.

Hỏi: *Thầy giáo và một số bạn lớp em cho rằng phương trình :*

$16^{\sin x} = \sqrt[\cos x]{4}$ *có nghiệm* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$,

còn em cho là vô nghiệm vì khi viết $\sqrt[\cos x]{4}$ *thì* $\cos x \geq 2$ *và không có x thỏa mãn. Mong Tòa soạn cho ý kiến.*

Lê Ngọc Hội (11B, THPT Hoằng Hóa II, Thanh Hóa)

Đáp: Trên tạp chí số 251 (5/1998) đã giải đáp một lần về việc này. Trong một số cuốn sách cũng từng bị sai lầm kiểu này. Lưu ý rằng khi viết $\sqrt[a]{b}$ thì a không những phải thỏa mãn $a \geq 2$ mà còn phải thuộc **N**. Em hoàn toàn đúng.

Nếu viết $16^{\sin x} = 4^{1/\cos x}$ thì phương trình có nghiệm như ở trên.

Hỏi: *Trong đề thi tuyển sinh vào Học viện Bưu chính Viễn thông có bài toán :*

Tính $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 dx}{1+2^x}$

Từ đáp án, ta có thể tính các tích phân dạng :

$J = \int_{-b}^{b} \frac{f(x)dx}{a^x+1}$ *với f(x) là hàm chẵn liên tục trên [-b; b] và* $0 < a \neq 1$. *Tòa soạn thấy thế nào ?*

Trần Quốc Quang (GV THPT Nghi Lộc 3, Nghệ An)

Đáp: Ý kiến của bạn hoàn toàn đúng. Trong đề số 4 của Bộ đề thi tuyển sinh môn Toán đã có đề cập tới lớp tích phân J mà bạn nêu ra :

$$\int_{-b}^{b} \frac{f(x)dx}{a^x+1} = \int_{0}^{b} f(x)dx$$

Đây cũng là gợi ý để các "nhà ra đề thi" có thể "sản xuất" nhiều bài thi tốt. Các bạn có thể tham khảo các đề thi sau :

1) Tính : $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$

(Đại học Y - phân hiệu Hải Phòng - 1998)

2) Tính : $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x.\sin 2x.\cos 5x}{e^x+1}$ (ĐHBK -1999)

Cám ơn sự phát hiện của bạn và lưu ý các bạn chuẩn bị thi Đại học.

Hỏi: *Bài toán : Giải phương trình* $\log_2(\log_2 x) = \log_3(\log_3 x)$ *đã có sách đặt mỗi vế là t và dẫn đến phương trình* $2^{2^t} = 3^{3^t} \Leftrightarrow 2^t = 3^t\log_2 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t = \log_2 3 \Leftrightarrow t = \log_{2/3}(\log_2 3)$.

Từ đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2^{2^{\log_{2/3}(\log_2 3)}}$.

Em làm cách khác gọn hơn : "Ta có $\log_2 x>0$ và $\log_3 x > 0$ nên $x > 1$. Khi đó : $\log_2 x > \log_3 x$ $\Rightarrow \log_2(\log_2 x) > \log_2(\log_3 x) > \log_3(\log_3 x)$. Suy ra phương trình vô nghiệm". Tại sao hai kết quả của hai lời giải lại khác nhau ? Em đã hỏi rất nhiều người mà chưa được trả lời, mong Tòa soạn cho ý kiến.

Võ Văn Hạnh, 11T, THPT Lê Viết Thuật, Vinh, Nghệ An)

Đáp: Em lưu ý với $x > 1$ thì $\log_2 x$, $\log_3 x > 0$ và từ $0 < \log_x 2 < \log_x 3$ suy ra $\log_2 x > \log_3 x$. Từ đó sẽ có $\log_2(\log_2 x) > \log_2(\log_3 x)$. Lời giải của em sai ở bước tiếp theo. Nếu $x>3$ tức là $\log_3 x > 1$ thì mới viết được $\log_2(\log_3 x) > \log_3(\log_3 x)$. Nếu $1<x<3$ thì $0 < \log_3 x < 1 \Rightarrow 0 > \log_{\log_3 x} 2 > \log_{\log_3 x} 3 \Rightarrow \log_2(\log_3 x) < \log_3(\log_3 x)$. Lời giải của em mới chỉ kết luận được $x>3$ không thỏa mãn phương trình. Lời giải trong sách đó là đúng.

N.T.L

GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Mùa hè đã sang và may mắn đã tới với ba bạn :

1) *Nguyễn Ngọc Quỳnh*, sinh năm 1981, lớp 12A4, THPT Ngô Quyền, Tp Hải Phòng.

2) *Nguyễn Thùy Dương*, sinh năm 1982, lớp 12A9, THPT Huỳnh Thúc Kháng, Tp Vinh, Nghệ An.

3) *Nguyễn Thị Thu Hà*, sinh năm 1982, xóm 5, Mai Xá, Đồng Lý, Lý Nhân, Hà Nam.

Xin gửi quà chúc mừng sinh nhật của ba bạn cùng sinh **ngày 5 tháng 7 !**

Có 5 bạn thích ngày sinh này cũng được nhận quà của Câu lạc bộ :

1) *Trương Nguyễn Minh Đoàn*, lớp 10, trường THPT chuyên tỉnh Tiền Giang.

2) *Đào Anh Minh*, lớp 9, trường Thực hành Cao đẳng Sư phạm, Uông Bí, Quảng Ninh.

3) *Nguyễn Trùng Thi*, lớp 9A, THCS Chi Thanh, Tuy An, Phú Yên.

4) *Nguyễn Giang Nam*, lớp 10T, THPT Lam Sơn, Tp Thanh Hóa.

5) *Nguyễn Thị Lệ Huyền*, lớp 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ.

Các bạn đã nghỉ hè cần gửi gấp địa chỉ gia đình để CLB chuyển quà được kịp thời.

Nào ! Chúng ta lại chờ tin vui trong số tạp chí tháng 7 nhé !

CLB

NHỮNG CON SỐ NÀO ĐÂY ?

Cứ tưởng bạn chỉ quen với ô chữ, ai ngờ ô số lần này cũng được các bạn hưởng ứng thật sôi nổi. Tất cả các bạn đều nói được ý nghĩa của các con số ở cột dọc, đó chính là 30.4.1975, ngày giải phóng hoàn toàn miền Nam, thống nhất đất nước.

	3	3	1	8	4	5	
1	7	0	7				
	1	4	4	1			
2	6	1	0	1	8	1	1
	1	9	8	1	6	6	2
1	4	7	3				
	1	5	4	0			

Điều thú vị là nhiều bạn nhầm ở hàng ngang nhưng cột dọc vẫn đúng. Hàng thứ sáu là hàng "gay go" nhất khi yêu cầu viết năm sinh của tác giả công trình "Về sự quay của các thiên thể". Nhiều bạn cho tác giả là Kaclơ Gauxơ, thực ra Gauxơ chỉ đưa các cách tính quỹ đạo của hành tinh nhỏ Xêrêra. Nhiều bạn cho tác giả là Giôhannơ Kêple, điều này cũng không đúng mặc dù ông là một nhà thiên văn học lớn.

Kết quả đúng về tác giả của công trình khoa học này là nhà bác học Côpécních (1473-1543). Một hàng mà cứ tưởng không ai nhầm, đó là hàng thứ 4, yêu cầu ghi ngày sinh của nhà toán học thiên tài Galoa. Các bạn ghi nhầm là 25.10.1811 mà lỗi truy ra (không hiểu có đúng không ?) lại tại cuốn "Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ" in nhầm (nhân đây cũng xin đính chính và xin lỗi bạn đọc). Kết quả đúng là ngày 26.10.1811.

Xin gửi tặng phẩm cho 4 bạn điền đúng 100% : *Đặng Thành Tuấn*, 10B Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; *Lê Quốc Phong*, 11E3, THCS Trần Phú I, Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc; *Nghiêm Xuân Hưng*, 10B1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; *Chu Ngọc Sơn*, 10S, THPT Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An;

C.L.B

Mất - Thừa hay Đủ ?

Tất cả các bạn đều thấy ngay là không thừa nghiệm vì dễ dàng thử được $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in Z)$ là nghiệm. Các bạn chia làm hai "phe", bên bảo "đủ", bên bảo "mất". Ai cũng thấy ngay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ là nghiệm, vậy thì "phe" bảo **mất** đã thắng. Nhưng tại sao lại **mất**? Các bạn để ý là lời giải đã sử dụng các công thức sau đây :

$$\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x};\ \sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x};\ \operatorname{cotg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$$

Cả ba công thức này đều chỉ được sử dụng khi tg$x$ tồn tại nghĩa là $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Vậy trước đó *cần bổ sung việc thử* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ *có là nghiệm hay không ?* Các bạn có ý kiến tốt và nhanh là : *Nguyễn Công Hoàng*, 12B4, THPT Tiên Du I, Bắc Ninh; *Nguyễn Thuận Đức*, 11A1, THPT Mạc Đĩnh Chi, Q6, Tp Hồ Chí Minh, *Bùi Thanh Danh*, khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Tuấn Hưng*, 11A1, THPT Chí Linh, Hải Dương; *Nguyễn Văn An*, 11A1, THPT Lạng Giang, Bắc Giang; *Lê Kim Chung*, lớp 11A1, khoa Toán, ĐH Hồng Đức; *Cao Xuân Vinh*, 11B, THPT Nghĩa Đàn, Nghệ An; *Trần Đức Nghĩa*, lớp 11, khối PTCT, ĐH Khoa học Huế; *Phạm Ngọc Tiến*, 8/7A Phù Đổng Thiên Vương, F8, Đà Lạt. Cảm ơn tất cả các bạn.

KIHIVI

Giải đáp bài

BÀI TOÁN CÂY THƯỚC NGẮN

• Để giải bài toán này ta dựa vào định lí Đờgiác (hình 1 và 2)

"Trên mặt phẳng, hai tam giác MNP và RSQ ở vị trí sao cho các đường thẳng nối các đỉnh tương ứng đồng quy thì 3 giao điểm của các cạnh tương ứng kéo dài sẽ thẳng hàng".

Các bạn có thể chứng minh định lí này dựa vào định lí Mênêlauyt.

• Từ giả thiết bài toán nhận xét rằng :

1. Từ một điểm tùy ý, ta có thể vẽ được một tia có độ dài tùy ý.

2. Giả sử hai điểm A và B cách nhau một khoảng có độ dài lớn hơn độ dài của thước vẽ. Bài toán giải quyết xong khi ta xác định được một điểm ở trong đoạn thẳng AB.

Cách 1. (h.1) Từ một điểm C (gần A, B) vẽ các tia Cd_1, Cd_2, Cd_3.

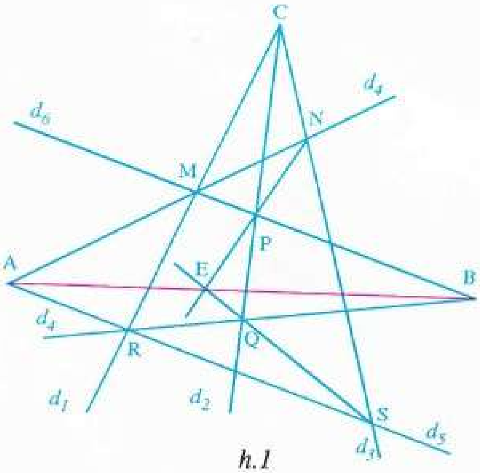
– Từ A vẽ tia Ad_4 cắt Cd_1 tại M, cắt Cd_3 tại N.

– Từ A vẽ tia Ad_5 cắt Cd_1 tại R, cắt Cd_3 tại S.

– Nối BM, cắt Cd_2 tại P.

– Nối BR, cắt Cd_2 tại Q.

– Nối QS và NP, chúng cắt nhau tại E. Nối AE và EB được đoạn thẳng AB đi qua E.



h.1

Cách 2. (h.2)

– Từ A vẽ hai tia Ad_1 và Ad_2.

– Từ B vẽ tia Bd_3 cắt Ad_1 tại M, cắt Ad_2 tại R.

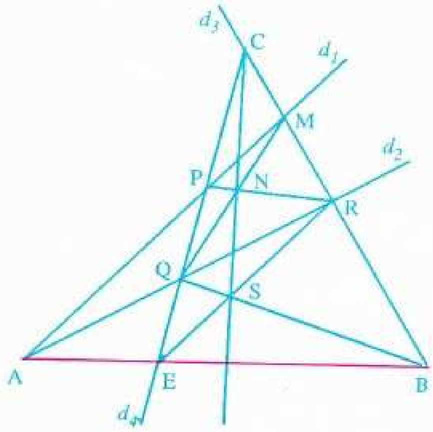
- Lấy C trên Bd_3 sao cho M, R nằm giữa B và C, vẽ tia Cd_4 cắt Ad_1 tại P, cắt Ad_2 tại Q.

– Nối RP và MQ, chúng cắt nhau tại N.

– Nối BQ, cắt tia CN tại S

– Nối RS, cắt Cd_4 tại E.

– Nối AE và EB được đoạn thẳng AB đi qua E.



h.2

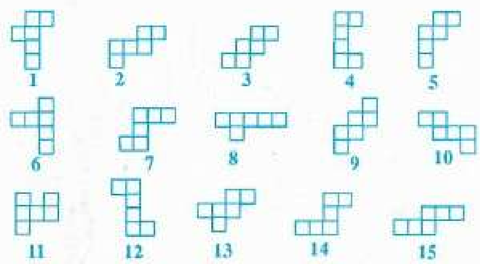
Chú ý. Trong các cách trên ta phải nối 2 điểm bằng cây thước ngắn nên cần chọn điểm C sao cho dùng cây thước ngắn có thể nối được các đoạn thẳng BM, BR... ở cách 1, các đoạn thẳng RP, MQ, ... ở cách 2. Nếu thước ngắn hơn các đoạn thẳng trên thì trở về bài toán ban đầu, ta lại phải thực hiện như cách giải.

Nhận xét. Các bạn sau đây có đáp án tốt : *Trần Quang Vũ*, 9B, THCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn, **Nghệ An**; *Trần Tuấn Anh*, 10A5, THPT Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**; *Phạm Văn Hoành*, 11/6, THPT Đỗ Đăng Tuyển, Đại Thắng, Đại Lộc, **Quảng Nam**.

BÌNH PHƯƠNG

HÌNH NÀO?

Các hình dưới đây đều gồm 6 hình vuông ghép lại. Những hình nào không phải là hình khai triển của một hình lập phương và còn những hình khai triển nào khác không ?



NGUYỄN VĂN THIÊM
(Viện KHGD)

THI VUI HÈ 2000

*Một mùa hè lại đến rồi. Chắc các bạn đang đón chờ cuộc thi Vui hè lần thứ ba trên THTT. Còn nếu bạn là người lần đầu tiên tham gia hẳn sẽ thấy đây là một trò chơi trí tuệ thật bổ ích. Bạn sẽ háo hức chờ để tìm thấy tên mình trong số những người được giải. Nào bạn hãy giải 3 bài dưới đây và 3 bài tiếp sẽ in trên tạp chí số 277 (7.2000). Mỗi bài viết riêng trên một tờ giấy. Góc trên bên phải ghi đầy đủ họ tên, địa chỉ và số điện thoại (nếu có). Bỏ 3 bài vào chung 1 phong bì và đề ngoài phong bì là **Dự thi Vui hè 2000**. Bài chỉ gửi về 1 địa chỉ :*

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
57 (cũ) Giảng Võ
Hà Nội

Thời hạn cuối cùng nhận bài giải đợt 1 là 30.7.2000, đợt 2 là 30.8.2000. Lời giải và danh sách các bạn đoạt giải sẽ công bố trên số 280 (10.2000). Chúc các bạn thành công và có một mùa hè lý thú.

THTT

ĐỀ ĐỢT I

Câu 1. Điền số hợp lí

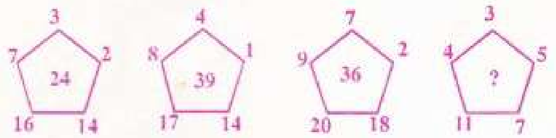
Hãy điền vào trong mỗi vòng tròn một chữ số sao cho các chữ số ở trong các vòng tròn đều khác nhau và hai phép tính sau đây là đúng :

○○ × ○ = ○○
○○ × ○ = ○○

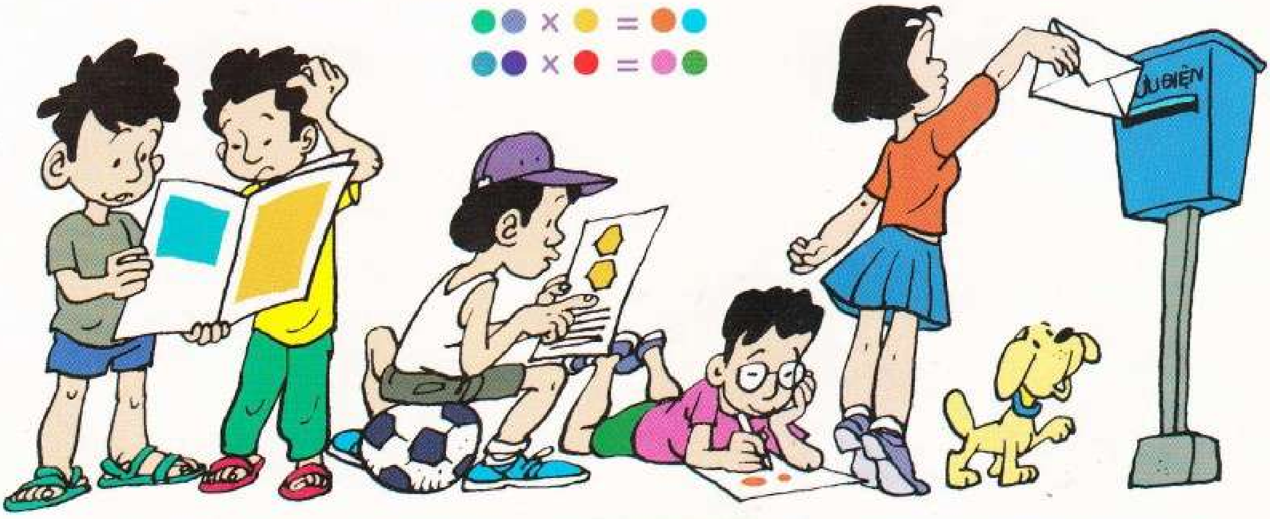
Câu 2. Gấp giấy

Có một mảnh giấy hình vuông. Chỉ dùng cách gấp giấy, hãy xác định 3 nếp gấp để tạo thành một tam giác đều có một đỉnh trùng với một đỉnh hình vuông, còn hai đỉnh kia nằm trên hai cạnh hình vuông không chứa đỉnh nói trên.

Câu 3. Thử tìm quy luật



Các số ghi ở những hình ngũ giác trên tuân theo một quy luật nào đây ? Bạn hãy chỉ ra quy luật và cho biết có thể thay dấu ? bởi số nào ?



ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT78M10
Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2000
Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng