TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

11 2016 Số 473

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 53
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

Chào mừng ngày Nhà giáo Việt Nam

TRƯỜNG THPT CHUYÊN CAO BẰNG
CÁI NÔI ƯƠM MẦM, NUÔI DƯỠNG VÀ PHÁT TRIỂN NHỮNG TÀI NĂNG TRONG SỰ NGHIỆP TRỒNG NGƯỜI

ThS. **Đinh Trọng Dũng**
Hiệu trưởng nhà trường

Hội đồng Giáo dục Trường THPT Chuyên Cao Bằng

Thành lập năm 1965, khởi đầu từ "*Lớp Toán đặc biệt*" đến nay là Trường THPT Chuyên Cao Bằng. Qua 50 năm xây dựng và trưởng thành, Trường tự hào là cái nôi ươm mầm, nuôi dưỡng, phát triển những tài năng của tỉnh Cao Bằng. Niềm tự hào và trách nhiệm luôn nhắc nhở thầy và trò nhà trường nỗ lực phấn đấu để ngày càng nâng cao chất lượng và hiệu quả giáo dục.

Trong những năm qua, Trường THPT Chuyên Cao Bằng đã tích cực đẩy mạnh phong trào thi đua "*Dạy tốt - học tốt*", khích lệ đông đảo cán bộ, giáo viên và học sinh toàn trường thực hiện. Đặc biệt Ban Giám hiệu đã chú trọng chỉ đạo và triển khai "*thực dạy, thực học*" đến từng cán bộ, giáo viên và học sinh, tạo chuyển biến tích cực trong công tác đổi mới quản lý và đổi mới phương pháp dạy học. Tập thể cán bộ, giáo viên nhà trường luôn quyết tâm giữ vững danh hiệu trường Tiên tiến Xuất sắc, giáo viên đều phấn đấu để "*Mỗi thầy giáo, cô giáo là một tấm gương đạo đức, tự học và sáng tạo*". Với đội ngũ giáo viên có kinh nghiệm trong giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi, nhà trường đã có những đóng góp to lớn vào Bảng vàng giáo dục tỉnh nhà. Bên cạnh đó, nhà trường đã chỉ đạo Đoàn TNCS Hồ Chí Minh phối hợp với các tổ chuyên môn và đội ngũ giáo viên chủ nhiệm tổ chức nhiều hoạt động tập thể bổ ích, lý thú, tạo ra những sân chơi lành mạnh như: các hoạt động ngoại khóa, hoạt động ngoài giờ lên lớp, các cuộc thi Olympic tiếng Anh, thi làm báo tường, thi tìm hiểu tư tưởng đạo đức Hồ Chí Minh, thi sáng tác thơ văn, văn nghệ, thi thể thao,... thu hút đông đảo học sinh tham gia. Để học sinh có một môi trường học tập tốt nhất nhà trường đã được xây mới một dãy phòng học chức năng với đầy đủ trang thiết bị phục vụ công tác dạy và học; Trường có nhà đa năng phục vụ cho công tác giảng dạy thể chất và các hoạt động tập thể, khu nội trú được thường xuyên tu sửa bảo đảm điều kiện ăn ở cho học sinh.

Những giải pháp trên đã tạo được sức mạnh đoàn kết của tập thể, đã nhận được được sự đồng thuận, giúp đỡ của Hội cha mẹ học sinh, góp phần nâng cao chất lượng giáo dục của Trường. Đặc biệt trong những năm gần đây tỷ lệ học sinh đỗ Đại học và đạt học sinh giỏi các cấp ngày càng tăng, được xã hội tin tưởng.

- *Về tỉ lệ đỗ đại học:* Hàng năm, tỷ lệ đỗ đại học đều đạt trên 90%, được xếp trong tốp 200 trường có điểm bình quân thi đại học cao nhất cả nước: *Năm học 2010 - 2011* đỗ 96,6%, đứng thứ 187 trong tổng số 200 trường; *năm học 2011 - 2012* đỗ 97,9% đứng thứ 138 trong top 150; *năm học 2014 - 2015* đỗ 98,6% đứng thứ 115 trong tốp 150 trường [illegible] danh có điểm bình quân thi Đại học cao nhất cả nước. *Đặc biệt trong kỳ thi THPT Quốc gia năm học 2015 - 2016*, nhà trường đã có nhiều học sinh đạt điểm cao nhất tỉnh ở các khối như *Nguyễn Thu Huyền* nhất khối A1: 28,38; *Hoàng Dương Thành* nhất khối B: 26,5 điểm; đặc biệt em *Nguyễn Thị Vân Khánh* lọt top thủ khoa khối D với 30,75 điểm; em *Lục Thị Thuỷ Tiên* lọt top thủ khoa khối C với 31,25 điểm,... Các em đã trở thành niềm tự hào của ngành giáo dục tỉnh nhà và là tấm gương sáng cho các em học sinh lớp dưới noi theo.

- *Về chất lượng HSG:* Nâng cao chất lượng học sinh giỏi là nhiệm vụ trọng tâm được nhà trường đặc biệt quan tâm. Với sự nỗ lực của thầy và trò nhà trường, chất lượng HSG qua các năm đều được nâng cao: *Năm học 2011- 2012*: trường có 4 học sinh đoạt giải Quốc gia, 4 học sinh đoạt giải Khu vực (trong đó có 1 giải Nhì, 3 giải Ba và 4 giải Khuyến khích); Trong kỳ thi Olympic các môn văn hóa của 16 trường THPT Chuyên khu vực trung du và miền núi phía Bắc, Trường đứng thứ nhì với 36 huy chương, trong đó có 9 huy chương Vàng, 22 huy chương Bạc và 5 huy chương Đồng, rải đều ở tất cả các môn (Toán, Lý, Hóa, Sinh, Văn, Ngoại Ngữ); *Năm học 2015-2016*: Trường có 10 học sinh đoạt giải Quốc gia, tháng 8 năm 2016 trong kỳ thi Olympic 8 môn văn hóa của của 21 trường THPT Chuyên khu vực trung du và miền núi phía Bắc tổ chức tại Trường THPT Chuyên Bắc Giang, Trường có 48 học sinh dự thi, đoạt 38 huy chương (trong đó có 2 huy chương Vàng, 6 huy chương Bạc và 30 huy chương Đồng).

Những thành tích trên đã khẳng định trường THPT Chuyên Cao Bằng xứng đáng là một trong những đơn vị điển hình trong phong trào thi đua "*Dạy tốt - học tốt*" của ngành Giáo dục và Đào tạo tỉnh Cao Bằng. Để góp phần thực hiện thắng lợi nhiệm vụ "*Đổi mới căn bản và toàn diện nền giáo dục Việt Nam*" theo tinh thần Nghị quyết Đại hội lần thứ XI của Đảng, trong những năm học tới, nhà trường sẽ tiếp tục phát huy những thành tích đã đạt được và quyết tâm thực hiện thắng lợi những mục tiêu đã đề ra.

KHAI THÁC SÂU THÊM

TỪ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC 9

HÀ VĂN NHÂN
(GV THCS Hoằng Xuân, Hoằng Hóa, Thanh Hóa)

Chúng ta bắt đầu từ một bài toán trong Sách giáo khoa:

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm của cung nhỏ BC. Trên MA lấy điểm D sao cho MD = MB.

a) *Tam giác MBD là tam giác gì ?*

b) *Chứng minh rằng* $\Delta BDA = \Delta BMC$.

c) *Chứng minh* $MA = MB + MC$.

(*Bài tập 20 – Sách bài tập Toán 9 - Tập II*).

Trong bài toán trên, nếu lấy kết quả " $MA = MB + MC$ " làm tiền đề cho việc khai thác các bài toán mới thì ta có các kết quả sau:

Bài 1. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định; M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Xác định vị trí của điểm M để:*

a) *Chu vi của* ΔMBC *đạt giá trị lớn nhất.*

b) *Tổng* $MA + MB + MC$ *đạt giá trị lớn nhất.*

Gợi ý. a) (h.1) Chu vi của ΔMBC đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MB + MC$ lớn nhất $\Leftrightarrow MA$ lớn nhất $\Leftrightarrow M$ là trung điểm của cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$.

b) Làm tương tự.

Hình 1

Nếu kết hợp với BĐT – Cauchy thì ta có kết quả:

$MA = MB + MC \geq 2\sqrt{MB.MC}$.

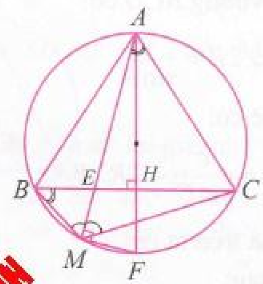
Đẳng thức xảy ra khi M nằm chính giữa cung nhỏ BC và khi đó MA cũng đạt giá trị lớn nhất. Từ đó ta có bài toán sau:

Bài 2. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R) cố định; M là một điểm thuộc cung nhỏ* $\overset{\frown}{BC}$. *Tìm giá trị lớn nhất của MA.MB.MC.*

Nếu gọi $E = MA \cap BC$ (h.2) thì:

$$\Delta BME \backsim \Delta AMC \Rightarrow \frac{MB}{ME} = \frac{MA}{MC} = \frac{MB+MC}{MC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{ME} = \frac{MB+MC}{MB.MC} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$$. Từ đó ta có:



Hình 2

Bài 3. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O); M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Các đoạn thẳng MA và BC cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:* $\frac{1}{ME} = \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$.

Gọi F là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{BC}$ (h.2) thì $AF \perp BC$ và $\widehat{AMF} = 90^0 \Rightarrow AM \leq AF, AE \geq AH$.

Do vậy $ME = AM - AE \leq AF - AH = FH$

$\Rightarrow \frac{1}{ME} \geq \frac{1}{FH}$ (không đổi).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv F$.

Từ đó ta có được bài toán như sau:

Bài 4. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O); M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Các đoạn thẳng MA và BC cắt nhau tại E. Xác định vị trí của M trên cung nhỏ BC để* $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Khi $M \equiv F$ thì $\frac{1}{MA}$ cũng đạt giá trị nhỏ nhất.

Từ đó lại có thêm bài toán như sau:

Bài 5. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O); M là một điểm thuộc cung nhỏ BC. Các đoạn thẳng MA và BC cắt nhau tại E. Xác định vị trí của M trên cung nhỏ BC để* $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lưu ý. Ta có kết quả sau (định lý sin trong tam giác): *Trong tam giác ABC có*

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \ (*)$$

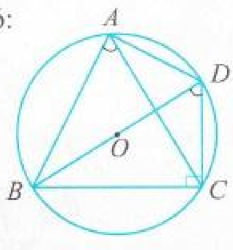
Chứng minh. (h.3). Vẽ đường kính BD của đường tròn (ABC) thì $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$.

Xét tam giác vuông BCD có:

$$BD=\frac{BC}{\sin D}\Rightarrow 2R=\frac{a}{\sin A}.$$

Tương tự ta sẽ có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$



Hình 3

Từ các kết quả trên ta có bài toán hay sau:

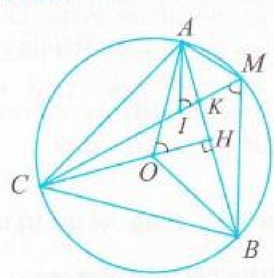
Bài 6. *Cho đường tròn (O; R) với dây cung AB cố định sao cho khoảng cách từ O tới AB bằng* $\frac{R}{2}$.

Gọi H là trung điểm của AB, tia HO cắt (O; R) tại C. Trên cung nhỏ AB lấy M tùy ý (khác A, B). Đường thẳng qua A và song song với MB cắt CM tại I. Dây cung CM cắt dây cung AB tại K.

a) So sánh góc $\widehat{AIM}$ *với góc* $\widehat{ACB}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{MA}+\frac{1}{MB}=\frac{1}{MK}$.

c) Gọi R_1, R_2 *lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp* ΔMAK *và* ΔMBK. *Hãy xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ* $\overset{\frown}{AB}$ *để tích* $R_1.R_2$ *đạt giá trị lớn nhất.*



Hình 4

Hướng dẫn. a) $OH=\frac{1}{2}R$, hãy nhận xét quan hệ giữa dây và số đo cung căng dây (số đo cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng 120^0).

b) (Cần chứng minh $\frac{MK}{MA}+\frac{MK}{MB}=1$).

Quy đồng mẫu số ở vế trái và chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng? ($\Delta MKA \backsim \Delta MBC$, $\Delta MKB \backsim \Delta MAC$).

c) Ta tìm mối liên hệ của tổng R_1+R_2 với các yếu tố không đổi của bài toán (dùng công thức $R=\frac{a}{2\sin A}$). Để ý hai tam giác AMK, BMK có hai góc $\widehat{AMK}$, $\widehat{BMK}$ không đổi ($=60^0$), tổng hai cạnh đối diện không đổi.

Lời giải sơ lược. (h.4)

a) Ta có $\cos\widehat{AOH}=\frac{OH}{OA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AOH}=60^0$

$\Rightarrow\widehat{AOB}=120^0\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AB}=120^0\Rightarrow\widehat{ACB}=60^0$.

Vậy ΔABC đều $\Rightarrow\widehat{ACB}=60^0$; $AI\,//\,MB$

$\Rightarrow\widehat{AIM}=\widehat{CMB}=\widehat{CAB}=60^0$. Vậy $\widehat{AIM}=\widehat{ACB}$.

b) Tam giác AIM đều $\Rightarrow AM=MI$.

$\Delta AIC=\Delta AMB$ (c.g.c) $\Rightarrow CI=MB$.

Mặt khác $\Delta MKA\backsim\Delta MBC\Rightarrow\frac{MK}{MA}=\frac{MB}{MC}$;

$\Delta MKB\backsim\Delta MAC\Rightarrow\frac{MK}{MB}=\frac{MA}{MC}$.

Vậy: $\frac{MK}{MA}+\frac{MK}{MB}=\frac{MB}{MC}+\frac{MA}{MC}=\frac{MB+MA}{MC}=1$.

c) Trong ΔAKM: $R_1=\frac{AK}{2\sin\widehat{AMK}}=\frac{AK}{2\sin 60^0}=\frac{AK}{\sqrt{3}}$.

Trong ΔBKM: $R_2=\frac{BK}{2\sin\widehat{BMK}}=\frac{BK}{2\sin 60^0}=\frac{BK}{\sqrt{3}}$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số không âm R_1, R_2 có: $\sqrt{R_1R_2}\le\frac{R_1+R_2}{2}=\frac{AK+BK}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}R}{2\sqrt{3}}=\frac{R}{2}$.

Vậy $\max R_1R_2=\frac{R^2}{4}$, khi M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{AB}$.

Rất mong các bạn tìm kiếm thêm những bài toán mới quanh bài toán xuất phát ban đầu (Bài toán 20 - Sách Bài tập Toán 9, Tập 2, NXBGD Việt Nam).

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh NĂM HỌC 2016 - 2017

(Đề thi đăng trên TH&TT số 472, tháng 10 năm 2016)

VÒNG I

Bài 1. Đẳng thức ở đầu bài tương đương với

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-4ab+b^2+2ab}{a+b}:\left(\left(\frac{(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\right)=2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{a+b}:\left[(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\right]=2016$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{a+b}:(a-b)^2=2016 \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}=2016$$

$\Leftrightarrow a+b=\dfrac{1}{2016}$. Vậy $S=\dfrac{1}{2016}$.

Bài 2. a) ĐK: $x\ge -5$. Ta có $x\sqrt{x+5}=2x^2-5x$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x+5}-2x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x+5}-2x+5)=0$.

Tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{0;4\}$.

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{y}+x-3=0 \text{ và } x^2+y=5 \quad (1)\\ y+\sqrt{x}=0 \text{ và } x^2+y=5 \quad (2)\end{array}\right.\\ x\ge 0 \text{ và } y\ge 0\end{cases}$$

• Từ (1) có $(3-\sqrt{y})^2+y=5 \Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}-2)=0$

$\Leftrightarrow y=1$ hoặc $y=4 \Rightarrow x=2$ hoặc $x=1$.

• Vì $x\ge 0, y\ge 0$ nên từ $y+\sqrt{x}=0$ có $x=y=0$ khi đó $x^2+y=0$ (vô lí). Vậy (2) vô nghiệm.

Nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là $(2; 1), (1; 4)$.

Bài 3. a) Tập nghiệm của PT là: $S=\{2\sqrt{3}+4\}$.

b) ĐK: $x>0$. Ta có $x+1>0, \sqrt{x}>0$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x^2+mx+2m+14=0$ (2)

(1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=m^2-8m-56>0\\ S=-m>0\\ P=2m+14>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-7<m<0\\ m^2-8m-56>0\end{cases} \quad (*)$$

Dùng định lý Viète và giả thiết, kết hợp với (*), tìm được $m=-5$.

Bài 4. a) Gọi chiều dài, chiều rộng của mặt hồ hình chữ nhật lần lượt là x (m), y (m) $(x>y>0)$, diện tích là xy (m^2). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}x-5=y+2\\ (x-5)(y+2)+20=xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=15\\ y=8\end{cases}$$

Diện tích mặt hồ hình chữ nhật là 15.8 = 120 (m^2). Gọi chiều rộng mảnh vườn là z (m) $(z>0)$, chiều dài mảnh vườn là $z.2,5=2,5z$ (m). Diện tích là $z.2,5z=2,5z^2$ (m^2). Ta có PT: $2,5z^2 . 3\%=120 \Leftrightarrow z=40$ (nhận).

Vậy chiều rộng mảnh vườn là 40 (m), chiều dài mảnh vườn là 2,5.40 = 100 (m).

b) Gọi số bạn nữ tặng 2 con hạc là x (bạn), số bạn nữ tặng 5 con hạc là y (bạn) $(x, y\in\mathbb{N})$.

Giả sử bạn X là nam, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=18\\ 2x+5y=3.26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=14\end{cases} \text{ (nhận).}$$

Giả sử bạn X là nữ, ta có hệ phương trình:

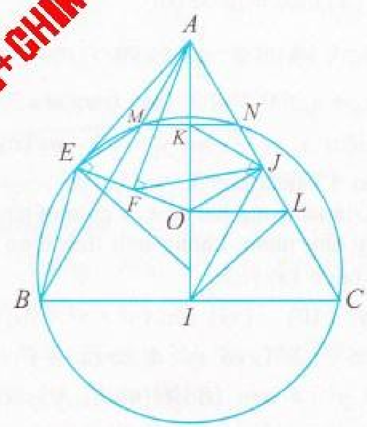
$$\begin{cases}x+y=17\\ 2x+5y=3.27\end{cases} \text{ (hệ không có nghiệm nguyên dương).}$$

Vậy bạn X là bạn nam.

Bài 5. a) Ta có ΔAMN đều $\Rightarrow \widehat{AMN}=\widehat{ACB}\ (=60^0)$

$\Rightarrow$ tứ giác $BMNC$ nội tiếp.

Ta có $S_{BMNC}=S_{ABC}-S_{AMN}=8\sqrt{3}a^2$.



b) Ta có A, K, O, I thẳng hàng và $OJ=OI$.

Ta có: $AO=\dfrac{2}{3}AI=2\sqrt{3}a,\ AK=\sqrt{3}a$.

Do đó $AK=OK=OI=\sqrt{3}a$.

Ta có: $OJ=OI=OK=\sqrt{3}a$, nên bán kính đường tròn (IJK) là $\sqrt{3}a$. Gọi L là trung điểm NC thì

$$OL=\frac{KN+IC}{2}=\frac{a+3a}{2}=2a=\frac{1}{2}NC.$$

Do đó O thuộc đường tròn tâm L đường kính NC. Mà $OL\,//\,IC,\ AI\perp BC \Rightarrow LO\perp AI \Rightarrow$ đpcm.

c) Ta có $\Delta AEM \backsim \Delta ABE$ (g.g) $\Rightarrow AE^2=AM.AB=$
$=2a.6a=12a^2 \Rightarrow AE=2\sqrt{3}a$

$\Rightarrow \Delta AEO$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AFO}=\widehat{AJO}=90^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $AFOJ$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFJ}=\widehat{AOJ}=60^0$.

VÒNG 2

Bài 1. a) • Khi $m=-3$ ta có hệ PT

$$\begin{cases}(x-2y)(x-3y)=12\\(y-2x)(y-3x)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5xy+6y^2=12\\y^2-5xy+6x^2=12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=0\\y^2-5xy+6x^2=12\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y \text{ và } y^2=6\\x=-y \text{ và } y^2=1\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ PT là

$$\left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right),\left(-\sqrt{6};-\sqrt{6}\right),(1;-1);(-1;1).$$

• Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(2m+1)(y^2-x^2)=0\\y^2+(m-2)xy-2mx^2=m^2-2m-3\end{cases}$$

+ Xét $m=-\frac{1}{2}$, ta có: $y^2-\frac{5}{2}xy+x^2=\frac{-7}{4}$ có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{5+\sqrt{2}}{2};2\right)$ thỏa mãn đề bài.

+ Xét $m\neq-\frac{1}{2}$, ta có: $y^2-x^2=0\Leftrightarrow x^2=y^2\Rightarrow x=y$.

Ta có: $-(m+1)y^2=m^2-2m-3$

$\Leftrightarrow-(m+1)y^2=(m+1)(m-3)$

- Xét $m=-1$, ta có: $(x-2y)(x-y)=0$ có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 1)$ thỏa mãn đề bài.

- Xét $m\neq-1$ và $m\neq-\frac{1}{2}$, ta có $y^2=3-m$. Để có nghiệm $x_0=y_0>0$ thì $3-m>0\Leftrightarrow m<3$. Khi đó PT có nghiệm $x_0=\sqrt{3-m}$, $y_0=\sqrt{3-m}$ với $m<3$.

b) Đáp số. $a=1$ hoặc $a=3$.

Bài 2. a) Giả sử trong hai số x, y có một số chẵn, do vai trò x, y như nhau, không mất tính tổng quát giả sử x chẵn, ta có $(xy)\,\vdots\,2$.

Mà $(x^2+y^2+10)\,\vdots\,(xy)$ nên $(x^2+y^2+10)\,\vdots\,2$

$\Rightarrow y^2\,\vdots\,2\Rightarrow y\,\vdots\,2$. Ta có $xy\,\vdots\,4$ $\Rightarrow(x^2+y^2+10)\,\vdots\,4$.

Mà $x^2\,\vdots\,4$, $y^2\,\vdots\,4$ nên $10\,\vdots\,4$ (vô lí). Vậy x, y là hai số lẻ.

Đặt d = ƯCLN (x, y). Ta có $x=da$, $y=db$, với $a, b, d\in\mathbb{N}^*$ và $(a, b)=1$. Ta có $(d^2a^2+d^2b^2+10)\,\vdots\,(d^2ab)$

$\Rightarrow(d^2a^2+d^2b^2+10)\,\vdots\,d^2\Rightarrow10\,\vdots\,d^2\Rightarrow d=1$ (đpcm).

b) Ta có $kxy=x^2+y^2+10$. Vì x, y lẻ nên

$(x+1)(x-1)\,\vdots\,4$, $(y+1)(y-1)\,\vdots\,4$

$\Rightarrow(x^2-1)\,\vdots\,4$ và $(y^2-1)\,\vdots\,4$.

Ta có $x^2+y^2+10=x^2-1+y^2-1+12$ chia hết cho 4, nên $kxy\,\vdots\,4$. Mà $(xy, 4)=1$ nên $k\,\vdots\,4$. Giả sử trong hai số x, y có một số chia hết cho 3; do vai trò x, y như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x\,\vdots\,3$.

Vì $(x^2+y^2+10)\,\vdots\,(xy)$ nên $(x^2+y^2+10)\,\vdots\,3$

$\Rightarrow(y^2+10)\,\vdots\,3\Rightarrow(y^2+1)\,\vdots\,3\Rightarrow y^2$ chia cho 3 dư 2 (vô lí). Vậy x, y là hai số không chia hết cho 3

$\Rightarrow(xy, 3)=1$; x^2 và y^2 chia cho 3 dư 1.

Do đó $(x^2+y^2+10)\,\vdots\,3$ nên $kxy\,\vdots\,3$.

Mà $(xy, 3)=1\Rightarrow k\,\vdots\,3$. Theo trên $k\,\vdots\,4$, $(3, 4)=1$,

$\Rightarrow k\,\vdots\,12$. Mà $k\in\mathbb{N}^*$, nên $k\geq12$.

Bài 3. a) Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$.

$\Rightarrow xy+yz+zx=-3$.

Ta có $S=(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2$

$=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=6+3=9$.

b) Đặt $a=x-y$, $b=y-z$. Ta có $P=ab(a+b)$, $a\geq0$, $b\geq0$ và $a^2+ab+b^2=9$.

Từ $(a+b)^2\leq(a+b)^2+\frac{1}{3}(a-b)^2$

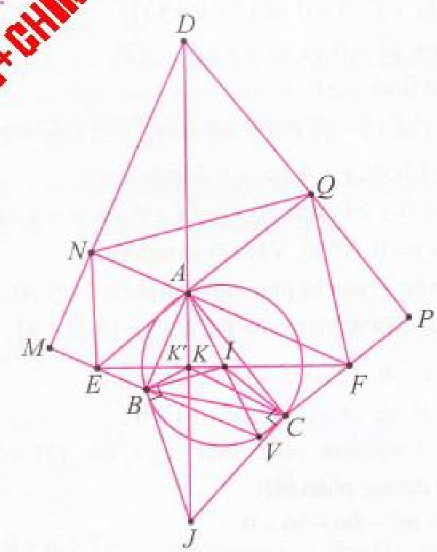
$=\frac{4}{3}(a^2+ab+b^2)=12\Rightarrow a+b\leq2\sqrt{3}$.

Ta có $P=ab(a+b)\leq\frac{1}{4}(a+b)^2.(a+b)$

$\leq\frac{1}{4}\left(2\sqrt{3}\right)^3=6\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$, $y=0$, $z=-\sqrt{3}$. Vậy $\max P=6\sqrt{3}$.

Bài 4.



a) Ta có $\widehat{EAN}=\widehat{FAQ}\Rightarrow\widehat{EAB}=\widehat{FAC}$

$\Rightarrow\Delta ABE\backsim\Delta ACF$ (g.g) $\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}\Rightarrow\frac{AN}{AQ}=\frac{AE}{AF}$

$\Rightarrow\Delta ANE\backsim\Delta AQF$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{ANE}=\widehat{AQF}$.

b) Gọi $V=MB\cap CP$; $\widehat{ABV}=\widehat{ACV}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $ABVC$ nội tiếp đường tròn đường kính AV. Tứ giác $AEVF$ là hình bình hành nên I là trung điểm của AV. Vậy I là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

c) Gọi $K'=DA\cap EF$.

Ta có $\widehat{NDK'}=\widehat{NQA}$ ($DNAQ$ nội tiếp),

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN TP. HỒ CHÍ MINH
NĂM HỌC 2016 - 2017

(Thời gian làm bài 150 phút)

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho hai số thực a, b sao cho $|a| \neq |b|$ và $ab \neq 0$ thỏa mãn điều kiện:
$\dfrac{a-b}{a^2+ab} + \dfrac{a+b}{a^2-ab} = \dfrac{3a-b}{a^2-b^2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a^3+2a^2b+3b^3}{2a^3+ab^2+b^3}$.

b) Cho m, n là các số nguyên dương sao cho $5m + n$ chia hết cho $5n + m$. Chứng minh rằng m chia hết cho n.

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2-6x+4+2\sqrt{2x-1}=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3=9(x+y) \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$.

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. Gọi K là hình chiếu của A trên A_1B_1; L là hình chiếu của B trên B_1C_1. Chứng minh rằng $A_1K = B_1L$.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng: $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y} - \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{1}{4}$.

Câu 5. (2 điểm)

Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có AC cắt BD tại E. Tia AD cắt tia BC tại F. Dựng hình bình hành $AEBG$.

a) Chứng minh: $FD.FG = FB.FE$.

b) Gọi H là điểm đối xứng của E qua AD. Chứng minh bốn điểm F, H, A, G cùng thuộc một đường tròn.

Câu 6. (1 điểm)

Nam cắt một tờ giấy ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng, rồi lấy một số miếng nhỏ đó cắt ra làm 4 miếng hoặc 8 miếng nhỏ hơn và *Nam* cứ tiếp tục thực hiện việc cắt như thế nhiều lần. Hỏi với việc cắt như vậy, *Nam* có thể cắt được 2016 miếng lớn, nhỏ hay không? Vì sao?

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lê Lợi, Quy Nhơn, Bình Định)

$\widehat{NQA} = \widehat{NFK'}$ ($EFQN$ nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{NDK'} = \widehat{NFK'}$ $\Rightarrow$ tứ giác $NDFK'$ nội tiếp. Mặt khác tứ giác $NDPF$ nội tiếp, do đó N,D,F,K',P cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow K'$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔDNP.

Tương tự K' thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔDMQ. Vậy $K' \equiv K$. Hay D, A, K thẳng hàng.

Ta có $\widehat{AKE} = \widehat{DQE} = 90^0$ (D,Q,K,E,N cùng thuộc một đường tròn). Do đó tứ giác $AKBE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EKB} = \widehat{EAB} = 90^0 - \widehat{BAC}$.

Tương tự $\widehat{FKC} = 90^0 - \widehat{BAC}$. Do đó
$\widehat{BKC} = 180^0 - (\widehat{EKB} + \widehat{FKC}) = 2\widehat{BAC} = \widehat{BIC}$
$\Rightarrow$ tứ giác $BKIC$ nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{JBI} = \widehat{JCI} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BICJ$ nội tiếp. Do đó B,K,I,C,J cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{IKJ} = \widehat{IBJ} = 90^0 \Rightarrow A,K,J$ thẳng hàng.

Vậy bốn điểm D,A,K,J thẳng hàng.

Bài 5. Ta có $s(n_i) < n_i \Rightarrow n_i - S(n_i) \geq 1$.

Do đó $n_{i+1} \geq 1 \quad \Rightarrow n_i \geq 1$ với mọi $i = 1,2,3,...$

Mà $n_{i+1} = n_i - s(n_i) < n_i$ với mọi i. Suy ra $n = n_0 > n_1 > n_2 > ... > ...$ Nếu $m > 1$ thì tồn tại $m' = m - s(m) \geq 1$.

Do đó nếu không tồn tại n_k để $n_k = 1$ thì dãy $n = n_0 > n_1 > n_2 > ... > 1$ vô hạn.

Với $n = 2^{16}.14^{17} = 2^{33}.7^{17}$, ta có
$n_1 = 2^{33}.7^{17} - 2^{32}.7^{17} = 2^{32}.7^{17}, n_2 = 2^{31}.7^{17}$.

Tiếp tục ta có $n_{33} = 7^{17}$. Đặt $m_0 = 7^{17}$ ta có
$m_1 = 6.7^{16}, m_2 = 3.7^{16}, m_3 = 2.7^{16}, m_4 = 7^{16}$.

Tương tự $m_8 = 7^{15}, ..., m_{68} = 7^0 = 1$.

Vậy $k = 33 + 68 = 101$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN (*TP. Hồ Chí Minh*)
Sưu tầm và giới thiệu

CHUẨN BỊ CHO KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG

LÊ HỒ QUÝ
PHẠM LÊ THÀNH ĐẠT
(GV THPT Lê Lợi, Kon Tum)

Trong những năm gần đây, mỗi đề thi vào Đại học, Cao đẳng thường có một câu liên quan đến phương trình (PT) đường tròn trong mặt phẳng. Nhằm giúp các bạn học sinh làm tốt phần này, bài viết này xin giới thiệu một số dạng toán cơ bản liên quan đến PT đường tròn và phương pháp giải chúng.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình đường tròn

1. Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R là $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

2. Phương trình dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ với điều kiện $a^2+b^2-c>0$ là PT của đường tròn tâm $I(-a;-b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

II. Điều kiện để đường thẳng tiếp xúc với đường tròn

Cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) tâm I, bán kính R. Khi đó Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. Viết phương trình đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Trong phần này, ta đi xét các bài toán viết PT đường tròn dựa vào vị trí tương đối của đường tròn với điểm, đường thẳng và đường tròn.

Cách giải. Ta có thể sử dụng một trong các cách sau

• Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ và bán kính R của đường tròn.

• Giả sử PT đường tròn có dạng

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

(hoặc $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$). Từ điều kiện cho trước dẫn đến hệ PT để tìm a,b,c (hoặc a,b,R).

★Thí dụ 1. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(2;-3), B(3;-2)$; trọng tâm G của ΔABC nằm trên đường thẳng $\Delta: 3x-y-8=0$ và diện tích của tam giác bằng $\frac{3}{2}$. Viết phương trình đường tròn (T) qua ba điểm A, B, C.*

Phân tích. Trước hết, ta tìm tọa độ điểm C: Từ giả thiết $G\in\Delta$, ta có thể viết tọa độ của G chỉ phụ thuộc một tham số x_G. Sử dụng công thức tính tọa độ trọng tâm của tam giác, ta tìm được tọa độ của C cũng chỉ phụ thuộc một tham số x_G. Viết PT đường thẳng AB. Tính $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)$, buộc diện tích này bằng $\frac{3}{2}$, tìm được x_G, từ đó suy ra được tọa độ của C.

Lời giải. Giả sử $G(x_G;3x_G-8)\in\Delta$, $C(x_C;y_C)$. Vì G là trọng tâm của ΔABC nên

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2+3+x_C}{3} \\ 3x_G-8=\dfrac{-3-2+y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C=3x_G-5 \\ y_C=9x_G-19 \end{cases}$$

$\Rightarrow C(3x_G-5;9x_G-19)$. PT $AB: x-y-5=0$. Ta có

$$\frac{3}{2}=S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C,AB)=\frac{|9-6x_G|}{2}$$

$\Leftrightarrow |3-2x_G|=1 \Leftrightarrow x_G=2$ hoặc $x_G=1$.

$\Rightarrow C(1;-1)$ hoặc $C(-2;-10)$.

Giả sử $(T): x^2+y^2+2ax+2by+c=0$. Do (T) đi qua A, B và $C(1;-1)$ nên

$$\begin{cases} 4+9+4a-6b+c=0 \\ 9+4+6a-4b+c=0 \\ 1+1+2a-2b+c=0. \end{cases}$$

Giải hệ trên được $a=-\frac{11}{6}$, $b=\frac{11}{6}$, $c=\frac{16}{3}$. Lúc đó

$$(T): x^2+y^2-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}y+\frac{16}{3}=0.$$

Tương tự, với $C(-2;-10)$ ta có

$$(T): x^2+y^2-\frac{91}{3}x+\frac{91}{3}y+\frac{416}{3}=0. \quad \square$$

★ Thí dụ 2 (Dự bị Khối A-2004). *Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1;1)$, gốc tọa độ $O(0;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-y+1-\sqrt{2}=0$.*

Phân tích. Vì (C) đi qua A, O, ta có $IA = IO = R$ (với $I\,(a;\,b)$ là tâm đường tròn cần tìm) và giả thiết còn lại giúp ta tìm được $R = d(I;\Delta)$.

Lời giải. Ta có $IA = IO = d(I;\Delta) = \dfrac{|a-b+1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IO \\ IO = d(I;\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1-a)^2+(1-b)^2 = a^2+b^2 \\ \sqrt{a^2+b^2} = \dfrac{|a-b+1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a=0, b=1$ hoặc $a=-1, b=0 \Rightarrow R=1$.

Vậy $(C): x^2+(y-1)^2=1$ hoặc $(C): (x+1)^2+y^2=1$. ❑

Nhận xét. Có thể giải theo cách khác như sau:

• Viết PT đường trung trực d của đoạn thẳng AO, khi đó tâm I của (C) sẽ thuộc d. Từ đó, ta tìm được tọa độ của I chỉ phụ thuộc một tham số x_I. Tìm x_I từ hệ thức $IA = d(I,\Delta)$, tìm được tọa độ của I và tính được IA.

• Viết PT đường tròn (C) có tâm I và bán kính IA.

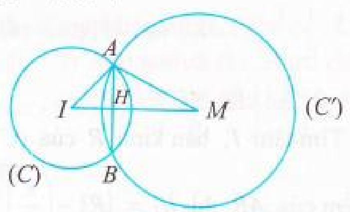
★ Thí dụ 3. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y+2=0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm $M(5;1)$ biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.*

Phân tích. • Tìm tâm I và bán kính R của (C).

• Viết PT đường thẳng IM. Tìm tọa độ trung điểm H của đoạn AB từ

$$\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

• Viết PT đường tròn (C') tâm M, bán kính $MA = \sqrt{MH^2+AH^2}$.



Lời giải. (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

PT $IM: 3x-4y-11=0$. Gọi $H(x;y)$ là trung điểm của AB. Ta có

$$\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2-AH^2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y-11=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = -\dfrac{29}{10} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} x = \dfrac{11}{5} \\ y = -\dfrac{11}{10}. \end{cases}$$

Suy ra $H\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{29}{10}\right)$ hoặc $H\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{11}{10}\right)$.

• Với $H\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{29}{10}\right)$, ta có $MA = \sqrt{MH^2+AH^2} = \sqrt{43}$.

Lúc đó $(C'): (x-5)^2+(y-1)^2 = 43$.

• Với $H\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{11}{10}\right)$, ta có $MA = \sqrt{MH^2+AH^2} = \sqrt{13}$.

Lúc đó $(C'): (x-5)^2+(y-1)^2 = 13$. ❑

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến và cát tuyến của đường tròn (C)

Bài toán 1. Viết PT tiếp tuyến với đường tròn $(I;R)$, biết

a) Tiếp điểm $M_0(x_0;y_0)$.

b) Tiếp tuyến đi qua $M_1(x_1;y_1)$ cho trước, M_1 nằm ngoài $(I;R)$.

c) Tiếp tuyến song song (hoặc vuông góc) với đường thẳng cho trước.

d) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng d cho trước một góc α $(0^0 < \alpha < 90^0)$ cho trước.

Cách giải

a) Viết PT đường thẳng vuông góc với IM_0 tại M_0.

b) Ta có thể sử dụng một trong các cách sau :

• Viết PT đường tròn (C') đường kính M_1I. Tìm các giao điểm A, B của (C') và (C). Viết PT các đường thẳng M_1A, M_1B.

• Hoặc giả sử $I(x_I;y_I)$ và $\Delta: ax+by+c=0$ (với điều kiện $a^2+b^2>0$) là tiếp tuyến cần tìm. Để tìm a, b, c ta cần giải hệ PT

$$\begin{cases} \dfrac{|ax_I+by_I+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = R \\ ax_1+by_1+c = 0. \end{cases}$$

c) Từ ĐK cho trước ta suy ra dạng PT đường thẳng, sau đó sử dụng ĐK tiếp xúc giữa đường thẳng và đường tròn.

d) Viết PT đường thẳng d' qua I và tạo với d một góc α. Viết PT đường thẳng $d_1 // d'$ và tiếp xúc với $(I;R)$.

★**Thí dụ 4.** *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y-8=0$ và đường thẳng $\ell: 2x-y-2=0$. Viết PT tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đó tạo với ℓ một góc 45^0.*

Phân tích. • Tìm tâm I, bán kính R của (C).

• Giả sử $\Delta: ax+by+c=0$ (với $a^2+b^2>0$) là tiếp tuyến cần tìm. Tìm các hệ số a,b,c của Δ từ hệ ĐK

$$\begin{cases} d(I,\Delta)=R \\ \cos(\ell,\Delta)=\cos 45^0. \end{cases}$$

Lời giải. (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Giả sử $\Delta: ax+by+c=0$ $(a^2+b^2>0)$ là tiếp tuyến cần tìm. Từ giả thiết, ta có : $\begin{cases} d(I,\Delta)=\sqrt{10} \\ \cos(\ell,\Delta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3, b=1, c=6 \text{ (hoặc } c=-14) \\ a=1, b=-3, c=-8 \text{ (hoặc } c=12). \end{cases}$$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm là: $3x+y+6=0$, $3x+y-14=0$, $x-3y-8=0$ và $x-3y+12=0$. ❑

Bài toán 2. Viết PT tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(I_1;R_1)$ và $(I_2;R_2)$.

Cách giải. Ta có thể sử dụng một trong các cách sau

• Giả sử $\Delta: ax+by+c=0$ $(a^2+b^2>0)$ là tiếp tuyến chung của $(I_1;R_1)$ và $(I_2;R_2)$. Khi đó $\begin{cases} d(I_1,\Delta)=R_1 \\ d(I_2,\Delta)=R_2 \end{cases}$. ĐK này dẫn đến hệ tìm a,b,c.

• Viết PT đường thẳng Δ tiếp xúc với $(I_1;R_1)$ tại $M_0(x_0;y_0)\in(I_1;R_1)$ (với ẩn x_0,y_0). Từ ĐK Δ tiếp xúc với $(I_2;R_2)$, ta suy ra x_0,y_0, tìm được PT của Δ.

★**Thí dụ 5.** *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ và $(C_2): x^2+y^2+2x-2y-14=0$. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).*

Phân tích. • Tìm tâm I_1, bán kính R_1 của (C_1); tâm I_2, bán kính R_2 của (C_2).

• Giả sử $\Delta: ax-y+b=0$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2). Tìm các hệ số a,b,c của Δ từ hệ điều kiện $\begin{cases} d(I_1;\Delta)=R_1 \\ d(I_2;\Delta)=R_2. \end{cases}$

Lời giải. Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;-2)$ và bán kính $R_1=3$; đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kính $R_2=4$. Xét đường thẳng Δ có dạng: $ax-y+b=0$. Để Δ là tiếp chung của hai đường tròn thì

$$\begin{cases} d(I_1;\Delta)=R_1 \\ d(I_2;\Delta)=R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|a+2+b|}{\sqrt{a^2+1}}=3 \\ \dfrac{|-a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a;b)=\left(\frac{-6+2\sqrt{3}}{3}; b=\frac{9-14\sqrt{3}}{3}\right) \text{ hoặc}$$

$$(a;b)=\left(\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}; b=\frac{9+14\sqrt{3}}{3}\right).$$

Vậy có hai tiếp tuyến chung cần tìm là

$$\Delta: (-6+2\sqrt{3})x-3y+9-14\sqrt{3}=0$$

và $\Delta: (-6-2\sqrt{3})x-3y+9+14\sqrt{3}=0$. ❑

Nhận xét. Đối với cách giải trên, ta xét PT của Δ dạng $ax-y+b=0$ là đã xem đường thẳng này có hệ số góc bằng a, nhưng trong thực tế giải toán vẫn có thể tồn tại đường thẳng dạng $x=x_0$ là tiếp tuyến chung của hai đường tròn nữa. Vì vậy, sau khi làm xong cần kiểm tra xem có đủ tiếp tuyến chung hay chưa, nếu chưa đủ ta phải xét thêm trường hợp tiếp tuyến Δ có PT dạng $x=x_0$.

Lưu ý. Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2).

• Nếu (C_1) và (C_2) chứa trong nhau $\left(I_1I_2<|R_1-R_2|\right)$ thì số tiếp tuyến chung là 0.

• Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong $\left(I_1I_2=|R_1-R_2|\right)$ thì số tiếp tuyến chung là 1.

• Nếu (C_1) và (C_2) cắt nhau $\left(|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2\right)$ thì số tiếp tuyến chung là 2.

• Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài $(I_1I_2=R_1+R_2)$ thì số tiếp tuyến chung là 3.

• Nếu (C_1) và (C_2) ở ngoài nhau $(I_1I_2>R_1+R_2)$ thì số tiếp tuyến chung là 4.

Bài toán 3. Viết PT đường thẳng Δ đi qua một điểm M cho trước, cắt đường tròn (C) cho trước tại hai điểm A,B sao cho $AB=k$ $(k>0)$.

Cách giải. Tìm tâm I, bán kính R của (C). Gọi H là trung điểm của AB thì $IH=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{k}{2}\right)^2}$.

Giả sử $\Delta: ax+by+c=0$ $(a^2+b^2>0)$ là đường thẳng cần tìm. Từ các điều kiện $M\in\Delta$ và $d(I,\Delta)=IH$ ta tìm được a,b,c.

★**Thí dụ 6.** *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x-2y-8=0$ và điểm $M(9;6)$. Viết PT đường thẳng cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB=4\sqrt{5}$.*

Lời giải. (C) có tâm $I(4;1)$, bán kính $R=5$. Gọi H là trung điểm của AB thì $IH=\sqrt{5}$.

Giả sử $\Delta: ax+by+c=0\ (a^2+b^2>0)$ là đường thẳng cần tìm. Vì $M\in\Delta$ nên $c=-9a-6b$

$\Rightarrow \Delta: ax+by-9a-6b=0$. Ta có $d(I,\Delta)=IH$

$$\Leftrightarrow \frac{5|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow 4a^2+10ab+4b^2=0.$$

Do $a^2+b^2>0$ nên nếu chọn $b=-1$ thì $a=2$ hoặc $a=\frac{1}{2}$. Vậy có hai đường thẳng cần tìm, với PT là $2x-y-12=0;\ x-2y+3=0$. ❑

Dạng 3. Tìm điểm thuộc đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Cách giải. • Nếu giả thiết có điều kiện về góc thì dùng hệ thức lượng trong tam giác.

• Nếu điểm cần tìm trên đường tròn nằm trên một đường (T) khác thì ta giải hệ PT, tìm giao điểm của đường tròn và (T).

★**Thí dụ 7.** *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-2)^2+y^2=4$. Gọi I là tâm của (C). Xác định tọa độ điểm M có tung độ dương thuộc (C) sao cho diện tích tam giác OIM bằng $\sqrt{3}$ (O là gốc tọa độ).*

Phân tích. • Tìm tâm I của (C), suy ra OI, PT của đường thẳng OI.

• Tìm tọa độ $(x;y)$ của điểm M từ hệ điều kiện

$$M\in(C),\ S_{OIM}=\frac{1}{2}OI.d(M,OI)=\sqrt{3} \text{ và } y>0.$$

Lời giải. (C) có tâm $I(2;0)$. $OI=2$, PT $OI: y=0$. Giả sử $M(x;y)$, với $y>0$ là điểm cần tìm.

Ta có $d(M,OI)=|y|=y;\ \sqrt{3}=S_{OIM}=\frac{1}{2}OI.d(M,OI)$ $=\frac{1}{2}.2.y=y$. $M\in(C)$ nên có tọa độ thỏa mãn

$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$. Vậy $M(3;\sqrt{3})$ hoặc $M(1;\sqrt{3})$. ❑

★**Thí dụ 8 (Khối A-2011).** *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+y+2=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết $S_{MAIB}=10$.*

Phân tích. $\widehat{MAI}=\widehat{MBI}=90^0$ và $MA=MB$ nên $S_{MAIB}=2S_{MIB}=MB.IB$. Tính được MI, ngoài ra $M\in\Delta$ nên M có thể tìm được bằng cách tìm giao điểm của Δ và đường tròn tâm I, bán kính IM.

Lời giải. (C) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=IB=\sqrt{5}$.

Ta có $S_{MIB}=\frac{1}{2}S_{MAIB}=5$, hay $MB.IB=10 \Leftrightarrow MB=2\sqrt{5}$ $\Rightarrow MI=5$. Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x+y+2=0\\ (x-2)^2+(y-1)^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3;y=1\\ x=2;y=-4.\end{array}\right.$$

Vậy $M(-3;1)$ hoặc $M(2;-4)$. ❑

Nhận xét. Có thể giải theo cách khác như sau:

• Tìm tâm I, bán kính R của (C).

• Từ $S_{MAIB}=IA.MA=10$, tính được MA, IM.

• Do $M\in\Delta$ nên ta có thể viết được tọa độ của M chỉ phụ thuộc một tham số t. Kết hợp với kết quả của việc tính IM ở trên, ta suy ra được giá trị t.

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết PT đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến B bằng 5 **(Khối B-2005)**.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết PT đường tròn (C) **(Khối A-2013)**.

3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$, $(C_2): x^2+y^2-12x+18=0$ và đường thẳng $d: x-y-4=0$. Viết PT đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $AB\perp d$ **(Khối B-2012)**.

4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(3;-7), B(9;-5)$ và $C(-5;9)$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-2;-7)$.

5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-6y+9=0$ và đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$. Tìm điểm M thuộc (C) và điểm N thuộc d sao cho đoạn MN có độ dài nhỏ nhất.

6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y=0$ và đường thẳng $d: x-y+1=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d mà qua đó kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A và B sao cho $\widehat{AMB}=60^0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 2

Câu 1. a) Bạn đọc tự giải.

b) Kết quả: $y=-9x+17$.

Câu 2. a) $12\sin^2\alpha-\cos\alpha-6=0$

$\Leftrightarrow 12\cos^2\alpha+\cos\alpha-6=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3}\ (\text{vì } -\frac{\pi}{2}<\alpha<0)\Rightarrow \sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do đó $A=\frac{3\left(5-3\sqrt{5}\right)}{20}$.

b) Đặt $z=a+bi$. Ta có:

$(1-i)\bar{z}+(2+i)z=5-4i$

$\Leftrightarrow 3a-2b+bi=5-4i\Rightarrow z=-1-4i, iz=4-i$.

Vậy $|iz|=\sqrt{17}$.

Câu 3. Ta có: $9^x\geq 3^{x+1}-2\Leftrightarrow (3^x)^2-3.3^x+2\geq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x\leq 1\\3^x\geq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq 0\\x\geq \log_3 2\end{array}\right.$

Câu 4. Ta có $n(\Omega)=10^5$.

Gọi A là biến cố: " *Vé của An trúng giải Ba*".

Có C_5^3 cách chọn vị trí cho ba chữ số đúng, hai chữ số còn lại phải sai nên có 81 khả năng. Vậy

$n(A)=81C_5^3=810\Rightarrow P(A)=\frac{81}{10000}$.

Câu 5. $I=\int_0^1\left[3x^2+\ln(x+1)\right]dx$

$=x^3\Big|_0^1+\int_0^1\ln(x+1)dx$

$=1+x\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$

$=1+\ln 2-x\Big|_0^1+\ln|x+1|\Big|_0^1=2\ln 2$.

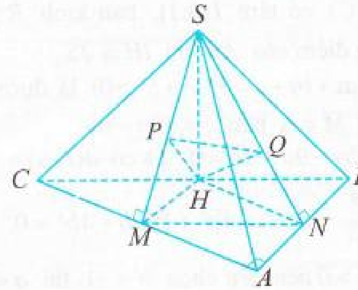
Câu 6. • Gọi H là trung điểm của BC thì

$SH\perp(ABC), SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{3}$.

Kẻ $AI\perp BC$ thì $AI\perp(SBC)$, do đó

$\widehat{\left(AC,(SBC)\right)}=\widehat{(AC,BC)}=\widehat{ACB}=30^0$.

Suy ra $AB=a, AC=a\sqrt{3}$. $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{a^3}{2}$.



• Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB. P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên SM, SN. Dễ thấy $HP\perp(SAC), HQ\perp(SAB)$

$\Rightarrow\cos\left(\widehat{(SAC),(SAB)}\right)=\cos\left(\widehat{HP,HQ}\right)$

$SN=\frac{a\sqrt{15}}{2}, SP=\frac{SH^2}{SM}=\frac{6a}{\sqrt{13}}, HP=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$,

$HQ=\frac{a\sqrt{[illegible]}}{[illegible]}$. Mặt khác: $SH^2=SP.SM=SQ.SN$

$\frac{[illegible]}{SN}=\frac{SQ}{SM}\Rightarrow\Delta SPQ\backsim\Delta SNM$.

Suy ra $PQ=MN.\frac{SP}{SN}=\frac{12a}{\sqrt{195}}$.

$\cos\widehat{PHQ}=\frac{\sqrt{65}}{65}\Rightarrow\cos\left(\widehat{(SAC),(SAB)}\right)=\frac{\sqrt{65}}{65}$.

Câu 7. +) $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-6;3;-6)$, suy ra PT mặt phẳng (ABC): $2x-y+2z-3=0$.

+) $G(1;-1;0)$, tâm I của mặt cầu thuộc đường thẳng Δ đi qua G và vuông góc với (ABC),

PT Δ: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1-t\\z=2t\end{cases}$.

Suy ra $I(1+2t;-1-t;2t), IG=6\Leftrightarrow t=\pm 2$.

• Với $t=2$, mặt cầu cần tìm có PT:

$$(x-5)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=36.$$

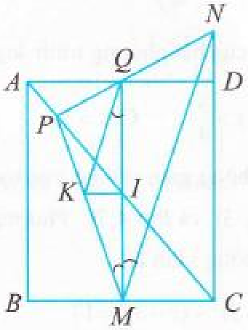
• Với $t=-2$, mặt cầu cần tìm có PT:

$$(x+3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=36.$$

Câu 8. Gọi Q là trung điểm của AD. Kẻ $IK \perp MQ$, ta có ΔKMQ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KMQ} = \widehat{KQM}$.

Do $KI \,//\, MC$ và $IQ \,//\, CN$ nên:

$$\frac{PK}{KM} = \frac{PI}{IC} = \frac{PQ}{QN} \Rightarrow KQ//MN \Rightarrow \widehat{KQM} = \widehat{NMQ}.$$



Suy ra MQ là phân giác của $\widehat{PMN}$. Do đó:

$$\frac{PQ}{QN} = \frac{MP}{MN} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{PN} \Rightarrow Q(1;4).$$

Từ đó AD: $x - y + 3 = 0$; CD: $x + y - 9 = 0$ $\Rightarrow D(3;6)$. Q là trung điểm AD nên $A(-1; 2)$.

Do I là trung điểm của MQ, AC, BD nên:

$$I(4; 1), C(9; 0), B(5; -4).$$

Câu 9.

$$\begin{cases} xy - 3x - y + 4 = 0 & (1) \\ \dfrac{(y^3 - y^2 - 8x)(5y - xy)}{(\sqrt{x-1}+2)(x^4 + x^3 + 8)} = \sqrt{x-1} - 2 & (2) \end{cases}$$

ĐK: $x \geq 1$, $x = 1$ không thỏa mãn (1), nên $x > 1$.

$$(2) \Leftrightarrow (y^3 - y^2 - 8x)y(5 - x) = (x-5)(x^4 + x^3 + 8)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ y^3 - x^3 = x^4 + y^4 - 8xy + 8 \quad (3) \end{array}\right.$$

• Với $x = 5 \Rightarrow y = \dfrac{11}{4}$. Ta có $\left(5; \dfrac{11}{4}\right)$ là một nghiệm của hệ đã cho

• Với $1 < x \neq 5$, ta có

$$(3) \Leftrightarrow y^3 - x^3 = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 2)^2 \quad (4)$$

Suy ra $y^3 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq y$. Mặt khác $1 < x \neq 5$

nên $(1) \Leftrightarrow y = \dfrac{3x-4}{x-1} \Rightarrow x \leq \dfrac{3x-4}{x-1} \Leftrightarrow x(x-1) \leq 3x - 4$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2.$$

Nhưng $(x;y) = (2;2)$ không thỏa mãn (4).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(5; \dfrac{11}{4}\right)$.

Câu 10.

$$P = \frac{\dfrac{(a-1)(c-2)}{b^2}}{1 + \dfrac{c-2}{b}} + \frac{1}{\dfrac{(a-1)(c-2)}{b^2} + \dfrac{c-2}{b}} + \frac{\dfrac{c-2}{b}}{\dfrac{a-1}{b} + \dfrac{c-2}{b}}$$

Đặt $x = \dfrac{a-1}{b}; y = \dfrac{c-2}{b} \Rightarrow x \geq y > 0$.

Ta có $P = \dfrac{xy}{1+y} + \dfrac{1}{xy+y} + \dfrac{y}{x+y}$.

Đặt $Q = \dfrac{xy}{1+x} + \dfrac{1}{xy+x} + \dfrac{x}{x+y}$. Khi đó

$$P + Q = \frac{x^3y^2 + x^2y^3 + 2x^2y^2 + 2xy + x + y}{xy(1+x)(1+y)} + 1$$

$$\geq \frac{2x^2y + 2xy^2 + 2x^2y^2 + 2xy}{xy(1+x)(1+y)} + 1 = 3.$$

Suy ra $P + Q \geq 3$ (1)

$$P - Q = xy\left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{xy+y} - \frac{1}{xy+x} + \frac{y-x}{x+y}$$

$$= \frac{x-y}{xy(x+1)(y+1)(x+y)} \times$$

$$(x^3y^2 + x^2y^3 + x + y - x^2y^2 - x^2y - xy^2 - xy).$$

Ta chứng minh:

$x^3y^2 + x^2y^3 + x + y \geq x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy$ (2).

Thật vậy (2) $\Leftrightarrow 2x^3y^2 + 2x^2y^3 + 2x + 2y + xy$
$\geq 2x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 3xy$ (3)

Ta có $x^3y^2 + x^2y^3 + xy \geq 3x^2y^2$;

$x^3y^2 + x \geq 2x^2y$; $x^2y^3 + y \geq 2xy^2$ (BĐT Cauchy)

Suy ra: VT(3) $\geq 3x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + x + y$
$= 2x^2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + x^2y^2 + x + y \geq$ VP(3).

Vì $x^2y^2 + x + y \geq 3xy$; $x - y \geq 0 \Rightarrow P - Q \geq 0$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra $2P \geq 3 \Leftrightarrow P \geq \dfrac{3}{2}$.

Vậy $\min P = \dfrac{3}{2}$ khi $x = y = 1 \Leftrightarrow a - 1 = b = c - 2 > 0$.

BÙI ANH DŨNG
(GV THPT Hạ Hòa, Phú Thọ)

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 3 *(Thời gian làm bài: 90 phút)*

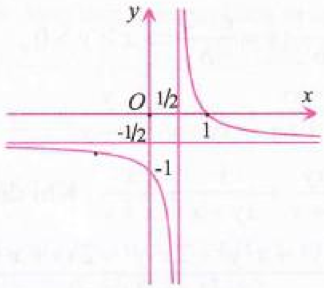
Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{2x-1}\cdot$ Hãy chọn câu đúng:

A. Hàm số có hai chiều biến thiên.

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

D. Đồ thị hàm số có hình dạng



Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=3t\\z=2+5t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{a}=(2;\ 0;\ 2)$. **B.** $\vec{a}=(1;\ -3;\ 5)$.

C. $\vec{a}=(-1;\ -3;\ 5)$. **D.** $\vec{a}=(-1;\ 3;\ 5)$.

Câu 3. Nếu $y=e^{x+2017}$ thì $y'(\ln 2)$ bằng

A. 2017. **B.** e^{2019}. **C.** $2e^{2017}$. **D.** $2017+e$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{MN}=(0;\ 1;\ -1)$ và $M(1;\ 0;\ 2)$ thì tọa độ điểm N là

A. $N(1;\ 1;\ 1)$. **B.** $N(-1;\ 1;\ -3)$.

C. $N(-1;\ -1;\ -1)$. **D.** $N(1;\ -1;\ 3)$.

Câu 5. Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng K và $a,\ b,\ c$ là ba số bất kì thuộc K. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\int_a^a f(x)dx=0$. **B.** $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx,\ c\in(a;b)$.

D. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$.

Câu 6. Trong các hàm sau hãy chỉ ra hàm số giảm trên $\mathbb{R}$

A. $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{5}{3e}\right)^{-x}$. **C.** $y=(\pi)^{3x}$. **D.** $y=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$.

Câu 7. Nghiệm của bất phương trình $\log_3(4x-3)\ge 2$ là

A. $x\ge 3$. **B.** $x>\dfrac{3}{4}\cdot$ **C.** $x>3$. **D.** $\dfrac{3}{4}<x\le 3$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;\ 3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$.

B. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17$.

C. $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=17$.

D. $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=17$.

Câu 9. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $2017^x>\dfrac{1}{2017}\Leftrightarrow x>-1$.

B. Hàm số $y=\log_2 2x$ xác định khi $x>0$.

C. Đồ thị hàm số $y=2^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục tung.

D. Nếu $\ln(x-1)(x-2)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$ thì x phải nghiệm đúng bất phương trình $(x-1)(x-2)>0$.

Câu 10. Cho số phức $z_1=1+2i,\ z_2=3+i$. Môđun của số phức z_1+2z_2 bằng

A. 65. **B.** $\sqrt{65}$. **C.** 21. **D.** $\sqrt{21}$.

Câu 11. Số phức liên hợp với số phức $z=(1+i)^2-3(1+2i)^2$ là

A. $-9-10i$ **B.** $9+10i$. **C.** $9-10i$. **D.** $-9+10i$

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=-2-3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-2=0$.

Giao điểm M của d và (P) có tọa độ là

A. $M(3;\ 1;\ -5)$. **B.** $M(2;\ 1;\ -7)$.

C. $M(4;\ 3;\ 5)$. **D.** $M(1;\ 0;\ 0)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây?

A. $2x-y-4=0$. **B.** $2x-y+4=0$.

C. $2x+y+4=0$. **D.** $2x+y-4=0$.

Câu 14. Bà A gửi 100 triệu vào ngân hàng theo thể thức lãi kép (đến kì hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp) với lãi suất 7% một năm. Hỏi sau 2 năm bà A thu được lãi là bao nhiêu (giả sử lãi suất không thay đổi)?

A. 15 (triệu đồng) **B.** 14,49 (triệu đồng)

C. 20 (triệu đồng) **D.** 14,50 (triệu đồng)

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ có $BC=2AB$, $SA\perp(ABCD)$ và M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM=AB$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.ABM$ và $S.ABC$ thì $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 16. Giá trị nào của a để $\int_0^a (3x^2+2)dx=a^3+2$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x(1-2017e^{-2x})$ là

A. $\int f(x)dx=e^x+2017e^{-x}+C$.

B. $\int f(x)dx=e^x-2017e^{-x}+C$.

C. $\int f(x)dx=e^x+\dfrac{2017}{2}e^{-x}+C$.

D. $\int f(x)dx=e^x-\dfrac{2017}{2}e^{-x}+C$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $A(4;\,0;\,0)$, $B(0;-2;\,0)$, $C(0;\,0;\,6)$. Phương trình của (α) là

A. $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{6}=0$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{3}=1$.

C. $3x-6y+2z-12=0$. **D.** $3x-6y+2z-1=0$.

Câu 19. Diện tích ba mặt của hình hộp chữ nhật bằng 20 cm^2, 28 cm^2, 35 cm^2. Thể tích của hình hộp đó bằng

A. 160 cm^3. **B.** 190 cm^3. **C.** 140 cm^3. **D.** 165 cm^3.

Câu 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+20}{3}+2\sqrt{x}$ trên đoạn $[1;\,4]$ là

A. 9. **B.** 32. **C.** 33. **D.** 42.

Câu 21. Cho hai số phức $z_1=a+bi$ và $z_2=a-bi$ $(a,b\in\mathbb{R}$ và $z_2\neq 0)$ Hãy chọn câu **sai**?

A. z_1+z_2 là số thực. **B.** z_1-z_2 là số thuần ảo.

C. z_1z_2 là số thực. **D.** $\dfrac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo.

Câu 22. Có bao nhiêu đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23. Điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $(3+2i)z=5-14i$ có tọa độ là

A. $(-1;\,-4)$. **B.** $(1;\,-4)$. **C.** $(-1;\,4)$. **D.** $(-4;\,-1)$.

Câu 24. Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào có hai nghiệm là $1\pm i\sqrt{3}$.

A. $x^2+i\sqrt{3}x+1=0$. **B.** $x^2+2x+4=0$.

C. $x^2-2x+4=0$. **D.** $x^2-2x-4=0$.

Câu 25. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y+6z+2017=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d song song với (α).

B. d cắt nhưng không vuông góc với (α).

C. d vuông góc với (α).

D. d nằm trên (α).

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA\perp(ABC)$ và SB hợp với đáy một góc 45^o. Xét 2 câu:

(I) Thể tích của hình chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

(II) Tam giác SAB là tam giác cân.

Hãy chọn câu đúng.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Cả 2 đúng. **D.** Cả 2 sai.

Câu 27. Phương trình $5^{x+1}+6.5^x-3.5^{x-1}=52$ có một nghiệm duy nhất x_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;\,4)$. **B.** $(-1;\,1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 28. Hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;\,1)$. **B.** $(0;\,1)$. **C.** $(1;\,2)$. **D.** $(1;\,+\infty)$.

Câu 29. Biết $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ thì $\log\sqrt[3]{0,18}$ tính theo a và b bằng

A. $\frac{2b+a-2}{3}$. **B.** $\frac{b+2a-2}{3}$. **C.** $\frac{3b+a-2}{3}$. **D.** $\frac{b+3a-2}{3}$.

Câu 30. Với giá trị nào của x thì hàm số $y=-\log_3^2 x+\log_3 x$ có giá trị lớn nhất?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 31. Giải phương trình: $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

Một học sinh làm như sau:

Bước 1. Điều kiện: $\begin{cases} x>2 \\ x\neq 4 \end{cases}$ (*).

Bước 2. Phương trình đã cho tương đương với

$2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0$

Bước 3. Hay là $\log_3(x-2)(x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-4)=1 \Leftrightarrow x^2-6x+7=0$

$\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{2}$. Đối chiếu với ĐK (*), suy ra phương trình đã cho có nghiệm là $x=3+\sqrt{2}$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Sai ở bước 1. **B.** Sai ở bước 2.

C. Sai ở bước 3. **D.** Đúng.

Câu 32. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x^2-x^4$ và trục hoành là

A. $\frac{8\sqrt{2}}{15}$. **B.** $\frac{16\sqrt{2}}{15}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

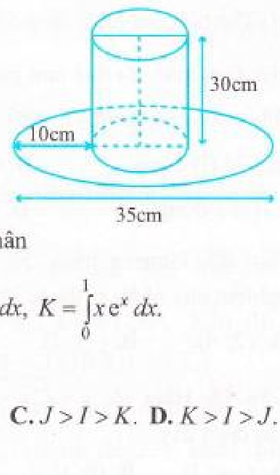
Câu 33. Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).

A. 700π (cm^2).

B. $754,25\pi$ (cm^2).

C. $750,25\pi$ (cm^2).

D. $756,25\pi$ (cm^2).



Câu 34. So sánh các tích phân

$I=\int_1^4 \sqrt{x}dx,\ J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos x dx,\ K=\int_0^1 x e^x dx.$

Ta có kết quả nào sau đây?

A. $I>K>J$. **B.** $I>J>K$. **C.** $J>I>K$. **D.** $K>I>J$.

Câu 35. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2i|=1$ là đường tròn có phương trình nào sau đây?

A. $(x+2)^2+y^2=1$. **B.** $x^2+(y+2)^2=1$.

C. $x^2+y^2+4y-3=0$. **D.** $x^2+y^2+4x-3=0$.

Câu 36. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và mỗi mặt bên có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích khối lăng trụ đó là

A. $2a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 37. Giải bất phương trình $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^5$.

Một học sinh làm như sau:

Bước 1. Điều kiện $x\neq 0$ (*).

Bước 2. Vì $\frac{2}{\sqrt{5}}<1$ nên $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^5 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\ge 5$

Bước 3. Từ đó suy ra $1\ge 5x \Leftrightarrow x\le\frac{1}{5}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;\ \frac{1}{5}\right]\setminus\{0\}$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Đúng. **B.** Sai ở bước 1.

C. Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 3.

Câu 38. Một cái tháp hình nón có chu vi đáy bằng 207,5 m. Một học sinh nam muốn đo chiều cao của cái tháp đã làm như sau. Tại thời điểm nào đó, cậu đo bóng của mình dài 3,32 m và đồng thời đo được bóng của cái tháp (kể từ chân tháp) dài 207,5 m. Biết cậu học sinh đó cao 1,66 m, hỏi chiều cao của cái tháp bằng bao nhiêu mét?

A. $h=103,75+\frac{51,875}{\pi}$ **B.** $h=103+\frac{51,87}{\pi}$

C. $h=103,75+\frac{25,94}{\pi}$ **D.** $h=103,75$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\ln(x^2-3x)$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ là

A. $(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. **B.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\varnothing$.

Câu 40. Một quả bóng bàn được đặt tiếp xúc với tất cả các mặt của một cái hộp hình lập phương. Tỉ số thể tích của phần không gian nằm trong hộp đó nhưng nằm ngoài quả bóng bàn và thể tích hình hộp là

A. $\frac{8-\pi}{8}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{6-\pi}{6}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}\cdot$ Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x=2$? Một học sinh làm như sau:

Bước 1. $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}, y'=\dfrac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}.$

Bước 2. Hàm số đạt cực đại tại $x=2 \Leftrightarrow y'(2)=0$ (*)

Bước 3. (*) $\Leftrightarrow m^2+4m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở bước nào?

A. Sai từ bước 1. **B.** Sai từ bước 2.

C. Sai từ bước 3. **D.** Đúng.

Câu 42. Giá trị của m để đường thẳng $y=2x+m$ cắt đường cong $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt là

A. $m\neq 1$. **B.** $m>0$. **C.** $m\neq 0$. **D.** Một kết quả khác.

Câu 43. Với giá trị nguyên nào của k thì hàm số $y=kx^4+(4k-5)x^2+2017$ có ba cực trị?

A. $k=1$. **B.** $k=2$. **C.** $k=3$. **D.** $k=4$.

Câu 44. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số

$y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m\geq 2017$. **B.** $m>0$. **C.** $m\geq \dfrac{1}{2017}\cdot$ **D.** $m\geq -\dfrac{1}{2017}\cdot$

Câu 45. Có hai chiếc cọc cao 10m và 30m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất.

A. $AM=6$ m, $BM=18$ m. **B.** $AM=7$ m, $BM=17$ m.

C. $AM=4$ m, $BM=20$ m. **D.** $AM=12$ m, $BM=12$ m.

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $x-y+z+3=0$ và ba điểm $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(1;\ 1;\ 1)$, $C(2;\ -2;\ 3)$. Tọa độ của điểm M thuộc (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất là

A. $(4;-2;-4)$. **B.** $(-1;\ 2;\ 0)$. **C.** $(3;-2;-8)$. **D.** $(1;2;-2)$.

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét 2 câu:

(I) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ là $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot$

(II) Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có 9 mặt phẳng đối xứng.

Hãy chọn câu đúng.

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Cả 2 đúng. **D.** Cả 2 sai.

Câu 48. Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\leq x\leq 1)$ là một tam giác đều có cạnh là $4\sqrt{\ln(1+x)}$.

A. $V=4\sqrt{3}(2\ln 2-1)$. **B.** $V=4\sqrt{3}(2\ln 2+1)$.

C. $V=8\sqrt{3}(2\ln 2-1)$. **D.** $V=16\pi(2\ln 2-1)$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu

(S): $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+13=0$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt ?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 50. Cho các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot$ Nếu các hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị các hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x=0$ bằng nhau và khác 0 thì

A. $f(0)<\dfrac{1}{4}\cdot$ **B.** $f(0)\leq\dfrac{1}{4}\cdot$ **C.** $f(0)>\dfrac{1}{4}\cdot$ **D.** $f(0)\geq\dfrac{1}{4}\cdot$

PHẠM TRỌNG THƯ

(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

***LTS.** Bắt đầu từ số Tạp chí này, Tạp chí TH&TT sẽ giới thiệu các đề thử sức trước kì thi THPT Quốc gia với hình thức thi trắc nghiệm theo tinh thần của Bộ GD&ĐT. Rất mong các thầy, cô giáo và bạn đọc gửi đề và các bài viết phân tích cách dạy và học cho hình thức thi trắc nghiệm này. Trân trọng cảm ơn.*

Bài T1/473 (Lớp 6). Tìm hai chữ số tận cùng của hiệu: $2^{9^{2016}} - 2^{9^{1945}}$.

TRẦN QUANG CHUNG
(Lớp ĐTYS 12 – Học viện Kỹ thuật Quân sự, Hà Nội)

Bài T2/473 (Lớp 7). Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $n^4 + 8n^3 + 19n^2 - 33n - 90 = 0$.

CAO NGỌC TOẢN
(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế)

Bài T3/473. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $A = x^2 + y^2 + \dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}$ là số chính phương.

TẠ HOÀNG THÔNG
(GV TT Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Bài T4/473. Cho tam giác ABC nhọn với hai đường cao BE và CK. Gọi R và S thứ tự là hình chiếu của K trên BC và BE; P và Q thứ tự là hình chiếu của E trên BC và CK. Chứng minh các đường thẳng RS, PQ và EK đồng quy.

PHẠM TUẤN KHẢI
(Số nhà 29/67, đường Giáp Bát, quận Hoàng Mai, Hà Nội)

Bài T5/473. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}.$$

VŨ ĐỨC CẢNH *(Hà Nội)*

CÁC LỚP THPT

Bài T6/473. Tìm số nguyên m để phương trình

$$x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0$$

có nghiệm nguyên.

BÙI HẢI QUANG
(GV THCS Văn Lang, Việt Trì, Phú Thọ)

Bài T7/473. Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} x + z - yz = 1 \\ y - 3z + xz = 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2$.

PHẠM HOÀNG HÀ
(GV THPT chuyên Ngoại ngữ, ĐHNN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T8/473. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A có tâm I tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D và E. OI cắt DE tại A'. Các điểm B', C' được xác định tương tự như điểm A'. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy.

ĐẬU ANH HÙNG
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T9/473. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^b b^c c^a \le ab + bc + ca.$$

NGUYỄN VĂN NHO
(GV THPT Nguyễn Duy Trinh, Nghi Lộc, Nghệ An)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/473. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên dương n sao cho n^2+1 có một ước nguyên tố $p > 2n + \sqrt{10n}$.

NGUYỄN ANH TUẤN
(GV THPT chuyên Bắc Giang, Bắc Giang)

Bài T11/473. Với hai số nguyên dương bất kỳ n, p, tìm số các hàm số

$f: \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{-p, -p+1, -p+2, \ldots, p\}$ thỏa mãn tính chất $|f(i) - f(j)| \le p$ với $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

MAI TUẤN ANH
(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hóa)

Bài T12/473. Cho tam giác không vuông ABC, O, H thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC. M là điểm bất kỳ trên (O) (M khác A, B, C); N là điểm đối xứng của M qua BC; P là giao điểm thứ hai của AM và đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN. Chứng minh HN đi qua trực tâm của tam giác AOP.

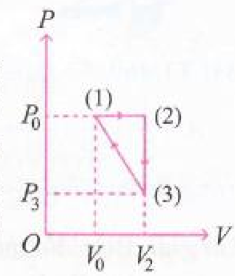
NGUYỄN VĂN LINH

(SV Khoa Toán ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/473. Một cuộn cảm có lõi sắt được mắc vào nguồn điện xoay chiều có điện áp $u(t) = U_0 \cos \omega t$. Độ tự cảm của cuộn dây là L và điện trở thuần $R = 10^3 \omega L$. Sau một chu kì biến thiên của u, do tổn hao để làm nhiễm từ sắt ở lõi toả ra một nhiệt lượng tỉ lệ thuận với giá trị cực đại của năng lượng từ trường dự trữ trong cuộn cảm với hệ số tỉ lệ $k = 2\pi.10^{-3}$. Tính công suất tiêu thụ trung bình của cuộn dây.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/473. Một mol khí lý tưởng biến đổi trạng thái theo chu trình biểu diễn trên đồ thị P - V (hình vẽ). Biết rằng trong chu trình có hai trạng thái có cùng nhiệt độ thấp nhất $T_{\min}$ và trạng thái có nhiệt độ cao nhất $T_{\max}$ (với $T_{\max} = 2T_{\min}$). Chứng tỏ trong chu trình có 3 trạng thái có nhiệt độ bằng nhau. Xác định các thông số ở 3 trạng thái đó. (Coi như đã biết P_0 và V_0).



NGUYỄN MINH TUẤN

(GV THPT Yên Thành 2, Yên Thành, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/473 (For 6th grade). Find the last two digits of the difference $2^{9^{2016}} - 2^{9^{1945}}$.

Problem T2/473 (For 7th grade). Find natural numbers n such that

$$n^4 + 8n^3 + 19n^2 - 33n - 90 = 0.$$

Problem T3/473. Find positive integers x and y so that $A = x^2 + y^2 + \dfrac{x^2y^2}{(x+y)^2}$ is a perfect square.

Problem T4/473. Given an acute triangle ABC with two altitudes BE and CK. Let R and S respectively be the perpendicular projections of K on BC and BE, and P and Q respectively the perpendicular projections of E on BC and CK. Prove that the lines RS, PQ, and EK are concurrent.

Problem T5/473. Solve the system of equations

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/473. Find integers m so that the equation

$$x^3 + (m+1)x^2 - (2m-1)x - (2m^2 + m + 4) = 0$$

has an integral solution.

Problem T7/473. Let x, y, and z be real numbers satisfying $\begin{cases} x + z - yz = 1 \\ y - 3z + xz = 1 \end{cases}$. Find the maximum and minimum values of the expression $T = x^2 + y^2$.

Problem T8/473. Given a triangle ABC. Let (O) be its circumcircle. The excircle (I) relative to the vertex A is tangent to AB and AC respectively at D and E. Let A' be the intersection between OI and DE. Similarly, we construct the points B' and C'. Prove that AA', BB', and CC' are concurrent.

Problem T9/473. Let a, b, and c be positive numbers such that $a + b + c = 1$. Prove that

$$a^b b^c c^a \le ab + bc + ca.$$

(Xem tiếp trang 26)

Bài T1/469. *So sánh biểu thức A và B với*

$$A=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{2015}{2016!}\text{ ; } B=1{,}02015$$

trong đó ký hiệu $n!=1.2.3...n$.

Lời giải. Biến đổi mỗi số hạng dưới dạng sau:

$$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

Cho n lấy các giá trị lần lượt từ 1 đến 2015 được

$$A=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{2015}{2016!}$$

$$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{2015!}-\frac{1}{2016!}$$

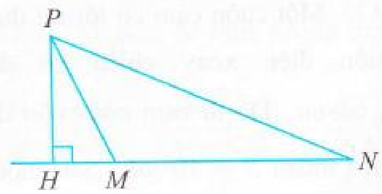
$$=1-\frac{1}{2016!}<1<B.\text{ Vậy } A<B.\ \square$$

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài giải đúng, gọn: **Phú Thọ:** *Vũ Minh Khải*, 6A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Lê Quỳnh Anh, Nguyễn Thị Ngọc Ánh, Nguyễn Vũ Ngọc Linh, Nguyễn Thị Thu Nga, Nguyễn Thị Hoàng Ngân*, 6A3, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hà Nội:** *Nguyễn Ngân Chi*, 6C, THCS Lý Thái Tổ, Q. Thanh Xuân ; **Nghệ An:** *Nguyễn Hồng Khánh Lâm*, 6I, THCS Hà Huy Tập, TP. Vinh; *Đặng Thị Vân Khánh*, 6A, *Nguyễn Đình Thành, Lê Hải Phong, Lê Văn Mạnh, Lê Thùy Linh*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Cao Ngọc Diệp, Cao Thị Vân Anh*, 6B, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Ngãi:** *Mai Thành Nguyên*, 6A, THCS TTr. Sông Vệ, *Huỳnh Đặng Diệu Huyền*, 6C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Nguyễn Trung Phú, Cao Thị Ngọc Trâm, Phạm Đình Tâm, Phạm Thị Thu Nhung, Ngô Ngọc Huấn, Võ Đàm Hương Giang*, 6A, *Phan Ngọc Tuyết Sương, Trần Thị Thảo Vân*, 6C, *Nguyễn Thị Yến Nhi*, 6D, THCS Phạm Văn Đồng, *Cao Nguyễn Quỳnh Hương*, 6C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; *Đoàn Tú Uyên* , 6A, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Quảng Ngãi.

VIỆT HẢI

Bài T2/469. *Cho 5 đoạn thẳng trong đó bất kì 3 đoạn nào trong chúng cũng lập thành một tam giác. Chứng minh rằng trong số các tam giác được thành lập có ít nhất một tam giác là tam giác nhọn.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh một Bổ đề: *Nếu tam giác MNP có góc M tù thì* $PN^2>PM^2+MN^2$. Thật vậy, vẽ đường cao PH thì H nằm ngoài đoạn MN.



Theo định lí Pythagore ta có $PN^2=PH^2+HN^2$ $=(PM^2-HM^2)+(HM+MN)^2=PM^2+MN^2+2HM.MN>PM^2+MN^2$.

Trở lại bài toán. Gọi độ dài 5 đoạn thẳng đã cho là a, b, c, d, e. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $a\le b\le c\le d\le e$. Giả sử trong các tam giác được thành lập không có tam giác nào là tam giác nhọn. Khi đó theo Bổ đề và định lí Pythagore ta có $c^2\ge a^2+b^2, d^2\ge b^2+c^2$, $e^2\ge c^2+d^2$ suy ra $e^2\ge a^2+2b^2+c^2\ge a^2+2ab+b^2$ $=(a+b)^2\Rightarrow e\ge a+b$, tức là từ 3 đoạn thẳng a, b, e không thể thành lập được một tam giác, điều này trái giả thiết. Vậy trong số các tam giác được thành lập có ít nhất một tam giác là tam giác nhọn. $\square$

➢***Nhận xét.*** Bài toán tương đối khó, có rất ít bạn tham gia gửi bài. Một số bạn cũng sắp xếp các đoạn thẳng như trên, sau khi lập luận góc C trong tam giác CDE là nhọn, suy ra các góc A và B trong tam giác ABC đều nhọn (?). Sai lầm là ở chỗ: góc C trong tam giác CDE không phải góc C trong tam giác ABC. Có duy nhất một bạn có lời giải đúng là *Lê Hải Phong*, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/469. *Cho a, b, c là các số thực dương và n là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2. Chứng minh* $\sqrt[n]{\dfrac{a}{a+nb}}+\sqrt[n]{\dfrac{b}{b+nc}}+\sqrt[n]{\dfrac{c}{c+na}}>1.$

Lời giải. Ta có

$$\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}}=\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}(a+nb)}}=\frac{a}{\sqrt[n]{a^n+na^{n-1}b}}.$$

Mà $0 < a^n + na^{n-1}b < (a+b)^n$ và a, b, c là các số dương nên

$$\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^n + na^{n-1}b}} > \frac{a}{\sqrt[n]{(a+b)^n}} = \frac{a}{a+b}.$$

Lại có $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$ nên $\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}} > \frac{a}{a+b+c}$ (*)

Chứng minh tương tự, ta được

$$\sqrt[n]{\frac{b}{b+nc}} > \frac{b}{a+b+c}; \sqrt[n]{\frac{c}{c+na}} > \frac{c}{a+b+c}.$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta thu được

$$\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}} + \sqrt[n]{\frac{b}{b+nc}} + \sqrt[n]{\frac{c}{c+na}}$$

$$> \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.❒

➤***Nhận xét.*** Mấu chốt của bài toán là chỉ ra và chứng minh BĐT (*). Đa số các bạn sử dụng BĐT Cauchy cho n số dương để chứng minh BĐT (*) như sau: Ta có $\sqrt[n]{a^{n-1}(a+nb)} = \sqrt[n]{\underbrace{a.a...a}_{n-1 \text{ số } a}(a+nb)}$

$$\le \frac{\underbrace{a+a+...+a}_{n-1 \text{ số } a}+(a+nb)}{n} = \frac{na+nb}{n} = a+b.$$

Do đó $\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}} = \sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{n-1}(a+nb)}} = \frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}(a+nb)}} \ge \frac{a}{a+b}.$

Có bạn sử dụng BĐT Bernoulli: Với $x > -1$ và $0 < r \le 1$ luôn có $(1+x)^r \le 1+rx$ để chứng minh BĐT (*) như sau: $\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+\frac{nb}{a}}} = \frac{1}{\left(1+\frac{nb}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}$

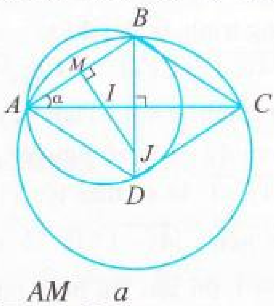
$$\ge \frac{1}{1+\frac{nb}{a}.\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{a}{a+b}.$$

Ngoài ra một số bạn sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh nhưng quá dài dòng. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 9A5, THCS Cầu Giấy; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7 A4, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Đạt*, 9A, THCS Tế Thắng, Nông Cống; **Quảng Ngãi:** *Lương Thị Thanh Nhàn*, 7A4, THCS Hành Trung; **Kon Tum:** *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP Kon Tum.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/469. *Cho hình thoi ABCD có AB = 2a. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ABD. Chứng minh rằng $R_1R_2 \ge 2a^2$. Dấu "=" xảy ra khi nào?*

Lời giải. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Đường trung trực của đoạn AB cắt các đường AC và BD tại I và J. Khi đó I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABD và ABC. Đặt $\widehat{BAC} = \alpha \Rightarrow \widehat{ABD} = 90° - \alpha$.



Ta có $\cos\alpha = \frac{AM}{AI} = \frac{a}{R_2}$ (1)

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha) = \frac{BM}{BJ} = \frac{a}{R_1}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2}{R_1^2} + \frac{a^2}{R_2^2} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{1}{a^2}$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^2} \ge \frac{2}{R_1R_2} \Leftrightarrow R_1R_2 \ge 2a^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $R_1 = R_2$, hay $ABCD$ là hình vuông. ❒

➤***Nhận xét.*** 1) Có thể sử dụng tam giác đồng dạng để nhận được các hệ thức (1) và (2).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Vĩnh Phúc: *Phạm Thị Kiều Trang*, 9A2, *Bùi Tuấn Anh*, *Lê Đức Thái*, 8A2, *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7A4, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 9A5, THCS Cầu Giấy; **Phú Thọ:** *Lê Na*, 8A, THCS Thị trấn II, Yên Lập; **Nghệ An:** *Hoàng Thị Bảo Ngọc*, *Thái Bá Bảo*, *Phan Thị Huyền Anh*, *Đinh Thị Quỳnh Châu*, 9C, *Nguyễn Đình Tuấn*, *Thái Thị Cẩm Chi*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thục Anh*, 8A, THCS Trần Hưng Đạo, Đông Hà.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/469. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình:* $\frac{11x}{5} - \sqrt{2x+1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2$.

Lời giải. Để phương trình có nghĩa, ta có $x \ge -\frac{1}{2}, y \ge \frac{1}{4}$. Chuyển vế phương trình, ta có:

$$\frac{11x}{5} - 3y - 2 = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1}.$$

Vế trái của phương trình là một số hữu tỷ, cho nên có thể đặt nó là một số hữu tỷ q. Ta có:

$$\frac{11x}{5} - 3y - 2 = q \text{ và } q = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1}. \quad (*)$$

Chuyển $-\sqrt{4y-1}$ sang trái và bình phương hai vế của phương trình, ta thu được

$$\sqrt{2x+1} = q + \sqrt{4y-1} \Rightarrow 2x+1 = q^2 + 2q.\sqrt{4y-1} + 4y - 1.$$

Ta sẽ chứng minh $q = 0$. Thật vậy, nếu $q \ne 0$ thì do $2x+1$ và $4y-1$ là số nguyên, q là số hữu tỷ, suy ra $\sqrt{4y-1}$ là số hữu tỷ. Vì $4y-1$ là số nguyên, cho nên $\sqrt{4y-1}$ là số nguyên. Đặt $\sqrt{4y-1} = 2k+1$ thì sau khi bình phương hai vế đẳng thức, ta có vế trái chia 4 dư 3 còn vế phải chia cho 4 dư 1 là điều vô lý. Vậy $q = 0$.

Thay $q = 0$ vào (*) ta có hệ phương trình:

$$\frac{11x}{5} - 3y - 2 = 0, \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1} = 0.$$

Biến đổi, ta có hệ: $11x - 15y = 10, 2x - 4y = -2$.

Hệ cuối cho ta $x = 5, y = 3$. Thử lại, nghiệm này thỏa mãn phương trình ban đầu, cho nên nó là nghiệm của bài toán.❒

➢***Nhận xét.*** Bạn *Nguyễn Đình Tuấn* (THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An) có chứng minh tổng quát là nếu $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là hữu tỷ và nếu a, b là số nguyên không chính phương thì $a = b$. Một số bạn mặc nhiên công nhận điều này mà không chứng minh. Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải chặt chẽ: **Hà Nội:** *Vũ Phan Thăng Long,* 9A9 THCS Giảng Võ; **Kon Tum:** *Nguyễn Ngọc Khánh Như,* 9A THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP Kon Tum; **Nghệ An:** *Nguyễn Đình Tuấn*, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thùy Dương,* 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T6/469. *Tìm 3 số x, y, z theo số thực dương m thỏa mãn*

$$\begin{cases} x\sqrt{y-m} + y\sqrt{z-m} + z\sqrt{x-m} = 6m\sqrt{m} & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12m^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK: $x, y, z \ge m > 0$.

Từ (1), theo BĐT Bunyakovsky ta có :

$$36m^3 \le (x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z - 3m)$$
$$= 12m^2(x + y + z - 3m)$$
$$\Leftrightarrow x + y + z \ge 6m \quad (3)$$

Lại có: $12m^2 = x^2 + y^2 + z^2 \ge \frac{(x+y+z)^2}{3}$

$$\Leftrightarrow x + y + z \le 6m \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $x + y + z = 6m$.

Dấu ''='' xảy ra khi dấu ''='' trong (3) và (4) cùng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 2m$. ❒

➢***Nhận xét.*** 1) Bình phương hai vế của (3) và sử dụng giả thiết (2) dẫn đến:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \le 0.$$

Từ đó tìm được $x = y = z = 2m.$

2) Cách giải bằng phương pháp vectơ của một số bạn cũng cho lời giải ngắn gọn.

3) Bài toán không khó, hầu hết các bạn đều có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn: **Yên Bái:** *Đỗ Quang Huy,* 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành. **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng,* 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ. **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Thanh Hiền,* 7A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc. **Nam Định:** *Lê Tuấn Anh,* 10 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Bắc Ninh:** *Đinh Quang Trường,* 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; *Mẫn Đức Bình Minh,* 11A, THPT Yên Phong Số 1. **Thái Bình:** *Trần Quang Minh,* 12A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy. **Hưng Yên:** *Chu Minh Huy,* 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; *Triệu Ninh Ngân,* 11A9, THPT Dương Quảng Hàm. **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh,* 10T, THPT chuyên Lam Sơn ; *Nguyễn Danh Thắng,* 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Nguyễn Phùng Thái Cường,* 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa; *Nguyễn Đức Bảo,* 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; *Đặng Duy Bảo Khánh,* 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh. **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Hùng,* 10A1, THPT Cù Huy Cận, Vũ Quang. **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Phương Nhi, Phan Trần Hướng,* 11 Toán 1, THPT chuyên Quốc Học Huế. **Quảng Trị:** *Nguyễn Thị Phương Linh,* 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Quảng Nam:** *Nguyễn Huy Hải,* 11/1; *Nguyễn Xuân Anh Quân,* 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Đặng Diệu Huyền,* 9C, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; *Lương Thị Thanh Nhàn,* 9A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành; *Đỗ Thị Mỹ Lan,* 10 T2, *Đoàn Cao Khả,* 11T2, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi. **Vĩnh Long:** *Trần Lĩnh,* 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm. **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo,* 11 Toán, THPT chuyên Tiền Giang. **Nha trang-Khánh Hòa:** *Nguyễn Quang Đạt,* 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Cần Thơ:** *Đỗ Trung Đức,* 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng.

Long An: *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, 11T1, *Nguyễn Bình An*, 11T2, THPT chuyên Long An. **Cà Mau:** *Nguyễn Thành Trung*, 10 Toán 1, *Hoàng Công Minh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển. **Lâm Đồng:** *Nguyễn Quốc Trung*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long. **Đăk Nông:** *Phan Nguyễn Huy Hoàng*, 10A1, THPT Chu Văn An, *Đặng Quang Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh. **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M'Gar, H. Cư M'Gar.

TRẦN HỮU NAM

Bài T7/469. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$y = f(x) = \cos x + 4\cos\frac{x}{2} + 7\cos\frac{x}{4} + 6\cos\frac{x}{8}.$$

Lời giải. • Ta có

$$f(x) = \cos x + 4\cos\frac{x}{2} + 7\cos\frac{x}{4} + 6\cos\frac{x}{8}$$
$$\le 1 + 4 + 7 + 6 = 18,$$

$$f(x) = 18 \Leftrightarrow \frac{x}{8} = 2k\pi \Leftrightarrow x = 16k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

• Ta lại có $\cos 2a + 2\cos a = 2\cos^2 a - 1 + 2\cos a$

$$= 2\left(\cos a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \ge -\frac{3}{2},\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Do đó $f(x) = \cos x + 4\cos\frac{x}{2} + 7\cos\frac{x}{4} + 6\cos\frac{x}{8}$

$$= \left(\cos x + 2\cos\frac{x}{2}\right) + 2\left(\cos\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{4}\right) + 3\left(\cos\frac{x}{4} + 2\cos\frac{x}{8}\right)$$

$\ge -\frac{3}{2}.(1+2+3) = -9$; $f(x) = -9$ khi và chỉ khi

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{8} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{8} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{16\pi}{3} + 16k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $\max f(x) = 18, \min f(x) = -9$. ❒

➢***Nhận xét.*** Bài toán bất đẳng thức lượng giác trên thuộc loại cơ bản, có ý hay. Các bạn học sinh sau có lời giải đúng:

Hà Nội: *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Nam Định:** *Đoàn Thị Nhài*, 12T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Tuân*, 10A5, *Nguyễn Danh Thắng*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M'Gar, H. Cư M'Gar, **Đăk Nông:** *Đặng Quang Hoàng*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, TX. Gia Nghĩa, **Long An:** *Nguyễn Thị Ngân Trúc*, 11T1, THPT chuyên Long An, **Vĩnh Long:** *Lê Nguyễn Minh Long*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Cần Thơ:** *Đỗ Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cà Mau:** *Hoàng Công Minh*, 11T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiền.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/469. *Cho tam giác ABC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng nếu* $\widehat{BAC} \le \frac{\pi}{2}$ *thì* $2AM \le \sqrt{2(AB^2 + AC^2)}.\cos\frac{\widehat{BAC}}{2}$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$.

Từ giả thiết $\widehat{BAC} \le \frac{\pi}{2}$, suy ra $b^2 + c^2 \ge a^2$ (1)

Từ công thức tính độ dài đường trung tuyến, có

$$4AM^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \quad (2)$$

Áp dụng định lý côsin cho ΔABC, ta được

$$\cos^2\frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{1 + \cos\widehat{BAC}}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta thấy BĐT cần chứng minh tương đương với

$$2(b^2 + c^2) - a^2 \le 2(b^2 + c^2).\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}$$

$$\Leftrightarrow 4bc(b^2 + c^2) - 2bc.a^2 \le (b^2 + c^2)(b+c)^2 - a^2(b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + c^2)(b-c)^2 - a^2(b^2 + c^2 - 2bc) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2(b^2 + c^2 - a^2) \ge 0.$$

Rõ ràng bất đẳng thức này đúng, do (1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b^2 + c^2 - a^2 = 0$ hoặc $b = c$, nghĩa là khi ΔABC hoặc vuông tại A, hoặc cân tại A, với $\widehat{BAC} \le \frac{\pi}{2}$. ❒

➢***Nhận xét.*** Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này, hầu hết giải đúng. Một số bạn xét trường hợp xảy ra dấu đẳng thức còn bỏ sót trường hợp ΔABC vuông tại A. Xin nêu tên một số bạn có lời giải gọn hơn cả: **Hà Nội:** *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 12T2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Văn Cao*, *Đặng Thanh Tùng*, 10A1, THPT Ứng Hòa A, Ứng Hòa, *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Bắc Ninh:** *Mẫn Đức Bình Minh*, 11A1, THPT Yên Phong Số 1, Yên Phong; **Hưng Yên:** *Nguyễn Mạnh Hiệp*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, *Chu Minh Huy*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nam Định:** *Đoàn Thị Nhài*, 12T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, *Nguyễn Bá Tuân*, 10A5, *Nguyễn Danh Thắng*, 11A5, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa. **Nghệ An:** *Nguyễn Phùng Thái Cường*, 11A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh, *Võ Việt Anh*, 11A1, *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Thị Phương Nhi*, *Nguyễn Minh Hải*, *Tống Ngọc Chung*, *Phan Trần Hướng*, 11T1, THPT chuyên Quốc Học Huế, **Quảng Nam:** *Nguyễn Huy Hải*, 11/1, *Nguyễn Xuân Anh Quân*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Đăk Lắk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M' Gar, Cư M' Gar, **Tây Ninh:** *Hoàng Thị Hoài Thương*, 10T, THPT chuyên Hoàng Lê Kha, **Cần Thơ:** *Đỗ Trung Đức*, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, **Cà Mau:** *Trần Quốc Việt*, 12CT1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Long An:** *Lê Trí Phú*, *Phạm Quốc Thắng*, 12T1, THPT chuyên Long An, **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, *Lê Nguyễn Minh Long*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/469. *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng*

$$x+y+z+xy+yz+zx\le 3+\left(\frac{x}{y}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n+\left(\frac{z}{x}\right)^n$$

với $n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh rằng: *Nếu a, b, c là các số dương thỏa mãn* $abc=1$ *và* $n\in N,\ n>1$ *thì* $a^n+b^n+c^n\ge a+b+c$ (1).

Thật vậy, ta có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số thực dương $a^n+1+1+...+1\ge na$ (vế trái có $n-1$ số 1); tương tự: $b^n+1+1+...+1\ge nb$,

$c^n+1+1+...+1\ge nc$.

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$a^n+b^n+c^n+3(n-1)\ge n(a+b+c)$

$\Rightarrow a^n+b^n+c^n$

$\ge(a+b+c)+(n-1)(a+b+c-3)\ge a+b+c.$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Áp dụng bất đẳng thức (1), ta có

$$3+\left(\frac{x}{y}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n+\left(\frac{z}{x}\right)^n\ge 3+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\quad (2).$$

Bây giờ ta chứng minh

$$x+y+z+xy+yz+zx\le 3+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\quad (3).$$

Vì $xyz=1$ nên có các số dương a, b, c thỏa mãn

$$x=\frac{a}{b},\ y=\frac{c}{a},\ z=\frac{b}{c}.$$

Thay vào (3), ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\le\frac{a^2}{bc}+\frac{c^2}{ab}+\frac{b^2}{ca}+3$$

$$\Leftrightarrow bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$$

$$\le a^3+b^3+c^3+3abc\ (4).$$

Vai trò của a, b, c như nhau. Giả sử $a\ge b\ge c$.

Ta có (4) tương đương với

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0.$$

Vì $c(c-a)(c-b)\ge 0$; $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)$

$=(a-b)(a^2-ac-b^2+bc)=(a-b)^2(a+b-c)\ge 0$

nên $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\ge 0.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Từ (2) và (3) suy ra

$$x+y+z+xy+yz+zx\le 3+\left(\frac{x}{y}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n+\left(\frac{z}{x}\right)^n.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$. ❒

➢***Nhận xét.*** Hầu hết các bạn gửi bài giải đều làm theo cách trên. Một số bạn chứng minh bất đẳng thức (1) như sau :

Xét hàm số $f(x)=x^n$; $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$ $\forall x>0$; hàm số $f(x)$ lồi trên $(0;+\infty)$; áp dụng bất đẳng thức $f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)\le\frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3}$; lưu ý $a+b+c\ge 3$ từ đó dễ dàng suy ra (1). Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Sơn La:** *Trần Hoàng Đạt*, 11A1, THPT Mộc Lỵ, Mộc Châu; **Hưng Yên:** *Đàm Quang Nhật*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo; **Nghệ An:** *Võ Việt Anh*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Phú Yên:** *Lê Thành Lâm*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP Tuy Hòa; **Đăk Nông:** *Đặng Quang Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Chí Thanh, TX. Gia Nghĩa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T10/469. *Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho tồn tại dãy n số dương đôi một phân biệt* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *thỏa mãn tính chất: Với mọi i, j phân biệt thuộc* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *luôn có*

$$\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}+8(\sqrt{3}-2)\ge(7-4\sqrt{3})\left(\frac{1}{x_ix_j}+x_ix_j\right).$$

Lời giải. (Của bạn *Đặng Quang Anh*, 10T chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**). Không giảm tổng quát giả sử $0<x_1<x_2<...<x_n$. Khi đó với $i>j$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x_i^2+x_j^2}{x_ix_j}+8(\sqrt{3}-2)\geq\frac{(7-4\sqrt{3})(x_i^2x_j^2+1)}{x_ix_j}$$

$$\Leftrightarrow (x_i-x_j)^2\geq(7-4\sqrt{3})(1+x_ix_j)^2$$
$$=(2-\sqrt{3})^2(1+x_ix_j)^2.$$

Do $i>j$ nên $x_i>x_j \Rightarrow \frac{x_i-x_j}{1+x_ix_j}\geq 2-\sqrt{3}$ (2).

Do $\forall i\in\{1,2,...,n\}$ $x_i>0 \Rightarrow \exists a_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan a_i=x_i$. Thay vào (2) ta có

$$\tan(a_i-a_j)\geq\tan\frac{\pi}{12}\ (3)\Rightarrow a_i-a_j\geq\frac{\pi}{12},\forall i>j.$$

Nếu $n\geq 7$ thì

$$a_n-a_1=(a_n-a_{n-1})+...+(a_2-a_1)\geq\frac{(n-1)\pi}{12}\geq\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ vô lý, vì $a_n,a_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó $n\leq 6$.

Với $n=6$, lấy $a\in\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ và $a_i=a+\frac{(i-1)\pi}{12}$ ($i=1, …, 6$). Khi đó $a_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ($i=1, …, 6$).

Đặt $x_i=\tan a_i$ (i = 1, …, 6) thì x_i là các số dương phân biệt và với $i>j$ ta có (3) thỏa mãn.

Thật vậy $\frac{x_i-x_j}{1+x_ix_j}=\tan(a_i-a_j)=\tan\left(\frac{(i-j)\pi}{12}\right)$

$$\geq\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}.$$

Vậy số nguyên dương lớn nhất cần tìm là $n=6$.

➤***Nhận xét.*** Trong các bạn tham gia giải bài toán này có 3 bạn có đáp số sai ($n=2, n=6, n=\infty$). Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Đăk Lăk:** *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M'Gar; **Bắc Ninh:** *Dương Phương Thanh*, 11 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh; **Nghệ An:** *Cao Hữu Đạt*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Nam Định:** *Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** *Chu Minh Huy*, 12T, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Nam:** *Nguyễn Phạm Minh Trí*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/469. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(\frac{x+y}{2016}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2015},\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Lời giải. (Theo đa số các bạn) Theo (1), ta có

$$f\left(\frac{x}{2016}\right)=f\left(\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}}{2016}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)}{2015}=\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{2015},$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta thu được

$$\frac{2f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2015}=f\frac{(x+y)}{2016}=\frac{f(x)+f(y)}{2015},\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Suy ra $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$

hay $f(2x)+f(2y)=2f(x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}^+$ (3)

Từ (3) ta thu được

$$2f\left(\frac{x}{2}+y\right)=f(x)+f(2y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad (4)$$

$$2f\left(\frac{x}{2}+y\right)=2f\left(\frac{x+y}{2}+\frac{y}{2}\right)=f(x+y)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$f(x)+f(2y)=f(x+y)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+ \quad (6)$$

Từ (3) và (6), ta thu được

$$2f(x)+2f(2y)=2f(x+y)+2f(y)$$
$$=f(2x)+f(2y)+2f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

hay $f(2x)-2f(x)=f(2y)-2f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow f(2x)-2f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}^+$ (7)

Từ (3) và (7) ta thu được

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+c, \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Bằng phương pháp quy nạp, từ đây suy ra

$$f(nx)=nf(x)+(n-1)c \quad (8)$$

Kết hợp (1) và (8) ta có

$$f(x)=f\left(\frac{x+2015x}{2016}\right)=\frac{f(x)+f(2015x)}{2015}$$
$$=\frac{2016f(x)+2014c}{2015},\ \forall x\in\mathbb{R}^+.$$

hay $f(x)=\frac{2016f(x)+2014c}{2015},\forall x\in\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow f(x)=-2014c,\forall x\in\mathbb{R}^+.$

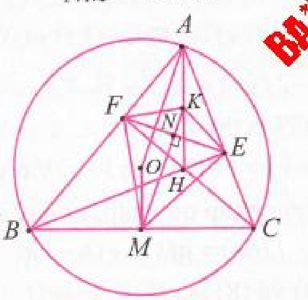
Thế vào (1) ta thu được $c=0$. Vậy $f(x)\equiv 0$. ❒

➢***Nhận xét.*** Đây là dạng toán cơ bản về phương trình hàm với cặp biến tự do trên $\mathbb{R}^+$. Nhiều bạn gửi bài về tòa soạn đã không để ý đến tập xác định này nên thế ngay giá trị $x=0$ vào (1) để nhận được kết quả trực tiếp. Lời giải như vậy là không được chấp nhận. Một số bạn đã tìm được nghiệm của bài toán dựa trên tính tuyến tính hữu tỷ của hàm cộng tính. Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Hà Tĩnh:** *Trần Hậu Đức Thắng*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, *Võ Việt Anh*, 11A1, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Trần Tiến Mạnh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Quảng Ngãi:** *Vũ Văn Tiến*, 12T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Thái Bình:** *Trần Quang Minh*, 11A1, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Bá Tuân*, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/469. *Cho hai đường tròn (O) và (O_1) cắt nhau tại B, C; M là trung điểm của BC. Điểm A chạy trên (O) và khác B, C. AB, CA theo thứ tự cắt (O_1) tại F, E; P, Q theo thứ tự là hình chiếu của M trên BE, CF. Dựng hình bình hành MPKQ. Chứng minh rằng AK luôn đi qua một điểm cố định.*

***Lời giải.* Bổ đề.** Cho tam giác ABC, (O, R) là đường tròn ngoại tiếp, BE, CF là các đường cao M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, EF. Khi đó $\overrightarrow{AO} // \overrightarrow{NM}$ và $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{NM}} = \dfrac{1}{\sin^2 A}$.



Hình 1

Chứng minh. Gọi H là trực tâm ΔABC; K là trung điểm của AH (h.1). Dễ thấy $AOMK$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{KM}$ (1)

Từ (1) suy ra $\overrightarrow{AO} // \overrightarrow{NM}$. Vì $BE \perp AC; CF \perp AB$; $MB = MC; KA = KH$ nên $ME = \dfrac{1}{2}BC = MF$; $KE = \dfrac{1}{2}EF = KF$. Kết hợp với $NE = NF$, suy ra MK đi qua N và $MK \perp EF$. Từ đó, theo kết quả về đường tròn Euler, suy ra $\widehat{KEM} = 90°$. Vậy tam giác EMK vuông tại E và EN là đường cao (2). Dễ thấy $EM = \dfrac{1}{2}BC = R\sin A$;

$$EK = \frac{1}{2}AH = R\left|\cos A\right| \text{ (3).}$$

Từ (1), (2) và (3), theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, suy ra

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{KM}}{\overline{NM}} = \frac{KM}{NM} = \frac{KM}{KM - KN} = \frac{1}{1 - \dfrac{KN}{KM}}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{EK^2}{MK^2}} = \frac{1}{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A}.$$

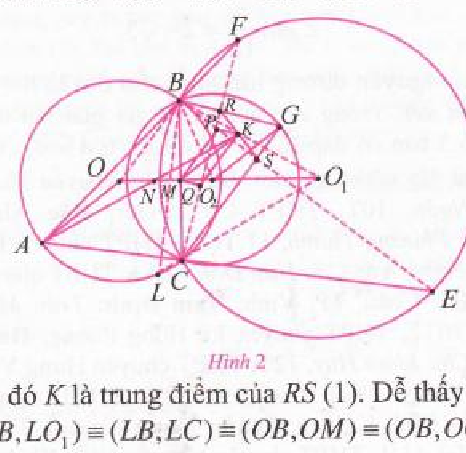
Tóm lại $\overrightarrow{AO} // \overrightarrow{NM}$ và $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{NM}} = \dfrac{1}{\sin^2 A}$.

Trở lại giải bài toán T12/469.

Gọi R, S theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên CF, BE; $K = BR \cap CS$; L là giao điểm thứ hai của (O_1) và (O); (O_2) là đường tròn ngoại tiếp ΔBKC; r, r_2 theo thứ tự là bán kính của (O_1), (O_2) (h.2, h.3).

Trường hợp 1: $\overrightarrow{O_1C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{O_1L}$. Dễ thấy

$$\overrightarrow{KR} + \overrightarrow{KS} = \overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MK}$$
$$= \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} - 2\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} - 2\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right)$$
$$= \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{CS} - \overrightarrow{BR}$$
$$= \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MR} = \vec{0}.$$



Hình 2

Do đó K là trung điểm của RS (1). Dễ thấy

$(LB, LO_1) \equiv (LB, LC) \equiv (OB, OM) \equiv (OB, OO_2)$
$\equiv -(OO_2, OB) (\bmod \pi)$;

$$(BL,BO_1)\equiv(BL,CL)+(O_1C,O_1M)+(O_1M,O_1B)(\bmod\pi)$$
$$\equiv(BA,CA)+(EC,EB)+(FC,FB)(\bmod\pi)$$
$$\equiv(BF,CF)+(EC,EB)+(FC,FB)\equiv(FC,EB)(\bmod\pi)$$
$$\equiv(GB,GC)\equiv(O_2B,O_2O_1)\equiv-(O_2O_1,O_2B)(\bmod\pi).$$

Do đó các tam giác LBO_1, OO_2B đồng dạng ngược hướng. Vậy, chú ý rằng $\overrightarrow{O_1C}\uparrow\uparrow\overrightarrow{O_1L}$, ta có $(\overrightarrow{O_1C},\overrightarrow{O_1B})\equiv(\overrightarrow{O_1L},\overrightarrow{O_1B})\equiv-(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BO_2})$

$$\equiv-(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})(\bmod 2\pi) \qquad (2)$$

Từ (2), chú ý rằng $BE\perp CG$, suy ra

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O_2G})\equiv(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})+(\overrightarrow{O_2B},\overrightarrow{O_2G})(\bmod 2\pi)$$
$$\equiv 2(CA,CB)+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})+2(CB,CG)(\bmod 2\pi)$$
$$\equiv 2(CA,CG)+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})(\bmod 2\pi)$$
$$\equiv 2\big((CE,BE)+(BE,CG)\big)+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})(\bmod 2\pi)$$
$$\equiv 2\left((CE,BE)+\frac{\pi}{2}\right)+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})(\bmod 2\pi)$$
$$\equiv 2(EC,EB)+\pi+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})(\bmod 2\pi)$$
$$\equiv(\overrightarrow{O_1C},\overrightarrow{O_1B})+\pi+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O_2B})(\bmod 2\pi)\equiv\pi(\bmod 2\pi).$$

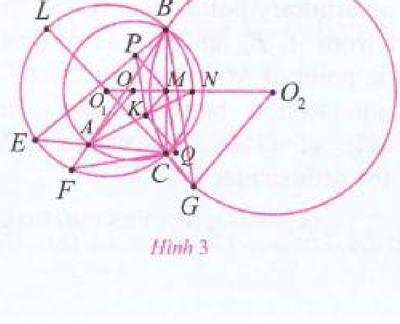
Do đó $\overrightarrow{AO}\uparrow\downarrow\overrightarrow{GO_2}$ (3). Từ (2) suy ra O_2 cố định. Do đó r_2 không đổi (4)

Từ (1), (3) và (4), theo bổ đề trên, suy ra

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{GO_2}}\cdot\frac{\overline{GO_2}}{\overline{KM}}=-\frac{r}{r_2}\cdot\frac{1}{\sin^2\widehat{BGC}}$$
$$=-\frac{r}{r_2}\cdot\left(\frac{2r_2}{BC}\right)^2=-\frac{4rr_2}{BC^2} \qquad (5)$$

Từ (3), (4) và (5), theo bổ đề trên, suy ra AK và OO_1 cắt nhau tại một điểm, ký hiệu là N, và $\frac{\overline{NO}}{\overline{NM}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{KM}}=-\frac{4rr_2}{BC^2}$ (không đổi). Điều đó có nghĩa là AK luôn đi qua một điểm cố định, điểm N.

Trường hợp 2. $\overrightarrow{O_1C}\uparrow\downarrow\overrightarrow{O_1L}$. Tương tự trường hợp 1, $\overrightarrow{AO}\uparrow\uparrow\overrightarrow{GO_2}$ và $\frac{\overline{AO}}{\overline{KM}}=\frac{4rr_2}{BC^2}$.



Hình 3

Nếu $\frac{4rr_2}{BC^2}=1$ thì, chú ý rằng

$$\frac{4rr_2}{BC^2}=\frac{BO}{BM}\cdot\frac{BO_2}{BM};\frac{BO}{BM}\geq 1;\frac{BO_2}{BM}\geq 1,$$

suy ra $\frac{BO}{BM}=1$; $\frac{BO_2}{BM}=1$. Vậy $O\equiv M\equiv O_2$.

Do đó $0\equiv\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\equiv(GB,GC)-(BA,CA)$

$$\equiv(CF,BE)-(BF,CE)(\bmod\pi)\equiv(CF,BE)+(CE,BF)$$
$$\equiv(CF,BF)+(CE,BE)\equiv 2(CF,BF)\equiv(\overrightarrow{CO_1},\overrightarrow{BO_1})(\bmod\pi).$$

Điều đó có nghĩa là B, C, O_1 thẳng hàng. Nói cách khác $O_1\equiv M$. Vậy $O\equiv O_1$, mâu thuẫn.

Tóm lại $\frac{4rr_2}{BC^2}\neq 1$. Do đó, tương tự như trường hợp 1, AK và OO_1 cắt nhau tại một điểm, ký hiệu là N, và $\frac{\overline{NO}}{\overline{NM}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{KM}}=\frac{4rr_2}{BC^2}$ (không đổi).

Vậy AK luôn đi qua điểm N cố định. ❒

➤***Nhận xét.*** Bài toán này khó, chỉ có chín bạn tham gia giải, tuy nhiên cả chín bạn đều không khắc phục được tình trạng phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ, mặc dù vậy vẫn nêu tên các bạn: **Phú Thọ:** *Trần Quốc Lập*, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Đinh Quang Trường*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh, TP. Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Trung Phương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, TP. Vĩnh Yên; **Thanh Hóa:** *Đặng Quang Anh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, *Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; *Đặng Duy Bảo Khánh*, 11A1, THPT chuyên ĐH Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Linh Chi*, *Nguyễn Quốc Khánh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, TP. Hà Tĩnh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/469. *Đoạn mạch xoay chiều gồm một cuộn dây mắc nối tiếp với tụ điện có điện dung C. Đặt vào đoạn mạch điện áp $u=U_0\cos\omega t$ thì cường độ dòng điện trong mạch sớm pha góc φ_1 so với điện áp u và điện áp hiệu dụng với $C'=3C$ thì cường độ dòng điện trong mạch trễ pha góc $\varphi_2=\frac{\pi}{2}-\varphi_1$ so với điện áp u và điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn dây là 90V. Hãy xác định U_0.*

Lời giải. Điện áp hai đầu cuộn dây: $U_d=30V$ và $U'_d=90V$ nên $Z=3Z'$

$$\Rightarrow \sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}=3\sqrt{R^2+(Z_L-Z_{C'})^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Z_L-Z_C}{R}\right)^2=8+9\left(\frac{Z_L-Z_{C'}}{R}\right)^2$$

Hay $\tan^2\varphi_1=8+9\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1\right)$.

Phương trình trên có nghiệm: $\tan\varphi_1=-3$ suy ra $\tan\varphi_2=\frac{1}{3}$, do đó ta có: $\begin{cases} Z_L-Z_C=-3R \\ Z_L-\frac{Z_C}{3}=\frac{R}{3}\end{cases}$

Từ đó ta tìm được: $Z_L=2R; Z_C=5R$.

Thay vào biểu thức:

$$U_d=30V=\frac{U}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}}\sqrt{R^2+Z_L^2}$$

ta tính được $U=30\sqrt{2}V \Rightarrow U_0=60(V)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Chỉ có bạn *Nguyễn Việt Đức*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên** gửi lời giải và giải đúng.

NGUYỄN XUÂN QUANG

Bài L2/469. *Hai vật nhỏ dao động với các phương trình là $x_1=A\sin\omega t$ và $x_2=A\sin 2\omega t$, với A = 6 cm và với tốc độ cực đại của vật 1 là $v_{1\max}=4\pi$ (cm/s); chúng cùng khởi hành từ vị trí cân bằng O, theo chiều dương. Hỏi sau đó bao lâu chúng lại gặp nhau (lần đầu) và đi cùng chiều hay ngược chiều.*

Lời giải. Phương trình dao động được viết lại:

$$x_1=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right) \text{ và } x_2=A\cos\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có : $A^2=x^2+\frac{v^2}{\omega^2}\Rightarrow A_{max}^2=\frac{v_{\max}^2}{\omega^2}$

$$\Rightarrow \omega=\omega_1=\frac{v_{\max 1}}{A}=\frac{4\pi}{A}=\frac{2\pi}{3} \text{ (rad/ s)}$$

và $\omega_2=2\omega=\frac{4\pi}{3}$ (rad/ s).

$$T=T_1=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi A}{4\pi}=0{,}5A=0{,}3 \text{ (s)}$$

và $T_2=0{,}5T_1=0{,}5T=1{,}5$ (s).

Khi hai vật gặp nhau thì $x_1=x_2$

$$\Rightarrow x_1=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=x_2=A\cos\left(2\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\omega t-\frac{\pi}{2}=\omega t-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (1)$$

$$\text{và } 2\omega t-\frac{\pi}{2}=-\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi \quad (2)$$

Từ (1): $\omega t=2k\pi\Rightarrow t=\frac{2k\pi}{\omega}=0{,}5kA=kT=3k$

với k = 0, 1, 2, 3,…. (3)

Từ (2): $3\omega t^*=(2n+1)\pi\Rightarrow t^*=\frac{(2n+1)\pi}{3\omega}=n+0{,}5$

với n = 0, 1, 2, 3,…. (4)

Từ (3): Các thời điểm gặp nhau là:

$T=0\,;\,T\,;\,2T\,;\,3T\,;\,\ldots$ (5)

và $t^*=\frac{T}{6}\,;\,\frac{3T}{6}\,;\,\frac{5T}{6}\,;\,\frac{7T}{6}\,;\ldots$ (6)

Từ (5) và (6) ta được:

$$t=0\,;\frac{T}{6}\,;\frac{3T}{6}\,;\frac{5T}{6}\,;T\,;\frac{7T}{6}\,;\frac{9T}{6}\,;\frac{11T}{6}\,;2T\,;\frac{13T}{6}\,;\ldots$$

Vậy hai vật gặp nhau lần đầu sau lúc khởi hành là:

$$t=\frac{T}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5 \text{ (s)}. ❐$$

➢***Nhận xét.*** Các bạn có lời giải đúng đề ra kì này: **Vĩnh Long:** *Phan Gia Anh*, 12T1, *Nguyễn Minh Long*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Long An:** *Nguyễn Bình An*, 11T2, THPT chuyên Long An; **Hà Nội:** *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ; **Hưng Yên:** *Nguyễn Việt Đức*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 11A, THPT Nam Sách.

ĐINH THÁI QUỲNH

PROBLEMS … *(Tiếp theo trang 17)*

TOWARDS MATHEMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/473. Show that there exist infinitely many positive integers n so that n^2+1 has a prime divisor p which is greater than $2n+\sqrt{10n}$.

Problem T11/473. Given two arbitrary positive integers n and p. Find the number of functions

$$f:\{1,2,3,\ldots,n\}\to\{-p,-p+1,-p+2,\ldots,p\}$$

which satisfy the property $|f(i)-f(j)|\le p$ for any $i,j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Problem T12/473. Given a non-right triangle ABC. Let O and H respectively be the circumcenter and the orthocenter of ABC. Choose an arbitrary point M on (O) so that M is different from A, B, and C. Let N denote the symmetric point of M through BC. Let P be the second intersection between AM and the circumcircle of OMN. Prove that HN goes through the orthocenter of AOP.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science-Vietnam National University, Hanoi)

CÁC MỆNH ĐỀ TỔNG QUÁT
TỪ MỆNH ĐỀ VỀ ĐIỂM FERMAT - TORRICELLI

ĐÀO TAM
(*GV Khoa Toán, ĐH Vinh*)

1. MỞ ĐẦU

Trên Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ (số 420 tháng 6 năm 2012; trang 10) đã giới thiệu bài viết của tác giả *Phạm Huy Hoàng* với nội dung: Khai thác các tính chất của điểm FERMAT - TORRICELLI gắn với mệnh đề sau: "*Nếu về phía ngoài tam giác ABC dựng ba tam giác đều BCA_1; CAB_1; ABC_1 thì ba đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy tại một điểm*" [1].

Trong bài viết này chúng tôi trình bày một số hướng tổng quát mệnh đề [1].

Để tổng quát một mệnh đề toán học hay một bài toán nhiều khi phải tiến hành theo trình tự các bước:

- Thay giả thiết trong mệnh đề hay bài toán xuất phát bằng một giả thiết tổng quát hơn.
- Dự đoán kết luận mới.
- Chọn công cụ chứng minh tương thích với giả thiết và kết quả dự đoán.

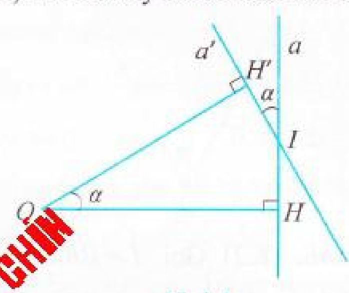
Thực hiện xong các bước trên ta chứng minh được mệnh đề hay bài toán để có kết quả mới.

2. NỘI DUNG

Công cụ sử dụng cho việc tổng quát mệnh đề [1] là các tính chất của phép quay xung quanh một điểm trong mặt phẳng và phép đồng dạng quay, thể hiện qua các mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.1. *Nếu đường thẳng a' là ảnh của đường thẳng a qua phép quay tâm O góc α, với $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa đường thẳng a và a' bằng α.*

Thật vậy, gọi H là hình chiếu của tâm O của phép quay lên đường thẳng a. Khi đó qua phép quay $Q(O;\alpha)$ ảnh của O là chính nó; ảnh của H là H' (h.1). Từ đó suy ra ảnh của OH là OH'.



Hình 1

Do phép quay bảo toàn góc giữa hai đường thẳng và vì $OH \perp a$ nên $OH' \perp a'$. Giả sử đường thẳng a cắt a' tại I. Khi đó tứ giác $OHIH'$ nội tiếp. Suy ra góc giữa a và a' bằng α.

Chú ý. Nếu góc quay lấy theo chiều âm thì góc giữa a và a' bằng $|\alpha|$; $0 \le |\alpha| \le \frac{\pi}{2}$.

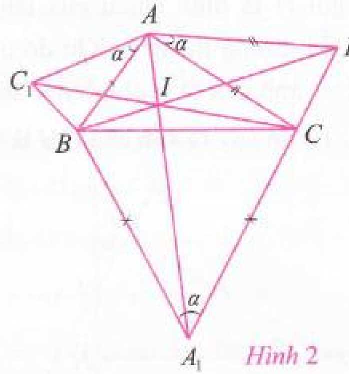
Ta ký hiệu $Đ(O;\alpha;k)$ là phép đồng dạng quay (tích giao hoán được của phép quay $Q(O;\alpha)$ và phép vị tự $V(O;k)$).

Mệnh đề 2.2. *Nếu a' là ảnh của đường thẳng a qua phép $Đ(O;\alpha;k)$ với $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa hai đường thẳng a và a' bằng α.*

Trong mệnh đề [1] giả thiết đã cho là các tam giác BCA_1; CAB_1; ABC_1 đều. Vì mọi cặp tam giác đều thì đồng dạng với nhau và mỗi tam giác đều là trường hợp đặc biệt của tam giác cân. Từ đó chúng ta có hai hướng tổng quát mệnh đề [1].

Hướng 1. Ta có mệnh đề mới tổng quát của [1]

Mệnh đề 2.3. *Nếu về phía ngoài tam giác ABC người ta dựng các tam giác cân ABC_1; A_1BC; AB_1C đồng dạng, lần lượt có các góc ở đỉnh $\widehat{BAC_1}=\widehat{BA_1C}=\widehat{B_1AC}=\alpha;\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ thì các đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy tại điểm I.*

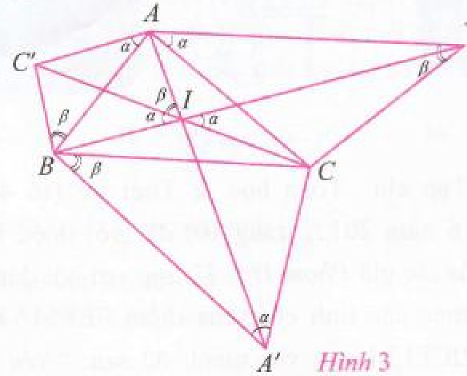


Hình 2

Chứng minh. (h.2) Gọi $I=BB_1\cap CC_1$ ta lập luận chứng tỏ ba điểm A; I; A_1 thẳng hàng. Thật vậy, thực hiện phép quay $Q(A;\alpha)$. Khi đó B là ảnh của C_1 và B_1 là ảnh của C. Từ đó đường thẳng C_1C có ảnh là BB_1. Theo mệnh đề 2.1 ta có $\widehat{BIC_1}=\alpha$. Từ đó tứ giác $BIAC_1$ nội tiếp trong một đường tròn và $\widehat{AIC_1}=\widehat{C_1BA}=\frac{\pi-\alpha}{2}$. Lại có $\widehat{BIC}=\pi-\alpha$ nên tứ giác $BICA_1$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{BIA_1}=\widehat{BCA_1}=\frac{\pi-\alpha}{2}$. Vậy $\widehat{AIC_1}+\widehat{C_1IB}+\widehat{BIA_1}$ $=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+\alpha+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}=\pi$. Suy ra ba điểm A; I; A_1 thẳng hàng. Dễ dàng kiểm tra: $\widehat{AIB}=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}=\widehat{AIC}$; $\widehat{BIC}=\pi-\alpha$. Trong trường hợp đặc biệt nếu $\alpha=60^0$ thì $\widehat{AIB}=\widehat{BIC}=\widehat{CIA}=120^0$. Khi đó I chính là điểm FERMAT - TORRICELLI.

Hướng 2. Do mọi cặp tam giác đều thì đồng dạng với nhau nên ta có mệnh đề 2.4, khái quát của mệnh đề [1] như sau:

Mệnh đề 2.4. *Nếu về phía ngoài tam giác ABC người ta dựng các tam giác AC'B; ACB'; A'CB đôi một đồng dạng với nhau và thỏa mãn $\widehat{BAC'}=\widehat{B'AC}=\widehat{BA'C}=\alpha;\ 0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ thì các đường thẳng AA'; BB'; CC' đồng quy tại điểm I.*



Hình 3

Chứng minh. (h.3) Thực hiện phép đồng dạng quay $Đ\left(A;\alpha;\frac{AB}{AC'}=k\right)$. Qua phép đồng dạng $Đ(A;\alpha;k)$ ảnh của C' là B; ảnh của C là B'. Khi đó BB' là ảnh của đường thẳng $C'C$ qua phép đồng dạng nói trên. Từ đó góc giữa CC' và BB' bằng α. Giả sử CC' cắt BB' tại I và góc $\widehat{C'BA}=\widehat{CBA'}=\widehat{CB'A}=\beta$. Khi đó tứ giác $AIBC'$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{C'IA}=\beta$. Từ đó $\widehat{BIA}=\alpha+\beta$. Để chứng minh ba điểm A; I; A' thẳng hàng ta lập luận chứng tỏ $\widehat{BIA'}=\pi-(\alpha+\beta)$. Thật vậy, từ $\widehat{BIC}+\widehat{BA'C}=(\pi-\alpha)+\alpha=\pi\Rightarrow BICA'$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó $\widehat{BIA'}=\widehat{A'CB}=\pi-(\alpha+\beta)$.

Bạn đọc có thể kiểm tra trực tiếp: Nếu $\alpha=\beta=60^0$ thì I trùng với điểm FERMAT - TORRICELLI và phép đồng dạng quay suy biến thành phép quay $Q(O;60^0)$.

3. KẾT LUẬN

Bạn đọc có thể tìm thấy nhiều mệnh đề, bài toán trong Tạp chí *Toán học Tuổi trẻ* còn ở dạng mở, việc tìm tòi phát hiện để tổng quát hóa các bài toán, các mệnh đề sẽ bổ ích cho việc tự bồi dưỡng năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề, năng lực này đang được quan tâm trong đổi mới giáo dục toán học hiện nay.

XÂY DỰNG CÁC BÀI TOÁN TỪ BẤT ĐẲNG THỨC POPOVICIU VÀ BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

I. BẤT ĐẲNG THỨC POPOVICIU

Trước hết chúng ta nhắc lại một số định nghĩa và định lí cơ bản

Định nghĩa 1. *Cho $\mathbb{I}$ là một tập con của $\mathbb{R}$. Một hàm số $f:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ được gọi là lồi trên $\mathbb{I}$ nếu bất đẳng thức*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

được thỏa mãn với mọi $x,y\in\mathbb{I}$ và $\lambda\in(0,1)$.

Định lí 1. *Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Khi đó, các khẳng định dưới đây là tương đương*

a) $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\le\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ với mọi $x,y\in[a,b]$.

b) $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ với mọi $x,y\in[a,b]$ và $\lambda\in(0,1)$.

c) $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ và $x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$.

d) $f(r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n)\le r_1f(x_1)+r_2f(x_2)+\cdots+r_nf(x_n)$ với mọi $x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$ và $r_1,r_2,\dots,r_n\in\mathbb{Q}^+$ với $r_1+r_2+\cdots+r_n=1$.

e) $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n)$ với mọi $x_1,x_2,\dots,x_n\in[a,b]$ và $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n>0$ với $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$.

Nhận xét 1. Phần (e) của định lí trên chính là bất đẳng thức Jensen suy rộng (weighted Jensen's inequality).

Định lí sau đây là điều kiện đủ cho một hàm số lồi

Định lí 2. *Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là một hàm số liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trong (a,b). Khi đó, nếu $f''(x)\ge 0$ [1] với mọi $x\in(a,b)$ thì f là hàm lồi trên (a,b).*

Chứng minh. Giả sử x,y là hai điểm bất kì thuộc $[a,b]$ với $x<y$. Khi đó, với mọi $\lambda\in(0,1)$ ta có $x<\lambda x+(1-\lambda)y<y$. Theo định lí Lagrange thì tồn tại $\xi\in(x,\lambda x+(1-\lambda)y)$ và $\eta\in(\lambda x+(1-\lambda)y,y)$ sao cho:

$$f'(\xi)=\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{\lambda x+(1-\lambda)y-x}=\frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)},$$

$$f'(\eta)=\frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{y-\lambda x-(1-\lambda)y}=\frac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)}.$$

Vì $f''(x)\ge 0$ với mọi $x\in(a,b)$ nên $f'(x)$ là hàm đồng biến trên (a,b). Do đó $f'(\xi)<f'(\eta)$. Tức là ta có: $\dfrac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)-f(x)}{(1-\lambda)(y-x)}<\dfrac{f(y)-f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{\lambda(y-x)}$.

Nhưng điều này tương đương với

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Điều này chứng tỏ f là hàm lồi trên (a,b).

Năm 1965 nhà toán học người Rumani là *T. Popoviciu* đã chứng minh được kết quả sau đây

Định lí 3 (Popoviciu). *Nếu f là một hàm số lồi trên khoảng (đoạn) $\mathbb{I}$ thì với mọi $x,y,z\in\mathbb{I}$ ta có*

$$f(x)+f(y)+f(z)+3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\ge 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2f\left(\frac{y+z}{2}\right)+2f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

Chứng minh. Do tính đối xứng của các biến nên ta có thể giả sử $x\le y\le z$. Chúng ta xét hai trường hợp

• Nếu $y\ge\dfrac{x+y+z}{3}$ thì $\dfrac{z+x}{2},\dfrac{x+y}{2}\in\left[x,\dfrac{x+y+z}{3}\right]$.

Khi đó, tồn tại hai số $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ sao cho

$$\begin{cases}\dfrac{z+x}{2}=(1-\lambda_1)x+\lambda_1\dfrac{x+y+z}{3},\\ \dfrac{x+y}{2}=(1-\lambda_2)x+\lambda_2\dfrac{x+y+z}{3},\\ \lambda_1+\lambda_2=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức Jensen ta được

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$
$$\le(1-\lambda_2)f(x)+\lambda_2f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)+\frac{f(y)+f(z)}{2}$$
$$+(1-\lambda_1)f(x)+\lambda_1f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

[1] Nhiều tài liệu tiếng Việt quan niệm hàm lồi theo nghĩa ngược lại, tức là $f''(x)\le 0$ với mọi $x\in(a,b)$. Điều này trái ngược với phần lớn các tài liệu toán trên thế giới.

$$=\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{2}+\frac{3}{2}f(\frac{x+y+z}{3}).$$

• Nếu $y\le\frac{x+y+z}{3}$ thì $\frac{z+x}{2},\frac{y+z}{2}\in[\frac{x+y+z}{3},z]$.

Khi đó, tồn tại hai số $\mu_1,\mu_2\in[0,1]$ sao cho

$$\begin{cases}\frac{z+x}{2}=(1-\mu_1)z+\mu_1\frac{x+y+z}{3},\\ \frac{y+z}{2}=(1-\mu_2)z+\mu_2\frac{x+y+z}{3},\\ \mu_1+\mu_2=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen chúng ta có

$$f(\frac{x+y}{2})+f(\frac{y+z}{2})+f(\frac{z+x}{2})\le\frac{f(x)+f(y)}{2}+(1-\mu_2)f(z)$$
$$+\mu_2 f(\frac{x+y+z}{3})+(1-\mu_1)f(z)+\mu_1 f(\frac{x+y+z}{3})$$
$$=\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{2}+\frac{3}{2}f(\frac{x+y+z}{3}).$$

II. ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC POPOVICIU ĐỂ XÂY DỰNG CÁC BÀI TOÁN

• Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{x^n}$ có $f''(x)=\frac{n(n+1)}{x^{n+2}}>0$ với mọi $x>0$. Do đó f là hàm lồi trên khoảng $(0,+\infty)$. Theo bất đẳng thức Popoviciu ta có

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}+3\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^n$$
$$\ge 2\left(\frac{2}{a+b}\right)^n+2\left(\frac{2}{b+c}\right)^n+2\left(\frac{2}{c+a}\right)^n$$

trong đó $a,b,c>0$. Trường hợp $n=1$, ta có kết quả khá đẹp

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}.$$

Kết quả này tương đương với bất đẳng thức quen thuộc sau đây

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Tương tự, với mọi $a,b,c>0$ và mọi số nguyên dương $n\ge 2$, chúng ta có

$$a^n+b^n+c^n+3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$
$$\ge 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n+2\left(\frac{b+c}{2}\right)^n+2\left(\frac{c+a}{2}\right)^n.$$

• Xét hàm số $f(x)=e^x$ có $f''(x)=e^x>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên f là hàm lồi trên $\mathbb{R}$. Do đó với mọi $x,y,x\in\mathbb{R}$ ta có

$$e^x+e^y+e^z+3e^{\frac{x+y+z}{3}}\ge 2e^{\frac{x+y}{2}}+2e^{\frac{y+z}{2}}+2e^{\frac{z+x}{2}}.$$

Từ bất đẳng thức này, thay bộ (x,y,z) bởi $(\ln a,\ln b,\ln c)$ với $a,b,c>0$, ta được

$$a+b+c+3\sqrt[3]{abc}\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

Nhận xét 2. Bất đẳng thức này cũng có thể được chứng minh nhờ bất đẳng thức Schur.

• Xét hàm $f(x)=-\ln x$ có $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ với mọi $x>0$. Suy ra f là hàm lồi trên $(0,+\infty)$. Do đó với mọi $x,y,z>0$ ta có

$$\ln x+\ln y+\ln z+3\ln\frac{x+y+z}{3}$$
$$\le 2\ln\frac{x+y}{2}+2\ln\frac{y+z}{2}+2\ln\frac{z+x}{2},$$
$$\Leftrightarrow \ln(xyz)+3\ln\frac{x+y+z}{3}\le 2\ln\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8},$$
$$\Leftrightarrow xyz.\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\le\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}\right)^2.$$

• Xét hàm $f(x)=-\sqrt[n]{x}\ (n\ge 2)$ có $f''(x)=\frac{n-1}{n^2}x^{\frac{1-2n}{n}}>0$ với mọi $x>0$. Suy ra f là hàm lồi trên $(0,+\infty)$. Do vậy với mọi $a,b,c>0$ ta có

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}+3\sqrt[n]{\frac{a+b+c}{3}}\le 2\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}+2\sqrt[n]{\frac{b+c}{2}}+2\sqrt[n]{\frac{c+a}{2}}.$$

Trường hợp $n=2$, ta có kết quả

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{3(a+b+c)}$$
$$\le\sqrt{2(a+b)}+\sqrt{2(b+c)}+\sqrt{2(c+a)}.$$

• Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ có $f''(x)=\frac{n+1}{n^2x^{\frac{1}{n}+2}}>0$ với mọi $x>0$. Do đó với mọi $a,b,c>0$ ta có

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{b}}+\frac{1}{\sqrt[n]{c}}+3\sqrt[n]{\frac{3}{a+b+c}}$$
$$\ge 2\sqrt[n]{\frac{2}{a+b}}+2\sqrt[n]{\frac{2}{b+c}}+2\sqrt[n]{\frac{2}{c+a}}.$$

Trường hợp $n=2$, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}+3\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{2}{a+b}}+2\sqrt{\frac{2}{b+c}}+2\sqrt{\frac{2}{c+a}}.$$

• Hàm số $f(x)=|x|$ thỏa mãn tính chất

$f(\frac{x+y}{2})\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$ nên nó cũng là một hàm lồi. Vì thế chúng ta có

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\ge|a+b|+|b+c|+|c+a|.$$

Nhận xét 3. Đây chính là một trường hợp riêng của bất đẳng thức Hlawka nổi tiếng.

Xét hàm $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ có $f''(x)=\dfrac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}>0$ với mọi $x\in(0,+\infty)$. Như vậy f là hàm lồi trên $(0,\infty)$. Do đó, theo bất đẳng thức Popoviciu thì với mọi số thực dương a,b,c ta luôn có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}+\frac{3(a+b+c)}{\sqrt{(a+b+c)^2+9}}$$
$$\le\frac{2(a+b)}{\sqrt{(a+b)^2+4}}+\frac{2(b+c)}{\sqrt{(b+c)^2+4}}+\frac{2(c+a)}{\sqrt{(c+a)^2+4}}.$$

• Dễ dàng kiểm tra được rằng hàm số $f(x)=x\ln x$ lồi trên $(0,+\infty)$ nên với mọi $a,b,c>0$ ta có

$$a\ln a+b\ln b+c\ln c+(a+b+c)\ln\frac{a+b+c}{3}$$
$$\ge(a+b)\ln\frac{a+b}{2}+(b+c)\ln\frac{b+c}{2}+(c+a)\ln\frac{c+a}{2}$$
$$\Leftrightarrow a^ab^bc^c\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}\left(\frac{b+c}{2}\right)^{b+c}\left(\frac{c+a}{2}\right)^{c+a}$$
$$\Leftrightarrow\frac{a^ab^bc^c(a+b+c)^{a+b+c}}{(a+b)^{a+b}(b+c)^{b+c}(c+a)^{c+a}}\ge\left(\frac{3}{4}\right)^{a+b+c}.$$

• Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ lồi trên $[0,+\infty)$ vì $f''(x)=\dfrac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}\ge0$ với mọi $x\ge0$. Do đó, theo bất đẳng thức Popoviciu, với mọi $x,y,z\ge0$ ta có

$$\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^y}+\frac{1}{1+e^z}+\frac{3}{1+e^{\frac{x+y+z}{3}}}$$
$$\ge\frac{2}{1+e^{\frac{x+y}{2}}}+\frac{2}{1+e^{\frac{y+z}{2}}}+\frac{2}{1+e^{\frac{z+x}{2}}}.$$

Từ bất đẳng thức này, thay bộ (x,y,z) bởi $(\ln a,\ln b,\ln c)$ với $a,b,c\ge1$, ta được

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$$
$$\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2}{1+\sqrt{bc}}+\frac{2}{1+\sqrt{ca}}.$$

• Xét hàm $f(x)=-\sin x$ có $f''(x)=\sin x>0$ với mọi $x\in(0,\pi)$ nên f lồi trên $(0,\pi)$. Thế thì với mọi $x,y,z\in(0,\pi)$ ta có

$$\sin x+\sin y+\sin z+3\sin\frac{x+y+z}{3}$$
$$\le2\sin\frac{x+y}{2}+2\sin\frac{y+z}{2}+2\sin\frac{z+x}{2}.$$

Thay (x,y,z) bởi (A,B,C) với A,B,C là ba góc của một tam giác, ta thu được

$$\sin A+\sin B+\sin C+\frac{3\sqrt3}{2}\le2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right).$$

Hoàn toàn tương tự, chúng ta cũng xây dựng được

$$\cos A+\cos B+\cos C+\frac{3}{2}\le2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

trong đó A,B,C là ba góc của tam giác nhọn ABC.

• Xét hàm $f(x)=\tan x$ có $f''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3x}>0$ với mọi $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Nghĩa là f lồi trên $(0,\frac{\pi}{2})$. Từ đó suy ra:

$$\tan x+\tan y+\tan z+3\tan\frac{x+y+z}{3}$$
$$\ge2\tan\frac{x+y}{2}+2\tan\frac{y+z}{2}+2\tan\frac{z+x}{2}$$

trong đó $x,y,z\in(0,\frac{\pi}{2})$. Thay (x,y,z) bởi $\left(\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\right)$ với A,B,C là ba góc của một tam giác, thì thu được

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\sqrt3$$
$$\ge2\left(\tan\frac{A+B}{4}+\tan\frac{B+C}{4}+\tan\frac{C+A}{4}\right).$$

• Tương tự như thế, đối với hàm $f(x)=\cot x$ chúng ta cũng có:

$$\cot x+\cot y+\cot z+3\cot\frac{x+y+z}{3}$$
$$\ge2\cot\frac{x+y}{2}+2\cot\frac{y+z}{2}+2\cot\frac{z+x}{2}$$

với $x,y,z\in(0,\frac{\pi}{2})$. Từ đây cũng suy ra được

$$\cot A+\cot B+\cot C+\sqrt3\ge2\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

ở đó A,B,C là ba góc của một tam giác nhọn.

Tương tự như trên, nhờ bất đẳng thức Popoviciu ta cũng xây dựng được cho hàm lồi (trên $[0,\infty)$) $f(x)=xe^x$ như sau

$$ae^a+be^b+ce^c+(a+b+c)e^{\frac{a+b+c}{3}}$$
$$\ge(a+b)e^{\frac{a+b}{2}}+(b+c)e^{\frac{b+c}{2}}+(c+a)e^{\frac{c+a}{2}}$$

ở đó $a,b,c\ge0$. Từ đây ta lại thay thế (a,b,c) bởi $(\ln x,\ln y,\ln z)$ với $x,y,z\ge1$ thì thu được

$$x\ln x+y\ln y+z\ln z+\sqrt[3]{xyz}\ln(xyz)$$
$$\ge\sqrt{xy}\ln(xy)+\sqrt{yz}\ln(yz)+\sqrt{zx}\ln(zx)$$

hay $x^xy^yz^z(xyz)^{\sqrt[3]{xyz}}\ge(xy)^{\sqrt{xy}}(yz)^{\sqrt{yz}}(zx)^{\sqrt{zx}}$.

III. XÂY DỰNG CÁC BÀI TOÁN TỪ BẤT ĐẲNG THỨC JENSEN

• Từ hai hàm số lồi $f(x)=x^n$ và $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$, kết hợp với bất đẳng thức Jensen, chúng ta suy ra: với $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$ thì với mọi $x,y,z>0$ ta luôn có

$$ax^n+by^n+cz^n\ge(ax+by+cz)^n,$$

$$\frac{a}{x^n}+\frac{b}{y^n}+\frac{c}{z^n}\ge\frac{1}{(ax+by+cz)^n}.$$

Chọn $x=a,y=b,z=c$ ta được

$$a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\ge(a^2+b^2+c^2)^n,$$

$$\frac{1}{a^{n-1}}+\frac{1}{b^{n-1}}+\frac{1}{c^{n-1}}\ge\frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^n}.$$

Chọn $x=b+c,y=c+a,z=a+b$ thì được

$$\frac{a(b+c)^n+b(c+a)^n+c(a+b)^n}{(ab+bc+ca)^n}\ge 2^n,$$

$$(ab+bc+ca)^n.\left[\frac{a}{(b+c)^n}+\frac{b}{(c+a)^n}+\frac{c}{(a+b)^n}\right]\ge\frac{1}{2^n}.$$

Chọn $x=\dfrac{bc}{a},y=\dfrac{ca}{b},z=\dfrac{ab}{c}$ ta được

$$a\left(\frac{bc}{a}\right)^n+b\left(\frac{ca}{b}\right)^n+c\left(\frac{ab}{c}\right)^n\ge(ab+bc+ca)^n,$$

$$a\left(\frac{a}{bc}\right)^n+b\left(\frac{b}{ca}\right)^n+c\left(\frac{c}{ab}\right)^n\ge\frac{1}{(ab+bc+ca)^n}.$$

Chọn $x=\dfrac{b+c}{a},y=\dfrac{c+a}{b},z=\dfrac{a+b}{c}$ ta được

$$a\left(\frac{b+c}{a}\right)^n+b\left(\frac{c+a}{b}\right)^n+c\left(\frac{a+b}{c}\right)^n\ge 2^n,$$

$$a\left(\frac{a}{b+c}\right)^n+b\left(\frac{b}{c+a}\right)^n+c\left(\frac{c}{a+b}\right)^n\ge\frac{1}{2^n}.$$

• Tương tự như trên, sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hai hàm số $f(x)=-\sqrt[n]{x}$ và $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$ đều lồi trên $(0,+\infty)$, chúng ta có

$$a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{y}+c\sqrt[n]{z}\le\sqrt[n]{ax+by+cz},$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{x}}+\frac{b}{\sqrt[n]{y}}+\frac{c}{\sqrt[n]{z}}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{ax+by+cz}},$$

trong đó $a,b,c,x,y,z>0$ và $a+b+c=1$. Từ đây, ta lại thay bộ (x,y,z) lần lượt bởi $(a,b,c),\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}\right),(b+c,c+a,a+b),\left(\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b},\dfrac{ab}{c}\right),$ $\left(\dfrac{b+c}{a},\dfrac{c+a}{b},\dfrac{a+b}{c}\right)$ thì thu được

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\le a\sqrt[n]{a}+b\sqrt[n]{b}+c\sqrt[n]{c}\le\sqrt[n]{a^2+b^2+c^2},$$

$$\sqrt[n]{3}\ge\frac{a}{\sqrt[n]{a}}+\frac{b}{\sqrt[n]{b}}+\frac{c}{\sqrt[n]{c}}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{a^2+b^2+c^2}},$$

$$\frac{a\sqrt[n]{b+c}+b\sqrt[n]{c+a}+c\sqrt[n]{a+b}}{\sqrt[n]{ab+bc+ca}}\le\sqrt[n]{2},$$

$$\sqrt[n]{ab+bc+ca}.\left(\frac{a}{\sqrt[n]{b+c}}+\frac{b}{\sqrt[n]{c+a}}+\frac{c}{\sqrt[n]{a+b}}\right)\ge\frac{1}{\sqrt[n]{2}},$$

$$a\sqrt[n]{\frac{bc}{a}}+b\sqrt[n]{\frac{ca}{b}}+c\sqrt[n]{\frac{ab}{c}}\le\sqrt[n]{ab+bc+ca},$$

$$a\sqrt[n]{\frac{a}{bc}}+b\sqrt[n]{\frac{b}{ca}}+c\sqrt[n]{\frac{c}{ab}}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{ab+bc+ca}},$$

$$a\sqrt[n]{\frac{b+c}{a}}+b\sqrt[n]{\frac{c+a}{b}}+c\sqrt[n]{\frac{a+b}{c}}\le\sqrt[n]{2},$$

$$a\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+b\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+c\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}\ge\frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Mặt khác, nếu chọn $x=a^2+8bc,y=b^2+8ca,z=c^2+8ab$ thì hai bất đẳng thức trên trở thành

$$a\sqrt[n]{a^2+8bc}+b\sqrt[n]{b^2+8ca}+c\sqrt[n]{c^2+8ab}$$
$$\le\sqrt[n]{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}$$
$$=\sqrt[n]{a^3+b^3+c^3+24abc}$$
$$\le\sqrt[n]{a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)}=\sqrt[n]{(a+b+c)^3}=1.$$

Đặc biệt, bài bất đẳng thức IMO năm 2001 là một trường hợp riêng của bài toán trên, khi $n=2$,

$$a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}\le(a+b+c)^2,$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1.$$

• Khi $abc=1$ chúng ta có đồng nhất thức:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=1.$$

Do đó với f là một hàm số lồi và $a,b,c,x,y,z>0$ chúng ta có:

$$\frac{f(x)}{1+a+ab}+\frac{f(y)}{1+b+bc}+\frac{f(z)}{1+c+ca}\ge f\left(\frac{x}{1+a+ab}+\frac{y}{1+b+bc}+\frac{z}{1+c+ca}\right).$$

Chọn f là những hàm ở trên thì được

$$\frac{x^n}{1+a+ab}+\frac{y^n}{1+b+bc}+\frac{z^n}{1+c+ca}\ge\left(\frac{x}{1+a+ab}+\frac{y}{1+b+bc}+\frac{z}{1+c+ca}\right)^n,$$

và

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{1+a+ab}+\frac{\sqrt[n]{y}}{1+b+bc}+\frac{\sqrt[n]{z}}{1+c+ca}\le\sqrt[n]{\frac{x}{1+a+ab}+\frac{y}{1+b+bc}+\frac{z}{1+c+ca}}.$$

Từ đây ta lại tiếp tục lấy $(x,y,z)=(a,b,c)$ để thu được: $\dfrac{a^n}{1+a+ab}+\dfrac{b^n}{1+b+bc}+\dfrac{c^n}{1+c+ca}\ge 1,$

và $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{1+a+ab}+\dfrac{\sqrt[n]{b}}{1+b+bc}+\dfrac{\sqrt[n]{c}}{1+c+ca}\le 1.$

Sử dụng bất đẳng thức Jensen với hàm lồi $f(x)=x\ln x$ ta cũng có

$ax\ln x+by\ln y+cz\ln z\ge(ax+by+cz)\ln(ax+by+cz),$ ở đó $a,b,c,x,y,z>0$ và $a+b+c=1.$ Hay có thể viết dưới dạng: $x^{ax}\cdot y^{by}\cdot z^{cz}\ge(ax+by+cz)^{ax+by+cz}.$

Lại thay bộ (x,y,z) lần lượt bởi (a,b,c), $(b+c,c+a,a+b)$, $\left(\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b},\dfrac{ab}{c}\right)$, $\left(\dfrac{b+c}{a},\dfrac{c+a}{b},\dfrac{a+b}{c}\right)$ thì được: $a^{a^2}b^{b^2}c^{c^2}\ge(a^2+b^2+c^2)^{a^2+b^2+c^2},$

$$(b+c)^{a(b+c)}\cdot(c+a)^{b(c+a)}\cdot(a+b)^{c(a+b)}\ge(2ab+2bc+2ca)^{2ab+2bc+2ca},$$

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^{bc}\cdot\left(\frac{ca}{b}\right)^{ca}\cdot\left(\frac{ab}{c}\right)^{ab}\ge(ab+bc+ca)^{ab+bc+ca},$$

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)^{b+c}\cdot\left(\frac{c+a}{b}\right)^{c+a}\cdot\left(\frac{a+b}{c}\right)^{a+b}\ge 4.$$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm $f(x)=\ln x$, ta được

$$\alpha_1\ln x_1+\alpha_2\ln x_2+\cdots+\alpha_n\ln x_n\le\ln(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)$$

$$\Leftrightarrow x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\le\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$$

trong đó $\alpha_i>0, x_i>0$ và $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1.$

Nhận xét 4. Đây chính là bất đẳng thức AM-GM suy rộng (weighted AM-GM inequality) mà chúng ta đã biết. Ngoài ra nó cũng có thể được xây dựng từ hàm lồi $f(x)=e^x$.

Trường hợp $n=3$, chúng ta có (với $a,b,c,x,y,z>0$ và $a+b+c=1$): $ax+by+cz\ge x^ay^bz^c$.

Lần lượt thay (x,y,z) bởi (a,b,c), $\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}\right)$, (b,c,a), (c,a,b), $(b+c,c+a,a+b)$, $\left(\dfrac{bc}{a},\dfrac{ca}{b},\dfrac{ab}{c}\right)$, $\left(\dfrac{b+c}{a},\dfrac{c+a}{b},\dfrac{a+b}{c}\right)$ thì thu được:

$$a^2+b^2+c^2\ge a^ab^bc^c\ge\frac{1}{3}\ge\max\{b^ac^ba^c,a^bb^cc^a\},$$

$$2(ab+bc+ca)\ge(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c,$$

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^a\cdot\left(\frac{ca}{b}\right)^a\cdot\left(\frac{ab}{c}\right)^c\le ab+bc+ca,$$

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)^a\cdot\left(\frac{c+a}{b}\right)^b\cdot\left(\frac{a+b}{c}\right)^c\le 2.$$

Từ dãy bất đẳng thức đầu tiên có thể suy ra

$$\min\{a^{a-b}b^{b-c}c^{c-a},a^{a-c}b^{b-a}c^{c-b}\}\ge 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng chúng ta dễ dàng xây dựng được bài toán

$$a^ab^bc^c+a^bb^cc^a+a^cb^ac^b\le(a+b+c)^2=1.$$

Theo phần trên, hàm số $f(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ cũng lồi trên $(0,+\infty)$ nên với mọi $a,b,c,x,y,z>0$ và $a+b+c=1$, ta có

$$\frac{ax}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{by}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{cz}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{ax+by+cz}{\sqrt{(ax+by+cz)^2+1}}.$$

Nếu ta chọn $a=b=c=1/3$ thì được

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\le\frac{3(x+y+z)}{\sqrt{(x+y+z)^2+9}}.$$

Còn nếu ta lại thay (x,y,z) lần lượt bởi

(a,b,c), $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$, $(\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{b}},\frac{1}{\sqrt{c}})$, (bc,ca,ab), $(\frac{bc}{a},\frac{ca}{b},\frac{ab}{c})$, $(b+c,c+a,a+b)$, $(\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b},\frac{a+b}{c})$ thì thu được:

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+1}}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2+1}},$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+1}}\le\frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\frac{a}{\sqrt{a+1}}+\frac{b}{\sqrt{b+1}}+\frac{c}{\sqrt{c+1}}\le\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+1)}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2c^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2b^2+1}}\le\frac{3}{\sqrt{9a^2b^2c^2+1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2a^2+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2b^2+c^2}}\le\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\sqrt{(ab+bc+ca)^2+1}},$$

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{(b+c)^2+1}}+\frac{b(c+a)}{\sqrt{(c+a)^2+1}}+\frac{c(a+b)}{\sqrt{(a+b)^2+1}}\le\frac{2(ab+bc+ca)}{\sqrt{4(ab+bc+ca)^2+1}}.$$

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}+\frac{b(c+a)}{\sqrt{b^2+(c+a)^2}}+\frac{c(a+b)}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}}\le\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Trong bất đẳng thức trên, khi chúng ta thay bộ (x,y,z) bởi $\left(\dfrac{x}{a},\dfrac{y}{b},\dfrac{z}{c}\right)$ thì nhận được kết quả

$$\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{by}{\sqrt{b^2+y^2}}+\frac{cz}{\sqrt{c^2+z^2}}\le\frac{x+y+z}{\sqrt{(x+y+z)^2+1}}.$$

Chọn $x=1,y=2,z=3$ ta có một hệ quả trực tiếp là

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{2b}{\sqrt{b^2+4}}+\frac{3c}{\sqrt{c^2+9}}\le\frac{6}{\sqrt{37}}.$$

Hay có thể chọn $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{6}\ (a+b+c=1)$ thì thu được

$$\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+9y^2}}+\frac{z}{\sqrt{1+36z^2}}\le\frac{x+y+z}{\sqrt{(x+y+z)^2+1}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lõm $f(x)=\ln x$ với $a,b,c>0$ ta có

$$\frac{a}{a+b+c}\ln a+\frac{b}{a+b+c}\ln b+\frac{c}{a+b+c}\ln c\le\ln\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^ab^bc^c\le\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

Từ đây, cho thêm điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$ thì thu được: $a^ab^bc^c(a+b+c)^{a+b+c}\le 1$.

Còn nếu cho điều kiện $a+b+c=1$ thì lại được

$$a^ab^bc^c\le a^2+b^2+c^2.$$

Tương tự nhờ bất đẳng thức Jensen và hàm $f(x)=xe^x$ lồi trên $(0,+\infty)$ ta xây dựng được

$$axe^x+bye^y+cze^z\ge(ax+by+cz)e^{ax+by+cz}$$

ở đó $a,b,c,x,y,z\ge 0$ và $a+b+c=1$. Ta cũng sẽ tiến hành thay (x,y,z) bởi $(\ln u,\ln v,\ln w)$ với $u,v,w\ge 1$ để thu được: $u^{au}v^{bv}w^{cw}\ge(u^av^bw^c)^{u^av^bw^c}$.

Chọn $a=b=c=\frac{1}{3}$ thì $\sqrt[3]{u^uv^vw^w}\ge(\sqrt[3]{uvw})^{\sqrt[3]{uvw}}$.

Chọn $(u,v,w)=(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$ thì $(a^ab^bc^c)^{a^{-a}b^{-b}c^{-c}}\ge abc$.

Cũng sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm số $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ lồi trên $[0,+\infty)$, với $a_i>0, x_i\ge 0$ và $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, chúng ta có

$$\frac{a_1}{1+e^{x_1}}+\frac{a_2}{1+e^{x_2}}+\cdots+\frac{a_n}{1+e^{x_n}}\ge\frac{1}{1+e^{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}}.$$

Thay $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ bởi $(\ln x_1,\ln x_2,\dots,\ln x_n)$ với điều kiện $x_i\ge 1$, ta được

$$\frac{a_1}{1+x_1}+\frac{a_2}{1+x_2}+\cdots+\frac{a_n}{1+x_n}\ge\frac{1}{1+x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}}.$$

Nếu chọn $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ thì thu được

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\ge\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}},$$

đây chính là một bài toán trong IMO Shortlist 1998 (do Australia đề nghị). Xét riêng trường hợp $n=3$ và chọn $a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{1}{3},a_3=\frac{1}{6}$, ta có

$$\frac{3}{1+a^2}+\frac{2}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^6}\ge\frac{6}{1+abc},$$

ở đó $a,b,c\ge 1$. Đây cũng là một bài toán rất quen thuộc.

• Ta tiếp tục chọn hàm $f(x)=\ln(1+e^x)$. Dễ dàng kiểm tra được f là hàm lồi. Do đó (theo bất đẳng thức Jensen) với $a_i>0$ và $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$, ta có

$$a_1\ln(1+e^{x_1})+\cdots+a_n\ln(1+e^{x_n})\ge\ln(1+e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}).$$

hay $(1+e^{x_1})^{a_1}\cdots(1+e^{x_n})^{a_n}\ge 1+e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}$.

Ta lại tiến hành thay $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ bởi $(\ln x_1,\ln x_2,\dots,\ln x_n)$ trong đó $x_i>0$ thì thu được

$$(1+x_1)^{a_1}\cdots(1+x_n)^{a_n}\ge 1+x_1^{a_1}\cdots x_n^{a_n}.$$

Nếu lấy $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ thì

$$\sqrt[n]{(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)}\ge 1+\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

Đây chính là một hệ quả quả quen thuộc của bất đẳng thức Holder. Xét riêng trường hợp $n=3$, và với $x,y,z>0$; $a,b,c>0$; $a+b+c=1$ ta có

$$(1+x)^a(1+y)^b(1+z)^c\ge 1+x^ay^bz^c.$$

Đặc biệt hóa bất đẳng thức này bằng cách chọn $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{6}$ thì

$$\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+y}\sqrt[6]{1+z}\ge 1+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[6]{z}.$$

Lặp lại quá trình trên đối với các hàm lồi $f(x)=\sqrt{1+e^x}$ và $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})$, chúng ta cũng thu được một số kết quả hay (việc tìm các kết quả này dành cho bạn đọc).

Để kết thúc bài viết chúng tôi xin mời bạn đọc luyện tập một số bài toán nhẹ nhàng dưới đây

Bài 1 (Belarus, 1995) Cho $0<a,b<1$ và $p,q\ge 0$ thỏa mãn $p+q=1$. Chứng minh rằng

$$a^pb^q+(1-a)^p(1-b)^q\le 1.$$

Bài 2 Cho $a_1,a_2,\dots,a_n$ là các số thực không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}+a_1^{a_2}a_2^{a_3}\cdots a_n^{a_1}+\cdots+a_1^{a_n}a_2^{a_1}\cdots a_n^{a_{n-1}}\le 1.$$

Bài 3 Cho tam giác ABC có chu vi bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{r}{a^2+b^2+c^2}\le(h_a)^a(h_b)^b(h_c)^c\le 3r.$$

Bài 4 Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a^{-a}b^{-b}c^{-c}+a^{-b}b^{-c}c^{-a}+a^{-c}b^{-a}c^{-b}\le a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}.$$

Bài 5 Cho hai số thực dương a,b có tổng bằng 1. Chứng minh rằng $a^bb^a\le\frac{1}{2}\le a^ab^b$.

Kết quả cuộc thi GIẢI TOÁN và VẬT LÍ
TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ năm học 2015-2016

LTS. Cuộc thi giải Toán và Vật lý năm học 2015-2016 trên Tạp chí TH&TT được khởi động từ tháng 9 năm 2015 đến tháng 8 năm 2016. Cuộc thi này được nhiều bạn trẻ yêu Toán và Vật lý cấp THCS và THPT trên cả nước tham gia giải bài rất sôi nổi. **Hà Nội, Vĩnh Phúc, Phú Thọ, Nam Định, Nghệ An, Quảng Ngãi** là những tỉnh, thành phố có đông học sinh tham gia và đoạt nhiều giải cao hơn cả. Giải Xuất sắc về môn Toán thuộc về bạn: *Trần Bá Khôi*, 11 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP **Hà Nội**. Giải Nhất môn Vật lý thuộc về hai bạn: *Trần Hữu Hoàng*, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG **Hà Nội**, *Phạm Ngọc Nam*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**. Chúc mừng tất cả các bạn đoạt giải cuộc thi. Hẹn gặp các bạn ở cuộc thi tiếp theo trong năm học 2016-2017. Sau đây là danh sách **81** bạn đoạt giải Toán và **16** bạn đoạt giải Vật lí năm học 2015-2016.

MÔN TOÁN

☆ Giải Xuất sắc (1 giải)

Trần Bá Khôi, 11 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Hà Nội**.

☆ Giải Nhất (4 giải)

1. *Nguyễn Đình Tuấn*, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
2. *Đặng Thanh Tùng*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
3. *Phạm Quốc Thắng*, 10T1, THPT chuyên Long An, **Long An**.
4. *Trần Quang Minh*, 10A1, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy, **Thái Bình**.

☆ Giải Nhì (15 giải)

1. *Đinh Hoàng Nhật Minh*, 7A5, THCS Cầu Giấy, Quận Cầu Giấy, **Hà Nội**.
2. *Trần Quốc Lập*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.
3. *Đặng Quang Anh*, 8A, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn, **Thanh Hóa**.
4. *Nguyễn Văn Cao*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
5. *Vũ Đức Văn*, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Hà Nội**.
6. *Dương Hồng Sơn*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, **Hưng Yên**.
7. *Nguyễn Đức Thuận*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.
8. *Đỗ Tài Quyết*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
9. *Triệu Ninh Ngân*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, **Hưng Yên**.
10. *Hoàng Nhật Tuấn*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, **Quảng Bình**.
11. *Nguyễn Đức Bảo*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
12. *Vũ Hồng Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**.
13. *Đoàn Thị Nhài*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
14. *Hoàng Lê Nhật Tùng*, 11 Toán 2, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**.
15. *Trần Nhật Quang*, 11A2 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**.

☆ Giải Ba (19 giải)

1. *Tạ Kim Thanh Hiền*, 7A4, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
2. *Đỗ Thị Mỹ Lan*, 8A, THCS Phạm Văn Đồng, **Quảng Ngãi**.
3. *Nguyễn Văn Mạnh*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.

4. *Phạm Ngọc Hoa*, 8A1, THCS Sông Lô, Sông Lô, **Vĩnh Phúc**.
5. *Trần Quốc Phương*, 9A, THCS Thị trấn Thường Xuân, **Thanh Hóa.**
6. *Nguyễn Ngọc Khánh Như*, 9A, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, TP Kon Tum, **Kon Tum**.
7. *Nguyễn Minh Hiếu*, 9D, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.
8. *Phùng Văn Nam*, 9E, THCS Vĩnh Yên, TP. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**.
9. *Tạ Khánh Hà*, 11 Toán 1, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Hà Nội**.
10.*Hà Hữu Linh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.
11.*Nguyễn Phùng Thái Cường*, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, **Nghệ An**.
12.*Trần Minh Hiếu*, 10T2, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.
13. *Cao Hữu Đạt*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**.
14.*Lê Anh Thành*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội**.
15.*Nguyễn Hồng Quốc Khánh*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, **Nghệ An**.
16.*Nghiêm Chi*, 11A1K10, THPT Yên Phong 2, **Bắc Ninh**.
17.*Đỗ Thùy Anh*, 11T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.
18.*Phạm Ngọc Khánh*, 11T, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội, **Hà Nội**.
19.*Lê Huy Cường*, 12 Toán, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

☆ Giải Khuyến khích (42 giải)

1. *Nguyễn Hà Khánh Nam*, 6A3, Trường Hanoi Academy, Quận Từ Liêm, **Hà Nội**.
2. *Lê Tuấn Kiệt*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, **Quảng Ngãi**.
3. *Nguyễn Thị Linh Đan*, 6D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
4. *Nguyễn Hoàng Kim Ánh*, 6A, THCS Hành Trung, **Quảng Ngãi**.
5. *Phạm Thị Thu Nhung*, 6A, THCS Phạm Văn Đồng, **Quảng Ngãi**.
6. *Mai Thị Thu Thảo*, 6C, THCS Thị trấn. Sông Vệ, **Quảng Ngãi**.
7. *Cao Thị Khánh Linh*, 6B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**.
8. *Nguyễn Chí Công*, 7A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.
9. *Nguyễn Trọng Bằng*, 8A2, THCS Thị trấn Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**.
10. *Trần Thị Thu Huyền*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.
11. *Tăng Văn Minh Hùng*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
12.*Nguyễn Hoàng Phi*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.
13. *Nguyễn Thảo Chi*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, **Phú Thọ**.
14. *Nguyễn Thị Hoàng Cúc*, 8D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**.
15. *Võ Thị Hồng Kiều*, 8A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi**.
16.*Nguyễn Thành Long*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
17.*Nguyễn Thị Kiều Mẫn*, 9B, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.
18.*Bùi Thị Liễu Dương*, 9A4, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**.
19. *Hoàng Trần Đức*, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An**.
20.*Vương Tiến Đạt*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Nội**.
21.*Trần Văn Thiên*, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.
22.*Phan Xuân Thành Lâm*, 10T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên**.
23.*Nguyễn Minh Hải*, 10T, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.
24.*Châu Minh Khánh*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**.
25. *Ngô Lê Phương Trinh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.
26. *Nguyễn Thị Linh*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**.
27. *Vũ Duy Mạnh*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

28. *Đặng Thành Trung*, 10T2, THPT chuyên Long An, **Long An**.

29. *Nguyễn Tiến Long*, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, TP. Việt Trì, **Phú Thọ**.

30. *Trương Nhật Nguyên Bảo*, 10/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Quảng Nam**.

31. *Hoàng Công Minh*, 10 Toán 1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**.

32. *Nguyễn Huỳnh Huy Mân*, 10 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh, TP. Tuy Hòa, **Phú Yên**.

33. *Nguyễn Kim Hoàng*, 10A12, THPT Nguyễn Trãi, Ninh Đa, Ninh Hòa, **Khánh Hòa**.

34. *Nguyễn Phúc Hoàng*, 10A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.

35. *Nguyễn Đình Lương*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**.

36. *Nguyễn Bá Tuân*, 10A5, THPT Lương Đắc Bằng, **Thanh Hóa**.

37. *Nguyễn Thanh Kim Ngân*, 10T, THPT Cư M'Gar, huyện Cư M'Gar, **Đăk Lăk**.

38. *Phan Trần Hưởng*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế, **Thừa Thiên Huế**.

39. *Nguyễn Thị Thanh Lan*, 11A8, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.

40. *Vũ Bá Sang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, **Hà Nội**.

41. *Nguyễn Thanh Hiếu*, 11T, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

42. *Bùi Công Minh*, AK11, THPT chuyên Quang Trung, **Bình Phước**.

MÔN VẬT LÝ

☆ Giải Nhất (2 giải)

1. *Trần Hữu Hoàng*, 11A1 Lý, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, **Hà Nội**.

2. *Phạm Ngọc Nam*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

☆ Giải Nhì (4 giải)

1. *Nguyễn Mạnh Hiệp*, 11A9, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, **Hưng Yên**.

2. *Ngô Văn Khoa*, 12A2, THPT Bắc Đông Quan, Đông Hưng, **Thái Bình**.

3. *Nguyễn Nam Khánh*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. **Nam Định**.

4. *Nguyễn Văn Quân*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. **Nam Định**.

☆ Giải Ba (10 giải)

1. *Nguyễn Văn Dũng*, 10A14, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, **Hà Nội**.

2. *Nguyễn Kim Hoàng*, 10A12, THPT Nguyễn Trãi, Ninh Đa, Ninh Hoà, **Khánh Hòa**.

3. *Lê Cao Anh*, 10F, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hoá**.

4. *Nguyễn Đắc Nam*, 11 Lý, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh**.

5. *Vũ Hoàng Yến*, 11A7, THPT Uông Bí, **Quảng Ninh**.

6. *Đỗ Thùy Trang*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

7. *Vũ Minh Thành*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên, **Hưng Yên**.

8. *Trần Trung Đức*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

9. *Hồ Thanh Tùng*, 12 C1, THPT Kim Liên, Nam Đàn, **Nghệ An**.

10. *Đỗ Thuỳ Trang*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định**.

Các bạn đoạt giải Toán và Vật Lý nhớ gửi gấp địa chỉ mới của mình về Tòa soạn hoặc liên hệ trực tiếp qua số điện thoại (04) 35121606 để nhận Giấy Chứng nhận và tặng phẩm của Tạp chí.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài số 14

Problem. *Find the number of natural numbers such that in their decimal representations, the digits are strictly decreasing from left to right.*

Remark. There are several solutions for this problem. The following one is suggested by two students *T. Hoang* and *D. Bac* (grade 12, HSGS).

Solution. Consider the following sequence 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0. There are 10 positions to place the digits 9, 8, ..., 1, 0. Now, the given problem is reduced to the following one: among 10 positions, we will choose a few (at least one) positions to place the number "1" in and we place "0" in the remain positions. For example, the number 9410 corresponds to 1000010011; 3 corresponds to 0000001000, and so on,...

There are $2^{10} - 1 = 1023$ such binary sequences (we do not count the binary sequence 0000000000). Therefore there are 1023 required numbers.

TỪ VỰNG

natural numbers : số tự nhiên
decimal representation : biểu diễn thập phân
digit : chữ số
HSGS (High school for gifted students):
Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội
sequence : dãy số
correspond : tương ứng
binary : nhị phân

NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN
(Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

BÀI DỊCH SỐ 11

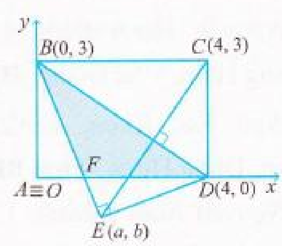
Bài toán. *Cho mảnh giấy hình chữ nhật kích thước 15 cm × 20 cm, ta gấp nó dọc theo một đường chéo. Tính diện tích phần chung của hai nửa mặt giấy? (Câu 12, Đề thi HOMC 2014).*

Lưu ý. Chúng ta đã đưa ra một lời giải cho bài toán này. Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra một lời giải khác bằng cách sử dụng hình học giải tích.

Solution. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta cần diện tích tam giác *BFD*. Vì chúng ta đã biết độ dài đường cao *BA* của tam giác này, bài toán quy về tính cạnh đáy *FD*. Điều này sẽ thực hiện được nếu tìm được tọa độ của điểm *F*. Cách tìm như sau: Trước tiên ta tìm tọa độ của điểm *E*, sau đó viết PT đường thẳng qua *B* và *E*. Giao điểm của đường thẳng này với trục tọa độ *Ox* là điểm *F*.

Tìm E: Ta có *BE* vuông góc với *DE*, do đó *BD* vuông góc với *CE*. Các tính chất hình học sau được chuyển qua tính chất đại số: $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{DE} = 0$ và $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD} = 0$. Giả sử tọa độ điểm *E* là (a, b). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(a-4)+b(b-3) = 0 & (1) \\ (a-4)4+(b-3)(-3)=0 & (2) \end{cases}$$



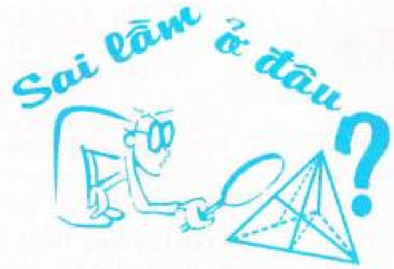
Từ (2) có $b = \dfrac{4a-7}{3}$. Thay $b = \dfrac{4a-7}{3}$ vào (1), ta được một phương trình bậc hai ẩn là *a*. Giải phương trình này ta được $a = 4$ hoặc $a = \dfrac{28}{25}$. Vì vậy $a = \dfrac{28}{25}$ là hoành độ của điểm *E* (ta không chọn $a = 4$ vì $E \equiv C$). Suy ra $b = \dfrac{-21}{25}$.

Phương trình đường thẳng qua B và E: $\dfrac{x}{\frac{28}{25}} = \dfrac{y-3}{\frac{-21}{25}-3}$ (3). *Tìm hoành độ F*: Thay $y = 0$ vào (3), ta được $x = \dfrac{7}{8}$. Từ đó $FD = 4 - \dfrac{7}{8} = \dfrac{25}{8}$. Do đó diện tích tam giác *BFD* (trong hình vẽ) là $\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{25}{8} = \dfrac{75}{16}$.

Vậy diện tích cần tính ở đề bài là $25\cdot\dfrac{75}{16} = \dfrac{1875}{16}$ (ta phải nhân thêm với 25 vì hình chữ nhật xét trong lời giải có kích thước 3cm × 4cm, còn mảnh giấy hình chữ nhật ở đề bài có kích thước 15cm × 20cm).

Nhận xét. Các bạn sau có lời dịch tốt hơn cả: **Hải Dương:** *Nguyễn Đặng Sơn*, 11A, THPT Nam Sách; **Hưng Yên:** *Triệu Quốc Tùng*, 11A3, *Nguyễn Việt Đức*, 11A9, *Lê Văn Trang*, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** *Mai Thị Kim Chi*, 11A1, THPT Cửa Lò, TX. Cửa Lò; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 10A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Vĩnh Long:** *Lê Minh Quân*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)



GIẢI ĐÁP: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, ĐÚNG CHƯA ?

(Đề đăng trên TH&TT số 469, tháng 7 năm 2016)

Phân tích. Lời giải sai lầm ở chỗ dấu "=" ở các BĐT không xảy ra, cụ thể:

$$\max f(x)=7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=-1 \\ \dfrac{8}{x+1}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases} \text{: vô lý;}$$

$$\min f(x)=-\frac{7}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=-5 \\ \dfrac{8}{x+1}=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \text{: vô lý.}$$

Lời giải đúng. Ta có:

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x+1}=2(x+1)+\frac{8}{x+1}-7.$$

Vì $0\le x\le 2$ nên áp dụng BĐT Cauchy ta được:

$$f(x)\ge 2\sqrt{2(x+1).\frac{8}{x+1}}-7=1.$$

$f(x)=1 \Leftrightarrow 2(x+1)=\dfrac{8}{x+1} \Leftrightarrow x=1$ (vì $0\le x\le 2$);

Vậy $\min f(x)=1$. Ta cũng có:

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x+1}=3+\frac{2x(x-3)}{x+1}\le 3$$

(do $\dfrac{2x(x-3)}{x+1}\le 0$ với mọi $0\le x\le 2$). Khi $x=0$ thì $f(x)=3$. Vậy $\max f(x)=3$.

Nhận xét. Trong các bài gửi về Tòa soạn, các bạn sau phát hiện ra sai lầm và đưa ra lời giải đúng:

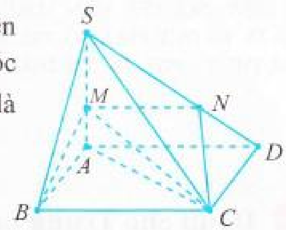
Vĩnh Phúc: *Lê Đức Thái*, 8A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc. **Phú Thọ:** *Nguyễn Thùy Dương, Nguyễn Thu Hiền, Bùi Thị Quỳnh*, 9A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao. **Cà Mau:** *Trần Quốc Việt*, 12CT1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

KIHIVI

TÍNH THỂ TÍCH !

Trong giờ hình học, thầy giáo đưa ra một bài toán: *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$, $SA\perp(ABCD)$, góc giữa SB và $(ABCD)$ là 60^0. Điểm M thuộc đoạn SA sao cho $AM=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Mặt phẳng (MBC) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$.*

Bạn *Thành* đã đề xuất lời giải như sau:



Hình chiếu của SB trên $(ABCD)$ là AB nên góc giữa SB và $(ABCD)$ là $\widehat{SBA}=60^0$. Ta có: $\dfrac{SA}{AB}=\tan 60^0=\sqrt{3}$

$\Rightarrow SA=a\sqrt{3}$. Do đó $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}$

$$=\frac{1}{3}.SA.AB.AD=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a.2a=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$$

Vì M thuộc đoạn SA và $SA=a\sqrt{3}, AM=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ nên $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{2}{3}$. Để ý rằng $(MBC)\cap(SAD)=MN$, $(MBC)\cap(ABCD)=BC$, $(SAD)\cap(ABCD)=AD$, $BC\,//\,AD$, nên theo định lí về 3 đường giao tuyến của 3 mặt phẳng phân biệt ta có $MN\,//\,AD\,//\,BC$.

Dẫn tới $\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{2}{3}$. Ta có

$$\frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SC}{SC}.\frac{SN}{SD}=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow V_{S.BCNM}=\frac{4}{9}.V_{S.ABCD}=\frac{4}{9}.\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3=\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3.$$

Bạn có tìm được kết quả như của Thành không ?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong Số 2, bắc Ninh)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 473 (11.2016)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

TRONG SỐ NÀY

Ảnh Bìa 1: Đại diện học sinh chúc mừng các thầy cô trong BGH Trường THPT chuyên Bắc Giang nhân ngày Nhà giáo Việt Nam.

Biên tập: LÊ MAI
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
Mĩ thuật: QUỐC HIỆP, THANH LONG
Thiết kế, chế bản: MAI ANH

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG LÊ LỢI - KON TUM

15 NĂM XÂY DỰNG VÀ TRƯỞNG THÀNH

ThS. **Hồ Thân Em**

Bí thư Chi bộ - Hiệu trưởng nhà trường

Hội đồng Sư phạm Trường THPT Lê Lợi

Trường THPT Lê Lợi tiền thân là cơ sở 2 của Trường THPT Kon Tum được thành lập năm 2001, theo Quyết định số 371/QĐ-CT của Chủ tịch UBND tỉnh Kon Tum. Từ đó đến nay trường đã trải qua mười lăm năm phát triển và từng bước trưởng thành.

Khi mới thành lập, Trường chỉ có 6 lớp 10 với 252 học sinh và 19 cán bộ, giáo viên, nhân viên. Hiệu trưởng đầu tiên của nhà trường là ThS. *Trần Văn Thu* (hiện nay là Phó Giám đốc Sở Thông tin và Truyền thông tỉnh Kon Tum); cơ sở vật chất lúc đó còn tạm bợ, thiếu thốn. Đến nay, Trường đã có 21 lớp với 673 học sinh và 73 cán bộ, giáo viên, nhân viên; cơ sở vật chất khang trang kiên cố, Trường có đủ phòng học, phòng chức năng, phòng bộ môn với trang thiết bị khá hiện đại. Khuôn viên trường thoáng mát, sạch sẽ, cảnh quan nhà trường rất thân thiện để tiến hành các hoạt động sư phạm. Hiệu trưởng hiện nay là ThS. *Hồ Thân Em* và các Phó Hiệu trưởng: ThS. *Nguyễn Hải Nam*, ThS. *Lê Minh Hoàng*, ThS. *Lê Hồ Quý*.

Được sự quan tâm của các cấp lãnh đạo; sự chỉ đạo sâu sát của Sở Giáo dục và Đào tạo Kon Tum; được cổ vũ bởi truyền thống hiếu học và khát vọng vươn lên của các thế hệ giáo viên, học sinh; sự ủng hộ của cha mẹ học sinh, trong 15 năm qua, nhà trường đã đạt được những thành tích đáng phấn khởi và tự hào.

HỌC SINH: Do Trường tuyển sinh sau khi một số trường trên địa bàn đã tuyển sinh nên đầu vào của trường phần lớn là học sinh có học lực trung bình, đời sống của đa số phụ huynh học sinh trên địa bàn tuyển sinh còn nhiều khó khăn. Tuy vậy, bằng sự phấn đấu không mệt mỏi của thầy và trò Trường THPT Lê Lợi, học sinh có học lực khá, giỏi tăng, chiếm 54,13%, học sinh có hạnh kiểm khá, tốt chiếm 98,2%, tỷ lệ học sinh bỏ học và lưu ban giảm hẳn; tỉ lệ học sinh đỗ tốt nghiệp luôn trên 98%, có nhiều năm đỗ 100%; tỉ lệ trúng tuyển vào các trường Đại học, Cao đẳng luôn đạt trên 70%. Công tác bồi dưỡng học sinh giỏi trong nhà trường ngày càng được chú trọng, số lượng và chất lượng học sinh giỏi cấp tỉnh ngày được nâng lên, trung bình hàng năm Trường đạt được 10 giải, trong đó có một số em được chọn tham gia kỳ thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Quốc gia lớp 12.

GIÁO VIÊN: Đội ngũ giáo viên không ngừng nâng cao chất lượng giảng dạy, đảm bảo tiêu chuẩn trường chuẩn Quốc gia. Nhiều giáo viên đạt danh hiệu Giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh; có sáng kiến kinh nghiệm, đề tài khoa học được đánh giá cao; đạt giải cao trong các cuộc thi: *Dạy học theo chủ đề tích hợp dành cho giáo viên trung học*, *Làm đồ dùng dạy học sáng tạo*, *Thiết kế bài giảng e-learning*, *50 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, ... Một số cán bộ, giáo viên đạt danh hiệu Chiến sĩ thi đua cấp tỉnh; được Thủ tướng Chính phủ, Bộ Giáo dục và Đào tạo, UBND tỉnh tặng Bằng khen; nhiều giáo viên được công nhận là Chiến sĩ thi đua cấp cơ sở, được Sở Giáo dục và Đào tạo tặng Giấy khen, ... Số lượng giáo viên có trình độ thạc sĩ, giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh được bổ sung hằng năm. Hiện nay, Trường có 10 thạc sĩ và 11 giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh. Các giáo viên luôn gương mẫu, nhiệt tình trong công tác giảng dạy và hoạt động giáo dục.

NHÀ TRƯỜNG: Nhiều năm liền Trường được công nhận là tập thể Lao động Xuất sắc, được UBND tỉnh tặng Bằng khen, Sở Giáo dục và Đào tạo Kon Tum tặng Giấy khen; nhiều tổ chuyên môn như: Tổ Ngữ văn, Tổ Địa lí, Tổ Sinh học, Tổ Hóa học, Tổ Vật lí, ... được UBND tỉnh Kon Tum, Sở GD&ĐT Kon Tum công nhận là tổ Lao động Xuất sắc, tổ Lao động Tiên tiến. Năm học 2014-2015, nhà trường được UBND tỉnh Kon Tum công nhận trường đạt chuẩn Quốc gia.

Trong năm học 2015-2016 vừa qua, nhà trường đã đạt được nhiều thành tích vượt bậc: Xây dựng trường, lớp có trật tự - kỷ cương - nề nếp; chất lượng giáo dục toàn diện được củng cố và nâng cao, tỉ lệ học sinh có học lực khá, giỏi và hạnh kiểm khá, tốt tăng; tỉ lệ học sinh ở lại lớp và rèn luyện hè giảm. Nhà trường được UBND tỉnh Kon Tum tặng Cờ thi đua xuất sắc bậc THPT và đang đề nghị Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen.

CÔNG ĐOÀN: Thực sự là chỗ dựa vững chắc về tinh thần và vật chất cho cán bộ, giáo viên và học sinh với những hoạt động thiết thực, được Liên đoàn Lao động tỉnh Kon Tum tặng nhiều bằng khen; có 3 cá nhân được Liên đoàn Lao động tỉnh Kon Tum tôn vinh công nhân Lao động tiêu biểu.

ĐOÀN TNCSHCM: Đã phát huy vai trò xung kích, duy trì tốt nề nếp học tập, sinh hoạt của học sinh, tổ chức được nhiều sân chơi bổ ích, được Tỉnh đoàn tặng cờ thi đua, Trung ương Đoàn tặng nhiều bằng khen; một số đồng chí cán bộ Đoàn được Trung ương đoàn tặng bằng khen. Các hoạt động đoàn thể khác của trường được đánh giá là một trong những đơn vị có phong trào và thành tích xuất sắc.

Dẫu biết rằng "Sự nghiệp trồng người" vẫn còn nhiều khó khăn phía trước, nhưng với sức trẻ và sự quyết tâm của thầy và trò, Trường THPT Lê Lợi sẽ không ngừng nỗ lực phấn đấu vươn lên tạo được niềm tin cho phụ huynh và học sinh trên địa bàn phía nam thành phố Kon Tum.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG

25 NĂM XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN

Địa chỉ: Đường Hoàng Văn Thụ - P. Ngô Quyền - TP. Bắc Giang

NGƯT. ThS. **Hồ Thị Lân**
Bí thư Đảng ủy - Hiệu trưởng nhà trường

Hội đồng Giáo dục trường THPT Chuyên Bắc Giang

Trường THPT Chuyên Bắc Giang được thành lập ngày 26/8/1991, khi đó mang tên Trường PTTH Năng khiếu tỉnh Hà Bắc. Năm 1997 tỉnh Hà Bắc tách thành tỉnh Bắc Giang và Bắc Ninh, trường đổi tên thành Trường PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên tỉnh Bắc Giang.

Kể từ ngày 18/11/2004 đến nay theo Quy chế trường THPT Chuyên của Bộ GD&ĐT và Quyết định của UBND Tỉnh Bắc Giang, trường được mang tên THPT Chuyên Bắc Giang, tỉnh Bắc Giang.

Khi mới thành lập trường chỉ có 8 lớp với 3 môn chuyên (Toán, Vật lí, Tiếng Nga) với 150 học sinh và 22 cán bộ, giáo viên, nhân viên. NGƯT *Cao Ngọc Thành* là Hiệu trưởng đầu tiên (1991 - 2005), tiếp đến là NGƯT *Nguyễn Đức Hiển* (2005 - 2009), nhà giáo *Bạch Đăng Khoa* (2010 - 2015). Đến nay, nhà trường đã có 30 lớp với 11 môn chuyên (Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Tin học, Ngữ văn, Lịch sử, Địa lí, Tiếng Anh, Tiếng Pháp, Tiếng Trung) gồm 961 học sinh. Hội đồng Sư phạm nhà trường có 4 cán bộ quản lí: Hiệu trưởng: NGƯT-ThS. *Hồ Thị Lân*, các Phó Hiệu trưởng: ThS. *Nguyễn Anh Tuấn*, ThS. *Nguyễn Thị Mai Phương*, ThS. *Lưu Văn Xuân* và 102 cán bộ, giáo viên, nhân viên (1 Tiến sĩ, 54 Thạc sĩ, 1 đang làm Nghiên cứu sinh, 5 giáo viên đang học thạc sĩ); có 7 tổ chuyên môn là các tổ Toán-Tin, Vật lí-KTCN, Hóa, Sinh-TD-QP, Ngữ văn, Xã hội, Ngoại ngữ và tổ Văn phòng. Đảng bộ trường có 6 chi bộ với 58 đảng viên.

Trải qua 25 năm xây dựng và phát triển, nhà trường luôn hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ chính trị là trường trọng điểm, có chất lượng giáo dục toàn diện cao nhất tỉnh; là nơi khơi nguồn, phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi, đào tạo nguồn nhân lực chất lượng cao cho địa phương và đất nước. Trường có 934 lượt học sinh đoạt giải Quốc gia (trong đó có 2 giải KHKT), 1 Huy chương Đồng Olympic Quốc tế môn Hóa học, 1 Huy chương Bạc Olympic Quốc tế môn Toán và nhiều giải Toán, Vật lí khu vực; trong kì thi tuyển sinh Đại học, thi THPT Quốc gia có nhiều học sinh đạt điểm tuyệt đối 30/30, nhiều học sinh là thủ khoa các trường Đại học hàng đầu; xếp thứ hạng trong tốp 30/200 trường có điểm bình quân cao nhất nước, 1 học sinh vô địch đường lên đỉnh Olympia lần thứ 13. Với mục tiêu giáo dục toàn diện để từ đó phát hiện và bồi dưỡng những tài năng tương lai, không chỉ kiến thức mà vun đắp tâm hồn, vốn sống và bước đầu tạo bản lĩnh cho từng học sinh, Trường luôn định hướng học sinh chuyên không chỉ xuất sắc trong học tập, có tấm lòng nhân ái, vị tha mà còn phải rất bản lĩnh, khoa học trong tổ chức, xây dựng các chương trình; biết yêu thương, chia sẻ, hợp tác tốt, nhất là trong thời kì hội nhập quốc tế. Chính vì vậy nhà trường thường xuyên tạo điều kiện để học sinh tham gia, tổ chức các hoạt động ngoại khóa, chuyên đề nhằm phát huy tính năng động, sáng tạo của học sinh chuyên. Cùng với kiến thức, đó là hành trang bước vào đời của những chủ nhân tương lai của đất nước.

Với sự quan tâm sâu sắc của các cấp ủy Đảng và Chính quyền, sự nỗ lực vươn lên nhà trường đã đạt được những thành tích đáng trân trọng và tự hào. Nhà trường liên tục nhiều năm liền đạt danh hiệu Trường Tiên tiến Xuất sắc, được Chủ tịch nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba, hạng Nhì; được nhận Cờ thi đua của Chính phủ, của Tỉnh và nhiều Bằng khen các cấp. Các tổ chức luôn được công nhận Vững mạnh Xuất sắc. Hội đồng Giáo dục nhà trường có thầy giáo *Trần Văn Chút* được phong tặng danh hiệu Nhà giáo Nhân dân, 11 thầy cô giáo được phong tặng Nhà giáo Ưu tú và nhiều nhà giáo được tặng Huân chương Lao động của Chủ tịch nước, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, của Chủ tịch UBND Tỉnh,... Nhiều thế hệ học sinh ra trường đã trưởng thành trên mọi miền đất nước và ở nước ngoài, tô thắm thêm lá cờ truyền thống vẻ vang của nhà trường.

Trên đà phát triển của sự nghiệp trồng người, trường THPT Chuyên Bắc Giang xin cảm ơn sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, của những người đã dành tình cảm và những điều tốt đẹp cho nhà trường. Mong rằng nhà trường sẽ là nơi hội tụ, trở về của các thế hệ cán bộ, giáo viên, nhân viên và học sinh đã từng gắn bó với mái trường thân thương này.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT11M6
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2016
Giá: 12.500 đồng
Mười hai nghìn năm trăm đồng