BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

1
2003

SỐ 307 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Chúc mừng Năm mới
2003

THUẬT TOÁN KÌ DIỆU
XÁC ĐỊNH SỐ NGUYÊN TỐ NHỜ MÁY TÍNH

Tháng 8-2002, một êkip ba nhà nghiên cứu Ấn Độ ở Viện công nghệ Kanpur là nhà Tin học Manindra Agrawal và hai sinh viên Neeraj Kayal, Nitin Saxena, đã hoàn thiện một thuật toán, chỉ viết có 13 dòng, cho phép xác định chắc chắn tính nguyên tố của những số rất lớn (có tới hàng trăm chữ số). Kết quả này rất quan trọng. Trong các phương pháp cổ điển số lượng phép toán cần thiết để kiểm tra xem một số có nguyên tố hay không tăng rất nhanh khi các chữ số của số cần kiểm tra tăng lên. Đến mức, với những số rất lớn, một máy điện toán phải hoạt động liên tục trong nhiều tỉ năm ! Việc làm của các nhà nghiên cứu Ấn Độ là phi thường vì đã thành công ở chỗ mà biết bao người thất bại. Thuật toán của họ vừa đơn giản vừa có hiệu quả: thời gian tính trên máy điện toán là vừa phải, vài ngày, thậm chí vài giờ và đặc biệt cho phép xác định chắc chắn một số có nguyên tố hay không. Đây là một *công thức thần diệu*, một tổ hợp khôn khéo những thử nghiệm toán học nhỏ, xem xét một cách có phương pháp tất cả những tính chất của số cần kiểm tra mà kết quả dứt khoát : chỉ cần một trong những thử nghiệm đó thất bại là số đó không nguyên tố, nếu không thì số đó nhất định là số nguyên tố. Sau đây là thuật toán cho phép kiểm chứng chắc chắn một số có nguyên tố hay không

The Algorithm

Input : integer $n > 1$
1. if (n is of the form a^b, $b > 1$) output COMPOSITE ;
2. $r = 2$;
3. while ($r < n$) {
4. if ($\gcd(n,r) \neq 1$) output COMPOSITE ;
5. if (r is prime)
6. let q be the largest prime factor of $r-1$;
7. if ($q \geq 4\sqrt{r}\log n$) and $\left(n^{\frac{r-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod r\right)$
8. break ;
9. $r \leftarrow r+1$;
10. }
11. for $a = 1$ to $2\sqrt{r}\log n$
12. if $\left((x-a)^n \not\equiv (x^n-a) \pmod{x^r-1, n}\right)$ output COMPOSITE ;
13. output PRIME ;

Giải thích : Algorithm : thuật toán ; input : nhập vào ; integer : số nguyên ; form : dạng ; output : in ra ; composite : hợp số, while : khi ; gcd : UCLN ; prime : số nguyên tố ; let : đặt, gọi ; largest : lớn nhất ; factor : ước số; break : thoát ; for : với. Dòng số 9 là gán $r+1$ vào r.

Ta thấy rằng đáng lẽ đi trực tiếp vào bài toán, các nhà nghiên cứu Ấn Độ đã khéo léo xây dựng một dãy đẳng thức, căn cứ vào những kết quả đại số tương đối đơn giản và có thể xác minh trong một thời gian tính theo đa thức mà trước đây thời gian tính theo hàm số mũ.

Nhìn lại lịch sử năm 240 trước công nguyên đã có thuật toán đầu tiên của nhà toán học Hy Lạp Eratosthene xác định tính nguyên tố của một số nhưng mất quá nhiều thời gian. Sau đó, các nhà toán học đã tìm ra những thuật toán có hiệu quả hơn, nhanh hơn nhiều. Tuy nhiên những thuật toán đó dù nhờ máy tính vẫn tốn rất nhiều thời gian, và không một thuật toán nào trong số đó tạo thành một phép thử có ý nghĩa thuần túy toán học : đó là những thuật toán cho lời giải có thể sai, hoặc quá dựa vào những giả thuyết toán học chưa được chứng minh.

Về thuật toán của các nhà nghiên cứu Ấn Độ, tất nhiên các nhà toán học trên toàn thế giới đã lao vào xem xét thuần túy về mặt toán học của thuật toán đó, và cho đến lúc này, họ chưa phát hiện được sai lầm nào. Tất cả mọi người đã thốt lên :

(Xem tiếp trang 2)

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI ĐƯỢC BÀI TOÁN CHƯA HẲN LÀ KẾT THÚC

ĐẶNG VĂN BIỂU
(GV THCS Đông Dư, Gia Lâm, Hà Nội)

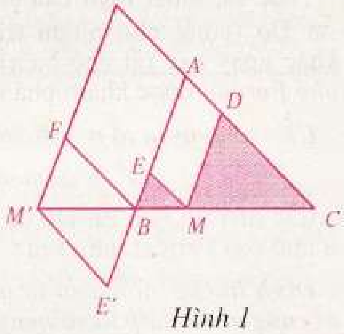
Tìm được lời giải một bài toán thì thật sung sướng nhưng nếu quá vui mà dừng lại để tọa hưởng thì thật là đáng tiếc vì còn biết bao điều mới lạ vẫn còn ẩn dấu trong đó. Nếu ta biết khai thác bài toán vừa giải bằng cách xét các trường hợp tương tự, khái quát hóa thì chắc chắn sẽ khám phá được những bài toán mới thú vị. Xin bắt đầu từ bài toán đơn giản dưới đây.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm nào đó thuộc cạnh BC. Lấy các điểm D trên AC và E trên AB sao cho MD//AB và ME//AC (nếu M trùng B thì lấy D trùng A, nếu M trùng C thì lấy E trùng A). Giả sử diện tích các tam giác MBE và MCD là $S(MBE) = c^2$, $S(MCD) = b^2$. Chứng minh rằng $S(ABC) = (b+c)^2$* (1)

Lời giải. Đặt $S(ABC) = x^2$

Trên hình 1 dễ thấy $\Delta MBE \backsim \Delta CBA$ nên $\frac{c}{x} = \frac{MB}{BC}$.

$\Delta MCD \backsim \Delta BCA$ nên $\frac{b}{x} = \frac{MC}{BC}$.



Hình 1

Từ đó $\frac{b+c}{x} = \frac{MB+MC}{BC} = 1 \Rightarrow x = b + c \Rightarrow S(ABC) = x^2 = (b+c)^2$ hay $\sqrt{S(ABC)} = \sqrt{S(MCD)} + \sqrt{S(MBE)}$

Từ kết quả bài toán 1 suy ra ngay $S(ADME) = 2bc$. Dễ thấy kết quả trên vẫn đúng khi M trùng với B ($c = 0$) hoặc M trùng với C ($b = 0$).

Bài toán đã giải xong. Nhưng nếu suy nghĩ thêm sẽ xuất hiện câu hỏi : Nếu M' nằm trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn BC, chẳng hạn M' thuộc tia đối của tia BC thì diện tích các tam giác ABC, $M'BE'$, $M'CD'$ liên hệ với nhau theo hệ thức nào ?

Dựng hình bình hành $M'E'BF$ (h. 1) thì $S(M'BF) = S(M'BE') = c^2$. Đặt $S(M'CD') = b^2$. Áp dụng kết quả BT 1 coi điểm B thuộc cạnh $M'C$ của $\Delta D'M'C$ thì $b = x + c \Rightarrow S(ABC) = x^2 = (b-c)^2$.

Tương tự khi M thuộc tia đối của tia CB thì $S(ABC) = (c-b)^2$. Ta có :

Bài toán 2. *Với giả thiết như bài toán 1, chỉ khác là điểm M nằm trên đường thẳng BC nhưng không thuộc đoạn BC thì :*

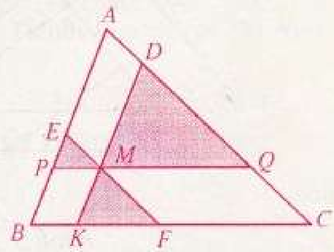
$$S(ABC) = (b-c)^2 \qquad (2)$$

Ta lại xét nếu điểm M nằm bên trong ΔABC thì sẽ có hệ thức gì giữa diện tích các tam giác tạo thành bởi các đường thẳng qua M mà song song với các cạnh của ΔABC ?

Bài toán 3. *Qua điểm M nằm trong ΔABC kẻ các đường thẳng DK//AB, EF//AC, PQ//BC (D và Q thuộc AC, E và P thuộc AB, K và F thuộc BC). Giả sử $S(MPE) = c^2$, $S(MQD) = b^2$, $S(MKF) = a^2$. Tính S(ABC) theo a, b, c.*

Lời giải. (h. 2)

Cách 1. Áp dụng kết quả BT 1 ta có : $S(APQ) = (b+c)^2$, $S(BEF) = (c+a)^2$, $S(DKC) = (a+b)^2$. Dễ thấy $S(ABC) = S(APQ) + S(BEF) + S(DKC) - S(MPE) - S(MQD) - S(MKF) = (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2 - c^2 - b^2 - a^2 = (a+b+c)^2$.



Hình 2

Ngoài ra có $S(AEMD) = 2bc$, $S(BKMP) = 2ca$, $S(CQMF) = 2ab$.

Hệ thức $S(ABC) = (a+b+c)^2$ (3) thật đẹp, phải không các bạn !

Khi M thuộc cạnh BC thì $a = 0$, và ta thấy lại kết quả bài toán 1.

Cách 2. Chứng minh trực tiếp (của *Nguyễn Đức Vũ*, 9A, THCS Đông Dư, Gia Lâm, Hà Nội) . Đặt $S(ABC) = x^2$.

Từ $\Delta MKF \backsim \Delta ABC$ có $\dfrac{KF}{BC}=\dfrac{a}{x}$

$\Delta DMQ \backsim \Delta ABC$ có $\dfrac{MQ}{BC}=\dfrac{b}{x}$

$\Delta EPM \backsim \Delta ABC$ có $\dfrac{MP}{BC}=\dfrac{c}{x}$.

Từ các đẳng thức trên ta có :

$$\frac{a+b+c}{x}=\frac{KF+MQ+MP}{BC}=\frac{KF+FC+BK}{BC}=1$$

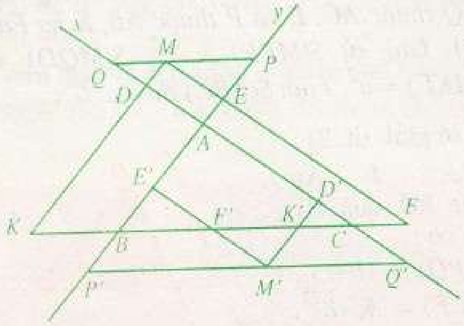
$\Rightarrow x = a+b+c$ hay $S(ABC) = (a+b+c)^2$.

Còn M nằm ngoài ΔABC như ở hình 3 thì sao ?

Trường hợp M thuộc góc xAy

Sử dụng kí hiệu và lập luận tương tự cách 2 lời giải BT 3 ta thấy các tam giác MKF, EPM, DMQ đều đồng dạng với ΔABC nên có $\dfrac{a}{x}=\dfrac{KF}{BC}$, $\dfrac{c}{x}=\dfrac{MP}{BC}$, $\dfrac{b}{x}=\dfrac{MQ}{BC}$, từ đó $\dfrac{a-b-c}{x}=$

$$\frac{KF-MQ-MP}{BC}=\frac{KF-CF-KB}{BC}=1$$



Hình 3

$\Rightarrow x = a-b-c$.

Vậy $S(ABC) = (a-b-c)^2$. Khi M thuộc Ax hoặc thuộc Ay thì $b=0$ hoặc $c=0$ ta thấy lại kết quả bài toán 2.

Trường hợp M' thuộc góc BAC nhưng nằm ngoài ΔABC

Lập luận tương tự như trên ta có :

$S(ABC) = x^2 = (b' + c' - a')^2$

Khi M thuộc cạnh BC thì $a' = 0$, ta thấy lại kết quả bài toán 1.

Khi M nằm ngoài ΔABC mà ở các miền khác hai trường hợp trên ta cũng có các hệ thức tương tự. Ta đã chứng minh được :

Bài toán 4. *Cho điểm M nằm ngoài ΔABC, M thuộc góc BAC hoặc góc đối đỉnh của góc BAC. Qua M kẻ các đường thẳng DK//AB, EF//AC, PQ//BC (D và Q thuộc đường thẳng AC, E và P thuộc đường thẳng AB, K và F thuộc đường thẳng BC). Giả sử* $S(MPE) = c^2$, $S(MQD) = b^2$, $S(MKF) = a^2$, *thế thì* $S(ABC) = (b+c-a)^2$.

Tóm lại từ bài toán 1 khá đơn giản ta dẫn đến xét các bài toán 3 và 4 tổng quát hơn, xét đủ các vị trí tương đối của M đối với tam giácABC. Các bạn hãy thử giải bài toán dưới đây rồi tìm ra những bài toán mới tổng quát hơn :

Bài toán : Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm nào đó thuộc cạnh BC. Lấy các điểm D trên AC và E trên AB sao cho $MD//AB$ và $ME//AC$. Chứng minh rằng

$$S(ABC) = \frac{BA}{BE}.S(MBE) + \frac{CA}{CD}.S(MCD)$$

THUẬT TOÁN ... *(Tiếp bìa 2)*

nhưng làm sao mà người ta đã không nghĩ ra trước ? Vì, trong công thức đó không có gì là quá mới lạ.

Thực ra, thuật toán của êkip các nhà tin học Ấn Độ (cũng như nhiều trình tự tin học hóa khác ngày nay rất phổ biến) căn cứ vào *định lí nhỏ Fermat* được khám phá ra từ thế kỉ 17 :

Cho số nguyên tố p. Với số nguyên a bất kì thì

$$a^p \equiv a \pmod p$$

Các nhà tin học Ấn Độ đã khái quát hóa định lí nhỏ của Fermat như sau :

Định lí. *Giả sử hai số tự nhiên a và p nguyên tố cùng nhau thì p là số nguyên tố khi và chỉ khi* $(x-a)^p \equiv x^p - a \pmod p$.

Chứng minh định lí này không khó, xin dành cho bạn đọc.

Có thể sẽ có những cải tiến đối với thuật toán của Agrawal, Kayal và Saxenna. "*Hãy để một năm cho các nhà lí thuyết về số nghiên cứu thuật toán đó. Sẽ có những kết quả mới*". Chris K. Caldwell, trường đại học Tennesse ở Martin nói.

Các bạn thích tìm tòi về số nguyên tố có thể tìm hiểu thêm trên trang WEB của các nhà tin học Ấn Độ :

http : //www. cse. iitk. ac.in / news/primality. pdf.

NGUYỄN VĂN THIÊM

(Theo Science & Vie tháng 11-2002
Junior - Science & Vie tháng 10-2002)

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002

MÔN TOÁN - KHỐI D

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. Cho hàm số : $y=\dfrac{(2m-1)x-m^2}{x-1}$ (1) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với $m=-1$.

2) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.

3) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y=x$.

Câu II. 1) Giải bất phương trình :

$$\left(x^2-3x\right)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0$$

2) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2^{3x}=5y^2-4y & (1)\\ \dfrac{4^x+2^{x+1}}{2^x+2}=y & (2)\end{cases}$$

Câu III. Tìm x thuộc đoạn $[0;\,14]$ nghiệm đúng phương trình :

$$\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0 \quad (*)$$

Câu IV. 1) Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; $AC=AD=4$cm ; $AB=3$cm ; $BC=5$cm. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

2) Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $2x-y+2=0$ và đường thẳng d_m :

$$\begin{cases}(2m+1)x+(1-m)y+m-1=0\\ mx+(2m+1)z+4m+2=0\end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

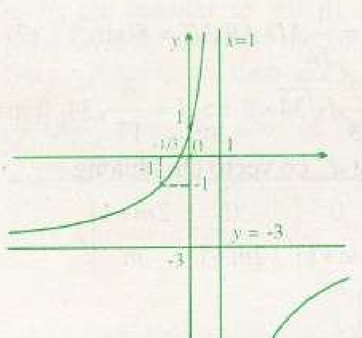
Câu V. (dành cho thí sinh thi đại học).

1. Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_n^0+2C_n^1+4C_n^2+...+2^nC_n^n=243$$

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

HƯỚNG DẪN GIẢI



Câu I. 1) Khi $m=-1$

$$\Rightarrow y=\frac{-3x-1}{x-1}$$

Đồ thị như hình vẽ. (Các bạn tự giải)

I. 2) Gọi S là diện tích hình phẳng phải tìm

$$S=\int_{-1/3}^{0}\left(\frac{-3x-1}{x-1}\right)dx=\int_{-1/3}^{0}\left[-3-\frac{4}{x-1}\right]dx$$

$=4\ln\dfrac{4}{3}-1$ (dvdt)

I. 3) Đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y=x \Leftrightarrow$ hệ PT sau có nghiệm:

$$\begin{cases}\dfrac{(2m-1)x-m^2}{x-1}=x & (2)\\ \dfrac{m^2-2m+1}{(x-1)^2}=1 & (3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ (x-m)^2=0\\ (x-1)^2=(m-1)^2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=m\neq 1$.

Vậy mọi $m\neq 1$ là các giá trị cần tìm.

Lưu ý : Câu (3) có thể phát biểu dưới dạng :

Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x-m^2}{x-1}$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định với mọi $m\neq 1$.

Bài luyện tập 1. *Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m-1)x+m}{x-m}$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định với mọi $m\neq 0$.*

Câu II. 1) Đk: $2x^2 - 3x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le -1/2 \end{array}\right.$

Khi đó BPT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-2=0 \\ \begin{cases} 2x^2-3x-2>0 \\ x^2-3x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy BPT có nghiệm : $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x \ge 3 \\ x \le -1/2 \end{array}\right.$

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản, không khó song nếu không cẩn thận trong biến đổi tương đương thì dẫn đến thiếu nghiệm $x = 2$. Chú ý phép biến đổi sau :

$$\begin{cases} a.b \ge 0 \\ a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ \begin{cases} a>0 \\ b \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

***Bài luyện tập 2.** Giải bất phương trình :*

$$\left(e^x - e\right)\sqrt{x^3-3x^2+2} \ge 0$$

II. 2) Từ (2) có $y = \dfrac{2^x(2^x+2)}{2^x+2} = 2^x > 0$.

Thế vào (1) được

$y^3 = 5y^2 - 4y \Rightarrow y(y^2 - 5y + 4) = 0$

$\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$ (do $y > 0$) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=4 \end{array}\right.$,

- Với $y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$
- Với $y = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Vậy hệ PT có 2 nghiệm (x, y) là $(0, 1), (2, 4)$

Câu III. PT (*)

$\Leftrightarrow 4\cos^3x - 3\cos x - 4(2\cos^2x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3x - 8\cos^2x = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2x(\cos x - 2) = 0$

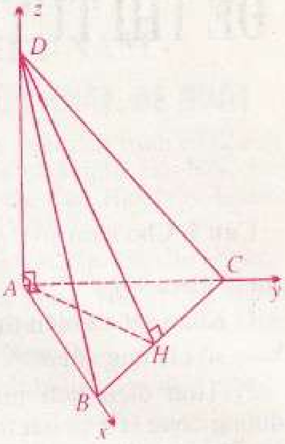
$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$

Từ $0 \le x \le 14$ có $0 \le \dfrac{\pi}{2} + k\pi \le 14 \Leftrightarrow$

$-\dfrac{1}{2} \le k \le \dfrac{14}{\pi} - \dfrac{1}{2} < 4$

Thay k bởi 0, 1, 2, 3 ta được nghiệm x là $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}$.

Câu IV. 1) *Cách 1.* (PP tọa độ)



- Từ giả thiết có $AB^2 + AC^2 = 25 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $A \Rightarrow$ góc tam diện đỉnh A vuông. Chọn hệ tọa độ $Axyz$ với A (0, 0, 0), B (3, 0, 0), C(0, 4, 0), D(0, 0, 4) $\Rightarrow$ mp(BCD) có phương trình :

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} = 1$

hay

$4x + 3y + 3z - 12 = 0$

- Gọi d là khoảng cách từ điểm A đến mp(BCD) thì $d = \dfrac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}} = \dfrac{6}{17}\sqrt{34}$ (cm)

Cách 2. (PP tổng hợp)

Trong mp(BCD) hạ $DH \perp BC$, vì $DA \perp$ mp(ABC) $\Rightarrow AH \perp BC$ (định lí 3 đường vuông góc)

$AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = \dfrac{12}{5}$ (cm) ;

$DH = \sqrt{DA^2 + AH^2} = \dfrac{\sqrt{544}}{5}$ (cm)

$\Rightarrow$ dt(BCD) $= \dfrac{1}{2}BC.DH = 2\sqrt{34}$ (cm^2)

$\Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}d$ .dt(BCD) $= \dfrac{2}{3}d\sqrt{34}$ (cm^3) (1)

Lại có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AD.AB.AC = 8$(cm^3) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \dfrac{2}{3}d\sqrt{34} = 8 \Rightarrow d = \dfrac{6}{17}\sqrt{34}$ (cm)

2) Đường thẳng d_m có vectơ chỉ phương :

$$\vec{u} = \left(\begin{vmatrix} 1-m & 0 \\ 0 & 2m+1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2m+1 \\ 2m+1 & m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2m+1 & 1-m \\ m & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$\vec{u} = \left((1-m)(2m+1), -(2m+1)^2, -m(1-m)\right)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến :

$\vec{n} = (2, -1, 0)$. Để d_m//mp(P) thì $\vec{u} \perp \vec{n}$

$\Rightarrow 2(1-m)(2m+1) + (2m+1)^2 = 0$

$\Rightarrow (2m+1)[2(1-m) + 2m+1] = 0$

$\Rightarrow 3(2m+1) = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Khi $m=-\dfrac{1}{2}$, d_m có PT : $\begin{cases} y-1=0 \\ x=0 \end{cases}$. Nhận thấy $d \notin$ mp$(P) \Rightarrow d_m$ // mp(P). Thử lại ta thấy $m=-\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Lưu ý. Từ điều kiện $\vec{u} \perp \vec{n}$ ta chưa khẳng định được d_m // mp(P) vì $\vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d_m \in \text{mp}(P) \\ d_m \,/\!/\, \text{mp}(P) \end{array}\right.$.

Vì vậy ta cần phải kiểm tra xem d_m có thuộc mặt phẳng (P) hay không ?

Cách 2.

• d_m // mp(P) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau vô nghiệm :

$$\begin{cases} (2m+1)x+(1-m)y+m-1=0 & (2) \\ mx+(2m+1)z+4m+2=0 & (3) \\ 2x-y+2=0 & (4) \end{cases}$$

Từ (2) (4) $\Rightarrow x=\dfrac{m-1}{3}$. Thế vào (3) ta được :

$$(2m+1)z=-4m-2-\frac{m(m-1)}{3} \quad (5)$$

$\Rightarrow$ hệ phương trình (2), (3), (4) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (5) vô nghiệm $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2m+1=0 \\ -4m-2-\dfrac{m(m-1)}{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

Vậy $m=-\dfrac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu V. 1) Theo công thức khai triển nhị thức Niu–tơn có

$$(x+1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n.$$

Cho $x=2$ được

$$C_n^0 + 2C_n^1 x + 4C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = 3^n$$

Kết hợp với điều kiện của bài toán có $3^n = 243 \Rightarrow n=5$.

Bài luyện tập 3. *Tìm số nguyên dương n sao cho :*

$$C_n^1 3^{n-1} + 2C_n^2 . 3^{n-2} + 3.C_n^3 . 3^{n-3} + \ldots + nC_n^n = 256$$

V. 2) Gọi $M(a, 0) \in Ox$, $N(0, b) \in Oy$ $(a>4, b>3)$

• Đường thẳng MN có PT : $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ hay $bx+ay-ab=0$. Do MN tiếp xúc với (E) nên

$$a^2b^2 = 16b^2 + 9a^2 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \quad (1)$$

• Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhia–côp–xki ta có :

$$a^2+b^2 = (a^2+b^2)\left(\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}\right)$$

$$\geq \left(a.\frac{4}{a}+b.\frac{3}{b}\right)^2 = 49 \Rightarrow MN = \sqrt{a^2+b^2} \geq 7$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=\sqrt{28}$ và $b=\sqrt{21}$ (thỏa mãn $a>4$, $b>3$)

• Vậy $M(\sqrt{28}, 0)$, $N(0, \sqrt{21})$ là các điểm cần tìm và khi đó min$MN=7$.

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản liên quan đến tiếp tuyến của đường elip có sử dụng và biến đổi điều kiện tiếp xúc giữa elip với đường thẳng một cách hợp lí để đi đến yêu cầu của bài toán.

Bài luyện tập 4. *Trong tất cả các hình chữ nhật ngoại tiếp elip :* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0$ *cho trước). Hãy tìm hình chữ nhật có :*

a) Diện tích lớn nhất ?

b) Diện tích nhỏ nhất ?

Hướng dẫn giải :
ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện Phòng không Không quân Sơn Tây)

Nhìn ra thế giới

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HOA KỲ 2002

(Tiếp theo kì trước)

Bài 3. *Chứng minh rằng mỗi đa thức mônic (là đa thức với hệ số bậc cao nhất bằng 1) bậc n với các hệ số thực là trung bình cộng của hai đa thức mônic bậc n với n nghiệm thực.*

Lời giải. Gọi $f(x)$ là đa thức mônic hệ số thực bậc n. Nếu $n = 1$ thì $f(x) = x + a$ ($a \in R$). Dễ dàng thấy rằng $f(x)$ là trung bình cộng của $f_1(x) = x + 2a$ và $f_2(x) = x$, mỗi đa thức có 1 nghiệm thực. Bài toán được giải với $n = 1$.

Nếu $n > 1$ chọn đa thức

$$g(x) = (x-2)(x-4)\ldots(x-2(n-1))$$

Bậc của $g(x)$ là $n - 1$. Xét các đa thức

$$P(x) = x^n - kg(x) \text{ và } Q(x) = 2f(x) - x^n + kg(x).$$

Ta sẽ chứng minh rằng với k đủ lớn những đa thức này có n nghiệm thực.

Xét các giá trị của đa thức $g(x)$ tại n điểm $x = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Những giá trị này đan dấu và có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất bằng 1 (vì nhiều nhất hai trong các thừa số có giá trị tuyệt đối bằng 1 và các thừa số khác có giá trị tuyệt đối lớn hơn 2). Mặt khác, tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho với $0 \le x \le n$, ta có $|x^n| < c$ và $|2f(x) - x^n| < c$. Lấy $k > c$. Thế thì ta thấy rằng $P(x)$ và $Q(x)$ với giá trị đan dấu tại n điểm $x = 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$,. cho nên mỗi đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ đều có ít nhất $n - 1$ nghiệm thực. Chúng là đa thức bậc n, nên mỗi đa thức đó phải có n nghiệm thực. Lại vì chúng là mônic và trung bình cộng của chúng là $f(x)$ nên ta có đpcm.

Bài 4. *Cho R là tập hợp các số thực. Xác định tất cả các hàm số $f: R \to R$ sao cho*

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - y.f(y) \qquad (*)$$

với mọi cặp số thực x và y.

Lời giải. Lấy $x = y = 0$ trong (*) được $f(0) = 0$. Với $x \neq 0$ thay x bởi $-x$ trong (*) được

$(-x)f(-x) - yf(y) = f[(-x)^2 - y^2] = f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ. Từ đây trở đi, ta chỉ cần xét $x, y \ge 0$. Lấy $y = 0$ trong (*) được $f(x^2) = xf(x) \Rightarrow f(x^2 - y^2) = f(x^2) - f(y^2)$ hay là $f(x^2) = f(x^2 - y^2) + f(y^2)$. Vì với $x \ge 0$ tồn tại duy nhất $t \ge 0$ sao cho $t^2 = x$, suy ra rằng $f(x) = f(x-y) + f(y)$ (1)

Lấy $x = 2t$ và $y = t$ trong (1) có $f(2t) = 2f(t)$ (2)

Lấy $x = t+1$ và $y = t$ trong (*) được

$$f(2t+1) = (t+1)f(t+1) - tf(t) \qquad (3)$$

Lấy $x = 2t+1$ và $y = 1$ trong (1) và sử dụng (2) có $f(2t+1) = f(2t) + f(1) = 2f(t) + f(1)$ (4)

Lấy $x = t+1$ và $y = 1$ trong (1) được $f(t+1) = f(t) + f(1)$, thay vào (3) có $f(2t+1) = (t+1)[f(t) + f(1)] - tf(t) = f(t) + (t+1)f(1)$ (5)

Từ (4) và (5) dẫn đến $2f(t) + f(1) = f(t) + (t+1)f(1)$ hay là $f(t) = tf(1)$ với $t \ge 0$ (6)

Vì hàm $f(x)$ lẻ, nên $f(-t) = -f(t) = -tf(1)$ với $t \ge 0$. Từ đó và (6) rút ra $f(x) = kx$ với mọi số thực x, trong đó $k = f(1)$ là hằng số. Dễ kiểm tra rằng mọi hàm số như thế thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Bài 5. *Cho a, b là các số nguyên lớn hơn 2. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k và một dãy hữu hạn các số nguyên dương $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sao cho $n_1 = a$, $n_k = b$, và $n_i n_{i+1}$ chia hết cho $n_i + n_{i+1}$ với mỗi i ($1 \le i < k$).*

Lời giải. Ta nói hai số nguyên dương a và b là *liên thông* nếu tồn tại dãy số nguyên dương $n_1, n_2, \ldots, n_k$ thỏa mãn các điều kiện của đề bài, kí hiệu aRb. Yêu cầu bài toán là chứng minh aRb với mọi $a, b > 2$.

Dễ thấy rằng R là một quan hệ tương đương (thỏa mãn các tính chất : *tính phản xạ* (aRa) ; *tính đối xứng* (aRb kéo theo bRa) ; *tính bắc cầu* (aRb, bRc kéo theo aRc)), ta viết là $aRbRc$.

Với số nguyên dương n ($n \ge 3$) thì dễ thấy

$$nRn(n-1)Rn(n-1)(n-2)Rn(n-2)R2n \qquad (1)$$

$$n(n-1)(n-2)Rn(n-1)(n-2)(n-3)R2(n-1)(n-2) \qquad (2)$$

Với số nguyên dương $n \ge 4$, thì

$n' = (n-1)(n-2) \ge 3$ nên áp dụng (1) (2) có

$$nRn(n-1)(n-2)R2(n-1)(n-2)R(n-1)(n-2)R(n-1)$$

suy ra $(n-1)Rn$. Từ đó giả sử $b = a+t$ ($t > 0$), lặp lại quá trình này t lần ta có aRb.

NGUYỄN SINH NGUYÊN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng giới thiệu)

KÌ THI OLYMPIC ĐỒNG BẰNG SÔNG CỬU LONG LẦN THỨ 9 - NĂM 2002

VÕ KIM HUỆ
(Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ)

Kì thi Olympic lần thứ 9 các tỉnh Đồng bằng sông Cửu Long được tổ chức tại trường Trung học phổ thông chuyên Lý Tự Trọng tỉnh Cần Thơ.

Môn Toán có 42 thí sinh của 14 trường trong 12 tỉnh ĐBSCL tham dự.

Các thí sinh làm 5 bài toán trong 180 phút, mỗi bài 4 điểm. Các bài thi được chọn trong các đề thi do các tỉnh dự thi đề nghị :

Kết quả kì thi như sau :

4 Huy chương vàng trao cho 4 thí sinh :

1. *Nguyễn Quốc Chí* (THPT chuyên Tiền Giang, 15,5 điểm).

2. *Thái Phương Thảo* (THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, 15,25 điểm)

3. *Nguyễn Thị Hà Thanh*, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, 14,5 điểm)

4. *Khổng Lê Trường Giang*, THPT Huỳnh Mẫn Đạt, 14,5 điểm.

5 đoàn có tổng số điểm cao nhất là :

1. THPT Sa Đéc : 39,25 điểm

2. THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ : 38,75 điểm.

3. THPT Cao Lãnh : 35,75 điểm

4. THPT chuyên Phan Ngọc Hiển : 35,25 điểm

5. THPT Huỳnh Mẫn Đạt : 35 điểm.

Sau đây là đề thi.

Bài 1. Đại số (4 điểm)

Giải phương trình :

$$(\log_2 x)^2 + x\log_7(x+3) = \left[\frac{x}{2} + 2\log_7(x+3)\right].\log_2 x$$

Bài 2. *Số học (4 điểm)*

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$4x^6 + x^4y + x^3(y^4 - 4y) - xy^2 - y^5 = 2001$$

Bài 3. *Giải tích (4 điểm)*

Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in R$, bị chặn trên và thỏa :

$$\begin{cases} f(0) \neq 0 \\ 2f(u).f(v) = f(u+v) + f(u-v) \end{cases} \quad \forall u, v \in R.$$

Chứng minh :

$$|f(x)| \leq 1 \text{ với } \forall x \in R.$$

Bài 4. *Hình học phẳng (4 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, AOB, AOC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là :

$$3R = R_1 + R_2 + R_3$$

Bài 5. *Hình học không gian (4 điểm)*

Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AI, SC (I là trung điểm BC) và G là trọng tâm của ΔSBC. Tính thể tích hình chóp $MNCG$.

ANHXTANH KHÔNG LÀM ĐƯỢC VIỆC GÌ CẢ

Nước Đức thời Anhxtanh có nền giáo dục cứng nhắc, không chấp nhận cá tính. Anhxtanh vốn thích toán học, âm nhạc, say mê tìm hiểu bầu trời... Ở trường Anhxtanh như con chim ưng đơn độc. Cậu hay đưa ra những câu hỏi cao xa lạ lùng. Khi bố Anhxtanh quan tâm đến việc học tập của con, hỏi thầy xem con mình trong tương lai thích hợp với ngành gì, thầy chủ nhiệm đã trả lời : "Học gì cũng không quan trọng, bởi vì con ngài sẽ không làm được việc gì cả". Thậm chí thầy còn yêu cầu Anhxtanh viết đơn xin thôi học. Anhxtanh kinh ngạc hỏi : Thưa thầy, em có lỗi gì ? Những ý tưởng lạ lùng và các năng lực toán học khác thường của Anhxtanh đã làm các thầy không hiểu nổi cậu. Có lẽ không phải sau này Anhxtanh mới làm mọi người không hiểu nổi Thuyết tương đối của mình. Cái gai nhọn đã nhọn từ tấm bé.

BNH *(Sưu tầm)*

Bài T6/303. *Trong một phòng thi gồm có 9 thí sinh được xếp ngồi xung quanh một bàn tròn. Trong ngân hàng đề có 9 loại đề khác nhau, mỗi loại có nhiều bản. Một cách phát đề được gọi là hợp lệ nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ 1 đề và hai thí sinh bất kì ngồi cạnh nhau thì nhận được 2 loại đề khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phát đề hợp lệ ?*

Lời giải. (của *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, ĐHSP **Hà Nội**)

Kí hiệu P_n là số cách phát đề hợp lệ cho n học sinh $a_1, a_2, ..., a_n$ ngồi theo vòng tròn. Ta viết $a_i = a_j$ $(i \neq j)$ nếu a_i và a_j có cùng loại đề và $a_i \neq a_j$ nếu trái lại. Ta chứng minh công thức $P_{n+1} = 7P_n + 8P_{n-1}$ (1)

Thật vậy, xét một cách phát đề hợp lệ cho $(n+1)$ thí sinh $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$

– Nếu $a_1 \neq a_n$ thì bỏ thí sinh a_{n+1} đi ta có một cách phát đề hợp lệ cho n thí sinh $(a_1, ..., a_n)$. Và a_{n+1} có thể có $9 - 2 = 7$ cách phát đề (lấy 1 trong 7 đề khác với a_1, a_n).

– Nếu $a_1 = a_n$, thì bỏ a_{n+1} và a_n đi ta có một cách phát đề hợp lệ cho $n-1$ thí sinh $(a_1, ..., a_{n-1})$. Đảo lại mỗi cách phát đề hợp lệ cho $(n-1)$ thí sinh $(a_1, ..., a_{n-1})$ ta có 8 cách phát đề cho (a_n, a_{n+1}) để hợp lệ với $a_n = a_1$ (cụ thể cho $a_n = a_1$ và phát cho a_{n+1} chọn trong 8 đề khác với a_n).

Mặt khác dễ thấy : $\begin{cases} P_2 = 9.8 = 72 \\ P_3 = 9.8.7 = 504 \end{cases}$

Dãy (P_n) thỏa mãn (1) là dãy truy hồi cấp 2 có dạng $P_n = C_1 8^n + C_2(-1)^n$

Từ điều kiện $P_2 = 72$, $P_3 = 504$, suy ra $C_1 = 1$, $C_2 = 8$. Vậy $P_n = 8^n + 8(-1)^n$

Nói riêng $P_9 = 8^9 - 8 = 134217720$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Thanh Hóa :** *Hoàng Kiên Trung*, 12T, THPT Lam Sơn ; **Đồng Tháp :** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 12T, THPT Tx. Sa Đéc ; **Phú Yên :** *Huỳnh Lâm Linh*, 12T ; **Nghệ An :** *Đinh Viết Sang*, 12T, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Lâm Hưng*, 12T, PTNK ĐHQG Tp. HCM ; **Đà Nẵng :** *Lương Văn Toại*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Hà Tây :** *Nguyễn Ngọc Phương*, 11, THPT Nguyễn Huệ ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Tiến Việt*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Lê Thịnh*, 12T, THPT Lê Khiết.

Đây là một bài toán hay về tổ hợp. Có rất nhiều bạn quan tâm gửi lời giải tới. Nhưng đa số cho lời giải sai dẫn đến có rất nhiều đáp số khác nhau cho bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/303. *Giải phương trình :*

$$(a-x)^k + (x-b)^k = (a-b)^k \quad (1)$$

với $a \neq b$, k là số nguyên khác 0.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**).

a) Với $k = 1$ thì (1) đúng với mọi x. Do đó phương trình có nghiệm là $\forall x \in R$

b) Với $k > 1$, (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{a-x}{a-b}\right)^k + \left(\dfrac{x-b}{a-b}\right)^k = 1$ (2)

Đặt $t = \dfrac{a-x}{a-b}$, (1) $\Leftrightarrow t^k + (1-t)^k = 1$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^k + (1-t)^k - 1$;

$f'(t) = k\left[t^{k-1} - (1-t)^{k-1}\right] \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Vậy theo định lí Roll phương trình $f(t) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm. Dễ thấy $t = 0$, $t = 1$ là nghiệm. Vậy nghiệm của (1) là $x = a$, $x = b$.

c) Với $k < 0$. Ta CM rằng nếu k lẻ thì phương trình vô nghiệm.Thật vậy ta vẫn có (1) $\Leftrightarrow$ (3) nhưng bây giờ $t \neq 0, 1$.

Nếu $t < 0$ thì $t^k + (1-t)^k < (1-t)^k < 1$ (do $k < 0$)

Nếu $0 < t < 1$ thì $t^k + (1-t)^k > t^k > 1$

Nếu $t > 1$ thì $t^k + (1-t)^k < t^k < 1$

d) Với $k < 0$, k chẵn.

1) Nếu $t < 0$, $f'(t) = k\left[t^{k-1} - (1-t)^{k-1}\right] > 0$

Vậy $f(t)$ đồng biến. Lại có $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -1$, $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = +\infty$ do đó trong khoảng $(-\infty, 0)$ phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất.

2) Nếu $0 < t < 1$. $f'(t) = 0$ tại $t_0 = \dfrac{1}{2}$ và $f''(t_0) = k(k-1)\left[t^{k-2} + (1-t)^{k-2}\right] > 0$.

Vậy $t_0 = \dfrac{1}{2}$ là điểm cực tiểu. Do đó

$f(t) \geq f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1-k} - 1 > 0$

Vậy phương trình $f(t) = 0$ không có nghiệm trong $(0, 1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m \leq -1$$

Câu VII. *Nhận xét :* (i) Với $a \in Z$ thì $a^2 \equiv 0$ (mod 3) hoặc $a^2 \equiv 1$ (mod 3)

(ii) $a^2 \equiv 0$ (mod 4) hoặc $a^2 \equiv 1$ (mod 4).

a) Phản chứng : Nếu x, y không có số nào chia hết cho 3 thì x^2, y^2 chia cho 3 có số dư là 1 (theo i) $\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$ chia cho 3 có số dư 2 (vô lí) $\Rightarrow$ đpcm.

b) *) x, y cùng lẻ, ta có $x^2 \equiv 1$ (mod 4), $y^2 \equiv 1$ (mod 4) $\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \equiv 2$(mod 4) (vô lí)

*) x, y cùng chẵn thì $xy \equiv 0$ (mod 4), mà theo a) thì $xy \equiv 0$ (mod 3) $\Rightarrow xy \equiv 0$ (mod 12).

*) x, y khác tính chẵn, lẻ. Không mất tổng quát giả sử x chẵn, y lẻ khi đó z lẻ. Đặt $y = 2p+1$, $z = 2q+1$ ($p, q \in Z$). Ta có

$x^2 = z^2 - y^2 = (2q+1)^2 - (2p+1)^2 =$
$= (4q(q+1) - 4p(p+1)) \vdots 8$.

Từ đó $x \vdots 4 \Rightarrow xy \vdots 4$. Theo kết quả câu a) thì $xy \vdots 3$ nên $xy \vdots 12$ (đpcm)

Câu VIII. a) Ta có $AH//OK \Rightarrow S_{AHK} = S_{OAH}$ $= \frac{1}{2}AH.OH = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2 - x^2}$ (đvdt)

Vì $S_{AHK} = \frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+(R^2-x^2)}{2}\right]$ $= \frac{R^2}{4}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ nên S_{AHK} đạt GTLN là $\frac{R^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

b) • Theo định lí Pi-ta-go : $HK^2 = R^2 + OH^2$, $AH^2 = R^2 - OH^2 \Rightarrow AH^2 + HK^2 = 2R^2$ (không đổi)

• Vì $\frac{AH}{HK} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ nên $HK^2 = \frac{5}{3}AH^2$, mà $AH^2 + \frac{5}{3}AH^2 = 2R^2 \Rightarrow AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, do đó : Nếu H thuộc đoạn OB thì $\widehat{ABC} = 60^0$; nếu H thuộc đoạn OC thì $\widehat{ABC} = 30^0$.

Câu IX. a) Thay $a = 1$ vào điều kiện đề bài được (b, c) bằng (1, 1) hoặc $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

b) Từ điều kiện bài toán có

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) =$$
$$= \left(\frac{b-c}{bc}\right)\left(\frac{c-a}{ca}\right)\left(\frac{a-b}{ab}\right) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}.$$

Vì a, b, c đôi một khác nhau nên $a^2b^2c^2 = 1$.

c) Giả sử $a > b$. Vì $a, b, c > 0$ nên từ điều kiện để bài có $b > c \Rightarrow c > a$.

$\Rightarrow a > b > c > a$ vô lí. Vậy $a > b$ là sai.

Chứng minh tương tự $a < b$ cũng dẫn tới vô lí. Do đó $a = b \Rightarrow b = c$. Vậy $a = b = c$.

Câu X. a) Đội xếp nhất 15 điểm nên đấu ít nhất với 5 đội khác $\Rightarrow N \geq 5 + 1$ hay $N \geq 6$.

Nếu $N = 6$ đội xếp nhất 15 điểm nên thắng 5 đội còn lại, đội xếp nhì 12 điểm nên thắng 4 đội trừ đội xếp nhất. Đội xếp ba thua đội xếp nhất và nhì nên số điểm tối đa là $3.3 = 9 \Rightarrow$ vô lí.

Do vậy $N \geq 7$ (đpcm).

b) Các đội còn lại có số điểm không lớn hơn 12. Vì không có trận nào hòa nên số điểm các đội còn lại là bội của 3.

Số điểm các đội còn lại có thể là 0, 3, 6, 9, 12. Do đó $N \leq 5 + 3$. Vì $N \geq 7$ (câu a) nên $N = 7$ hoặc $N = 8$.

• Xét $N = 8$. Có 8 đội nên số trận đấu có $\frac{8.7}{2}$ $= 28$ trận. Tổng số điểm 8 đội đạt là 28.3 là số chẵn. Còn $0 + 3 + 6 + 9 + 12 + 12 + 12 + 15$ là số lẻ, vô lí. Vậy $N \neq 8$.

• Xét $N = 7$. Có 7 đội nên số trận đấu có $\frac{7.6}{2}$ $= 21$ trận. Tổng số điểm 7 đội đạt $21.3 = 63$ điểm. Tổng số điểm các đội còn lại (trừ đội nhất, nhì, ba) đạt được là :

$63 - (12 + 12 + 15) = 24 = 0 + 3 + 9 + 12$

Số 24 biểu diễn thành tổng 4 số là bội của 3 và khác nhau chỉ có duy nhất cách biểu diễn trên.

Tổng số điểm của mỗi đội còn lại đạt được lần lượt là : 0; 3; 9; 12.

Hướng dẫn giải :

NGUYỄN ĐỨC TẤN - LÊ QUANG NẪM

(Tp. Hồ Chí Minh)

HỘI NGHỊ CỘNG TÁC VIÊN THTT TẠI TP HỒ CHÍ MINH

Sau một số năm chỉ họp các ủy viên Hội đồng biên tập và cộng tác viên ở Tp. Hồ Chí Minh, ngày 13.12.2002 tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã tổ chức cuộc họp các Ủy viên Hội đồng biên tập và cộng tác viên các tỉnh Nam Bộ, Tây Nguyên và duyên hải Nam Trung Bộ. Hội trường chính Chi nhánh NXB Giáo dục tại Tp. Hồ Chí Minh trở thành nơi gặp gỡ của những người tâm huyết với Toán học & Tuổi trẻ đến từ các tỉnh phương Nam.

Hội nghị đã dành 1 phút mặc niệm GS Hoàng Chúng, nguyên Phó tổng biên tập tạp chí.

Sau phát biểu để dẫn của ông Vũ Viết Chính, Phó tổng biên tập NXB Giáo dục, Phó giám đốc Chi nhánh NXB Giáo dục tại Tp. Hồ Chí Minh, TS. Nguyễn Việt Hải, Trưởng ban biên tập tạp chí đã đọc báo cáo về hoạt động của tạp chí trong năm 2002 và kế hoạch năm tới. Báo cáo nêu những việc chính mà tạp chí đã làm được, số lượng phát hành và điểm lại các ý kiến mà độc giả đã góp ý trong đợt thăm dò tiến hành giữa năm.

GS Nguyễn Cảnh Toàn đã phát biểu ý kiến và các đại biểu phát biểu rất sôi nổi trong phần thảo luận sau đó. Giải thích băn khoăn của nhiều người vì sao THTT chưa xuất hiện nhiều ở miền Nam, nhà giáo Trần Nam Dũng cho rằng phải chăng vì báo Toán có mặt ở miền Bắc từ 1964, đã thành truyền thống, cha giới thiệu cho con, ông để lại cho cháu, nên các tỉnh miền Bắc đọc nhiều. Một luồng ý kiến cho rằng THTT còn khó, hơi kinh viện so với bạn đọc phía Nam và muốn tạp chí gần hơn nữa với toán học trong nhà trường. Bên cạnh đó lại có những ý kiến muốn THTT giữ được bản sắc, phục vụ đối tượng khá giỏi, đơn giản nhưng không được tầm thường. Cần chú ý có thêm các bài gợi cho học sinh những ý tưởng như giới thiệu một cách dễ hiểu về toán cao cấp, những vấn đề toán ứng dụng trong môn học khác, chương trình toán của các nước bạn, lịch sử toán... Nhà giáo Nguyễn Văn Vĩnh lưu ý tạp chí chú ý hơn đến loạt bài phát hiện vấn đề, các bài giúp học sinh quy nạp để tìm ra cái mới. Một số cộng tác viên gợi ý có thể làm đại lí, phát hành THTT tại trường mình và các trường bạn. Nhìn chung, THTT trong năm 2002 được bạn đọc khen là đã tiến bộ về nội dung, trình bày tốt hơn. Nhà giáo trẻ Lê Quang Năm mong muốn THTT mãi là niềm hi vọng của bạn trẻ yêu toán.

Ông Vũ Bá Hòa, Giám đốc Chi nhánh NXB Giáo dục tại Tp. Hồ Chí Minh đánh giá THTT là tờ báo có uy tín, bề thế, góp phần phát hiện và bồi dưỡng nhân tài. Ông mong muốn chất lượng của THTT được nâng cao để số lượng tăng lên, qua đó có điều kiện nâng chất lượng. Ông mong muốn đội ngũ cộng tác viên của tạp chí THTT cũng trở thành cộng tác viên của NXB Giáo dục và hứa sẽ chú ý phát hành nhiều hơn THTT tại các tỉnh phía Nam.

Thay mặt tòa soạn ThS Vũ Kim Thủy trình bày kết quả cuộc thi giải Toán, Vật lí trên tạp chí năm học 2001-2002 và danh sách các em học sinh các tỉnh phía Nam đoạt giải. GS Nguyễn Cảnh Toàn đã trao bằng chứng nhận cho em Trần Võ Huy, 11T, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, giải Nhất cuộc thi giải Toán, Vật lí trên tạp chí THTT năm học 2001-2002 và Nguyễn Lâm Hưng, 11T, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, giải Nhì cuộc thi Vui hè 2002, là đại diện các học sinh đoạt giải.

Nhân dịp này, nhà giáo Nguyễn Đức Tấn đã tặng Toán học Tuổi trẻ bức khánh chúc mừng tạp chí tròn tuổi 38.

Trước khi diễn ra hội nghị, tòa soạn THTT đã có chuyến công tác ngắn ngày để tìm hiểu tình hình đọc báo và phát hành tạp chí tại Cần Thơ, Vĩnh Long. Cán bộ tòa soạn đã làm việc với Sở Giáo dục – Đào tạo, Công ty PH Sách và Thiết bị trường học tỉnh Vĩnh Long, trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long, Công ty PH Sách và Thiết bị trường học tỉnh Cần Thơ và trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ. Ngân sách chi cho sách tham khảo và thiết bị dạy học đã tăng nhiều trong hai năm gần đây. Nếu phối hợp tốt giữa tạp chí, Bưu điện và các Công ty PH Sách và Thiết bị các tỉnh, THTT sẽ đến được nhiều hơn nữa với bạn đọc mọi miền Tổ quốc.

BNH

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

CẮT BÁNH CHƯNG NGÀY TẾT

PHẠM TRÀ ÂN
(*Viện Toán học*)

Trước mặt bạn là một chiếc bánh chưng vuông ngày Tết đã bóc lá thơm mùi nếp mới và lá dong với 4 chiếc lạt giang mềm mại. Thường thì từ 4 sợi lạt ta cắt bánh chưng thành 8 miếng đều nhau. Có bao giờ bạn tự hỏi, với 4 chiếc lạt này ta có thể cắt chiếc bánh thành nhiều nhất bao nhiêu miếng bánh bằng cách chỉ đặt thẳng các sợi lạt trên một mặt của bánh ?

Về mặt toán học, bài toán được phát biểu lại tổng quát như sau : *Trong một mặt phẳng số miền con tối đa L_n được phân chia bởi n đường thẳng là bao nhiêu ?*

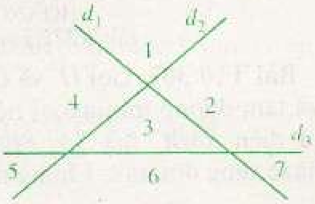
Ta cùng tìm lời giải cho câu hỏi này. Trước hết, hãy bắt tay vào thử vài trường hợp đơn giản :

• Với $n = 1$, 1 đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 miền, do đó $L_1 = 2$.

• Với $n = 2$, 2 đường thẳng cắt nhau, chia mặt phẳng thành 4 miền, do đó $L_2 = 4$.

Đến đây ta thử tìm quy luật của L_n :

Khi xét $n = 3$, cho 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 từng cặp cắt nhau được tối đa là 7 miền con (hình 1). Như vậy $L_3 = 7$ và khi thêm đường thẳng thứ ba thì số miền tăng thêm 3.



Hình 1

Ta thử xét trường hợp tổng quát :

Giả sử n-1 đường thẳng đầu tiên đã được sắp xếp để đạt được số tối đa L_{n-1} miền con rồi. Thêm đường thẳng thứ n nữa, giả sử số miền con sẽ tăng thêm là k, điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng thứ n phân chia k miền cũ, hay là đường thẳng thứ n cắt các đường thẳng đã có ở k-1 vị trí. Do đường thẳng thứ n cắt n - 1 đường thẳng đã có ở nhiều nhất n-1 điểm, vì vậy $k \le n$. Ta có được cận trên của L_n, $L_n \le L_{n-1}+n$. Bây giờ ta chỉ ra rằng cận trên này là đạt được bằng cách đặt vị trí của đường thẳng thứ n thỏa mãn hai điều kiện sau : đường thẳng thứ n cắt tất cả n-1 đường thẳng đã có và các giao điểm mới không trùng với tất cả các giao điểm đã có. Dễ thấy rằng lúc đó ta sẽ có số miền con là $L_{n-1}+n$. Do đó $L_n \ge L_{n-1}+n$. Vì vậy

$L_n = L_{n-1}+n$ và ta có hệ thức đệ quy:

$L_n = L_{n-1}+n$, coi $L_0 = 1$.

Ta có thể giải hệ thức đệ quy trên bằng phương pháp "duỗi dần ra" như sau :

$$L_n = L_{n-1} + n = L_{n-2} + (n-1) + n,$$
$$= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n,$$
$$\ldots\ldots$$
$$= L_0 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n,$$
$$= 1 + S_n, \text{ với } S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \quad (1)$$

S_n chính là tổng của n số tự nhiên đầu tiên và ta đã biết công thức $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Đối với các bạn học sinh THCS , ta có thể dùng mẹo mà "Ông vua Toán học" Gauss đã dùng khi mới có 9 tuổi, để tính tổng S_n như sau :

$$\begin{array}{rl} + & S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n\,; \\ & S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1\,; \\ \hline & 2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) = (n+1)n. \end{array}$$

Do đó $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Thay vào (1) ta có : $L_n = 1 + S_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

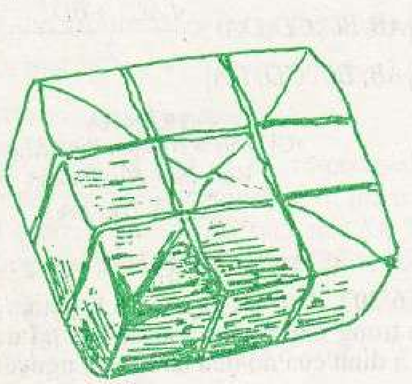
Với $n = 4$ thì : $L_4 = \dfrac{4\times5}{2} + 1 = 11$

Cách giải trên còn cho ta cách "đặt lạt" để đạt được số miếng bánh nhiều nhất có thể :

- Đặt lạt 1 chia bánh làm 2 phần.

- Đặt lạt thứ k, $(2 \le k \le n)$ cắt $(k$-1) lạt trước đó tại các giao điểm mới không trùng với các giao điểm đã có.

Như vậy *Bài toán cắt bánh chưng ngày Tết* đã được giải quyết một cách trọn vẹn.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/307. Tìm số đo các cạnh của tất cả các tam giác sao cho chúng đều là số nguyên dương mà số đo chu vi bằng số đo diện tích của cùng tam giác đó.

TRẦN VĂN VUÔNG
(Viện KHGD)

Bài T2/307. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)$ trong đó a, b, c, d là các số dương thỏa mãn điều kiện $abcd = 1$.

TẠ HOÀNG THÔNG
(SV Toán 2001, ĐHKHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T3/307. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\\(1+x)(1+y)(1+z)=\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3\end{cases}$$

THÂN THANH NAM
(SV K24B Toán ĐHSP Hà Nội II)

Bài T4/307. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh CD. Gọi P là giao điểm của AN và DM. Gọi Q là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M và N theo thứ tự di chuyển trên AB và CD.

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV CLC K49 Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T5/307. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$\min\{AB, BC, CD, DA\} \le \frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le$$
$$\le \max\{AB, BC, CD, DA\}$$

TRẦN HÀ
(GV THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)
HẢI HÀ *(Hà Nội)*

CÁC LỚP THPT

Bài T6/307. Tìm tất cả các số tự nhiên $n \ge 3$ sao cho trong mặt phẳng tọa độ tồn tại đa giác đều mà n đỉnh của nó đều có tọa độ nguyên.

ĐINH VĂN KHÂM
(GV THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài T7/307. Dãy số (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ được xác định bởi : $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ với $n = 1, 2, 3...$

Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn và tìm giới hạn đó.

TRẦN VIỆT ANH
(SV CLC K51 Toán ĐHSP Hà Nội)

Bài T8/307. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$x_1^3+x_2^3+...+x_n^3-x_1^4-x_2^4-...-x_n^4$$

trong đó các số x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ thỏa mãn các điều kiện : $0 \le x_i \le 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$ và $x_1+x_2+...+x_n=1$

VŨ QUỐC HIỆU
(SV K33A Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T9/307. Trong tam giác ABC gọi m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với các góc có đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng $r_a^2+r_b^2+r_c^2 \ge m_a^2+m_b^2+m_c^2$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HOÀNG NGỌC TUẤN
(SV K27E Toán, ĐHSP Hà Nội II)

Bài T10/307. Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC của tứ diện $SABC$ mà SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

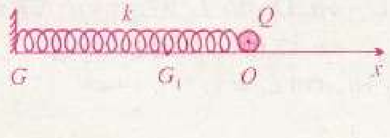
$$\frac{OH^2}{SH^2}+2=\frac{1}{4\cos A.\cos B.\cos C}$$

trong đó $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ là côsin các góc của ΔABC.

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/307. Một con lắc lò xo nằm ngang có khối lượng không đáng kể và độ cứng k = 100N/m, chiều dài tự nhiên l_0 = 80 (cm), quả nặng Q có khối lượng m = 400g. Bỏ qua mọi ma sát, $\pi^2 = 10$. Chọn trục Ox cùng chiều với trục lò xo, quả nặng ở vị trí cân bằng O như hình vẽ. Kéo Q lệch khỏi vị trí cân bằng theo



chiều dương của trục một đoạn 4cm rồi thả nhẹ, Q chuyển động ngược chiều dương của trục 2cm thì người ta giữ chặt điểm G_1 của lò xo với $GG_1 = 61,5$cm. Viết phương trình dao động của Q sau khi giữ chặt điểm G_1 ?

NGUYỄN VĂN HẠNH
(GV THPT Hà Huy Tập, Vinh, Nghệ An)

Bài L2/307. Có hai bình 1 và 2 chứa 6 lít và 2 lít nước tương ứng ở nhiệt độ lần lượt là 80°C và 20°C. Ban đầu người ta đổ một số lít nước ở bình 1 sang bình 2. Sau khi đã có cân bằng nhiệt ở bình 2, người ta lại đổ nước từ bình 2 sang bình 1 sao cho thể tích nước ở hai bình bằng nhau, thì thấy nhiệt độ bình 1 còn lại là 70°C. Hỏi ban đầu đã đổ bao nhiêu lít nước từ bình 1 sang bình 2 ? Tính nhiệt độ của nước bình 2 sau khi đã đổ nước từ bình 2 sang bình 1. Bỏ qua sự mất nhiệt với môi trường ngoài và bình đựng chất lỏng.

PHAN XUÂN SANH
(GV PTCT-Tin, ĐH Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/307. Find the measures of the sides of all triangles satisfying the conditions : these measures are whole numbers, the perimeter and the area are expressed by equal numbers.

T2/307. Find the least value of the expression

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right)\left(\sqrt{1+c}+\sqrt{1+d}\right)$$

where a, b, c, d are positive numbers satisfying the condition $abcd = 1$.

T3/307. Solve the system of equations :

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=3\\(1+x)(1+y)(1+z)=\left(1+\sqrt[3]{xyz}\right)^3\end{cases}$$

T4/307. Let $ABCD$ be a parallelogram. Take a point M on the side AB, a point N on the side CD. Let P be the point of intersection of AN and DM, Q be the point of intersection of BN and CM. Prove that PQ passes through a fixed point when M and N move respectively on AB and CD.

T5/307. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. Prove that

$$\min\{AB,BC,CD,DA\}\le\frac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2}\le$$

$$\le\max\{AB,BC,CD,DA\}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/307. Find all natural numbers $n \ge 3$ such that in the coordinate plane, there exists a regular n - polygon all vertices of which have integral coordinates.

T7/307. The sequence of numbers (u_n) $(n = 1, 2, 3, ...)$ is defined by : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(n = 1, 2, 3...$

Prove that the sequence has limit and find the limit.

T8/307. Find the greatest value of the expression :

$$x_1^3+x_2^3+...+x_n^3-x_1^4-x_2^4-...-x_n^4$$

(n is a given number), where the numbers x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ satisfy the conditions :
$0 \le x_i \le 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$ and $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$

T9/307. In a triangle ABC, let m_a, m_b, m_c be respectively the measures of the medians issued from A, B, C, let r_a, r_b, r_c be respectively the radii of the escribed circles in the angles A, B, C. Prove that $r_a^2+r_b^2+r_c^2 \ge m_a^2+m_b^2+m_c^2$

When does equality occur ?

T10/307. Let H and O be respectively the orthocenter and the circumcenter of the triangle ABC of a tetrahedron $SABC$ such that SA, SB, SC are orthogonal each to the others. Prove that

$$\frac{OH^2}{SH^2}+2=\frac{1}{4\cos A.\cos B.\cos C}$$

where $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ are cosinus of the angles of triangle ABC.

Bài T1/303. *Tìm mọi cặp số nguyên x, y thỏa mãn*

$$x^4 + (x+1)^4 = y^2 + (y+1)^2 \qquad (1)$$

Lời giải. Giả sử cặp số nguyên (x, y) thoả mãn (1). Khai triển và rút gọn hai vế ta có :

$(1) \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x = y^2 + y$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = y^2 + y + 1$

$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 = y^2 + y + 1 \qquad (2)$

Hệ thức (2) chứng tỏ $y^2 + y + 1$ là một số chính phương. Mặt khác :

Nếu $y > 0$ thì $y^2 < y^2 + y + 1 < (y+1)^2$.

Nếu $y < -1$ thì $(y+1)^2 < y^2 + y + 1 < y^2$.

Cả hai trường hợp trên đều chứng tỏ $y^2 + y + 1$ không thể là số chính phương. Do đó :

$(2) \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = -1$ và $(x^2 + x + 1)^2 = 1$ (3)

Do $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, luôn dương

nên : $(x^2 + x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1 \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $(x ; y)$ là một trong 4 cặp số : $(0 ; 0)$, $(0 ; -1)$, $(-1 ; 0)$ và $(-1 ; -1)$.

Thử lại, ta thấy cả 4 cặp số trên đều thoả mãn điều kiện của bài toán.

Nhận xét :

1) Đây là bài toán khá quen thuộc và có nhiều cách giải. Tuy nhiên, trong số 225 bài gửi đến toà soạn, cũng có tới 54 bài giải sai hoặc chưa đầy đủ. Một số bạn sử dụng các tính chất chia hết trong $\mathbb{Z}$ để lập luận, nhưng lại quên các số nguyên âm. Có bạn tìm ra được $x, y \in \{0 ; -1\}$, nhưng khi kết luận thì chỉ nêu được hai cặp số...

Vì bài toán không giải theo cách biến đổi tương đương liên tiếp các phương trình nên phải thử lại, nhưng hầu hết các bạn thiếu điều này.

– Rất nhiều bạn kết luận rằng phương trình có 4 *cặp nghiệm*, thực ra nghiệm của một phương trình hai ẩn số là một *cặp số* $(x ; y)$.

3) Vì có quá nhiều bạn giải đúng nên chúng tôi chỉ nêu tên một số bạn tiêu biểu :

Hà Giang : *Hoàng Văn Tâm*, 9N, THPT Chuyên Hà Giang ; **Bắc Ninh** : *Nguyễn Hữu Cường*, 7B, *Lê Quốc Khánh*, 9A, THCS Yên Phong, *Nguyễn Văn Phương*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo ; **Phú Thọ** : *Hoàng Quỳnh Trang*, 8E, THCS Văn Lang, Việt Trì, *Nguyễn Thị Thanh Thảo*, 8A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc** : *Phạm Hùng Anh*, 9A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Mê Linh ; *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch ; **Hải Phòng** : *Phạm Hải Linh*, 9B, PTTH NK Trần Phú, *Đào Thị Huệ*, 9A4, THCS Thủy Đường, Thủy Nguyên ; **Hưng Yên** : *Lý Thị Lan*, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Dương** : *Nguyễn Thị Như Trang*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; *Hoàng Thị Thu Thỏa*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Hà Nội** : *Nguyễn Đức Tuấn*, 7A1, THDL Lương Thế Vinh ; *Trần Nam Sơn*, 8A, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Hà Tây** : *Nghiêm Mạnh Hùng*, 9A, THCS Cao Thắng, Kim Bôi, Hòa Bình, *Đỗ Công Quyết*, 9A, THCS Tản Đà, Ba Vì ; **Nam Định** : *Vũ Duy Linh*, 9A2 , THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; *Đặng Tuấn Hùng*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực ; *Phạm Thị Huệ*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn ; **Thái Bình** : *Nguyễn Thanh Huyền*, 9A , THCS Tân Thuật, Kiến Xương ; **Ninh Bình** : *Nguyễn Xuân Tường* và *Hoàng Nhật Minh*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình ; **Thanh Hoá** : *Nguyễn Danh Quang*, 9A1, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hoá ; *Trịnh Thành Kiên*, 9A2, THCS Trần Mai Ninh ; **Nghệ An** : *Bùi Thị Quỳnh Thơ*, 8A, THCS Hermann Gmeiner, *Hoàng Nguyên*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Nguyễn Thị Giang*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Hà Tĩnh** : *Trương Thị Anh Bình*, 9/3, THCS Lê Văn Thiêm, *Nguyễn Phạm Hưng*, 9H, THCS Tr. Kỳ Anh ; **Huế** : *Phan Lê Anh Minh*, lớp 9_1, Tr. Nguyễn Tri Phương ; **Quảng Trị** : *Nguyễn Tự Hành*, 9^6, THCS Nguyễn Trãi, Tx. Đông Hà, *Trần Thị Đông*, 9B, THCS Hải Lâm, Hải Lăng ; **Đắc Lắc** : *Ngô Thùy Dương*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột ; **Đà Nẵng** : *Phạm Thanh Sơn*, 9/2 , THCS Lê Thị Hồng Gấm, Q. Thanh Khê ; **Khánh Hoà** : *Phạm Kiều Anh* và *Lê Thị Hồng Nhung*, 9/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Quảng Ngãi** : *Huỳnh Thị Nhung*, lớp 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức ; **Bình Định** : *Huỳnh Tấn Sang*, 9A4, THCS Đống Đa, Quy Nhơn, *Mai Xuân Khánh*, 9A2, THCS Thị xã Tuy Phước ; **TP. Hồ Chí Minh** : *Bạch Đào Sơn Thương*, 8T, THCS Nguyễn An Ninh, Q10 ; **Đồng Tháp** : Lý Duy Khiêm, 9A1, THCS Cao Lãnh.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T2/303. *Giải phương trình* :

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2} \qquad (*)$$

Lời giải. Điều kiện để PT có nghĩa là : $x \neq 0$ và $(1 - x)x \geq 0$, hay là $0 < x \leq 1$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 1 + \frac{2x-1}{1+x^2}$

Thử thấy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của PT (*)

• Với $0 < x < 1/2$ thì $1 - x > x > 0$ và $2x - 1 < 0$ suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}} > 1 > 1 + \frac{2x-1}{1+x^2}$

• Với $1/2 < x \le 1$ thì $0 \le 1 - x < x$ và $2x - 1 > 0$ suy ra $\sqrt{\frac{1-x}{x}} < 1 < 1 + \frac{2x-1}{1+x^2}$

Thử thấy $x = 1/2$ là nghiệm duy nhất của PT (*)

Nhận xét. 1) Bạn *Phạm Văn Khiêm*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, **Hà Tây** đã giải phương trình tổng quát :

$$\sqrt{\frac{a-bx}{cx}} = \frac{x^2+(b+c)x}{x^2+a}$$

trong đó a, b, c là các số dương.

Một số bạn biến đổi :

$(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2x-1}{1+x^2}$ và sử dụng đẳng thức $\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right) = 1 - 2x$ để giải PT trên.

2) Các bạn sau cũng có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Lê Xuân Trường*, 7, THCS Phù Lỗ, *Nguyễn Trung Kiên, Lưu Hùng Cường*, 9A, *Nguyễn Bảo Linh*, 8A, *Nguyễn Quang Huy*, 9G, THCS Văn Long, Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** *Phạm Huy*, 8C, THCS Tam Dương ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Việt, Vũ Nhật Minh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Trường Giang*, 9A, THCS Yên Phong, *Tạ Khắc Công, Nguyễn Hữu Cường*, 7B, THCS Yên Phong ; **Hải Dương** : *Nguyễn Anh Tuấn*, 9/3, *Phạm Trường Xuân, Hoàng Đình Phương*, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hải Phòng :** *Phạm Ngọc Hà*, 9A, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo, *Trần Xuân Chi*, 9C, THCS Tiên Lãng ; *Nguyễn Huy Hoàng*, 9A4, THCS Trần Phú, Lê Chân, *Đặng Ngọc Chiến*, 9B, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Trần Tiến Dũng*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực ; **Thanh Hóa :** *Vũ Văn Hùng*, 9D, *Trần Vũ Hoàng*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Phạm VănQuang*, 9C, THCS Yên Trường, *Bùi Tiến Quân*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ; *Lê Minh Thông*, 9A,THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; *Lưu Xuân Thế*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** *Võ Cao Thắng*, 9A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc ; *Đặng Bảo Đức*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Thừa Thiên – Huế :** *Lê Quang Thành*, 9/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế ; **Đắc Lắc :** *Ngô Thùy Dương*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột ; **Quảng Ngãi :** *Hoàng Lê Duy*, 9H, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Quảng Ngãi ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Anh Hưng*, 9/2, THCS Hòa Bình, Long Thành ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Tuấn Tú, Nguyễn Kiến Long*, 9/1, THCS Hồng Bàng, Q. 1.

VIỆT HẢI

Bài T3/303. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$ab + bc + 2ca$$

trong đó a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 8.$$

Lời giải. *Cách 1.*

$8+ab+bc+2ca \ge a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + 2ca$

$= \left(a+\frac{b}{2}+c\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \ge 0 \Rightarrow ab + bc + 2ca \ge -8$

Đẳng thức xảy ra chỉ khi $b = 0$; $a + \frac{b}{2} + c = 0$; $a^2 + b^2 + c^2 = 8 \Leftrightarrow (a, b, c)$ bằng $(2, 0, -2)$ hoặc $(-2, 0, 2)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $ab + bc + 2ca$ là -8 với (a, b, c) như trên.

Cách 2. Ta có

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \ge 0 \Rightarrow$

$ab+bc+ca \ge -\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ mà $a^2 + b^2 + c^2 \le 8$

nên $ab+bc+ca \ge -4$ (1), đẳng thức xảy ra chỉ khi $a+b+c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 8$.

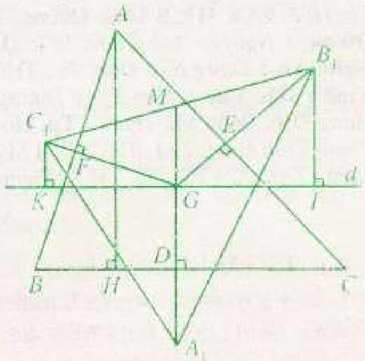
$$(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac \ge 0 \Rightarrow ac \ge -\frac{a^2+c^2}{2}.$$

Tương tự trên $ac \ge -\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \ge -4$, $\Rightarrow ac \ge -4$ (2) đẳng thức xảy ra chỉ khi $b = 0$ và $a = c = \pm 2$. Cộng theo từng vế hai bất đẳng thức (1) và (2) ta có $ab+bc+2ca \ge -8$, đẳng thức xảy ra chỉ khi $b = 0$, $|a| = |c| = 2$ và a, c trái dấu nhau. Ta có kết luận như ở cách 1.

Nhận xét. Rất nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán này và giải đúng.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/303. *Từ điểm G nằm trong tam giác ABC lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với BC, CA, AB tại D, E, F. Trên các tia GD, GE, GF lấy các điểm A_1, B_1, C_1 tương ứng sao cho $\frac{GA_1}{BC} = \frac{GB_1}{CA} = \frac{GC_1}{AB}$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.*



Lời giải. *Cách 1.* Kẻ qua G đường thẳng $d//BC$. Hạ $B_1I \perp d$, $C_1K \perp d$. AH là đường cao của ΔABC. M là giao của B_1C_1 và A_1G. Ta có $\widehat{HAC} = \widehat{B_1GI}$.

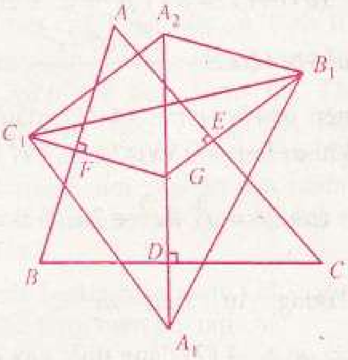
Suy ra 2 tam giác vuông HAC và GIB_1 đồng dạng với nhau.

Do đó $\frac{GB_1}{AC} = \frac{GI}{AH}$. Tương tự $\frac{GC_1}{AB} = \frac{GK}{AH}$

Từ giả thiết $\frac{GB_1}{AC}=\frac{GC_1}{AB}$, nên $\frac{GI}{AH}=\frac{GK}{AH}$ hay $GI = GK$.

Theo định lí Talet suy ra $MC_1 = MB_1$ tức G thuộc trung tuyến của $\Delta A_1B_1C_1$ hạ từ đỉnh A_1. Tương tự G nằm trên đường trung tuyến hạ từ đỉnh B_1 của $A_1B_1C_1$. Vậy G là trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$.

Cách 2. Lấy A_2 đối xứng với A_1 qua G. Từ giả thiết $\frac{GA_1}{BC}=\frac{GB_1}{AC}$ suy ra $\frac{GA_2}{BC}=\frac{GB_1}{AC}$. Mà $\widehat{A_2GB_1}=\widehat{ACB}$ $= 180^0 - \widehat{EGD}$. Do đó $\Delta A_2GB_1 \backsim \Delta BCA$. Suy ra $\frac{A_2B_1}{AB}=\frac{GB_1}{AC}=\frac{GC_1}{AB}$. Từ đó $A_2B_1 = GC_1$. Ta có $\widehat{B_1A_2G} = \widehat{ABC} = 180^0 - \widehat{FGD} = \widehat{C_1GA_2}$, suy ra $A_2B_1 // GC_1$. Từ 2 kết quả trên ta suy ra $B_1A_2C_1G$ là hình bình hành. Do vậy GA_2 qua trung điểm của B_1C_1 tức A_1G đi qua trung điểm của B_1C_1. Tương tự B_1G đi qua trung điểm của A_1C_1. Vậy G là trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$.



Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : **Vĩnh Phúc :** *Đào Thị Hồng*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, 9C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú, *Đào Thị Huê*, 9A4, THCS Thủy Đường, Thủy Nguyên ; **Hải Dương :** *Nguyễn Anh Tuấn*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Nghệ An :** *Đặng Bảo Đức*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Đắc Lắc :** *Ngô Thùy Dương*, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Lương Phạm Vĩnh Hiển*, 7A1, THCS Phú Mỹ, Bình Thạnh ; **Bạc Liêu :** *Trần Anh Vũ*, 9/2, TH Sư Phạm, Tx. Bạc Liêu.

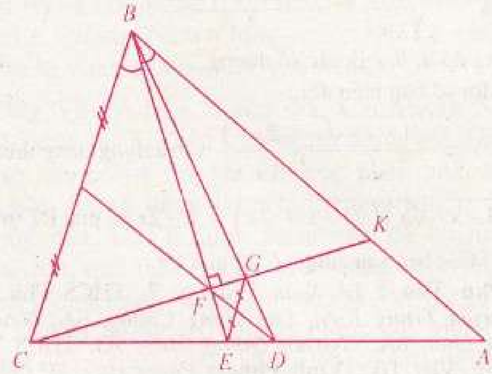
VŨ KIM THỦY

Bài T5/303. *Cho tam giác ABC có BC < BA với đường trung tuyến BD, đường phân giác BE. Đường thẳng qua C, vuông góc với BE ở F và cắt BD ở G. Chứng minh rằng DF đi qua trung điểm của đoạn thẳng GE.*

Lời giải. Gọi K là giao điểm của CG với AB, khi đó ΔBCK cân ở B nên F là trung điểm của CK. Từ đó $FD // AB$ và $FD = \frac{1}{2}AK$. Từ :

$\frac{GB}{GD}=\frac{BK}{FD}$ suy ra $\frac{GB}{BD}=\frac{BK}{FD+BK}=\frac{2BK}{AK+2BK}$ $=\frac{2BC}{BC+AB}$ (1). Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ABC có :

$$\frac{BC}{BA}=\frac{EC}{EA} \Rightarrow \frac{2BC}{BC+AB}=\frac{2EC}{CA}=\frac{EC}{CD} \quad (2)$$



Từ (1), (2) suy ra : $\frac{GB}{BD}=\frac{EC}{CD} \Rightarrow GE // BC$.

Vì DF đi qua trung điểm của BC nên nó cũng đi qua trung điểm của GE. (đpcm).

Nhận xét. 1) Một số bạn có nhận xét rằng kết quả bài toán vẫn đúng cho trường hợp $BC > AB$ (lúc đó trong đề bài phải sửa thành *Đường thẳng qua C, vuông góc với BE ở F và cắt đường thẳng BD ở G*).

2) Các bạn có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : *Quách Phương Nam*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Phú Thọ :** *Ngô Vĩnh Thái, Bùi Quang Huấn, Nguyễn Trung Kiên*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu ; **Hà Nội :** *Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Hoàng Việt*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng :** *Lưu Ngân Hà, Nguyễn Vũ Lân, Nguyễn Mạnh Chiến*, 9A, *Lê Trung Sơn, Đặng Ngọc Chiến*, 9B, THPT NK Trần Phú, *Tiêu Đan Trường*, 9T, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền ; **Hưng Yên :** *Chu Thị Thu Hằng, Phú Thị, Mễ Sở, Văn Giang* ; **Thanh Hóa :** *Bùi Khắc Kiên*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Tiến Thanh*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn ; **Nghệ An :** *Đặng Bảo Đức, Đào Lê Trung*, 9E, *Nguyễn Viết Khôi*, 9G, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh, *Hồ Ngọc Kiên, Nguyễn Thị Giang, Lê Duy Toàn, Vũ Trọng Quý*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, *Lê Ngọc Thạch*, 8A, *Nguyễn Lê Phước*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Lê Thị Thanh Huyền, 9G, THCS Hà Huy Tập, Tp. Vinh ; **Quảng Trị :** *Dương Bảo Nhân*, 9, THCS Đại Hòa ; **Khánh Hòa :** *Lê Thị Hồng Nhung*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Tp. Nha Trang ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Hải Đăng*, 9^3, THCS Nguyễn Công Trứ, Xuân Hưng, Xuân Lộc ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Kiến Long, Nguyễn Tuấn Tú*, 9^1, trường Hồng Bàng, Q. 5...

HỒ QUANG VINH

Bài T6/303. *Trong một phòng thi gồm có 9 thí sinh được xếp ngồi xung quanh một bàn tròn. Trong ngân hàng đề có 9 loại đề khác nhau, mỗi loại có nhiều bản. Một cách phát đề được gọi là hợp lệ nếu mỗi thí sinh được nhận chỉ 1 đề và hai thí sinh bất kì ngồi cạnh nhau thì nhận được 2 loại đề khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách phát đề hợp lệ ?*

Lời giải. (của *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, ĐHSP **Hà Nội**)

Kí hiệu P_n là số cách phát đề hợp lệ cho n học sinh $a_1, a_2, ..., a_n$ ngồi theo vòng tròn. Ta viết $a_i = a_j$ $(i \neq j)$ nếu a_i và a_j có cùng loại đề và $a_i \neq a_j$ nếu trái lại. Ta chứng minh công thức $P_{n+1} = 7P_n + 8P_{n-1}$ (1)

Thật vậy, xét một cách phát đề hợp lệ cho $(n+1)$ thí sinh $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$

– Nếu $a_1 \neq a_n$ thì bỏ thí sinh a_{n+1} đi ta có một cách phát đề hợp lệ cho n thí sinh $(a_1, ..., a_n)$. Và a_{n+1} có thể có $9 - 2 = 7$ cách phát đề (lấy 1 trong 7 đề khác với a_1, a_n).

– Nếu $a_1 = a_n$, thì bỏ a_{n+1} và a_n đi ta có một cách phát đề hợp lệ cho $n-1$ thí sinh $(a_1, ..., a_{n-1})$. Đảo lại mỗi cách phát đề hợp lệ cho $(n-1)$ thí sinh $(a_1, ..., a_{n-1})$ ta có 8 cách phát đề cho (a_n, a_{n+1}) để hợp lệ với $a_n = a_1$ (cụ thể cho $a_n = a_1$ và phát cho a_{n+1} chọn trong 8 đề khác với a_n).

Mặt khác dễ thấy : $\begin{cases} P_2 = 9.8 = 72 \\ P_3 = 9.8.7 = 504 \end{cases}$

Dãy (P_n) thỏa mãn (1) là dãy truy hồi cấp 2 có dạng $P_n = C_1 8^n + C_2(-1)^n$

Từ điều kiện $P_2 = 72$, $P_3 = 504$, suy ra $C_1 = 1$, $C_2 = 8$. Vậy $P_n = 8^n + 8(-1)^n$

Nói riêng $P_9 = 8^9 - 8 = 134217720$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Thanh Hóa :** *Hoàng Kiên Trung*, 12T, THPT Lam Sơn ; **Đồng Tháp :** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 12T, THPT Tx. Sa Đéc ; **Phú Yên :** *Huỳnh Lâm Linh*, 12T ; **Nghệ An :** *Đinh Viết Sang*, 12T, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Lâm Hưng*, 12T, PTNK ĐHQG Tp. HCM ; **Đà Nẵng :** *Lương Văn Toại*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Hà Tây :** *Nguyễn Ngọc Phương*, 11, THPT Nguyễn Huệ ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Tiến Việt*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Lê Thịnh*, 12T, THPT Lê Khiết.

Đây là một bài toán hay về tổ hợp. Có rất nhiều bạn quan tâm gửi lời giải tới. Nhưng đa số cho lời giải sai dẫn đến có rất nhiều đáp số khác nhau cho bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/303. *Giải phương trình :*

$$(a-x)^k + (x-b)^k = (a-b)^k \quad (1)$$

với $a \neq b$, k là số nguyên khác 0.

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**).

a) Với $k = 1$ thì (1) đúng với mọi x. Do đó phương trình có nghiệm là $\forall x \in R$

b) Với $k > 1$, (1) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{a-x}{a-b}\right)^k + \left(\dfrac{x-b}{a-b}\right)^k = 1$ (2)

Đặt $t = \dfrac{a-x}{a-b}$, (1) $\Leftrightarrow t^k + (1-t)^k = 1$ (3)

Xét hàm số $f(t) = t^k + (1-t)^k - 1$;

$f'(t) = k\left[t^{k-1} - (1-t)^{k-1}\right] \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Vậy theo định lí Roll phương trình $f(t) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm. Dễ thấy $t = 0$, $t = 1$ là nghiệm. Vậy nghiệm của (1) là $x = a$, $x = b$.

c) Với $k < 0$. Ta CM rằng nếu k lẻ thì phương trình vô nghiệm.Thật vậy ta vẫn có (1) $\Leftrightarrow$ (3) nhưng bây giờ $t \neq 0, 1$.

Nếu $t < 0$ thì $t^k + (1-t)^k < (1-t)^k < 1$ (do $k < 0$)

Nếu $0 < t < 1$ thì $t^k + (1-t)^k > t^k > 1$

Nếu $t > 1$ thì $t^k + (1-t)^k < t^k < 1$

d) Với $k < 0$, k chẵn.

1) Nếu $t < 0$, $f'(t) = k\left[t^{k-1} - (1-t)^{k-1}\right] > 0$

Vậy $f(t)$ đồng biến. Lại có $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -1$, $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = +\infty$ do đó trong khoảng $(-\infty, 0)$ phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất.

2) Nếu $0 < t < 1$. $f'(t) = 0$ tại $t_o = \dfrac{1}{2}$ và $f''(t_o) = k(k-1)\left[t^{k-2} + (1-t)^{k-2}\right] > 0$.

Vậy $t_o = \dfrac{1}{2}$ là điểm cực tiểu. Do đó

$f(t) \geq f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1-k} - 1 > 0$

Vậy phương trình $f(t) = 0$ không có nghiệm trong $(0, 1)$.

3) Nếu $t > 1$ ta có $f'(t) = k\left[t^{k-1} - (1-t)^{k-1}\right] < 0$ do đó $f(t)$ nghịch biến. Lại có $\lim\limits_{t \to +1} f(t) = +\infty$ và $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -1$ do đó trong khoảng $(1, +\infty)$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất.

Kết luận : $k > 1$ phương trình (3) có hai nghiệm $x = a, x = b$.

$k = 1$ $\forall x \in R$ là nghiệm

$k < 0$, k lẻ : vô nghiệm

$k < 0$, k chẵn : có đúng hai nghiệm

Tuy nhiên ở trường hợp này rất tiếc là ta không tìm được chính xác hai nghiệm đó. Chỉ với $k = -2$ ta tìm được hai nghiệm của (3) là $t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5+4\sqrt{2}}$ rồi suy ra nghiệm x. Ngoài ra chú ý rằng vì $f(2)f(3) = 2^k(3^k + 2^k - 1) < 0$ do đó $t_1 \in (2, 3)$ và $t_2 = 1 - t_1 \in (-2, -1)$.

Nhận xét. Do sơ xuất để bài toán đã in là $k \in Z$ mà lẽ ra phải là $k \in N^*$. Tuy vậy rất đông các bạn tham gia giải bài này và đều giải đúng cho trường hợp $k \in N^*$. (Với $k < 0$ tất cả các bạn (trừ bạn *Hoàng Ngọc Minh*) đều cho kết luận là phương trình vô nghiệm.

Tòa soạn xin cáo lỗi cùng các bạn, đồng thời có lời khen ngợi em *Hoàng Ngọc Minh*.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/303. *Dãy số thực dương (a_n) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) thỏa mãn các điều kiện : $a_1 = \frac{1}{6}$ và*

$$\sum_{i=n+1}^{2n} a_i \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \text{ với } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{2^n} a_i < 1$ với mỗi n.

Lời giải. Cách 1. (*Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** và nhiều bạn khác).

Từ giả thiết ta có : $\sum\limits_{i=k+1}^{2k} a_i \le \frac{1}{k}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right)$.

Vậy với $k = 2^0 = 1$ thì $a_2 \le a_1$

với $k = 2^1 = 2$ thì $a_3 + a_4 \le \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \le a_1$

với $k = 2^2$ thì $\sum\limits_{i=5}^{8} a_i \le \frac{1}{4}\left(\sum\limits_{i=1}^{4} a_i\right)$

...

với $k = 2^{n-1}$ thì $\sum\limits_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \le \frac{1}{2^{n-1}}\left(\sum\limits_{i=1}^{2^{n-1}} a_i\right)$

Cộng các vế tương ứng ta thu được

$$\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_i\right) - a_1 \le$$

$$\le 2a_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_i\right) + \left(\sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{i=5}^{8} a_i\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\left(a_{2^{n-2}+1} + a_{2^{n-2}+2} + \ldots + a_{2^{n-1}}\right)$$

hay $\left(\sum\limits_{i=1}^{2^{n-1}} a_i\right) < 3a_1 + \left(\sum\limits_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2^i}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{2^{n-1}} a_i\right) <$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} a_i\right)$$

Từ đây ta thu được đpcm.

Cách 2. (của đa số các bạn)

Kí hiệu $T_k = \sum\limits_{i=1}^{2^k} a_k$. Khi đó ta có : $T_0 = \frac{1}{6}$ và

$$T_n = T_{n-1} + \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_i \le T_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} T_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) T_{n-1}$$

Vậy (theo quy nạp) ta có :

$$T_n \le \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) T_o$$

Theo bất đẳng thưc Côsi thì

$$\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \le$$

$$\le \left[\frac{(n-1) + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}}{n-1}\right]^{n-1}$$

$$= \left(\frac{n-1+1-\frac{1}{2^{n-1}}}{n-1}\right)^{n-1} \le \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e \; (*)$$

Vậy nên $T_n < 1$ với mỗi $n \in N$, dpcm.

Nhận xét. 1) Một số bạn sử dụng hệ thức $1 + x \le \frac{1}{1-x}$ với $0 < x < 1$ để ước lượng (*) một cách đơn giản : $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) <$

$$< \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)} <$$

$$< \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n-1}}} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

2) Các bài gửi tới tòa soạn đều có lời giải đúng

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/303. *Chứng minh rằng* $\frac{1}{R}+\frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$ *trong đó p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của một tam giác. Đẳng thức xảy ra khi nào ?*

Lời giải. (*Lê Thái Sơn*, 10A, PTCT Tin – ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội**)

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác là a, b, c. Ta có hệ thức : $abc = 4RS = 4Rrp$ (*)

Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$(a+b+c)^3 \geq 27abc \Rightarrow 8p^3 \geq 27.4Rrp$ (theo (*))

$$\Rightarrow p^2 \geq \frac{27}{2}Rr \quad (1)$$

Lại có $p \geq 3\sqrt{3}r$ (2) (bất đẳng thức quen thuộc)

Từ (1), (2) suy ra :

$$p^3 \geq \frac{81\sqrt{3}Rr^2}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2p} \quad (3)$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có : $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra : $\frac{1}{R}+\frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ p=3\sqrt{3}r \\ R=2r \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Tam giác đã cho là đều.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng.

2) Ngoài cách giải trên, khá nhiều bạn đã chuyển bất đẳng thức cần chứng minh thành bất đẳng thức lượng giác

$$\sin A + \sin B + \sin C + \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Bất đẳng thức lượng giác trên được chứng minh khá dễ dàng. Chẳng hạn ta có thể thông qua hai bất đẳng thức lượng giác đơn giản sau :

$$\frac{4}{3}(\sin A+\sin B+\sin C) + \left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right) \geq 4\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{3}\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right) \geq 0$$

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Bến Tre :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 11T, THPT Bến Tre ; **Tiền Giang :** *Nguyễn Thanh Tùng*, 11T, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho ; **Bình Định :** *Bùi Ngọc Quỳnh*, 10T, THPT Lê Quý Đôn ; **Đà Nẵng :** *Đỗ Quốc Khánh*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Thanh Hóa :** *Lê Thanh Sơn*, 12A, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa ; **Hà Tây :** *Nghiêm Ngọc Phương*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; **Khánh Hòa :** *Lê Hồng Nhung*, 9^{T4}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Nghệ An :** *Đinh Viết Sang*, 12A1, THPT Phan Bội Châu ; **Phú Thọ :** *Vương Mạnh Tùng*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì.

NGUYỄN MINH HÀ

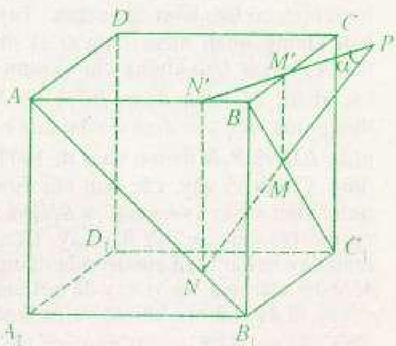
Bài T10/303. *Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Điểm M thuộc đoạn BC_1, điểm N thuộc đoạn AB_1, MN tạo với mặt phẳng (ABCD) góc α. Chứng minh rằng*

$$MN \geq \frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (Dựa theo *Huỳnh Lâm Linh*, 12T2, THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**).

Gọi M' và N' lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của M và N trên mặt phẳng $(ABCD)$, P là giao điểm của (MN) và $(M'N')$. Dễ thấy rằng M' thuộc cạnh



BC, N' thuộc cạnh AB và theo giả thiết, $\widehat{MPM'} = \alpha$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng M gần mặt phẳng $(ABCD)$ hơn N (cũng có nghĩa là $MM' < NN'$). Ta có : $MM' = BM'$; $NN' = AN' = a - BN'$ và $MN\cos\alpha = (PN-PM)\cos\alpha =$

$= PN' - PM' = M'N' = \sqrt{BM'^2+BN'^2}$ (1)

$MN\sin\alpha = PN\sin\alpha - PM\sin\alpha = NN' - MM' = a - (BM' + BN')$ (2)

Từ (1) và (2) ta được :

$MN(\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha)$

$= \sqrt{2(BM'^2 + BN'^2)} + a - (BM' + BN')$

$\geq (BM'+BN') + a - (BM'+BN') = a,$

hay $MN \geq \dfrac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{3}\sin(\alpha+\varphi)}$ (3)

$(\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}, \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \sin\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}})$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $BM' = BN'$

$\Leftrightarrow BM = B_1N = BM'\sqrt{2}$

Do đó : $\begin{cases} MN\cos\alpha = BN'\sqrt{2} \\ MN\sin\alpha = a - 2BN' \end{cases}$

$\Rightarrow BM' = BN' = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}$ (4)

Vậy : Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$BM = B_1N = \dfrac{a}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}$ (5)

Nhận xét. 1) Ngoài phương pháp sử dụng phép chiếu vuông góc nêu trên để xác định góc α một số bạn đã sử dụng phương pháp tọa độ ; chẳng hạn chọn hệ tọa độ Đề–các vuông góc gốc B, và ba trục là $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BB_1}$. Tuy nhiên, nhiều lời giải chưa gọn, thậm chí quá dài dòng.

2) Đây là một bài toán chứng minh bất đẳng thức hình học, có bao hàm đẳng thức. Tuy nhiên, hầu hết các bạn không quan niệm rằng α là một góc cho trước ; thành thử các bạn không chỉ rõ được vị trí hình học của các điểm M (trên đoạn BC_1) và N (trên đoạn AB_1) thông qua việc xác định độ dài của các đoạn thẳng bằng nhau BM và B_1N theo a và α để BĐT (3) trở thành đẳng thức. Chính vì vậy, các bạn chỉ dừng ở tính chất định tính : Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow BM' = BN'$ và không chỉ ra giá trị cụ thể (4) của các độ dài này. Cũng không ít bạn lại hiểu đây là bài toán cực trị nên dấu đẳng thức xảy ra để MN đạt cực tiểu, và vì vậy đã kết luận sai lầm rằng dấu = xảy ra khi và chỉ khi M và N là tâm các hình vuông BCC_1B_1 và ABB_1A_1 ! (Các vị trí này chỉ ứng với $\alpha = 0$, tức là khi MN // mp$(ABCD)$.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/303. *Một dãy gồm k vật giống nhau, mỗi vật có khối lượng m, được nối với nhau bằng sợi dây không dãn, có khối lượng không đáng kể. Các vật nằm trên mặt phẳng nằm ngang. Một ngoại lực $\vec{F_o}$ tác dụng lên vật thứ nhất kéo vật theo phương ngang sang phải (hình vẽ). Tính lực căng của đoạn dây nối vật thứ n với vật thứ n+1 nếu như :*

a) Không có ma sát giữa vật và mặt phẳng.

b) Hệ số ma sát giữa vật và mặt phẳng là μ.

(F_o đủ lớn để truyền được gia tốc cho các vật dù có ma sát).

Có nhận xét gì về kết quả tìm được ?

Lời giải. a) Áp dụng định luật II Niutơn cho hệ vật : $a = \dfrac{F_o}{km}$. Lực căng T_n của đoạn dây nối vật thứ n với vật thứ $n+1$ truyền gia tốc cho $(k-n)$ vật :

$$T_n = (k-n)m.a = \frac{(k-n)mF_o}{k} = F_o\left(1-\frac{n}{k}\right)$$

b) Ta có : $a = \dfrac{F_o - kmg\mu}{km}$

Áp dụng định luật II Niutơn cho nhóm $k-n$ vật :

$T'_n - (k-n)mg\mu = (k-n)ma$

$\Rightarrow T'_n = F_o\left(1-\dfrac{n}{k}\right) \Rightarrow T'_n = T_n$.

Ta thấy lực căng T_n không phụ thuộc vào việc có ma sát hay không. Hơn thế nữa, T_n không phụ thuộc vào khối lượng các vật, mà chỉ phụ thuộc vào lực kéo F_o, vào số vật trong hệ (k) và vào vị trí đoạn dây nối với hai vật (n).

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và có nhận xét đầy đủ : **Thái Bình :** *Đặng Xuân Phúc*, 12 Lí, THPT chuyên Thái Bình ; **Nghệ An :** *Lê Thị Thu Hà*, 11A, THPT Nam Đàn I ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Minh Tân*, 11A1, THPT Thanh Thủy ; **Ninh Bình :** *Đoàn Thị Hồng Minh*, 11A1, THPT Yên Khánh A ; **Bình Định :** *Phạm Quang Trung*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Nguyễn Đức Thiên Thịnh*, 11 Lí, *Trần Vĩnh Sơn*, 10L, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh ; **Thanh Hóa :** *Lê Doãn Quảng*, 11E, THPT Hoằng Hóa II, *Lê Văn Ba*, 10B10, THPT Hậu Lộc II, *Lê Minh Trí*, 10F, THPT Lam Sơn ; **Hà Nội :** *Trần Thanh Cường*, 11 Tin, THPT Nguyễn Trãi, *Phạm Việt Đức*, 10A chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Bắc Ninh :** *Chu Thanh Bình*, 11 Lí, *Trần Kiều Hưng*, 12 Toán, THPT chuyên Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc :** *Hoàng Tài Mạnh*, 11A5, *Đỗ Thành Phương*, 12A3, *Nguyễn Chí Đông*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; *Trần Văn Dũng*, 12A4, THPT Xuân Hòa, Mê Linh ; *Bùi Đức Hưng*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch.

MAI ANH

Bài L2/303. *Một cầu thủ đá quả bóng ở B về phía đoạn AC của khung thành với vận tốc ban đầu $v_o = 25m/s$. Bóng được đặt trước mặt khung thành, cách xa khung thành $x_o = 50m$. Xà ngang khung thành cao 3,44m (hình vẽ). Hỏi góc đá bóng 0 phải có trị số nằm trong khoảng nào để*

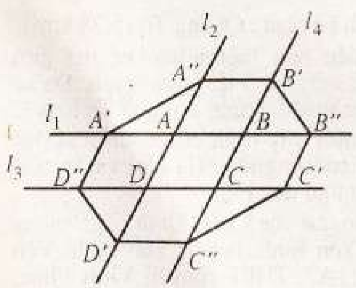
TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 59

Problem. Let l_1, l_2, l_3, l_4 be four lines on the plane such that the pairs l_1, l_3 and l_2, l_4 are parallel but l_1, l_2 are not parallel. Given a distance k, find the locus of a point P moving so that the sum $d(P)$ of its perpendicular distances from the four lines equals k.

Solution. Let a and b be the distances between l_1, l_3 and l_2, l_4 respectively. Clearly, $d(P) \geq a+b$. Let Λ denote the locus of the points P with $d(P) = k$. It is easy to see that if $k < a+b$, then Λ is empty, and if $k = a+b$, then Λ is the parallelogram $ABCD$ and its interior, where A, B, C, D are the intersection points of l_1, l_2, l_3, l_4.

If $k > a+b$, then Λ is the centrally symmetric octagon $A'A''B'B''C'C''D'D''$, where A', A'' lie on the lines l_1, l_2 outside the parallelogram $ABCD$ such that the perpendicular distances from A', A'' to l_2, l_1 equal $\dfrac{k-a-b}{2}$ and B', B'', C', C'', D', D'' are constructed similarly. To see this we first note that by this construction, $AA' = AA''$ and $A''B'$ are parallel to AB. If P is an arbitrary point on $A'A''$ and h is the sum of the distances from P to l_1, l_2, then $d(P) = 2h+a+b$. Since $\dfrac{1}{2}h.AA'$ gives the area of the triangle $AA'A''$ which equals $\dfrac{(k-a-b)AA'}{4}$, we obtain $h = \dfrac{k-a-b}{2}$ so that $d(P) = k-a-b + (a+b) = k$. If P is an arbitrary point on $A''B'$, then the sum of the distance from P to l_1, l_3 equals $k-b$, while the sum of the distance from P to l_2, l_4 equals b. Therefore, $d(P) = k$. If P is an arbitrary point on the other edges of the octagon $A'A''B'B''C'C''D'D''$, we can similarly prove that $d(P) = k$. If P does not lie on the octagon, we can easily check that $d(P) \neq k$. So we have considered all cases.



Từ mới:

parallel (to) = song song (với)
locus = quỹ tích
perpendicular = vuông góc, trực giao
equal = bằng (động từ)
respectively = tương ứng (phó từ)
clearly = rõ ràng (phó từ)
empty = rỗng
parallelogram = hình bình hành
interior = phần trong, phía trong
intersection = sự giao nhau
central = ở giữa, trung tâm (tính từ)
symmetric = đối xứng
octagon = bát giác
outside = bên ngoài, ở ngoài (phó từ)
note = lưu ý, nhận thấy
construction = sự xây dựng, sự dựng hình

NGÔ VIỆT TRUNG

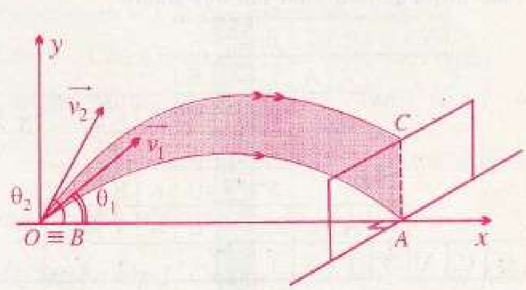
---

bóng lọt vào khung thành. Bỏ qua kích thước quả bóng và lực đẩy của không khí. Cho $g = 9,8 m/s^2$.

Lời giải. Lấy gốc tọa độ O là điểm đặt bóng B, gốc thời gian t là lúc sút bóng (xem hình). Phương trình chuyển động của bóng : $x = v_{Ox}t = v_o\cos\theta.t$ (1) ; $y = -\dfrac{gt^2}{2} + v_o\sin\theta.t$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình quỹ đạo của quả bóng :

$$y = -\frac{g}{2v_o^2\cos^2\theta}x^2 + x.\text{tg}\theta$$



$$= -\frac{g}{2v_o^2}\left(1+tg^2\theta\right)x^2 + x.\text{tg}\theta \qquad (3)$$

(Xem tiếp trang 23)

LTS : Mục Câu lạc bộ đang có những cải tiến nhằm làm cho mục này vừa giúp bạn đọc có thể thư giãn sau những giờ học toán, giải toán lại vừa ***tăng thông tin làm giàu kho kiến thức của bạn.***

Khác với mục Giải trí toán học, Câu lạc bộ không đăng các bài toán. Câu lạc bộ là nơi "thể thao trí tuệ" ***học mà chơi - chơi mà học.*** *Bạn sẽ tìm thấy các kiến thức bổ ích từ các lĩnh vực khác mà các học sinh yêu toán vốn yêu thích. Mời các bạn tích cực hưởng ứng và tham gia gửi bài làm cho* ***Câu lạc bộ*** *của chúng ta sinh động, sôi nổi, vui và trí tuệ.*

CLB

CÁC NHÀ TOÁN HỌC TUỔI MÙI

Các bạn đều biết tên năm Âm lịch được tạo thành bằng cách ghép 10 Thiên Can (Giáp, Ất, Bính, Đinh, Mậu, Kỷ, Canh, Tân, Nhâm, Quý) với 12 Địa Chi (Tý, Sửu, Dần, Mão, Thìn, Tỵ, Ngọ, Mùi, Thân, Dậu, Tuất, Hợi). Năm 2003 tương ứng (sớm hơn 1 tháng) với năm Quý Mùi. Cứ sau 12 năm lại gặp năm Mùi nên năm dương lịch sau công nguyên ứng với năm Mùi được tính theo công thức 2003-12t hoặc $12t + 11$ với $0 \le t \le 166$, còn trước Công nguyên tính theo công thức $12t - 2$ với $t \le 0$ (chú ý : không có năm 0).

Bạn biết những nhà toán học nào mà năm sinh (dương lịch) tương ứng với năm Mùi ?

AN MINH

Ô CHỮ NGÀY TẾT

Mỗi hàng ngang là một từ toán tiếng Anh, chỉ thiếu mỗi một chữ cái. Tìm đủ các chữ cái ấy thì cột dọc sẽ thành những từ có ý nghĩa lắm đấy. Nào mời các bạn khai bút đầu xuân.

		V	E	R	T	E								
				V	A	L		E						
								B	S	C	I	S	S	A
						A		G	L	E				
						S		U	A	R	E			
			C	A	L	C		L	A	T	E			
Q	U	A	N	T	I	T								
					N	U		E	R	A	T	O	R	
				D	E	D		C	E					
						S		D	E					

VKT

Giải đáp :

ĐÔ THỊ VIỆT NAM - NHỮNG CON SỐ LỚN NHẤT, BÉ NHẤT

• Mười thành phố đông dân nhất (tính cả nội và ngoại thành) : Tp. Hồ Chí Minh, Hà Nội, Đà Nẵng, Hải Phòng, Biên Hòa, Cần Thơ, Nha Trang, Huế, Long Xuyên, Nam Định.

• Các đô thị loại 1 : Hà Nội, Tp. Hồ Chí Minh.

• Các đô thị loại 2 : Đà Nẵng, Hải Phòng, Nam Định, Vinh, Huế, Biên Hòa, Quy Nhơn, Cần Thơ, Nha Trang, Đà Lạt, Thái Nguyên.

• Thành phố có mật độ dân số cao nhất : Nam Định (5400 người / km^2).

• Thành phố trực thuộc Trung ương có mật độ dân số cao nhất : Hà Nội (2463 người / km^2).

• Nội thành có mật độ dân số cao nhất : Nam Định (30 000 người / km^2).

• Thành phố rộng nhất : Tp. Hồ Chí Minh (2093,70 km^2).

• Thành phố có diện tích bé nhất : Hải Dương (34,80 km^2).

• Thị xã có ít dân nhất: Lai Châu (13100 người).

• Thị xã có diện tích bé nhất : Quảng Trị (5,28 km^2).

Nhận xét. 1) Nhiều bạn biết nhiều về thế giới nhưng lại không biết mấy về Việt Nam mình. Đa số các bạn nhầm TP trực thuộc Trung ương là Tp loại 1.

Tới đây, quy chế mới quy định có đô thị loại đặc biệt (dân số trên 1,5 triệu người). Hà Nội và Tp. Hồ Chí Minh sẽ là đô thị loại đặc biệt.

2) Ba bạn được nhận quà của CLB : *Đinh Thị Phương Anh*, tổ 13, thị trấn Yên Bình, huyện Yên Bình, Yên Bái. *Lê Huy Huấn*, 11A7, THPT chuyên Vĩnh Phúc. *Nguyễn Thị Phương Thủy*, 11A, THPT Yên Thành 3, **Nghệ An.**

BÍNH NAM HÀ

Kết quả :

MỘT LỜI GIẢI ĐẸP

Lời giải bài toán phạm sai lầm ở chỗ nhận định : *(D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B mà AB = 2*

$\Leftrightarrow (\Delta_m)$ cắt (P_1) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 2 (hai giao điểm của *(D)* và *(P)* với hai giao điểm của (Δ_m) với (P_1) chỉ có cùng hoành độ chứ không có cùng tung độ).

Lời giải đúng : Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (D) là $x^2 - 4x + (3 - m) = 0$ (1)

PT (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$. Gọi $A(x_1, 2x_1+m)$, $B(x_2, 2x_2+m)$ là giao điểm của (P) và (D). Ta có $AB = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2}=2$$

$\Leftrightarrow 5\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=4 \Leftrightarrow m=-\dfrac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện $m > -1$).

Nhận xét. Các bạn sau có lời phân tích sai lầm tốt, trình bày lời giải đúng, gọn, gửi bài về TS sớm : **Vĩnh Phúc :** *Trần Quỳnh*, 12B3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Dương :** *Trần Quốc Hoàn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Nghệ An :** *Trần Hoàng Đức*, 10A1, THPT Phan Bội Châu, Tp.Vinh ; **Đà Nẵng :** *Lê Hữu Kỳ Sơn*, 12/3, THPT Phan Chu Trinh, Q. Hải Châu ; **Bình Định :** *Lê Văn Thông*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn. Cảm ơn bạn *Đặng Như Tuấn*, 12A8, THPT Lê Hồng Phong, **Hải Phòng** đã tặng thơ cho chuyên mục *Sai lầm ở đâu ?*

NGỌC HIẾN

TÌM TIẾP TUYẾN

Trong một kì thi thử có bài toán với nội dung :

Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{2}x^2$ (C). Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ.

Một thí sinh đã giải như sau : Ta có $y' = 2x^3 - x$; nhận xét rằng O (0, 0) nằm trên đồ thị (C) nên PT tiếp tuyến với (C) đi qua O có dạng $y = y'(0)(x - 0) + 0$ suy ra $y = 0$. Vậy tiếp tuyến cần tìm là trục hoành có phương trình $y = 0$.

Các bạn hãy đánh giá lời giải của thí sinh nọ nhé !

BÙI CÔNG THỨC
(Kho thành phẩm - Công ty Mabuchi, KCN Biên Hòa 2, Đồng Nai)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC *(Tiếp trang 21)*

Thay số : $x = 50$m và $0 < y < 3{,}44$m, ta được :

$0 < -7{,}84.10^{-3}.50^2(1+\mathrm{tg}^2\theta)+50\mathrm{tg}\theta < 3{,}44$ (4)

Đặt $\mathrm{tg}\theta = z$, từ (4) ta có 2 bất phương trình :

$$19{,}6z^2-50z+19{,}6<0 \quad (5)$$

và $$19{,}6z^2-50z+23{,}04>0 \quad (6)$$

Từ (5), (6) và (4), tìm được :

$$25{,}8^\circ < \theta < 31{,}1^\circ \quad (9)$$

và $$62{,}8^\circ < \theta < 64{,}2^\circ \quad (10)$$

Như vậy phải đá bóng với góc sút θ thỏa mãn (9) hoặc (10) thì bóng mới vào khung thành.

Nhận xét. Các em có lập luận và lời giải đúng (chú ý con số có nghĩa và không xét dấu "=") :

Hà Tĩnh : *Nguyễn Văn Tý*, 12 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Nghệ An :** *Trần Quang Vũ*, 11A7, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Vĩnh Phúc :** *Trần Văn Hiếu, Trần Đình Cung*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

Giải đáp bài :

HAI BÀ MẸ YÊU TOÁN

(Theo bạn *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên).

Gọi số tuổi các con bà B năm ngoái là x, y, z, t. Khi đó bài toán quy về tìm các số nguyên dương x, y, z, t thỏa mãn :

$12 \ge x > y > z > t \ge 1$ (1)

$x^2 = y^2 + z^2 + t^2$ (2)

$(x+2)^2 + (t+2)^2 = (y+2)^2 + (z+2)^2$ (3)

Từ (2), (3) suy ra : $(t+1)^2 = 2(y+z-x) + 1$ (4). Từ (4) suy ra t chẵn, mặt khác $(t+1)^2 < 2.12 + 1 = 5^2$ nên $t = 2$. Từ (2), (4) suy ra :

$$y^2+z^2+4 = x^2 = (y+z-4)^2 \Rightarrow (y-4)(z-4) = 10$$

Để ý rằng : $y - 4$ và $z - 4$ đều nhỏ hơn 10, $z < y$ nên chỉ có thể chọn $y = 9$, $z = 6 \Rightarrow x = 11$. Thử lại ta thấy số tuổi các con bà B hiện nay là 12, 10, 7, 3.

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi đến TS đều đúng. Tuy vậy chỉ có các bạn sau trình bày lời giải gọn hơn cả, được nhận tặng phẩm kì này :

Vĩnh Phúc : *Hà Đình Thiều*, 10A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; *Vũ Văn Quang*, 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Thanh Hóa :** *Trần Thị Ngọc*, 10T, THPT Lam Sơn.

HỒNG QUANG

NGÀY THỨ MẤY TRONG NĂM 2003

Nếu có ai hỏi bạn : Ngày 15 tháng 1 năm 2003 là ngày thứ mấy ? Chắc bạn phải giở lịch ra xem. Để trả lời nhanh xin mách bạn một cách : *Nhớ số* **3** ứng với tháng 1. Tính 15 + 3 = 18, chia 18 cho 7 được dư là 4. Trả lời : 15/1/2003 là ngày thứ Tư.

(Số dư 0 thay bằng 7. Các số dư 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tương ứng với các ngày Chủ nhật, thứ Hai, thứ Ba, thứ Tư, thứ Năm, thứ Sáu, thứ Bảy).

Bạn hãy tìm *dãy số đáng nhớ* ứng với các tháng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 của năm 2003 ? Có cách nào tìm dãy số đáng nhớ này mà không cần xem lịch từng tháng, chỉ cần biết 1 tháng 1 ứng với ngày thứ Tư ? Bạn có câu *thần chú* nào để nhớ dãy số này ? (chẳng hạn tháng 1 ứng với từ BẠN gồm 3 chữ hoặc chứa chữ BA).

HOÀNG NGUYỄN

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 40
Số 307 (1-2003)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

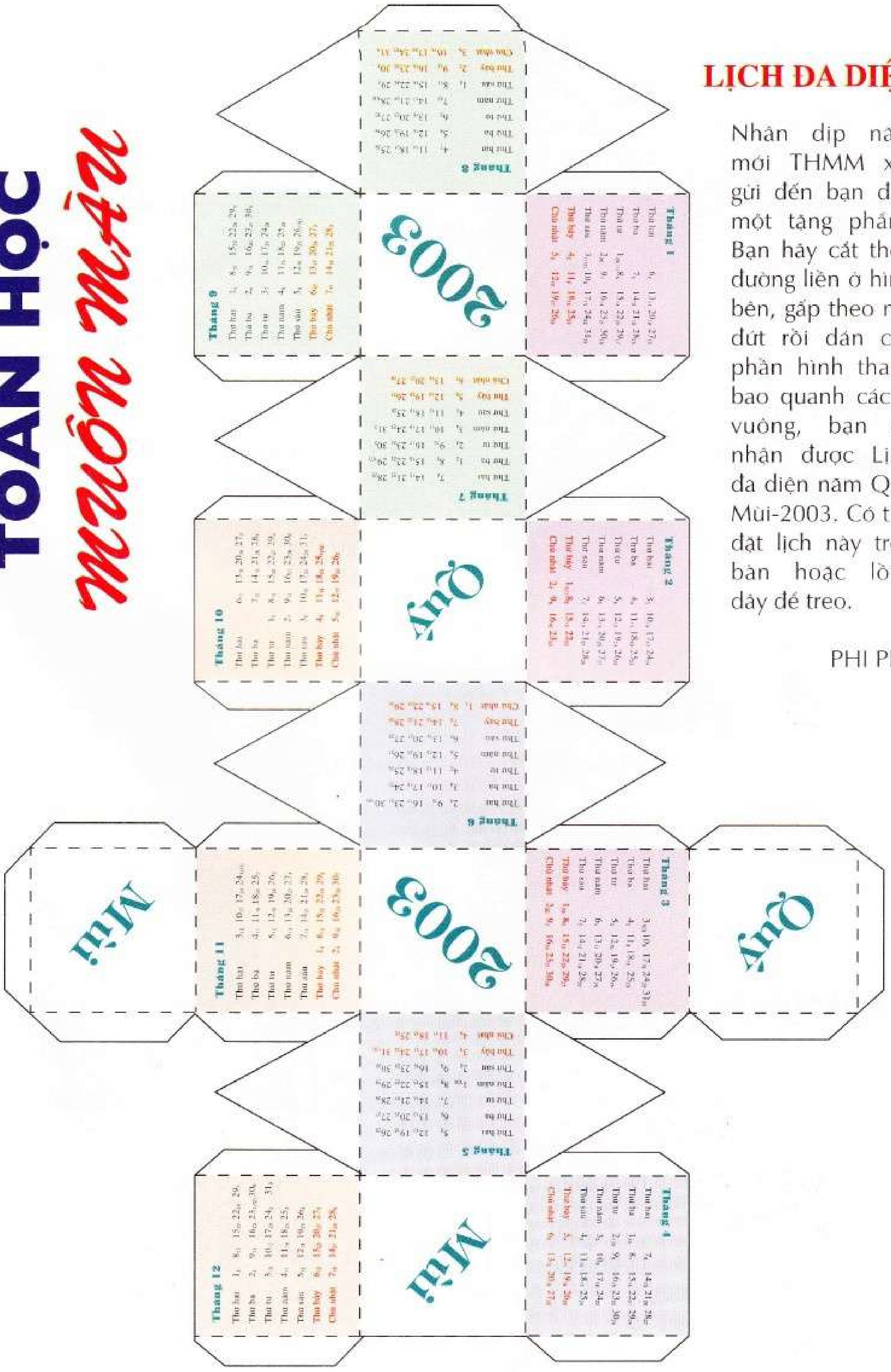
TRONG SỐ NÀY

TÌM MUA TOÁN HỌC TUỔI TRẺ Ở ĐÂU ?

Hà Nội : 81 Trần Hưng Đạo, 187 B Giảng Võ, 25 Hàn Thuyên, 23 Tràng Tiền, 232 Tây Sơn ...
Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh, ... ***Tp. Hồ Chí Minh :*** 231 Nguyễn Văn Cừ và 240 Trần Bình Trọng, Q. 5,... Các hiệu sách lớn trong cả nước. Bạn có thể đặt mua cả năm hoặc từng quý ở các Bưu điện địa phương. Các đại lí sách báo muốn phát hành tạp chí THTT xin liên hệ với :

Trung tâm Phát hành sách tham khảo, NXB Giáo dục,
187B Giảng Võ, Hà Nội, ĐT : 04.5141253

TOÁN HỌC muôn màu



LỊCH ĐA DIỆN

Nhân dịp năm mới THMM xin gửi đến bạn đọc một tặng phẩm. Bạn hãy cắt theo đường liền ở hình bên, gấp theo nét đứt rồi dán các phần hình thang bao quanh các ô vuông, bạn sẽ nhận được Lịch đa diện năm Quý Mùi-2003. Có thể đặt lịch này trên bàn hoặc lồng dây để treo.

PHI PHI

Hội nghị cộng tác viên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tại Thành phố Hồ Chí Minh

Ttrường THPT Lý Tự Trọng - Cần Thơ

Trường THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm - Vĩnh Long

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8B09M3

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2003

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng