https://www.facebook.com/lamvungkienmath https://sites.google.com/site/lamvungkienmath

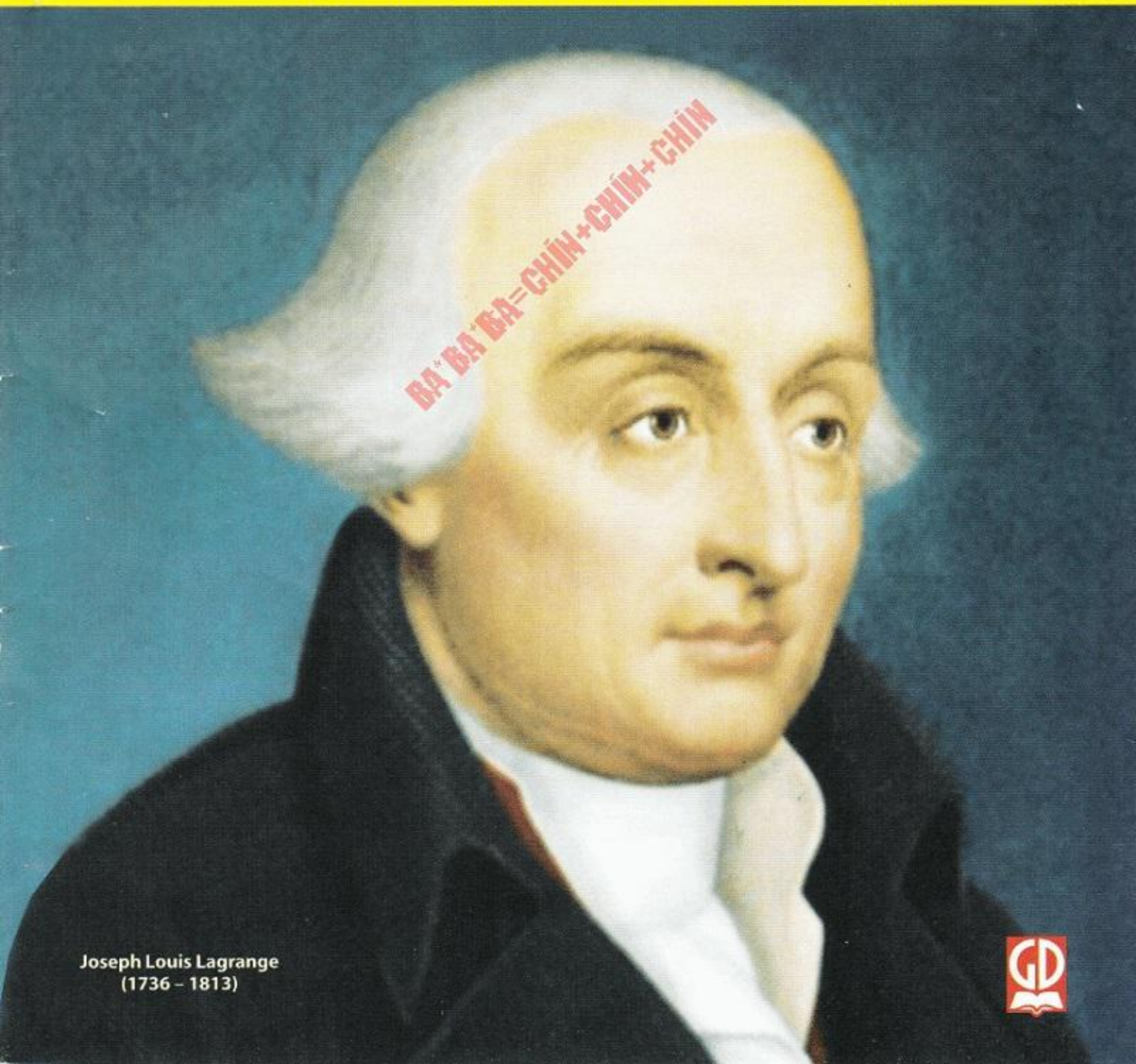
TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

4 2018 Số 490

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



Joseph Louis Lagrange
(1736 – 1813)

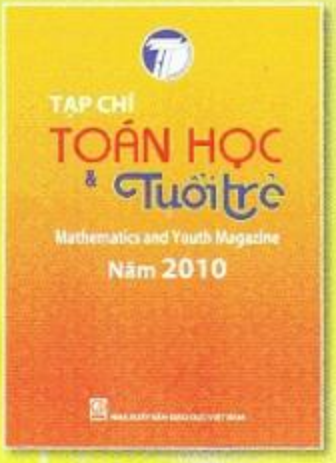
https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

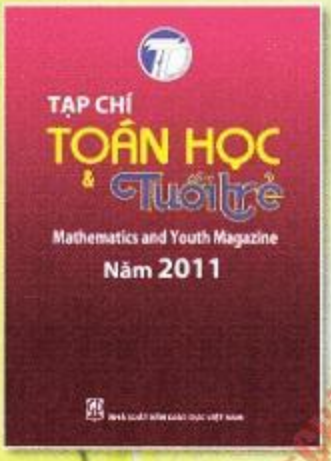
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

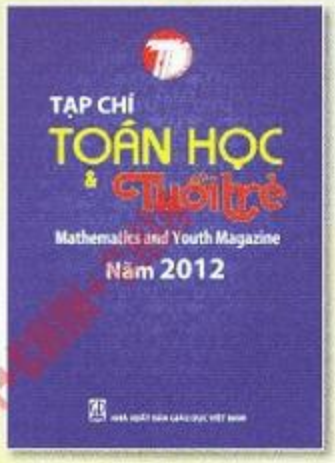
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



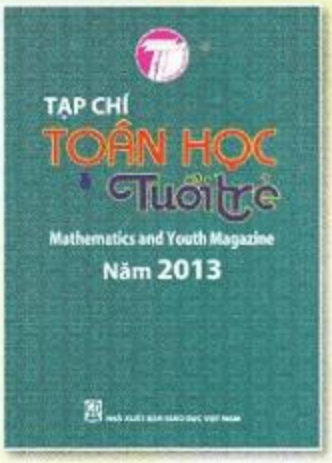
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



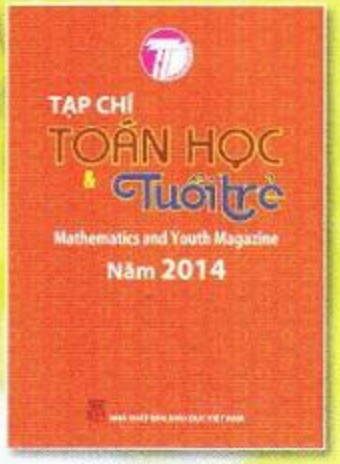
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



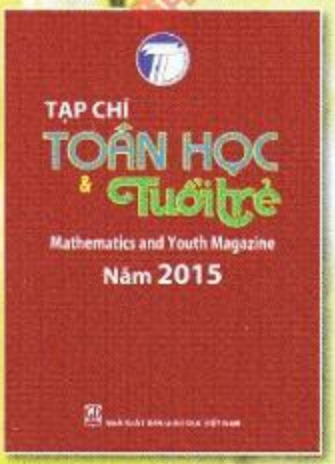
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



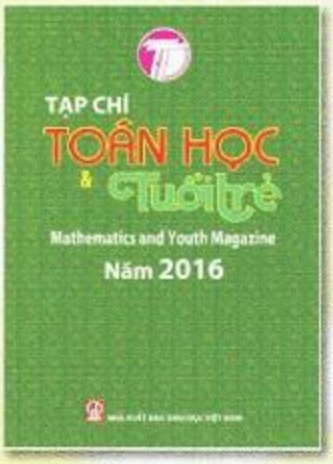
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



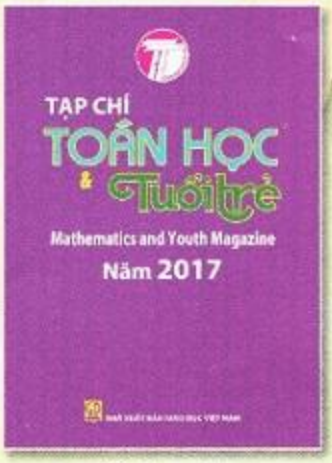
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍNH CHẤT CỦA ĐA GIÁC

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hồng Bàng, TP. Hải Phòng)

1. Các định nghĩa

a) *Định nghĩa* 1: Đa giác $A_1A_2A_3....A_n$ là hình gồm n đoạn thẳng $(n \geq 3)$, trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào có một điểm chung cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.

b) *Định nghĩa* 2: Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.

c) *Định nghĩa* 3: Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

2. Các tính chất

***Tính chất* 1**. Tổng số đo các góc trong của đa giác n cạnh bằng $(n-2).180^0$.

***Tính chất* 2**. Mỗi góc trong của đa giác đều n cạnh bằng $\frac{(n-2).180^0}{n}$.

***Tính chất* 3**. Tổng số đo các góc ngoài của đa giác n cạnh bằng 360^0 (tại mỗi đỉnh chỉ tính một góc ngoài).

***Tính chất* 4**. Số đường chéo của đa giác n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

DẠNG 1. CÁC BÀI TOÁN TÍNH SỐ CẠNH, GÓC CỦA ĐA GIÁC

Bài toán 1.1. *Tính số cạnh của một đa giác, biết rằng đa giác đó có:*

a) *Tổng các góc trong bằng tổng các góc ngoài.*

b) *Số đường chéo gấp đôi số cạnh.*

c) *Tổng các góc trong trừ đi một góc của đa giác bằng 2570^0.*

Lời giải. Gọi số cạnh của đa giác là n.

a) Tổng các góc trong của đa giác n cạnh là $(n-2).180^0$. Tổng các góc ngoài của đa giác là 360^0, suy ra: $(n-2).180^0 = 360^0 \Leftrightarrow n = 4$. Vậy số cạnh của đa giác là 4.

b) Số đường chéo của đa giác n cạnh là $\frac{n(n-3)}{2}$.

Suy ra $\frac{n(n-3)}{2} = 2n \Leftrightarrow n(n-3) = 4n \Leftrightarrow n(n-7) = 0$

$\Leftrightarrow n = 7$ (vì $n > 0$). Vậy số cạnh của đa giác là 7.

c) Gọi một góc trong của đa giác là $\widehat{A}$. Ta có:

$(n-2).180^0 - \widehat{A} = 2570^0 \Leftrightarrow \widehat{A} = (n-2).180^0 - 2570^0$

Do $0^0 < \widehat{A} < 180^0$ nên $0 < (n-2).180^0 - 2570^0 < 180^0$

$\Leftrightarrow 0 < n - 2 - \frac{2570}{180} < 1 \Leftrightarrow 0 < n - 16\frac{5}{18} < 1$

$\Leftrightarrow 16\frac{5}{18} < n < 17\frac{5}{18}$.

Do n là số tự nhiên nên $n = 17$. Vậy số cạnh của đa giác là 17.

Bài toán 1.2. *Cho hai đa giác đều D_1 và D_2. Tính số cạnh của D_1 và D_2. Biết rằng*

a) *Tỉ số mỗi góc trong của D_1 và D_2 là 5: 7.*

b) *Tỉ số mỗi góc trong của D_1 và D_2 là 2: 3.*

Lời giải. a) Gọi số cạnh của đa giác đều D_1, D_2 thứ tự là m, n ($m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m, n > 2$).

Mỗi góc trong của đa giác đều n cạnh là

$$\frac{(n-2).180^0}{n}.$$

Mỗi góc trong của đa giác đều m cạnh là

$$\frac{(m-2).180^0}{m}.$$

Theo đề bài có: $\frac{(n-2).180^0}{n} : \frac{(m-2).180^0}{m} = \frac{5}{7}$

$\Leftrightarrow \frac{(n-2)m}{(m-2)n} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 7mn - 14m = 5mn - 10n$

$\Leftrightarrow mn - 7m + 5n = 0 \Leftrightarrow (m+5)(7-n) = 35.$

Do $m, n \in \mathbb{Z}^+, m, n > 2$, nên $m + 5 > 7$, nên 35 chỉ phân tích được $35 = 35 \times 1$. Suy ra

BA BÀ LÀ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

$$\begin{cases} m+5=35 \\ 7-n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=30 \\ n=6 \end{cases}.$$

Vậy đa giác D_1 có 30 cạnh, đa giác D_2 có 6 cạnh.

b) Từ giả thiết ta có: $\dfrac{(n-2).180^0}{n} : \dfrac{(m-2).180^0}{m} = \dfrac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow (m+4)(6-n) = 24.$$

Do $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m, n > 2$, nên $m + 4 > 6$; $6 - n < 4$. Từ đó chỉ xảy ra các trường hợp sau:

- $\begin{cases} m+4=8 \\ 6-n=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=3 \end{cases}$; • $\begin{cases} m+4=12 \\ 6-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=8 \\ n=4 \end{cases}$;
- $\begin{cases} m+4=24 \\ 6-n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=20 \\ n=5 \end{cases}$.

Vậy các cặp $(n; m)$ là (3; 4), (4; 8), (5; 20).

Nhận xét. Trong bài toán trên ta phải giải phương trình nghiệm nguyên, việc làm này đòi hỏi học sinh phải xét đầy đủ các trường hợp. Trong câu a) học sinh nên giới hạn giá trị của các biến thì giảm bớt các trường hợp, lời giải như vậy sẽ gọn hơn. Trong câu b) học sinh hay mắc sai lầm làm thiếu trường hợp.

Bài toán 1.3. *Tìm số tự nhiên n, sao cho mặt phẳng có thể phủ kín bởi các đa giác đều bằng nhau có n cạnh.*

Lời giải. Mỗi góc trong của đa giác đều n cạnh là $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$. Vì mặt phẳng phủ kín bởi các đa giác đều n cạnh, nên $360 \vdots \dfrac{(n-2).180}{n}$ hay:

$$2 : \frac{n-2}{n} \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \frac{2n}{n-2} \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \frac{2n-4}{n-2} + \frac{4}{n-2} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{4}{n-2} \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \frac{4}{n-2} \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow n-2 \in Ư(4)$$

$$\Leftrightarrow n-2 \in \{1;2;4\} \text{ (vì } n>2) \Leftrightarrow n \in \{3;4;6\}.$$

Vậy các đa giác đều có số cạnh là 3; 4; 6 cạnh thoả mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Bài toán liên quan đến tìm giá trị để cho biểu thức là số nguyên. Đồng thời giải quyết được vấn đề bài toán thực tế lát gạch. Người ta hay sản xuất các loại gạch lát nền nhà có hình dạng là hình *tam giác đều, hình vuông* hoặc *hình lục giác đều*, thì khi đó mới lát kín được nền nhà. Chính vì vậy trả lời được câu hỏi tại sao người ta không sản xuất loại gạch lát nền đa giác đều có số cạnh là 5; 7; 8;...

Bài toán 1.4. *Cho lục giác ABCDEF có số đo các góc (tính theo độ) là số nguyên và* $\widehat{A}-\widehat{B}=\widehat{B}-\widehat{C}=\widehat{C}-\widehat{D}=\widehat{D}-\widehat{E}=\widehat{E}-\widehat{F}$. *Giá trị lớn nhất của* $\widehat{A}$ *có thể bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Tổng các góc trong của lục giác bằng $(6-2).180^0 = 720^0$.

Đặt $\widehat{A}-\widehat{B}=\widehat{B}-\widehat{C}=\widehat{C}-\widehat{D}=\widehat{D}-\widehat{E}=\widehat{E}-\widehat{F}=\alpha$.

Ta có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}+\widehat{E}+\widehat{F}=720^0$

$$\Rightarrow \widehat{A}+(\widehat{A}-\alpha)+(\widehat{A}-2\alpha)+(\widehat{A}-3\alpha)$$
$$+(\widehat{A}-4\alpha)+(\widehat{A}-5\alpha)=720^0$$

$$\Leftrightarrow 6.\widehat{A}-15\alpha=720^0 \Leftrightarrow 2.\widehat{A}=5\alpha+240^0 \quad (1)$$

Do $\widehat{A}$ là số tự nhiên, $\widehat{A}<180^0$, từ (1) suy ra $\widehat{A}$ chia hết cho 5 nên $\widehat{A} \le 175^0$. Với $\widehat{A} = 175^0$ thì $\alpha = 22^0$. Giá trị lớn nhất của $\widehat{A}$ là 175^0.

Nhận xét. Trong bài toán trên số đo các góc (tính theo độ) là số nguyên. Bài toán sử dụng kiến thức cơ bản về tổng các góc của đa giác, giá trị lớn nhất của biểu thức.

Bài toán 1.5. *Số đo mỗi góc trong của đa giác đều n cạnh là số tự nhiên. Có bao nhiêu giá trị của n thoả mãn bài toán?*

Lời giải. Số đo mỗi góc trong của đa giác đều n cạnh là $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$. Theo đề bài có

$$\frac{(n-2).180}{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 180 - \frac{360}{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 360 \vdots n,$$

hay n là ước của 360, $(n \ge 3)$. Có $360 = 2^3.3^2.5$. Số các ước của số 360 là $(3+1).(2+1).(1+1) = 24$ (ước tự nhiên). Do $n \ge 3$ nên phải loại các ước là số 1; 2. Vậy còn lại là 22 ước. Do đó có 22 giá trị của n thoả mãn yêu cầu bài toán.

Nhận xét. Bài toán liên quan đến số các ước của một số tự nhiên: *Nếu số tự nhiên* $N = a^x b^y c^z ...$ *(a, b, c,... là các số nguyên tố phân biệt) thì số ước của N là* $(x+1)(y+1)(z+1)...$. Đồng thời bài toán giải quyết được có bao nhiêu loại đa giác đều n cạnh mà số đo các góc của đa giác là số tự nhiên.

DẠNG 2. CÁC BÀI TOÁN TÍNH TOÁN, CHỨNG MINH ĐỐI VỚI LỤC GIÁC

Bài toán 2.1. *Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm BC, DE, AF.*

a) *Chứng minh rằng ΔHIK đều.*

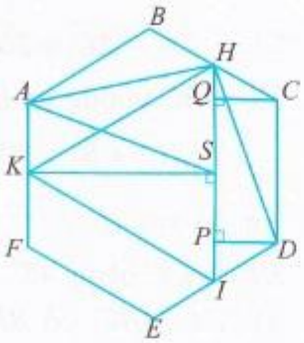
b) *Cho AB = 2cm. Tính diện tích ΔHIK.*

Lời giải. a) Các góc trong của lục giác đều bằng nhau và bằng 120^0. Nối H với A, H với D, thì $\Delta HBA = \Delta HCD$ (c.g.c) $\Rightarrow HA = HD, \widehat{HAB} = \widehat{HDC}$ $\Rightarrow \widehat{HAK} = \widehat{HDI}$. Do đó $\Delta HAK = \Delta HDI$, suy ra $HK = HI$.

Chứng minh tương tự có $HI = IK$, vậy ta có: $HK = HI = IK \Rightarrow \Delta HKI$ đều.

b) Kẻ $CQ \perp IH$, $DP \perp IH$, $KS \perp HI$. Đặt $AB = a$ = 2cm. Vì ΔHKI đều, nên $\widehat{BHK} = \widehat{CHI} = 60^0$, suy ra $\widehat{CHI} + \widehat{HCD} = 180^0$. Do đó

$$HI \parallel CD,\ CQ = DP$$
$$\Rightarrow QH = IP.$$



Do ΔCHQ vuông tại Q, $\widehat{CHQ} = 60^0$ nên

$$QH = \frac{1}{2}.CH = \frac{a}{4} = \frac{1}{2}\text{ cm}.$$

Suy ra $QH = IP = \frac{a}{4} \Rightarrow HI = a + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{2} = 3$ cm.

Từ ΔHKI đều ta có:

$$IS = \frac{3a}{4} = \frac{3}{2}\text{ cm},\ KS = \frac{3\sqrt{3}.a}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm},$$

$$S_{HKI} = \frac{1}{2}.HI.KS = \frac{1}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{3\sqrt{3}.a}{4} = \frac{9\sqrt{3}.a^2}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2.$$

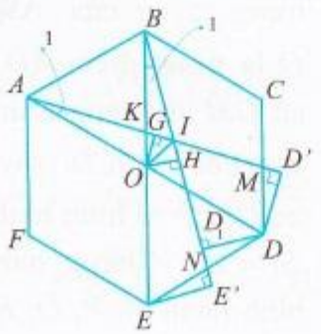
Nhận xét. Trong bài toán trên có thể chứng minh bằng cách chỉ ra $AD = BE = CF, AD \parallel BC \parallel EF$, và HI là đường trung bình hình thang $BCDE$. Tiếp tục khai thác về lục giác đều bằng cách thay đổi vị trí trung điểm cạnh của lục giác đều ta có bài toán.

Bài toán 2.2. *Cho lục giác đều ABCDEF. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của CD, DE. Gọi I là giao điểm của AM và BN.*

a) *Tính số đo $\widehat{AIB}$.*

b) *Gọi O là tâm của lục giác đều ABCDEF. Tính số đo $\widehat{OID}$.*

Lời giải.



a) Vì $AD = BE = CF$, nên $\Delta ADM = \Delta BEN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$. Gọi O là giao điểm AD và BE ta có $OA = OB = OC = OD = AB$.

Gọi K là giao điểm AM và BE. Xét ΔAOK và ΔBIK có $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$; $\widehat{AKO} = \widehat{BKI}$, suy ra

$$\widehat{BIK} = \widehat{AOB} = 60^0 \text{ hay } \widehat{AIB} = 60^0.$$

b) Vẽ $OG \perp AM, OH \perp BN$. Ta có $\Delta OGA = \Delta OHB$, nên $OG = OH \Rightarrow OI$ là tia phân giác $\widehat{AIN}$. (1)

Vẽ $EE' \perp BN, DD' \perp AM, DD_1 \perp BN$. Ta có $EE' = DD'$

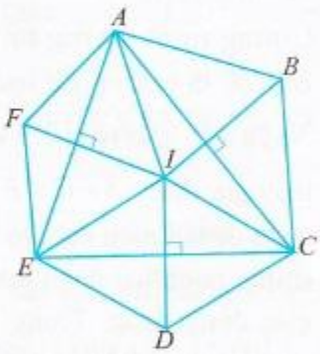
Mà $EE' = DD_1$ nên $DD_1 = DD'$. Suy ra ID là tia phân giác của $\widehat{MIN}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OID} = 90^0$.

Nhận xét. Trong bài toán trên góc nhọn tạo bởi giữa đường chéo AD và BE bằng 60^0, suy ra góc nhọn tạo bởi giữa AM và BN cũng bằng 60^0. Từ đó chứng minh được tính chất $OI \perp ID$.

Bài toán 2.3. *Cho lục giác ABCDEF có $\hat{A} = \hat{C} = \hat{E}$, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Chứng minh rằng tồn tại một điểm cách đều tất cả các cạnh của lục giác đã cho.*

Lời giải. Giả sử các đường trung trực của tam giác AEC cắt nhau tại I. Từ $AB = BC$ nên B nằm trên trung trực của AC. ΔABC cân tại B nên



$$\widehat{IBA} = \widehat{IBC}.$$

Do đó I cách đều AB và BC. Chứng minh tương tự I cách đều CD và DE, I cách đều EF và AF.

Từ I là giao điểm các đường trung trực của $\Delta ACE \Rightarrow IA = IC = IE$ và các tam giác IAC, ICE, IAE cân tại đỉnh I. Do đó

$$\widehat{IAB} = \widehat{ICB},\ \widehat{ICD} = \widehat{IED},\ \widehat{IEF} = \widehat{IAF}.$$

Từ $\widehat{FAB} = \widehat{BCD} = \widehat{DEF}$

$\Rightarrow \widehat{IAB} + \widehat{IAF} = \widehat{ICB} + \widehat{ICD} \Rightarrow \widehat{IAF} = \widehat{ICD}$

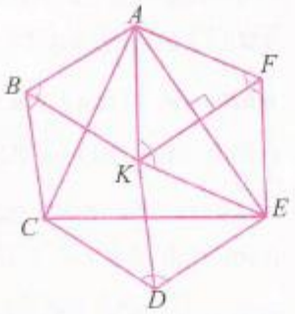
Mà $\widehat{IAF} = \widehat{IEF}, \widehat{ICD} = \widehat{IED} \Rightarrow \widehat{IEF} = \widehat{IED}$, nên I cách đều ED và EF. Cũng có $\widehat{ICD} = \widehat{ICB}$, nên I cách đều CD và BC; $\widehat{IAF} = \widehat{IAB}$ nên I cách đều AF và AB. Từ đó dễ thấy điểm I cách đều các cạnh của lục giác $ABCDEF$.

BỘ ĐỀ TOÁN - CHÍNH - CHÍNH

Nhận xét. Trong bài toán lục giác $ABCDEF$ gần đều, lục giác trong bài toán luôn có 1 điểm cách đều các cạnh của lục giác. Thay đổi giả thiết $\widehat{A}=\widehat{C}=\widehat{E}$ bởi giả thiết $\widehat{B}=\widehat{D}=\widehat{F}$ ta có bài toán mới.

Bài toán 2.4. *Cho lục giác ABCDEF có $\widehat{B}=\widehat{D}=\widehat{F}$, $AB=BC$, $CD=DE$, $EF=FA$. Gọi K là điểm đối xứng với F qua AE. Chứng minh tứ giác BCDK là hình bình hành.*

Lời giải.



Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta AFE$ (g.g)

Mà $\Delta AKE=\Delta AFE$, nên $\Delta ABC \backsim \Delta AKE$

$\Rightarrow \dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AB}{AK}$, $\widehat{BAK}=\widehat{CAE}$,

$\Rightarrow \Delta BAK \backsim \Delta CAE$ (c.g.c).

Chứng minh tương tự $\Delta DKE \backsim \Delta CAE$. Suy ra $\Delta BAK \backsim \Delta DKE$.

Tỉ số đồng dạng $\dfrac{AK}{KE}=1$, nên $\Delta BAK=\Delta DKE$

$\Rightarrow BC=DK$.

Chứng minh tương tự ta có $CD=BK$. Vậy tứ giác $BCDK$ là hình bình hành.

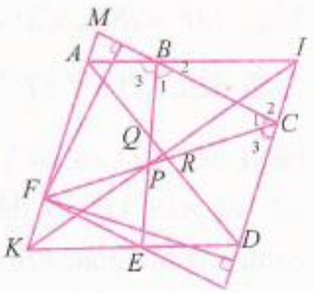
Nhận xét. Bài toán 2.3 và bài toán 2.4 chỉ khác nhau là thay giả thiết $\widehat{A}=\widehat{C}=\widehat{E}$ bởi giả thiết $\widehat{B}=\widehat{D}=\widehat{F}$, khi đó ta có bài toán mới về lục giác. Trong bài toán 2.4 để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau dựa vào hai tam giác đồng dạng. Trong lục giác đều có các cạnh đối song song và bằng nhau. Nếu lục giác có các cạnh đối song song và khoảng cách giữa các cạnh đối bằng nhau thì ta có bài toán.

Bài toán 2.5. *Cho lục giác ABCDEF có các cạnh đối song song và khoảng cách các cạnh đối bằng nhau.*

a) Cho $\widehat{FAB}=\widehat{CDE}=90^0$. Tính góc tạo bởi giữa đường thẳng BE và CF.

b) Chứng minh trung trực của các đường chéo AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải.



a) Lục giác có các cạnh đối song song suy ra các góc đối của lục giác bằng nhau. Do khoảng cách giữa các cạnh đối bằng nhau suy ra các đường chéo chính của lục giác là phân giác của các góc đã cho.

Kéo dài các cạnh AB, DE, AF, CD tạo thành hình bình hành $AIDK$, do AD là phân giác góc $\widehat{IAK}$, nên $AIDK$ là hình thoi, mà $\widehat{FAB}=\widehat{CDE}=90^0$ suy ra $AIDK$ là hình vuông. Giả sử các đường chéo chính của lục giác $ABCDEF$ cắt nhau tạo thành ΔPQR.

Xét ΔCPB có $\widehat{C_1}+\widehat{B_1}+\widehat{BPC}=180^0$. Ta thấy

$$2\widehat{C_1}+2\widehat{B_1}+\widehat{C_2}+\widehat{B_2}=360^0.$$

Vì ΔIBC vuông tại I nên

$$\widehat{C_2}+\widehat{B_2}=90^0 \Rightarrow 2(\widehat{B_1}+\widehat{C_1})=270^0.$$

Từ đó suy ra $\widehat{BPC}=45^0$. Vậy góc nhọn tạo bởi BE và CF bằng 45^0.

b) Xét ΔIBC có BP, CP là phân giác ngoài của góc B và góc C. Suy ra IP là phân giác trong của $\widehat{BIC}$. Do ΔIAD cân tại I nên IP là trung trực của AD, do đó PI chứa đường cao của ΔPQR.

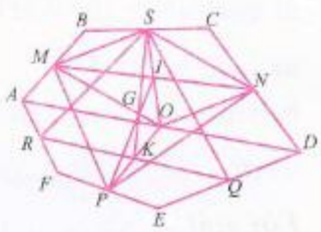
Chứng minh tương tự trung trực của BE, CF trùng với các đường cao của ΔPQR.

Vậy các đường trung trực của AD, BE, CF đồng quy.

Nhận xét. Trong bài toán 2.7, lục giác $ABCDEF$ thoả mãn các cạnh đối song song và khoảng cách giữa các cạnh đối bằng nhau khi đó trung trực của các đường chéo chính đồng quy. Lục giác thoả mãn điều kiện bài toán khi kéo dài các cạnh thì sẽ tạo thành các hình thoi.

Bài toán 2.6. *Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, S, N, Q, P, R thứ tự là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh trọng tâm của hai tam giác MNP và SQR là trùng nhau.*

Lời giải.



Gọi PI là đường trung tuyến của ΔMNP, SK là đường trung tuyến của ΔSQR, O là trung điểm AD. Ta có OM là đường trung bình ΔABD, SN là đường trung bình ΔBCD, suy ra: $OM=SN, OM \parallel SN$ $\Rightarrow OMSN$ là hình bình hành $\Rightarrow S, I, O$ thẳng hàng, $SI=OI$. Chứng minh tương tự $ORPQ$ là hình bình hành và P, O, K thẳng hàng, $PK=OK$. Xét

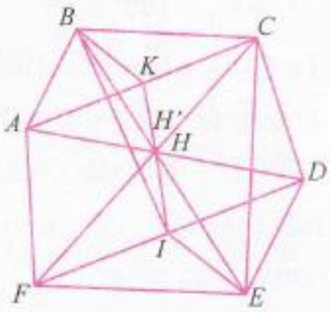
BẢN BÌA CHÍNH + CHÂN CHÍNH

ΔOPS có SK, PI là đường trung tuyến của tam giác cắt nhau tại G, suy ra $GI = \frac{1}{3}PI, GK = \frac{1}{3}SK$.

Do đó G đồng thời là trọng tâm ΔMNP và ΔSRQ.

Nhận xét. Trong bài toán trên đối với lục giác bất kì, đều có tính chất trọng tâm của hai tam giác thoả mãn bài toán là trùng nhau. Bài toán là bài cơ bản, học sinh được củng cố về kiến thức trọng tâm của tam giác.

Bài toán 2.7. *Chứng minh nếu một lục giác lồi, các đường chéo chính nối các cặp đỉnh đối diện chia lục giác thành hai phần có diện tích bằng nhau thì ba đường chéo đó đồng quy.*



Lời giải. Gọi lục giác $ABCDEF$ có các đường chéo chính là AD, BE, CF. Gọi $H = AD \cap CF$.

Ta có:

$$S_{ADEF} = S_{CDEF} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABCDEF}$$

$\Rightarrow S_{ADF} = S_{CDF} \Rightarrow AC \parallel DF$. Chứng minh tương tự $BF \parallel CE$, $AE \parallel BD$. Gọi I, K thứ tự là trung điểm của DF, AC, ta có K, H, I thẳng hàng và

$$\frac{HI}{HK} = \frac{FI}{CK} = \frac{FD}{AC} \quad (1)$$

Do K, I lần lượt là trung điểm AC, FD nên

$$S_{KIDC} = \frac{1}{2}S_{ACDF},\ S_{EID} = \frac{1}{2}S_{DEF}, S_{BKC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{KIDC} + S_{EID} + S_{KBC} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}.$$

Mà $S_{BCDE} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF}$ nên

$$S_{BCDE} = S_{KIDC} + S_{EID} + S_{KBC}.$$

Gọi $H' = BE \cap KI$ thì $S_{BKH'} = S_{EIH'}$, suy ra $BI \parallel EK$, mà $KC \parallel IF, BF \parallel CE \Rightarrow \Delta EKC \backsim \Delta BIF$

$\Rightarrow \frac{BI}{KE} = \frac{IF}{KC} = \frac{FD}{AC}$, mặt khác $BI \parallel KE$ nên

$$\frac{BI}{KE} = \frac{H'I}{H'K} \Rightarrow \frac{FD}{AC} = \frac{H'I}{H'K} \quad (2)$$

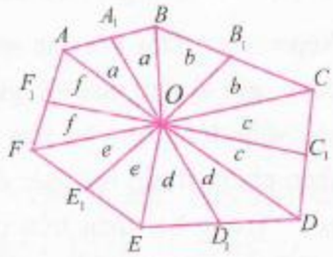
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HI}{HK} = \frac{H'I}{H'K} \Rightarrow H \equiv H'$.

Vậy AD, BE, CF đồng quy.

Nhận xét. Trong bài toán trên sử dụng các kiến thức về diện tích đa giác, hai đa giác có diện tích bằng nhau. Việc chứng minh ba đường chéo chính đồng quy trong bài 2.7 là bài toán khó.

Bài toán 2.8. *Chứng minh trong một lục giác lồi mỗi một trong ba đoạn thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện chia lục giác thành hai phần có diện tích bằng nhau thì ba đoạn thẳng đó đồng quy.*

Lời giải. Giả sử lục giác đó là $ABCDEF$. Gọi $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA.



Gọi B_1E_1 và C_1F_1 cắt nhau tại O. Do A_1 là trung điểm AB, nên

$$S_{AOA_1} = S_{BOA_1} = a.$$

Tương tự:

$S_{BOB_1} = S_{COB_1} = b$, $S_{COC_1} = S_{DOC_1} = c$, $S_{DOD_1} = S_{EOD_1} = d$, $S_{EOE_1} = S_{FOE_1} = e$, $S_{FOF_1} = S_{AOF_1} = f$.

Do B_1E_1 và C_1F_1 chia diện tích lục giác $ABCDEF$ thành hai phần bằng nhau, nên $S_{F_1OE_1F} = S_{CB_1OC_1}$

$\Rightarrow e + f = b + c \Rightarrow 2(e+f) = 2(b+c)$

$\Rightarrow S_{AOEF} = S_{BODC} \Rightarrow S_{AOEF} + a + d = S_{BODC} + a + d$

$\Rightarrow S_{A_1OD_1DCB} = S_{A_1OD_1EFA} = \frac{1}{2}S_{ABCDEF} \Rightarrow S_{A_1OD_1} = 0$,

nên O thuộc đoạn thẳng A_1D_1. Vậy A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1 đồng quy.

Nhận xét. Bài 2.7 và 2.8 là hai bài sử dụng kiến thức về diện tích đa giác, và chứng minh ba đường thẳng đồng quy. Trong bài 2.8 để chứng minh điểm O nằm trên A_1D_1 ta chứng minh $S_{A_1OD_1} = 0$ là cách chứng minh không được dùng nhiều trong các bài toán cơ bản.

Bài toán 2.9. *Nối một điểm P nằm trong một lục giác đều có cạnh 1 với các đỉnh của lục giác đó, ta được sáu tam giác. Chứng minh rằng trong số sáu tam giác ấy tồn tại hai tam giác mà mỗi cạnh không nhỏ hơn 1.*

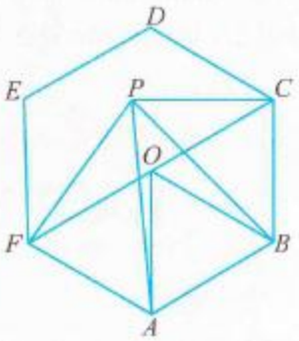
Lời giải. Gọi O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$.

• Nếu P trùng với O thì bài toán được chứng minh

• Xét trường hợp P không trùng với O. Giả sử O nằm trong (hoặc trên biên) ΔPAB. Ta có:

BA+BA=GIÁO+CHỦ+CHỦ

$\widehat{PAB} \geq 60^0$, $\widehat{PBA} \geq 60^0$ nên $\widehat{APB} \leq 60^0$. Do đó $PA \geq AB = 1, PB \geq AB = 1$.

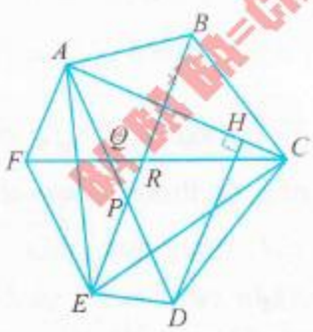


Như vậy ΔPAB có các cạnh không nhỏ hơn 1. Xét hai tam giác PAF, PBC, có $PC + PF \geq CF = 2$, nên trong hai đoạn thẳng PC, PF tồn tại một đoạn không nhỏ hơn 1, giả sử $PC \geq 1$.

Thế thì ΔPBC có các cạnh không nhỏ hơn 1. Vậy tồn tại hai tam giác có các cạnh không nhỏ hơn 1.

Nhận xét. Đối với lục giác đều thì có một tâm đối xứng, gọi là tâm của lục giác. Các đường chéo của lục giác đều đồng quy tại tâm của lục giác. Độ dài đường chéo chính trong lục giác đều bằng 2 lần cạnh của lục giác. Trong bài toán trên phải xét các trường hợp tùy theo vị trí của điểm P nằm trong lục giác.

Bài toán 2.10. *Trong lục giác lồi ABCDEF các đường chéo AD, BE, CF đều có độ dài lớn hơn 2. Chứng minh rằng tìm được một cạnh của lục giác có độ dài lớn hơn 1.*



Lời giải. Xét ΔACE, khi đó trong tam giác sẽ tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 60^0 giả sử $\widehat{CAE} \geq 60^0$. Ta có tia AD nằm giữa tia AC, AE, mà

$$\widehat{DAC} + \widehat{DAE} \geq 60^0,$$

nên $\widehat{DAC} \geq 30^0$ hoặc $\widehat{DAE} \geq 30^0$.

Giả sử $\widehat{DAC} \geq 30^0$, kẻ $DH \perp AC$ thì

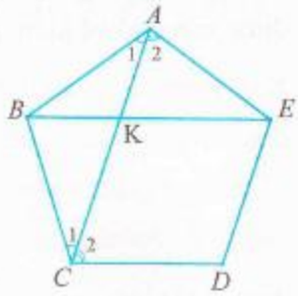
$$DH \geq \frac{AD}{2} > \frac{2}{2} = 1.$$

Vì $CD > DH > 1$ nên $CD > 1$. Vậy tồn tại một cạnh của lục giác lớn hơn 1.

Nhận xét. Bài toán trên là bài toán khó, học sinh phải biết cách xét tam giác phù hợp. Trong bài toán có sử dụng tính chất trong một tam giác vuông có một góc nhọn lớn hơn hoặc bằng 30^0 thì cạnh đối diện với góc đó lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền.

DẠNG 3. CÁC BÀI TOÁN TÍNH TOÁN, CHỨNG MINH ĐỐI VỚI NGŨ GIÁC, ĐA GIÁC 7 CẠNH, 8 CẠNH, ...

Bài toán 3.1. *Cho ngũ giác đều ABCDE có các đường chéo AC và BE cắt nhau ở K. Chứng minh rằng CKED là hình thoi.*



Lời giải. Số đo góc của ngũ giác đều bằng

$$\frac{(5-2).180^0}{5} = 108^0$$

ΔABC cân ở B, $\widehat{ABC} = 108^0$.

nên $\widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 36^0$. Do đó:

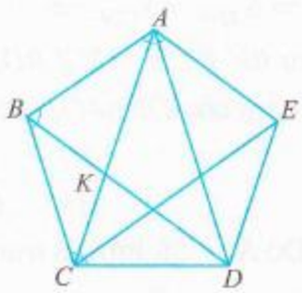
$\widehat{A_2} = \widehat{C_2} = 108^0 - 36^0 = 72^0$.

Ta có $\widehat{C_2} + \widehat{D} = 72^0 + 108^0 = 180^0$, suy ra $AC \parallel DE$.

Tương tự $BE \parallel CD \Rightarrow CKED$ là hình bình hành.

Mà $CD = DE$ nên $CKED$ là hình thoi.

Bài toán 3.2. *Chứng minh rằng ngũ giác có năm cạnh bằng nhau và ba góc liên tiếp bằng nhau là ngũ giác đều.*



Lời giải. Xét ngũ giác $ABCDE$ có

$AB = BC = CD = DE = EA$,

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$

Xét tứ giác $ABCD$, có $\widehat{B} = \widehat{C}$, $AB = BC = CD$

$\Rightarrow \Delta BAC = \Delta CBD$.

Gọi $K = AC \cap BD$ thì ΔKBC cân tại K, suy ra ΔKAD cân tại K, nên $\widehat{KDA} = \widehat{KBC}$. Từ đó $AD \parallel BC$ nên $ABCD$ là hình thang cân, do đó $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CDE}$. Chứng minh tương tự với tứ giác $ABCE$, ta được $\widehat{BCD} = \widehat{AED}$.

Vậy ngũ giác $ABCDE$ có các góc bằng nhau, và các cạnh bằng nhau nên là ngũ giác đều.

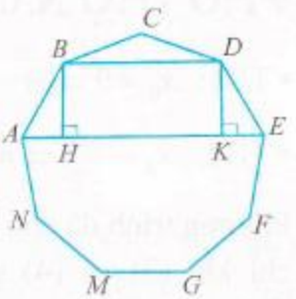
Nhận xét. Ta biết rằng đa giác đều khi và chỉ khi nó có các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau. Nhưng ngũ giác trong bài toán chỉ cần các cạnh bằng nhau và ba góc liên tiếp bằng nhau thì ngũ giác đó cũng là ngũ giác đều.

Bài toán 3.3. *Chứng minh rằng trong đa giác đều 9 cạnh, hiệu giữa đường chéo lớn nhất và đường chéo nhỏ nhất bằng cạnh của nó.*

ĐẠI BÀ=CHÍN+DÌNH+CHÍU

Lời giải. Giả sử đa giác đều 9 cạnh là $ABCDEFGMN$ đường chéo lớn nhất là AE, đường chéo nhỏ nhất là BD.

Dễ chứng minh được $ABDE$ là hình thang cân.



Kẻ $BH \perp AE$, $DK \perp AE$ thì $BDKH$ là hình chữ nhật. Vì $\widehat{ABC} = 140^0$ nên $\widehat{ABH} = 30^0$.

Ta có $AH = EK = \dfrac{AB}{2}$. Vậy

$$AE - BD = AE - HK = AH + KE = AB.$$

Nhận xét. Trong bài toán trên ta chứng minh được $ABDE$ là hình thang cân. Đối với đa giác đều 9 cạnh có tính chất hiệu giữa đường chéo lớn nhất và đường chéo nhỏ nhất bằng cạnh của nó.

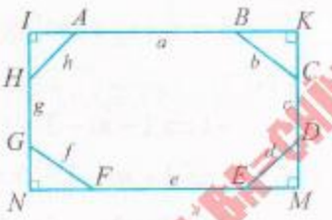
Bài toán 3.4. *Một bát giác lồi có các góc bằng nhau, độ dài các cạnh là các số nguyên. Chứng minh rằng các cạnh đối của bát giác bằng nhau.*

Lời giải. Gọi bát giác đã cho là $ABCDEFGH$.

Ký hiệu độ dài các cạnh theo hình vẽ.

Mỗi góc trong của bát giác lồi đã cho bằng:

$$\frac{(8-2).180^0}{8} = 135^0.$$



Các góc ngoài của bát giác là $180^0 - 135^0 = 45^0$.

Kéo dài các cạnh AB, CD, EF, GH của bát giác tạo thành hình chữ nhật $IKMN$. Ta có các cạnh đối của bát giác song song. Do $IK = MN$ nên

$$\frac{h}{\sqrt{2}} + a + \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{f}{\sqrt{2}} + e + \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow e - a = \frac{h + b - f - d}{\sqrt{2}}.$$

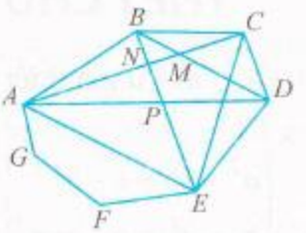
Vì h, b, f, d là các số nguyên dương và $e - a$ là số nguyên suy ra $e - a = 0 \Rightarrow a = e$.

Chứng minh tương tự có $c = g$, $b = f$, $d = h$.

Nhận xét. Trong bài toán có vận dụng công thức tính các góc của bát giác, với các góc bằng nhau. Ngoài ra còn sử dụng hai số bằng nhau thì cùng là số vô tỉ hoặc cùng là số nguyên.

Bài toán 3.5. *Kẻ tất cả các đường chéo của một đa giác lồi 7 cạnh. Biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Có bao nhiêu giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác.*

Lời giải. Mỗi giao điểm của hai đường chéo tương ứng duy nhất với một tứ giác lồi có các đỉnh là các đỉnh của đa giác. Do đó có bao nhiêu tứ giác lồi thì có bấy nhiêu giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác (điểm M ứng với tứ giác $ABCD$, điểm N ứng với tứ giác $ABCE$, điểm P ứng với tứ giác $ABDE$).



Số tứ giác tạo thành bằng:

$$C_7^4 = \frac{7.6.5.4}{4!} = 35.$$

Vậy số giao điểm là 35 giao điểm.

Nhận xét. Trong bài toán trên ta đã dựa vào nhận xét: ứng với mỗi giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác tương ứng với một tứ giác lồi có các đỉnh là các đỉnh của tứ giác. Đồng thời bài toán liên quan tới công thức tính tổ hợp chập k của n phần tử.

BÀI TẬP

1. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn.

2. Gọi x, y lần lượt là số đo mỗi góc trong đa giác đều $T_1; T_2$. Tìm số cạnh của $T_1; T_2$, biết $5x - 7y = 0$.

3. Chứng minh rằng trong một lục giác lồi, trung bình cộng của các cạnh nhỏ hơn trung bình cộng của các đường chéo.

4. Cho lục giác đều có cạnh bằng 1 và một điểm M nằm trong lục giác. Nối M với các đỉnh của lục giác, ta được sáu tam giác.

a) Chứng minh tổng chu vi của sáu tam giác ấy lớn hơn hoặc bằng 18.

b) Điểm M ở vị trí nào thì tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của lục giác có giá trị nhỏ nhất.

5. Cho lục giác lồi. Chứng minh rằng tồn tại hai đường chéo của lục giác hoặc song song hoặc tạo với nhau một góc không quá 20^0.

6. Chứng minh rằng trong một ngũ giác lồi, chu vi nhỏ hơn tổng các đường chéo.

7. Cho đa giác lồi 7 cạnh. Kẻ tất cả các đường chéo của đa giác. Biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Hỏi các đường chéo chia đa giác thành bao nhiêu phần.

8. Cho một đa giác lồi P có 2008 cạnh. Hãy tính:

a) Số các đường chéo của đa giác P.

b) Số các tứ giác lồi có đỉnh là các đỉnh của đa giác P.

c) Biết rằng ba đường chéo của đa giác P không cùng đi qua một đỉnh thì không đồng quy hãy tính số giao điểm (*không phải là đỉnh*) của các đường chéo của đa giác P.

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG, PHÚ THỌ NĂM HỌC 2017-2018

Câu 1. a) Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} a^2-b^2=c-b \\ b^2-c^2=a-c \\ c^2-a^2=b-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\dfrac{c-b}{a-b} \\ b+c=\dfrac{a-c}{b-c} \\ c+a=\dfrac{b-a}{c-a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-1=\dfrac{c-b}{a-b}-1=\dfrac{c-a}{a-b} \\ b+c-1=\dfrac{a-c}{b-c}-1=\dfrac{a-b}{b-c} \\ c+a-1=\dfrac{b-a}{c-a}-1=\dfrac{b-c}{c-a} \end{cases}.$$

Suy ra

$$T=(a+b-1)(b+c-1)(c+a-1)=\frac{c-a}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}\cdot\frac{b-c}{c-a}=1.$$

b) Ta có

$$x^2+3mx+2m^2=\frac{x^4+x^3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+6mx-x^4-x^3+2x^2=0 \quad (1)$$

Giả sử (1) là PT bậc hai ẩn m, còn x là tham số. Khi đó:

$$\Delta'=9x^2-4(-x^4-x^3+2x^2)$$
$$=4x^4+4x^3+x^2=(2x^2+x)^2.$$

Do đó từ (1) ta có

$$\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3x+(2x^2+x)}{4}=\dfrac{x^2-x}{2} \\ m=\dfrac{-3x-(2x^2+x)}{4}=\dfrac{-x^2-2x}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-x-2m=0 & (3) \\ x^2+2x+2m=0 & (4) \end{array}\right.$$

Nếu (3) và (4) có nghiệm x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2-x_0-2m=0 \\ x_0^2+2x_0+2m=0 \end{cases}.$$

Suy ra

$$x_0^2-x_0=-(x_0^2+2x_0)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$$

• TH1: $x_0=0\Rightarrow m=0$.

• TH2: $x_0=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow m=\dfrac{3}{8}$.

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (3) và (4) có hai nghiệm phân biệt và không có nghiệm chung.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_3=1+8m>0 \\ \Delta'_4=1-2m>0 \\ m\neq 0 \\ m\neq \dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{8}<m<\dfrac{1}{2} \\ m\neq 0 \\ m\neq \dfrac{3}{8} \end{cases}.$$

Câu 2. a) Xét phương trình $x^2+mx-3=0$ (1). Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của (1) nên $x\neq 0$. Do đó m^2+12 $(m\in\mathbb{Z})$ là số chính phương khi và chỉ khi (1) có nghiệm nguyên x_0. Suy ra

$$3=x_0(x_0+m)\,\vdots\, x_0\Rightarrow x_0\in\{-1;-3;1;3\}.$$

Ta có:

• $x_0=-1\Rightarrow 1-m-3=0\Rightarrow m=-2$;

• $x_0=1\Rightarrow 1+m-3=0\Rightarrow m=2$;

• $x_0=3\Rightarrow 9+3m-3=0\Rightarrow m=-2$;

• $x_0=-3\Rightarrow 9-3m-3=0\Rightarrow m=2$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn là $m=\pm 2$.

b) • Vì 2 số nguyên tố lớn hơn 2 đầu tiên là 3, 5 nên trong 11 số nguyên tố đã cho có ít nhất 9 số lớn hơn 5.

• Lấy 9 số nguyên tố lớn hơn 5 đó chia cho 3 chỉ có các số dư là 1 hoặc 2. Do đó trong 9 số nguyên tố lớn hơn 5 có ít nhất 5 số có cùng số dư khi chia cho 3. (1)

• Trong 5 số nguyên tố có cùng số dư khi chia cho 3 này không có số nào chia hết cho 5 nên tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 5. (2)

Gọi hai số đó là a, b. Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} a-b\,\vdots\,3 \\ a-b\,\vdots\,5 \end{cases}\Rightarrow (a-b)\,\vdots\,15\Rightarrow (a^2-b^2)\,\vdots\,15.$$

Vì a, b là các số lẻ nên ta có:

$$\begin{cases} a-b\,\vdots\,2 \\ a+b\,\vdots\,2 \end{cases}\Rightarrow a^2-b^2=(a-b)(a+b)\,\vdots\,4.$$

BỘ BA ĐỀ CHÍNH CHÍNH

Vậy $(a^2-b^2)\vdots 60$.

Câu 3. a) Ta có PT đã cho tương đương với PT sau: $(2x-2)^2-(2x-2)=3x+1-\sqrt{3x+1}$. (1)

Đặt $\begin{cases} u=2x-2 \\ v=\sqrt{3x+1} \end{cases}$ $(v\ge 0)$ thay vào (1) ta có được:

$$u^2-u=v^2-v \Leftrightarrow (u-v)(u+v-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=u \\ v=1-u \end{array}\right..$$

• TH1:

$$u=v \Rightarrow \sqrt{3x+1}=2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 3x+1=4x^2-8x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ 4x^2-11x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}.$$

• TH2:

$$v=1-u \Rightarrow \sqrt{3x+1}=3-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x\ge 0 \\ 3x+1=4x^2-12x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{3}{2} \\ 4x^2-15x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm:

$$x=\frac{15-\sqrt{97}}{8} \text{ hoặc } x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}.$$

b)• Lấy vế cộng vế của hai PT tương ứng ta được:

$$(\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x})+(\sqrt{2y+9}+\sqrt{2y})=14.$$

• Lấy PT thứ hai trừ PT thứ nhất ta được:

$$(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x})+(\sqrt{2y+9}-\sqrt{2y})=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}+\frac{9}{\sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}}=2.$$

Đặt $u=\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}$, $v=\sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}$. Ta có:

$$\begin{cases} u+v=14 \\ \frac{5}{u}+\frac{9}{v}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u=7 \\ v=7 \end{cases}.$$

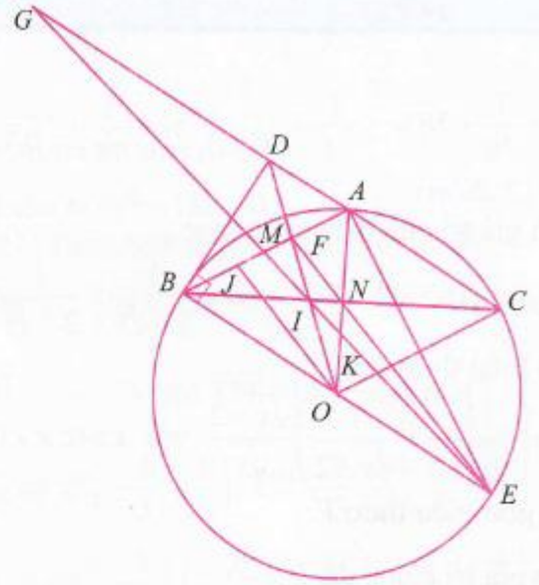
• TH1: Với $\begin{cases} u=5 \\ v=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=5 \\ \sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}.$

• TH2: Với $u=v=7$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=7 \\ \sqrt{2y+9}+\sqrt{2y}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{242}{49} \\ y=\frac{200}{49} \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(2;8), \left(\frac{242}{49};\frac{200}{49}\right)$.

Câu 4.



a) Ta có $OA=OB$, $\widehat{BAO}=60^0$ nên tam giác OAB đều. Từ đó suy ra:

$$\widehat{DBA}=30^0; \widehat{DAB}=60^0 \Rightarrow \widehat{ADB}=90^0$$

Vì tam giác ABC cân tại A và N là trung điểm của BC nên $AN\perp BC$ hay $\widehat{ANB}=90^0$. Vì

$$\widehat{ADB}+\widehat{ANB}=90^0+90^0=180^0$$

nên tứ giác $ADBN$ nội tiếp.

b) Gọi J là trung điểm của FB. Vì

$$\begin{cases} DA\perp BD \\ OB\perp BD \end{cases} \Rightarrow DA \parallel OB \Rightarrow \frac{DA}{BO}=\frac{AF}{FB}.$$

Mà $\frac{DA}{BO}=\frac{DA}{AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AF}{FB}=\frac{1}{2} \Rightarrow FB=2FA.$

Ta lại có J là trung điểm của FB nên $AF=FJ=JB$, suy ra F là trung điểm của AJ.

Vì O là trung điểm của BE, J là trung điểm của BF nên OJ là đường trung bình của tam giác BEF. Suy ra $OJ \parallel EF$. (1)

Vì N là trung điểm của AO, F là trung điểm của AJ nên NF là đường trung bình của tam giác AOJ. Suy ra $NF \parallel JO$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} FN \parallel JO \\ FE \parallel JO \end{cases}$ nên F, N, E thẳng hàng.

(Xem tiếp trang 11)

BA SẠ TA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO 10 THPT CHUYÊN BÌNH LONG, BÌNH PHƯỚC NĂM HỌC 2017 – 2018

VÒNG 1

(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 *(2 điểm)*.

1. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$A=\sqrt{16}-\sqrt{9} \qquad B=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

2. Cho biểu thức

$$V=\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}+\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \text{ với } x>0; x\neq 0.$$

a) Rút gọn biểu thức V.

b) Tìm giá trị của x để $V=\frac{1}{3}$.

Câu 2 *(2.5 điểm)*.

1. Cho parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng d: $y=x+1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

b) Viết phương trình đường thẳng d_1 song song với đường thẳng d và đi qua điểm $A(-1; 2)$.

2. Không sử dụng máy tính giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}3x-2y=5\\2x+y=8\end{cases}.$$

Câu 3 *(2 điểm)*.

1. Cho phương trình: $2x^2-2mx+m^2-2=0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m=2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức đạt giá trị lớn nhất: $A=|2x_1x_2-x_1-x_2-4|$.

2. Cho vườn hoa hình chữ nhật có diện tích bằng 91m^2 và chiều dài lớn hơn chiều rộng 6m. Tìm chu vi của vườn hoa?

Câu 4 *(1 điểm)*. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $BH=4\text{cm}$, $CH=9\text{cm}$.

a) Tính độ dài đường cao AH và $\widehat{ABC}$ của tam giác ABC.

b) Vẽ đường trung tuyến AM $(M\in BC)$ của tam giác ABC, tính AM và diện tích tam giác AHM.

Câu 5 *(2.5 điểm)*. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax với đường tròn (O) (A là tiếp điểm). Qua C thuộc tia Ax, vẽ đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa C và E; D và E nằm về hai phía của đường thẳng AB). Từ O vẽ OH vuông góc với đoạn thẳng DE tại H.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AOHC$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $AC.AE=AD.CE$

c) Đường thẳng CO cắt tia BD, tia BE lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng $AM \parallel BN$.

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 *(2 điểm)*. Cho biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{-x+x\sqrt{x}+6}{x+\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, \text{ với } x\geq 0, x\neq 1.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Cho biểu thức $Q=\frac{(x+27).P}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$, với $x\geq 0, x\neq 1$, $x\neq 4$. Chứng minh $Q\geq 6$.

Câu 2 *(1 điểm)*. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$ với x là ẩn, m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2+4x_1+2x_2-2mx_1=1$.

Câu 3 *(2 điểm)*. a) Giải phương trình:

$$x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1.$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}4\sqrt{x+1}-xy\sqrt{y^2+4}=0 & (1)\\ \sqrt{x^2-xy^2+1}+3\sqrt{x-1}=xy^2 & (2)\end{cases}.$$

Câu 4 *(3 điểm)*. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}=60^0$, $AC=b$, $AB=c$ $(b>c)$. Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M (E thuộc cung lớn BC). Gọi I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống các đường thẳng AB và AC. Gọi H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống các đường thẳng AB và AC.

a) Chứng minh các tứ giác $AIEJ$, $CMJE$ nội tiếp và $EA.EM = EC.EI$.

b) Chứng minh I, J, M thẳng hàng và IJ vuông góc với HK.

c) Tính độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b, c.

Câu 5 (1 *điểm*). Chứng minh biểu thức

$$S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$$

chia hết cho 120, với n là số nguyên.

Câu 6 (1 *điểm*).

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a+b+c=0$ và $|a| \le 1$, $|b| \le 1, |c| \le 1$. Chứng minh rằng: $a^4 + b^6 + c^8 \le 2$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

với x, y là các số thực lớn hơn 1.

MAI VĨNH PHÚ

(GV THCS – THPT Tân Tiến, Bù Đốp, Bình Phước) ***Giới thiệu***

***

HIỂU RÕ BẢN CHẤT HÌNH HỌC CỦA BÀI TOÁN CỰC TRỊ TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN ĐỂ GIẢI NHANH BÀI TOÁN TRẮC NGHIỆM

VÕ TRỌNG TRÍ
(GV THPT Anh Sơn 1, Nghệ An)

Để giải nhanh bài toán cực trị trong hình học tọa độ không gian, chúng ta cần tìm được vị trí đặc biệt của nghiệm hình để cực trị (số đo góc, khoảng cách, độ dài) xảy ra. Khi biết vị trí đặc biệt đó, việc tính toán chỉ còn vài dòng đơn giản là ra kết quả. Sau đây các các bài toán cực trị thường gặp, bản chất hình học của nó và công thức giải nhanh bài toán đó.

✪Bài toán 1. *Viết phương trình mặt phẳng đi qua một đường thẳng d và cách một điểm $M \notin d$ một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. Gọi hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (mp) và d lần lượt là H, K. Ta có khoảng cách từ M đến mặt phẳng là đoạn $MH \le MK$. Vậy MH lớn nhất khi và chỉ khi H trùng K hay mặt phẳng thỏa mãn điều kiện bài toán đó phải chứa d và vuông góc với mặt phẳng chứa M và d. Mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến (VTPT) $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{u_d}\right]$, trong đó $A \in d$, $\overrightarrow{u_d}$ là VTCP của d.

Thí dụ 1. *Viết phương trình (PT) mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2;1;-1)$, $A = (1;0;-2) \in d$ $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1;1;3)$. Vậy

$$\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AM}\right], \overrightarrow{u_d}\right] = (6;6;18).$$

Vậy PT mặt phẳng cần tìm là:

$$(x-1) + y + 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow x + y + 3z + 5 = 0.$$

Thí dụ 2. *Viết phương trình mp đi qua điểm $A(1;-2;1)$, song song với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{OA}\right], \overrightarrow{u_d}\right]$, PT mặt phẳng:

$$11x - 16y + 10z - 53 = 0.$$

Thí dụ 3. *Viết PT mặt phẳng (P) đi qua O, vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y + z - 1 = 0$ và cách điểm $M\left(\frac{1}{2};0;2\right)$ một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. Bản chất mặt phẳng cần tìm vẫn đi qua đường thẳng cố định qua O và vuông góc với (P). Nên VTPT của mặt phẳng cần tìm là

$$\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{OM}\right]; \overrightarrow{n_Q}\right].$$

Thí dụ 4. *Tìm a để khoảng cách từ điểm $M(1;2;-2)$ đến mặt phẳng*

$$(P): (1-a)x + (2-3a)y + az + 1 - a = 0$$

lớn nhất.

Gợi ý. Ta có thể áp dụng công thức khoảng cách trực tiếp hoặc mặt phẳng đã cho chứa đường thẳng cố định là $d: \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ -x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$, $\overrightarrow{u_d} = (2;-1;-1)$ và đi qua $A(-1;0;0)$, do đó khoảng cách lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_P} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AM}\right]; \overrightarrow{u_d}\right]$, từ đó tìm được $a = 2$.

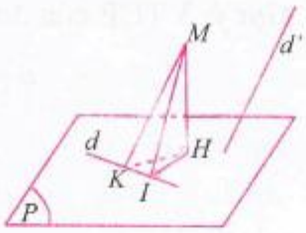
✪ Bài toán 2. *Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d, tạo với đường thẳng d' (d' không song song với d) một góc lớn nhất.*

Lời giải. Lấy K là điểm thuộc d, vẽ đường thẳng $Kt \parallel d'$. Lấy $M \in Kt$ $(M \ne K)$ và gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d. Khi đó

$$\sin(d';(P)) = \cos\widehat{KMH} = \frac{MH}{KM} \le \frac{MI}{KM}.$$

BỘ GIẢI ĐỀ=CHÍN+CHÍN

Vậy góc giữa d và (P) lớn nhất khi và chỉ khi H trùng I, hay (P) là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{IM}$ làm vectơ pháp tuyến, hay (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng chứa d, song song với d'. VTPT của mặt phẳng (P) cần tìm là $\vec{n}=\left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right];\overrightarrow{u_d}\right]$.



Thí dụ 5. *Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{2}$ và tạo với đường thẳng $d':\frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ một góc lớn nhất.*

Gợi ý. Ta có $\vec{n}=\left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}\right];\overrightarrow{u_d}\right]=(-3;12;-3)$. (P) đi qua điểm $A(1;-1;2)$ nên có phương trình $(x-1)-4(y+1)+(z-2)=0 \Leftrightarrow x-4y+z-7=0$.

Thí dụ 6. *Viết PT mặt phẳng đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (P): $2x+y-z-1=0$ và tạo với trục Oy một góc lớn nhất.*

Gợi ý. Bản chất bài toán vẫn không thay đổi, mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n}=\left[\left[\overrightarrow{n_P};\vec{j}\right];\overrightarrow{n_P}\right]=(-2;5;1),$$

($\vec{j}$ là VTCP đơn vị của trục Oy). Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-5y-z=0$.

Thí dụ 7. *Viết phương trình mặt phẳng đi qua O, song song với đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{3}$ và tạo với mặt phẳng (P): $x+2y-z+1=0$ một góc nhỏ nhất.*

Gợi ý. Bản chất bài toán vẫn là tìm phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng a (qua O và song song với d) và tạo với đường thẳng b vuông góc với mp(P) một góc lớn nhất. Vậy VTPT mp cần tìm là

$$\vec{n}=\left[\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right];\overrightarrow{u_d}\right]=(12;27;-17),$$

Nên PT mp cần tìm là: $12x+27y-17z=0$.

Thí dụ 8. *Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1), B(2;1;3)$ và tạo với trục Ox một góc lớn nhất.*

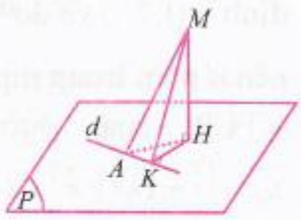
Gợi ý. Mặt phẳng cần tìm đi qua AB, cũng là mp chứa đường thẳng AB cố định cho trước. Vậy $\vec{n}=\left[\left[\overrightarrow{AB};\vec{i}\right];\overrightarrow{AB}\right]=(17;1;-4)$,

(với $\vec{i}$ là VTCP đơn vị của trục Ox).

✪ **Bài toán 3.** *Viết phương trình đường thẳng d đi qua một điểm A cho trước và nằm trong mặt phẳng (P) cho trước và cách một điểm M cho trước một khoảng nhỏ nhất (AM không vuông góc với (P)).*

Gợi ý. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d. Dễ thấy:

$$d(M;d)=MK\geq MH.$$



Khoảng cách này nhỏ nhất khi và chỉ khi $K\equiv H$. Hay d là đường thẳng đi qua A và hình chiếu H của M trên (P). VTCP của đường thẳng d cần tìm là $\overrightarrow{u_d}=\left[\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{AM}\right];\overrightarrow{n_{(P)}}\right]$.

Thí dụ 9. *Viết PT đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O, nằm trong mặt phẳng (P): $2x-y+z=0$ và cách điểm $M(1;2;1)$ một khoảng nhỏ nhất.*

Gợi ý. Ta có VTCP của đường thẳng cần tìm là $\overrightarrow{u_d}=\left[\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{OM}\right];\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(4;13;5)$. Vậy PT đường thẳng cần tìm là $\frac{x}{4}=\frac{y}{13}=\frac{z}{5}$.

Thí dụ 10. *Viết PT đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;2)$, vuông góc với đường thẳng $a:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-3}{4}$ và cách gốc tọa độ O một khoảng nhỏ nhất.*

Gợi ý. Bản chất d vẫn là đường thẳng đi qua A và nằm trong mặt phẳng cố định (qua A và vuông góc với a). Nên VTCP vẫn là $\overrightarrow{u_d}=\left[\left[\overrightarrow{u_a};\overrightarrow{OA}\right];\overrightarrow{u_a}\right]$.

Thí dụ 11. *Viết PT đường thẳng d đi qua O và song song với mặt phẳng (P): $2x-y-z+1=0$ và cách điểm $M(1;-1;2)$ một khoảng nhỏ nhất.*

Gợi ý. Bản chất d vẫn là đường thẳng đi qua O và nằm trong mặt phẳng cố định (qua O và song song với (P)). Nên VTCP vẫn là:

ĐẠI DA=CHÍA+CHÍA

$$\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{OM}\right]; \overrightarrow{n_P}\right].$$

Thí dụ 12. *Tìm cặp số nguyên dương (a, b) nhỏ nhất để khoảng cách từ O đến đường thẳng*

$$(d): \begin{cases} x = 1 + a + at \\ y = 2 + b + bt \\ z = 1 + 2a - b + (2a - b)t \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

là nhỏ nhất.

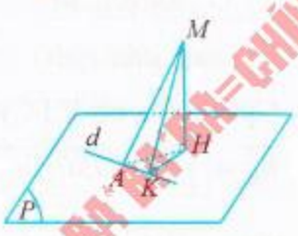
Gợi ý. Đường thẳng d đã cho đi qua điểm cố định $A(1;2;1)$ và do $\overrightarrow{u_d} = (a;b;2a-b) \perp \vec{n}(2;-1;-1)$ nên d nằm trong mp(P) qua A có VTPT $\vec{n}$. Vậy VTCP của đường thẳng cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\vec{n}; \overrightarrow{OA}\right]; \vec{n}\right] = (-8;-11;-5)$. Vậy ta phải có:

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{11} = \frac{2a-b}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 11 \end{cases}.$$

✪Bài toán 4. *Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A cho trước, nằm trong mặt phẳng (P) và cách điểm M (M khác A, MA không vuông góc với (P)) một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d. Khi đó ta thấy

$d(M;d) = MK \leq MA$,



khoảng cách $d(M;d)$ lớn nhất khi và chỉ khi K trùng A, hay d là đường thẳng nằm trong (P), đi qua A và vuông góc với AM. Đường thẳng d cần tìm có VTCP là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{AM}\right]$.

Thí dụ 13. *Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;-1)$ cho trước, nằm trong mp (P): $2x - y - z = 0$ và cách điểm $M(0;2;1)$ một khoảng lớn nhất.*

Lời giải. Ta có VTCP đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{n_P}\right] = (1;3;-1)$. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Thí dụ 14. *Viết PT đường thẳng d qua gốc tọa độ O, vuông góc với đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-2}$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. VTCP của đường thẳng cần tìm là

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{OM}\right]$$

Thí dụ 15. *Viết PT đường thẳng d đi qua điểm $A(1;0;2)$, song song với mặt phẳng (P): $2x - y + z - 1 = 0$ và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. VTCP của đường thẳng cần tìm là

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{n_P}\right].$$

Thí dụ 16. *Tìm a để đường thẳng*

$$d: \begin{cases} x = 1 - 2a + at \\ y = -2 + 2a + (1-a)t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

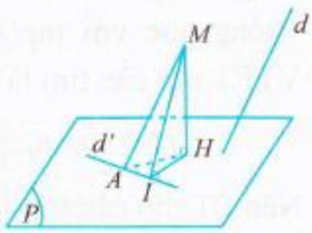
cách điểm $M\left(\frac{1}{2};1;4\right)$ một khoảng lớn nhất.

Gợi ý. Dựa vào PT tham số của đường thẳng d đã cho, ta thấy d đi qua điểm cố định $A(1;0;3)$ (ứng với $t = 2$) và vuông góc với đường thẳng có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (1;1;-1)$. Do đó VTCP của đường thẳng d khi khoảng cách từ M đến nó lớn nhất là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{AM}\right] = \left(2; \frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy ta phải có: $\frac{a}{2} = \frac{1-a}{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$.

✪Bài toán 5. *Cho mặt phẳng (P) và điểm $A \in (P)$ và đường thẳng d (d cắt (P) và d không vuông góc với (P)). Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A, nằm trong (P) và tạo với d một góc nhỏ nhất.*

Gợi ý. Từ A vẽ đường thẳng $At // d$. Lấy $M \in At$ $(M \neq A)$ và gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên (P) và d'. Ta có



$$\sin(d;d') = \sin\widehat{MAI} = \frac{MI}{AM} \geq \frac{MH}{MA}.$$

ĐẠI LÝ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Vậy góc $(d; d')$ bé nhất $\Leftrightarrow I$ trùng H hay d' đi qua A và H, hay d' đi qua A và song song với hình chiếu vuông góc của d trên (P). VTCP của đường thẳng d' cần tìm là $\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_P}; \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{u_d}\right]\right]$.

Thí dụ 17. *Viết PT đường thẳng đi qua gốc tọa độ O, nằm trong mặt phẳng (P): $2x + y - z = 0$ và tạo với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ một góc nhỏ nhất.*

Gợi ý. VTCP của đường thẳng cần tìm là

$$\overrightarrow{u_a} = \left[\overrightarrow{n_P}; \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{u_d}\right]\right] = (-10; 7; -13).$$

Vậy PT đường thẳng cần tìm là $\frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-13}$.

Thí dụ 18. *Viết PT đường thẳng đi qua O, vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ và tạo với mặt phẳng (P): $x - y + 2z - 1 = 0$ một góc lớn nhất.*

Gợi ý. Bản chất vẫn là Bài toán toán 5, với VTCP của đường thẳng cần tìm là

$$\vec{u} = \left[\left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{n_P}\right]; \overrightarrow{u_d}\right].$$

Thí dụ 19. *Viết PT đường thẳng đi qua gốc tọa độ O, cắt đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ và tạo với trục Oy một góc nhỏ nhất.*

Gợi ý. Bản chất đường thẳng cần tìm đi qua O và nằm trong mp$(O; d)$. Do đó VTCP cần tìm là $\vec{u} = \left[\left[\overrightarrow{n_{(O;d)}}, \vec{j}\right]; \overrightarrow{n_{(O;d)}}\right]$, ($\vec{j}$ là VTCP đơn vị của trục Oy).

✪Bài toán 6. *Cho mặt phẳng (P) và điểm $A \in (P)$ và đường thẳng d cắt (P) tại điểm M khác A. Viết PT đường thẳng d' nằm trong (P), đi qua A và khoảng cách giữa d và d' lớn nhất.*

Gợi ý. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và song song với d'. Khi đó $d(d; d') = d((Q); d') = d(A, (Q))$. Theo Bài toán 1, khoảng cách này lớn nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(Q)}} = \left[\overrightarrow{u_d}; \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AB}\right]\right], B \in d$. Khi đó do $d' \parallel (Q)$ và d' nằm trong (P), nên $\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_Q}; \overrightarrow{n_P}\right]$.

VTCP của đường thẳng d cần tìm là:

$$\overrightarrow{u_{d'}} = \left[\overrightarrow{n_P}; \left[\overrightarrow{u_d}; \left[\overrightarrow{u_d}; \overrightarrow{AB}\right]\right]\right], B \in d.$$

Thí dụ 20. *Cho mp (P): $2x + y + z - 3 = 0$, $A(0;2;1)$ và đường thẳng $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. Viết PT đường thẳng d đi qua A, nằm trong (P) và khoảng cách giữa d và d' lớn nhất.*

Gợi ý. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d' và cách A một khoảng lớn nhất. Khi đó ta có: $B(1;0;0) \in d'$, $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_{d'}}; \left[\overrightarrow{u_{d'}}; \overrightarrow{AB}\right]\right] = (-10; 4; 2)$, VTCP của đường thẳng d cần tìm là $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_Q}; \overrightarrow{n_P}\right] = (2; 14; -18)$. PT đường thẳng d là:

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z-1}{-9}.$$

✪Bài toán 7. *Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \parallel (P)$. Viết phương trình đường thẳng $d' \parallel d$ và cách d một khoảng nhỏ nhất.*

Gợi ý. Gọi A là điểm thuộc d, A' là hình chiếu của A trên (P). Khi đó đường thẳng d' cần tìm đi qua A' và song song với d.

Thí dụ 21. *Cho mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$. Viết PT đường thẳng d nằm trong mp(P), song với mặt phẳng $x - 2y + z + 2 = 0$ và cách gốc tọa độ O một khoảng nhỏ nhất.*

Gợi ý. Đường thẳng d cần tìm đi qua hình chiếu O' của O trên mp(P) và có VTCP

$$\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{n_Q}\right].$$

✪Bài toán 8. *Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và cách điểm M (khác A) một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. VTPT của mp cần tìm là $\vec{n} = \overrightarrow{AM}$.

Thí dụ 22. *Viết PT mặt phẳng đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất.*

Gợi ý. VTPT của mp cần tìm là

$$\vec{n} = \overrightarrow{AM} = (1; 1; -3).$$

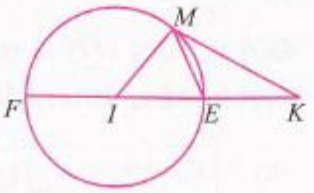
Do đó PT mặt phẳng cần tìm là

$$(x-1) + y - 3(z+2) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z - 7 = 0.$$

BẢN GỐC CHỈNH+CHỈNH

✪Bài toán 9. *Các bài toán khác đòi hỏi chúng ta cần có trực giác hình học để giải nhanh.*

Thí dụ 23. *Cho đường thẳng* $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$. *Viết PT đường thẳng d' song song với d, cách d một khoảng bằng 3 và cách điểm* $K(-3;4;3)$ *một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất.*



Gợi ý. Giả sử mp(P) qua K và vuông góc với d cắt d tại I, d' tại M. Khi đó ta có $IM=3$, trong mp(P): ta cần tìm M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R=3$ cách K một khoảng nhỏ nhất, lớn nhất. Gọi $I(1+2t;t;1+2t)\Rightarrow$

$$\overrightarrow{KI}=(4+2t;t-4;-2+2t),\overrightarrow{u_d}=(2;1;2),$$

$\Rightarrow \overrightarrow{KI}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t=0$. Vậy $I(1;0;1)$ và $IK=6>3$. Dễ thấy KM nhỏ nhất khi M trùng E, KM lớn nhất khi M trùng F. Để tìm $E(x;y;z)$ ta dùng hệ thức $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IK}\Leftrightarrow E=(-1;2;2)$. Vậy PT đường thẳng d' cách K một khoảng nhỏ nhất là $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{2}$. Tương tự PT đường thẳng d' cách cách K một khoảng lớn nhất là $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

Thí dụ 24. *Cho đường thẳng*

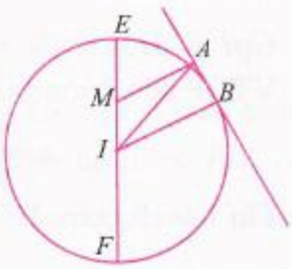
$$d:\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{1}.$$

Viết phương trình đường thẳng d' song song với d, cách d một khoảng bằng $\sqrt{3}$ *và cách đường thẳng* $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{x-1}{1}$ *một khoảng nhỏ nhất (lớn nhất).*

Lời giải. Đường thẳng d' cần tìm là một đường sinh của mặt trụ tròn xoay có trục là d, bán kính $R=\sqrt{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và song song với d. Dễ dàng thấy ngay, d' là giao mặt trụ trên với mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) (trong trường hợp (P) không cắt mặt trụ). Mặt phẳng (P) có VTPT là: $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(3;3;3)$. Phương trình mp ($P$): $x+y+z-3=0$. Lấy $I(3;3;3)\in d$, hình chiếu của I trên (P) là $H(1;1;1)$, $IH=2\sqrt{3}$. Gọi $M(x;y;z)$ là giao điểm của IH với mặt trụ (gần (P)) nhất. Ta có: $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IH}\Rightarrow M(2;2;2)$. Vậy PT đường thẳng d' cần tìm đi qua M là

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}.$$

Thí dụ 25. *Cho đường thẳng* $d:\begin{cases}x=2+t\\y=3+2t\\z=2+t\end{cases}$. *Viết PT mp(P) song song với d, cách d một khoảng* $R=2\sqrt{2}$ *và cách* $M(0;1;2)$ *một khoảng nhỏ nhất (lớn nhất).*



Lời giải. Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với d tại I. Giả sử đường thẳng qua M vuông góc với (P) cắt (P) tại A. Gọi B là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Ta thấy các điểm I, M, B, A thuộc mp(Q) và

$$IB=d(d,(P))=R,\ d(M;(P))=MA.$$

Ta tìm được $I(1;1;1)$ và $IM=\sqrt{2}<R$. Trong mp(Q) đường tròn tâm I, bán kính $R=2\sqrt{2}$ cắt đường thẳng IM tại E và F (M nằm giữa I, E) Dễ thấy $MA+MI\ge IE=IB\Rightarrow MA\ge IB-MI$, MA nhỏ nhất khi và chỉ khi A trùng B trùng E. Để tìm E ta sử dụng hệ thức $\overrightarrow{IE}=2\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow E(-1;1;3)$. Mặt phẳng ($P$) đi qua E và có VTPT $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{IM}\right]=(2;-2;2)$, nên có phương trình là:

$$2(x+1)-2(y-1)+2(z-3)=0\Leftrightarrow x-y+z-1=0.$$

Trường hợp khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất $\Leftrightarrow$ mp(P) đi qua F và có VTPT như trên.

Nhận xét: Nếu $IM > R$ thì khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất $\Leftrightarrow (P)$ đi qua M, và khoảng cách lớn nhất khi (P) đi qua F.

Thí dụ 26. Cho mặt cầu

$$(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$$

và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

Lời giải. Gọi $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S), ta có:

$$(a+1)^2+(b-4)^2+c^2=8$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2a-8b+9=0.$$

Do đó:

$$MA=\sqrt{(a-3)^2+b^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-6a+9}$$
$$=\sqrt{4(a^2+b^2+c^2)-6a+9-3(a^2+b^2+c^2)}$$
$$=\sqrt{4a^2+4b^2+4c^2-6a+9-3(-9-2a+8b)}$$
$$=\sqrt{4a^2+4b^2+4c^2-24b+36}$$
$$=2\sqrt{a^2+b^2+c^2-6b+9}=2\sqrt{a^2+(b-3)^2+c^2}=2MB'$$

với $B'(0;3;0)$. Dễ dàng kiểm tra thấy B' nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu, vậy

$$MA+2MB=2(MB'+MB)$$

nhỏ nhất khi B', M, B thẳng hàng, hay giá trị nhỏ nhất là $2BB'=6\sqrt{2}$.

BÀI TẬP

Câu 1. Cho mặt phẳng (P): $2x-y+z-1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong (P), song song với d và khoảng cách giữa d và d' nhỏ nhất. Hỏi d' đi qua điểm nào sau đây?

A. $M\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. B. $M\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.

C. $M\left(\frac{2}{3};\frac{7}{6};\frac{5}{6}\right)$. D. $M\left(\frac{2}{3};-1;-\frac{2}{3}\right)$.

Câu 2. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1;0;1), B(2;1;3)$ và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. (P) đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(0;2;-1)$. B. $M(1;1;1)$.

C. $M(3;2;1)$. D. $M(-1;1;1)$.

Câu 3. Gọi d là đường thẳng đi qua O và nằm trong mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng nhỏ nhất. Tính góc giữa d và trục tung.

A. $\arccos\frac{2}{3}$. B. $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $\arccos\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 4. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và tạo với trục Oz một góc lớn nhất. Hỏi mp(P) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(1;3;2)$. B. $M(2;1;0)$.

C. $M(4;1;1)$. D. $M(1;1;1)$.

Câu 5. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=at\\y=bt\\z=1-(a+2b)t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ (a, b là các tham số đã biết). Biết khoảng cách giữa d và Ox lớn nhất. Tính $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{a}{b}=0$. B. $\frac{a}{b}=-\frac{5}{2}$. C. $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$. D. $\frac{a}{b}=-4$.

Câu 6. Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=1+t\end{cases}$. Gọi d' là đường thẳng đi qua điểm $I(1;2;1)$ và tạo với d một góc 30^0 và cách điểm $J(0;0;-2)$ một khoảng nhỏ nhất. Một vectơ chỉ phương của d' là:

A. $\vec{u}=(-1;1;0)$. B. $\vec{u}=(1;1;0)$.

C. $\vec{u}=(-1;0;1)$. D. $\vec{u}=(-1;1;2)$.

Câu 7. Cho hai điểm $A(0;0;3)$, $B(1;4;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-8y+2z+9=0$. Gọi M thuộc mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của $|MA-2MB|$.

A. $2\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $3\sqrt{6}$.

(Xem tiếp trang 33)

BA+BA+BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ LAGRANGE TRONG BÀI TOÁN CHỨNG MINH SỰ TỒN TẠI CỦA CÁC ĐẠI LƯỢNG TOÁN HỌC

TRẦN TRUNG DŨNG
(*B12D48, T31, Bộ Công An*)

Như chúng ta đều đã biết, định lý Lagrange là một trong những định lý quan trọng nhất của chương trình giải tích sơ cấp. Nó có ứng dụng hết sức rộng rãi trong nhiều dạng bài toán khác nhau như bài toán tìm giới hạn dãy số, biện luận số nghiệm của phương trình, giải phương trình chứa mũ và lôgarit hay thậm chí là bài toán chứng minh bất đẳng thức (bất đẳng thức Jensen, Karamata,...). Đặc biệt, định lý Lagrange còn được sử dụng thường xuyên trong các bài toán về sự tồn tại của một hay nhiều giá trị không xác định, thỏa mãn một đẳng thức hay bất đẳng thức nào đó, đặc biệt là khi các giá trị đó thuộc vào một khoảng hoặc đoạn xác định cho trước. Bài viết này bằng việc phân tích, đưa ra lời giải cho một số ví dụ điển hình về các bài toán nêu trên cùng với việc đưa ra hệ thống các bài tập tương tự để bạn đọc luyện tập thêm, hi vọng sẽ giúp bạn đọc hiểu biết sâu sắc hơn và giải quyết thành công các bài toán thuộc dạng này.

Trước hết xin nhắc lại định lý Larange để bạn đọc tiện theo dõi:

Định lý Lagrange. *Cho f là một hàm xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Khi đó tồn tại một giá trị $c \in (a;b)$ sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Hệ quả. *Nếu $f(a) = f(b)$ thì tồn tại một giá trị $c \in (a;b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

I. CÁC THÍ DỤ ĐIỂN HÌNH

Thí dụ 1. *Cho hàm số f liên tục trên $[0;1]$, có đạo hàm trên $(0;1)$ thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0;1)$ sao cho*

$$f'(c) = \frac{c}{c+1} f(c).$$

Phân tích. Để có thể áp dụng định lý Lagrange vào bài này, ta cần tìm một hàm $g(x)$ sao cho $g(0) = g(1)$ và $g'(x)$ là một biểu thức chứa x, $f(x)$ *và* $f'(x)$. Dễ thấy hàm $g(x) = f(x)e^{h(x)}$ vì khi đạo hàm sẽ cho ta $g'(x) = e^{h(x)}[f'(x) + h'(x)f(x)]$, đây là một biểu thức chứa cả x, $f(x)$ và $f'(x)$. Áp dụng định lý Lagrange thì tồn tại c sao cho:

$$g'(c) = e^{h(c)}[f'(c) + h'(c)f(c)] = \frac{g(1)-g(0)}{1-0} = 0.$$

Do đó $f'(c) + h'(c)f(c) = 0$ hay $f'(c) = -h'(c)f(c)$.

Bây giờ chỉ cần tìm $h(x)$ sao cho $h'(x) = \frac{-x}{x+1}$ để ta thu được điều phải chứng minh. Dễ thấy

$$h(x) = \int \frac{-x}{x+1}dx = \ln(x+1) - x + C, \text{ ta lấy}$$

$h(x) = \ln(x+1) - x$. Suy ra $g(x) = f(x)\frac{(x+1)}{e^x}$.

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x)\frac{(x+1)}{e^x}$. Dễ thấy $g(0) = g(1) = 0$; $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và có đạo hàm trên $(0;1)$. Ta có:

$$g'(x) = f'(x)\frac{(x+1)}{e^x} + f(x)\frac{e^x - (x+1)e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{f'(x)(x+1) - xf(x)}{e^x}.$$

Áp dụng định lý Lagrange thì tồn tại $c \in (0;1)$ để $g'(c) = 0$ hay $\frac{f'(c)(c+1) - cf(c)}{e^c} = 0$

hay $f'(c)=\frac{c}{c+1}f(c)$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Thí dụ 2. *Cho f là hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$, có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ thỏa mãn $f(0)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $\delta\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ sao cho $f'(\delta)=\frac{-f(\delta)}{\cos\delta}$.*

Phân tích. Tương tự thí dụ 1, ta tìm được hàm

$$g(x)=f(x)\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

Lời giải. Đặt $g(x)=f(x)\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Do $0\le\sin x\le\frac{1}{2},\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ nên $g(x)$ xác định trên $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$. Ta thấy $g(0)=0$ và $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$, đồng thời $g(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$ và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$. Ta có: $g'(x)=f'(x)\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

$$+\frac{1}{2}f(x)\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.\frac{\cos x(1-\sin x)+(1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\left[f'(x)+\frac{1}{2}f(x)\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\left[f'(x)+\frac{f(x)}{\cos x}\right].$$

Áp dụng định lý Lagrange ta suy ra tồn tại $\delta\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ sao cho $g'(\delta)=0$ hay

$$\sqrt{\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}}\left[f'(\delta)+\frac{f(\delta)}{\cos\delta}\right]=0,$$

tức là: $f'(\delta)+\frac{f(\delta)}{\cos\delta}=0\left(\text{do}\sqrt{\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}}>0,\forall\delta\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Thí dụ 3. *Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số có đạo hàm cấp 2 với $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Chứng minh rằng tồn tại $\delta\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$ sao cho:*

$$f''(\delta)=f(\delta)\frac{2(1+\tan^2\delta)}{\tan^2\delta}.$$

Phân tích. Bài toán này có sự xuất hiện của $f''(\delta)$, do đó chúng ta không thể áp dụng cách làm của hai ví dụ trên được nữa, ý tưởng của bài toán này xuất phát từ mối quan hệ giữa ba đại lượng $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ và $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Chú ý rằng ba điểm sẽ cho ta hai khoảng, vì thế ta đặt $g(x)=f(x)h(x)$ sao cho $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Như thế suy ra tồn tại a và b sao cho $a\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right)$, $b\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$ và $g'(a)=g'(b)=0$. Trong biểu thức của $g'(x)$ sẽ xuất hiện $f'(x)$. Bây giờ lại đặt $p(x)=g'(x)q(x)$. Khi đó $p(a)=p(b)=0$. Lại theo định lý Lagrange, tồn tại δ sao cho $p'(\delta)=0$, mấu chốt là tìm ra hàm $q(x)$ để trong khai triển của $p'(x)$ chỉ chứa $f(x)$ và $f''(x)$, tức là không còn $f'(x)$, từ đó thu được đẳng thức cần chứng minh.

Số $\sqrt{3}$ trong $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ làm ta nghĩ tới hàm tan, vì vậy ta đặt $g(x)=f(x)\tan x$. Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Ta có $g'(x)=f'(x)\tan x+f(x)(1+\tan^2 x)$ và

$$g''(x)=f''(x)\tan x+2f'(x)(1+\tan^2 x)$$
$$+2\tan x(1+\tan^2 x)f(x).$$

Từ đó:

$$p'(x)=f''(x)\tan x\,q(x)+f'(x)[2(1+\tan^2 x)q(x)$$
$$+\tan x\,q'(x)]+f(x)[2\tan x(1+\tan^2 x)q(x)$$
$$+(1+\tan^2 x)q'(x)].$$

Cần xác định $q(x)$ sao cho:

BA+BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

$$2(1+\tan^2 x)q(x)+\tan x q'(x)=0$$

hay $\int \frac{q'(x)}{q(x)}dx = -\int \frac{2(1+\tan^2 x)}{\tan x}dx$

hay $\ln q(x) = -2\ln(\tan(x))$, suy ra $q(x)=\frac{1}{\tan^2 x}$.

Lời giải. Đặt $g(x)=f(x)\tan x$. Dễ thấy $g(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Theo định lý Lagrange tồn tại a và b sao cho:

$$a\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right),\ b\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right) \text{ và } g'(a)=g'(b)=0.$$

Đặt $p(x)=\frac{g'(x)}{\tan^2 x}, \forall x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ thì ta được $p(a)=p(b)=0$ đồng thời $p(x)$ liên tục trên $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ và có đạo hàm trên $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$. Lại theo định lý Lagrange ta có: Tồn tại $\delta\in(a;b)\subset\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$ sao cho $p'(\delta)=0$. Mà

$$p'(x)=\frac{g''(x)\tan^2 x-g'(x)2\tan x(1+\tan^2 x)}{\tan^4 x}$$
$$=\frac{f''(x)\tan^3 x-2\tan x(1+\tan^2 x)f(x)}{\tan^4 x},$$

do đó $f''(\delta)=f(\delta)\frac{2(1+\tan^2\delta)}{\tan^2\delta}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Thí dụ 4. *Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số có đạo hàm cấp hai với $f(0)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $\delta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $f''(\delta)=f(\delta)(1+2\tan^2\delta)$.*

Phân tích. Tương tự thí dụ 3, ta tìm ra

$$g(x)=f(x)\cos x \text{ và } p(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2 x}.$$

Lời giải. Đặt $g(x)=f(x)\cos x$. Dễ thấy $g(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $g(0)=g\left(\frac{-\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. Theo định lý Lagrange tồn tại a và b sao cho:

$$a\in\left(\frac{-\pi}{2};0\right), b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right) \text{ và } g'(a)=g'(b)=0.$$

Ta có: $g'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$

và $g''(x)=f''(x)\cos x-2f'(x)\sin x-f(x)\cos x$.

Đặt $p(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2 x}, \forall x\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ta được $p(a)=p(b)=0$ đồng thời $p(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Lại theo định lý Lagrange ta có: Tồn tại $\delta\in(a;b)\subset\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $p'(\delta)=0$.

Mà $p'(x)=\frac{g''(x)\cos^2 x-g'(x)2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}$

$$=\frac{f''(x)\cos^3 x-f(x)(\cos^3 x+2\sin^2 x\cos x)}{\cos^4 x}$$

Nên $f''(\delta)=f(\delta)(1+2\tan^2\delta)$. Vậy bài toán được chứng minh.

Thí dụ 5. *Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh tồn tại các số $c_1,c_2,\ldots,c_{2018}\in(0;1)$ sao cho:*

$$\frac{1}{f'(c_1)}+\frac{1}{f'(c_2)}+\ldots+\frac{1}{f'(c_{2018})}=2018.$$

Phân tích. Bài toán này khác các bài toán trên ở chỗ nó yêu cầu chúng ta chứng minh sự tồn tại của nhiều giá trị chứ không chỉ là một giá trị. Quay lại thí dụ 3 ta có nhận xét rằng có 3 điểm thì cho 2 hai khoảng, còn ở bài toán này cần 2018 khoảng để có 2018 giá trị trung bình thì dễ thấy phải tạo ra 2019 điểm. Gọi các điểm đó là $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{2019}$. Trên mỗi khoảng $(x_i;x_{i+1}), i=\overline{1;2018}$ theo định lý Lagrange, tồn tại c_i sao cho:

$$f'(c_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\Rightarrow\frac{1}{f'(c_i)}=\frac{x_{i+1}-x_i}{f(x_{i+1})-f(x_i)}.$$

Mục đích của ta bây giờ là chọn các x_i làm sao cho $f(x_{i+1})-f(x_i)$ là hằng số $\forall i=\overline{1;2018}$ để khi cộng các đại lượng $\frac{1}{f'(c_i)}$ lại với nhau, các x_i trên tử thức sẽ triệt tiêu nhau và như thế ta có thể thực hiện phép cộng dễ dàng.

BA BA BA=CHÍN+CHÍN

Đặt $f(x_{i+1})-f(x_i)=k,\ \forall i=\overline{1;2018}$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{f'(c_i)}=\frac{x_{2019}-x_1}{k}$$

Để giá trị này bằng 2018, ta chọn $x_{2019}=1, x_1=0$ và

$k=\frac{1}{2018}$. Vậy

$$f(x_1)=f(0)=0, f(x_2)=f(x_1)+k=\frac{1}{2018},$$

$$f(x_3)=\frac{2}{2018},\ldots,f(x_{2019})=\frac{2018}{2018}=1=f(1).$$

Tóm lại, $f(x_i)=\frac{i-1}{2018}$, do tính liên tục của f trên đoạn $[0;1]$ nên với các giá trị tăng dần của $f(x_i)$, ta hoàn toàn có thể chọn các x_i tăng dần.

Lời giải. Chọn các giá trị $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{2019}$ sao cho $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{2019}$ và

$$f(x_i)=\frac{i-1}{2018}, i=\overline{1;2019}.$$

Điều này là luôn thực hiện được vì nếu f đã nhận giá trị 0,1 trên $[0;1]$ thì sẽ nhận mọi giá trị nằm giữa 0 và 1, cũng theo tính chất liên tục này mà ta có thể chọn dãy x_i tăng dần. Dễ thấy do $f(0)=0, f(1)=1$ nên có thể lấy $x_1=0, x_{2019}=1$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên mỗi khoảng $(x_i;x_{i+1}), i=\overline{1;2018}$ ta có: tồn tại $c_i\in(x_i;x_{i+1})$ sao cho

$$f'(c_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=\frac{1}{2018(x_{i+1}-x_i)}$$

hay $\frac{1}{f'(c_i)}=2018(x_{i+1}-x_i)$. Do đó:

$$\sum_{i=1}^{2018}\frac{1}{f'(c_i)}=2018(x_{2019}-x_1)=2018(1-0)=2018.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Trong phần này, tôi xin phép được trình bày một số bài toán khác cũng về ứng dụng định lý Lagrange trong việc chứng minh sự tồn tại các đại lượng toán học, một số bài toán có thể có cùng cách tư duy như các ví dụ đã nêu trong phần I, tuy nhiên việc tìm ra lời giải cho các bài toán này là khó hơn các bài trước, đòi hỏi người làm phải hiểu và vận dụng sáng tạo các kiến thức đã tích lũy được từ các thí dụ trước. Hãy cùng đến với thí dụ đầu tiên.

Thí dụ 1. *Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ thỏa mãn $f(a)=-f(b)=\frac{a-b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại các số $c_1,c_2,c_3\in(a;b)$ và không đồng thời bằng nhau sao cho:*

$$f'(c_1).f'(c_2).f'(c_3)=1.$$

Lời giải. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên $[a;b]$ ta có: tồn tại $c_1\in(a;b)$ sao cho:

$$f'(c_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Xét hàm $g(x)=f(x)-\frac{b+a-2x}{2}$ trên $[a;b]$, ta có $g(a)=a-b<0$ và $g(b)=b-a>0$. Lại có $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ nên tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho

$$g(c)=0 \text{ hay } f(c)=\frac{b+a-2c}{2}.$$

Áp dụng định lý Lagrange cho $f(x)$ trên hai khoảng $(a;c)$ và $(c;b)$ ta được: tồn tại $c_2\in(a;c)$, $c_3\in(c;b)$ sao cho

$$f'(c_2)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{b-c}{c-a},$$

$$f'(c_3)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{c-a}{b-c}$$

Do đó $f'(c_2)f'(c_3)=1$.

Vì thế $f'(c_1)f'(c_2)f'(c_3)=1$. Hiển nhiên c_1,c_2,c_3 không đồng thời bằng nhau vì $c_2<c<c_3$. Vậy bài toán được chứng minh.

Thí dụ 2. *Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm trong $(a;b)$ với $0<a<b$. Chứng tỏ rằng tồn tại $c\in(a;b)$ sao cho:*

$$f'(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a+b}.$$

Lời giải. Xét hàm $g(x)=(x-a)(x-b)e^{f(x)-\frac{x}{a+b}}$ trên $[a;b]$. Ta có: $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, có đạo hàm trong $(a;b)$ và $g(a)=g(b)=0$. Do đó, theo

định lý Lagrange tồn tại $c \in (a;b)$ sao cho $g'(c)=0$.

Mà $g'(x)=\left[(x-a)+(x-b)\right]e^{f(x)-\frac{x}{a+b}}$

$$+(x-a)(x-b)e^{f(x)-\frac{x}{a+b}}\left[f'(x)-\frac{1}{a+b}\right]$$

nên

$$(c-a)+(c-b)+(c-a)(c-b)\left(f'(c)-\frac{1}{a+b}\right)=0$$

(do $e^{f(c)-\frac{c}{a+b}}>0$). Suy ra

$$f'(c)-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$$

hay $f'(c)=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a+b}$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Thí dụ 3. *Cho các số $\alpha,\beta>1$. Xét hàm $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ thỏa mãn*

$$f(0)=0\ ;\ f(x)>0,\ \forall x\in(0;1].$$

Chứng minh tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho

$$\alpha\frac{f'(c)}{f(c)}=\beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

Lời giải. Xét hàm $g(x)=\left(f(x)\right)^{\alpha}\left(f(1-x)\right)^{\beta}$ trên $[0;1]$. Dễ thấy $g(x)$ có đạo hàm trên $[0;1]$ và $g(0)=0,\ g(1)=0$. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $g(x)$ trên $[0;1]$ ta có: tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho $g'(c)=0$. Mà

$$g'(x)=\alpha\left(f(x)\right)^{\alpha-1}f'(x)\left(f(1-x)\right)^{\beta}$$
$$-\left(f(x)\right)^{\alpha}\beta\left(f(1-x)\right)^{\beta-1}f'(1-x)$$

nên

$$\alpha\left(f(c)\right)^{\alpha-1}f'(c)\left(f(1-c)\right)^{\beta}$$
$$=\left(f(c)\right)^{\alpha}\beta\left(f(1-c)\right)^{\beta-1}f'(1-c).$$

Lại có theo giả thiết $f(c),f(1-c)>0\ \forall c\in(0;1)$, nên sau khi chia hai vế của đẳng thức trên cho

$$\left(f(c)\right)^{\alpha}\left(f(1-c)\right)^{\beta}$$

ta thu được $\alpha\frac{f'(c)}{f(c)}=\beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ghi chú. Bạn đọc hãy tự mình vận dụng cách phân tích trong các ví dụ của phần Các ví dụ điển hình để phân tích để tìm ra lời giải đáp cho câu hỏi: "*Tại sao lại nghĩ ra việc đặt các hàm $g(x)$ như vậy?*" trong ba thí dụ trên.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Sau đây là một số bài tập để bạn đọc luyện tập.

Bài 1. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, có đạo hàm trong $(0;1)$ và thỏa mãn:

a) $f(0)=0, f(1)=1$,

b) Tồn tại $k\in(0;1)$ sao cho $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right|\geq\frac{\sqrt{1-k}}{2}$.

Chứng minh rằng tồn tại $x_1,x_2\in(0;1)$ và $x_1\neq x_2$ sao cho $f'(x_1)f'(x_2)=k$.

Bài 2. Cho hàm f có đạo hàm trên $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh rằng với $\alpha,\beta>0$ tồn tại $c_1,c_2\in(0;1)$, $c_1\neq c_2$ sao cho:

$$\frac{\alpha}{f'(c_1)}+\frac{\beta}{f'(c_2)}=\alpha+\beta.$$

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ $(a<b)$, có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c\in(a;b)$ sao cho:

$$\frac{2}{a-c}<f'(c)<\frac{2}{b-c}.$$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ $(a<b)$, có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$. Chứng minh rằng tồn tại điểm $c\in(a;b)$ sao cho:

$$\frac{f'(c)}{f(c)}=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}.$$

Bài 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;\pi]$, $f''(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$ thỏa mãn $f(0)=f(\pi)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0;\pi)$ sao cho $f''(c)=-f(c)$.

Kết luận. Chúng ta có thể thấy hầu hết các bài toán được trình bày trong bài báo này đều có lời giải tương đối ngắn gọn. Tuy nhiên đằng sau những lời giải ngắn gọn đó là cả một quá trình tư duy, phân tích để có thể tìm ra cách đặt các hàm số phụ và từ đó sử dụng định lý Lagrange. Mong rằng bài viết sẽ giúp ích cho bạn đọc trong việc giải các bài toán sử dụng định lý Lagrange để chứng minh sự tồn tại các đối tượng toán học.

BỘ SÁCH CHÍNH-CHÍNH-CHÍNH

CÁC LỚP THCS

Bài T1/490 (Lớp 6). Cho số tự nhiên a nguyên tố cùng nhau với 210. Biết rằng khi chia a cho 210 thì có số dư r thỏa mãn $1 < r < 120$. Chứng minh rằng r là số nguyên tố.

NGUYỄN HỮU BẰNG

(15/3 Nguyễn Văn Trỗi, TP. Vinh, Nghệ An)

Bài T2/490 (Lớp 7). Cho a, b, c, d khác 0 thỏa mãn: $b^2 = ac$; $c^2 = bd$; $b^3 + 27c^3 + 8d^3 \neq 0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}$.

NGUYỄN THỊ MINH

(GV THCS Cao Viên, Thanh Oai, Hà Nội)

Bài T3/490. Tìm tất cả các nghiệm tự nhiên x, y, z của phương trình $3xyz - 5yz + 3x + 3z = 5$.

NGUYỄN ĐỂ *(Hải Phòng)*

Bài T4/490. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB, bán kính OD vuông góc với AB. C là một điểm chạy trên cung $\overset{\frown}{BD}$. AC cắt OD ở M. Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMC luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

PHẠM TUẤN KHẢI

(29, ngõ 67, đường Giáp Bát, quận Hoàng Mai, Hà Nội)

Bài T5/490. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^2 + y^2 + \frac{9}{x+y}.$$

LẠI QUANG THỌ

(Phòng GD&ĐT Tam Dương, Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/490. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2} + \frac{1}{b^5+c^5+a^2} + \frac{1}{c^5+a^5+b^2} \leq 1.$$

LÊ XUÂN DƯƠNG

(GV THCS Lý Thường Kiệt, Yên Mỹ, Hưng Yên)

Bài T7/490. Xác định các số nguyên dương a, b sao cho $\sqrt{8+\sqrt{32+\sqrt{768}}} = a\cos\dfrac{\pi}{b}$.

TRẦN VĂN LÂM

(Xóm Tiến Bộ, thôn Vân Trai, xã Tân Phú, thị xã Phổ Yên, tỉnh Thái Nguyên)

Bài T8/490. Cho tam giác ABC có đường tròn (K) đi qua A, C tiếp xúc với AB và đường tròn (L) đi qua A, B và tiếp xúc AC. (K) cắt (L) tại D khác A. AK, AL lần lượt cắt DB, DC tại E, F. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của BE, CF. Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

TRẦN QUANG HÙNG

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/490. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn:

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq a^4 + b^4 + c^4.$$

Chứng minh rằng:

$$|b+c-a| + |c+a-b| + |a+b-c| + |a+b+c| = 2(|a| + |b| + |c|).$$

HOÀNG NGỌC MINH

(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/490. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) thỏa mãn $2^a + 5^b = 7^c$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T11/490. Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 14,\ u_2 = 20,\ u_3 = 32,\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n + 8u_{n-1}$$

với $n \geq 2$. Chứng minh rằng: $u_{2018} = 5.2^{2018}$.

LÊ HOÀI BẮC

(GV THPT Nguyễn Văn Cừ, Xuân Sơn, Châu Đức, Bà Rịa – Vũng Tàu)

BA SA BA CHÍN+CHÍN+CHÍN

Bài T12/490. Cho tam giác ABC, (O) là đường tròn ngoại tiếp, I là tâm đường tròn nội tiếp. D là giao điểm thứ hai của AI và (O). E là giao điểm của BC và đường thẳng đi qua I vuông góc AI. K, L theo thứ tự là giao điểm của BC, DE và đường thẳng đi qua I vuông góc với OI. Chứng minh rằng: $KI = KL$.

NGUYỄN MINH HÀ

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/490. Một con lắc lò xo gồm vật nhỏ có khối lượng $m = 0{,}03$kg và lò xo có độ cứng $k = 1{,}5$N/m. Vật nhỏ được đặt trên giá đỡ cố định nằm ngang dọc theo trục của lò xo. Hệ số ma sát trượt giữa giá đỡ và vật nhỏ là $\mu = 0{,}2$. Ban đầu giữ vật ở vị trí lò xo bị dãn một đoạn $\Delta l_0 = 15$cm rồi buông nhẹ để con lắc dao động tắt dần. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Xác định tốc độ lớn nhất vật nhỏ đạt được trong quá trình dao động.

THANH LÂM *(Hà Nội)*

Bài L2/490. Điện năng từ một trạm phát điện được đưa đến một khu dân cư bằng đường dây truyền tải một pha. Nếu điện áp tại nơi truyền tải tăng từ U lên $2U$ thì số hộ dân được trạm cung cấp đủ công suất điện tăng từ 93 hộ lên 120 hộ. Coi rằng công suất điện truyền đi từ trạm phát không đổi, công suất tiêu thụ điện của mỗi hộ dân như nhau và không đổi. Hệ số công suất trên đường truyền tải không đổi. Khi tăng điện áp tại nơi truyền tải lên $3U$ thì số hộ dân được trạm phát cung cấp đủ công suất điện là bao nhiêu?

VIỆT CƯƠNG *(Hà Nội)*

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/490 (For 6th grade). The natural number a is coprime with 210. Dividing a by 210 we get the remainder r satisying $1 < r < 120$. Prove that r is prime.

Problem T2/490 (For 7th grade). Given non-zero numbers a, b, c, d satisfying $b^2 = ac$; $c^2 = bd$; $b^3 + 27c^3 + 8d^3 \neq 0$. Show that

$$\frac{a}{d} = \frac{a^3 + 27b^3 + 8c^3}{b^3 + 27c^3 + 8d^3}.$$

Problem T3/490. Find all natural solutions of the equation $3xyz - 5yz + 3x + 3z = 5$.

Problem T4/490. Given a half circle with the center O, the diameter AB, and the radius OD perpendicular to AB. A point C is moving on the arc $\overset{\frown}{BD}$. The line AC intersects OD at M. Prove that the circumcenter I of the triangle DMC always belongs to a fixed line.

Problem T5/490. Let x, y be real numbers such that $x^3 + y^3 = 2$. Find the minimum value of the expression

$$P = x^2 + y^2 + \frac{9}{x+y}.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/490. Given 3 positive numbers a, b, c satisfying $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{a^5+b^5+c^2} + \frac{1}{b^5+c^5+a^2} + \frac{1}{c^5+a^5+b^2} \le 1.$$

Problem T7/490. Find all positive integers a, b such that $\sqrt{8+\sqrt{32+\sqrt{768}}} = a\cos\frac{\pi}{b}$.

Problem T8/490. Given a triangle ABC. Let (K) be the circle passing through A, C and is tangent to AB and let (L) be the circle passing through A, B and is tangent to AC. Assume that (K) intersects (L) at another point D which is different from A. Assume that AK, AL respectively intersect DB, DC at E and F. Let M, N respectively be the midpoints of BE, CF. Prove that A, M, N are colinear.

(Xem tiếp trang 33)

BA DA CR-CHIN+CHIN-CHIN

Bài T1/486. *Tìm các số tự nhiên có dạng $\overline{abba}$ thỏa mãn $\overline{abba} = \overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 + a - b$.*

Lời giải. Ta chỉ xét trường hợp a, b đều là số nguyên dương và không lớn hơn 9 .

Cách 1.

$$\begin{aligned}\overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 &= (10a+b)^2 + (10b+a)^2\\ &= 100a^2 + 20ab + b^2 + 100b^2 + 20ab + a^2\\ &= 101(a^2 - 2ab + b^2) + 242ab\\ &= 101(a-b)^2 + 242ab. \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\overline{abba} = 1001a + 110b = 1111a - 110(a-b) \qquad (2)$$

Từ giả thiết và (1), (2) có

$$1111a - 110(a-b) = 101(a-b)^2 + 242ab + (a-b)$$

$$\Leftrightarrow 1111a - 242ab = 101(a-b)^2 + 111(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 11a(101 - 22b) = (a-b)[101(a-b) + 111] \quad (3)$$

Từ (3) nếu 11 là ước của $a - b$ mà $a - b \le 9$ thì $a - b = 0$, suy ra $11a(101 - 22b) = 0$, điều này không xảy ra. Vậy 11 là ước của

$$101(a-b) + 111 = 99(a-b) + 110 + 2(a-b) + 1,$$

từ đó 11 là ước của $2(a-b)+1$, suy ra $a - b = 5$. Lúc đó vế phải của (3) là số chẵn nên a là số chẵn, thử với (a ; b) bằng (6; 1), (8; 3) chỉ có $a = 8$, $b = 3$ thỏa mãn, tức là $8338 = 83^2 + 38^2 + 8 - 3$.

Cách 2. Từ

$$\overline{abba} + b - a = 1001a + 110b + b - a = 1000a + 111b$$

và theo giả thiết có: $\overline{ab}^2 + \overline{ba}^2 = \overline{abbb}$. (4)

Từ (4) không xảy ra a lẻ, b chẵn nên chỉ xét hai trường hợp sau.

• Nếu cả a và b đều chẵn thì vế trái của (4) chia hết cho 4, xét vế phải thì b chia hết cho 4.

Khi $b = 4$ thì $b^2 = 16$, từ (4) suy ra a^2 có tận cùng là 8 nhưng điều này không xảy ra.

Khi $b = 8$ thì $b^2 = 64$, từ (4) suy ra a^2 có tận cùng là 4 nên hoặc $a = 2$, hoặc $a = 8$, nhưng các số 2882 và 8888 đều không thỏa mãn.

• Nếu a chẵn và b lẻ thì vế trái của (4) chia cho 4 dư 1, xét vế phải thì b bằng 3 hoặc 7.

Khi $b = 7$ thì $b^2 = 49$, từ (4) suy ra a^2 có tận cùng là 8 nhưng điều này không xảy ra.

Khi $b = 3$ thì $b^2 = 9$, từ (4) suy ra a^2 có tận cùng là 4 nên hoặc $a = 2$, hoặc $a = 8$, nhưng chỉ có số 8338 thỏa mãn, tức là $8338 = 83^2 + 38^2 + 8 - 3$. ❐

➢***Nhận xét.*** Cách giải 1 của tác giả ra đề, còn cách giải 2 của bạn *Cao Nguyễn Quỳnh Hương*, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**.

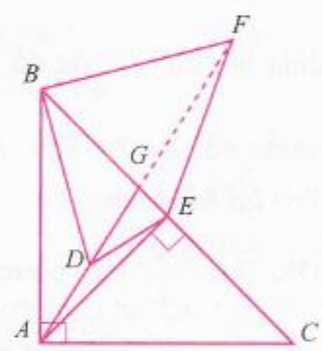
VIỆT HẢI

Bài T2/486. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trong tam giác lấy điểm D sao cho $\widehat{ABD} = 15^0$, $\widehat{BAD} = 30^0$. Chứng minh rằng:*

a) $BD = \dfrac{BC}{2}$. b) $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$.

Lời giải. Kẻ $AE \perp BC$

$\Rightarrow EA = EB = EC$.



Về phía ngoài của ΔABC vẽ ΔBEF đều, khi đó tam giác AEF cân tại E và có $\widehat{AEF} = 150^0 \Rightarrow \widehat{EAF} = 15^0$ mà $\widehat{EAD} = 15^0 \Rightarrow$ 3 điểm A, D, F thẳng hàng.

a) Xét ΔBDF có: $\widehat{DBF} = 30^0 + 60^0 = 90^0$, $\widehat{BFD} = 45^0$ nên ΔBDF vuông cân tại B

$$\Rightarrow BD = BF = BE = \frac{BC}{2}.$$

b) Để chứng minh câu này ta cần một bổ đề: *Cho tam giác ABC có AB < AC và có trung tuyến AM. Chứng minh rằng $\widehat{BAM} > \widehat{CAM}$.*

(Việc chứng minh bổ đề này dành cho bạn đọc).

Do ΔBDE cân tại B, có $\widehat{DBE} = 30^0 \Rightarrow \widehat{BED} = 75^0$

$\Rightarrow \widehat{DEA} = 15^0 = \widehat{DAE} \Rightarrow DA = DE$. (1)

Giả sử DF cắt BE tại G, ΔAGE vuông tại E có $\widehat{EAG} = 15^0 \Rightarrow \widehat{AGE} = 75^0 = \widehat{DEG} \Rightarrow DE = DG$. (2)

ĐÁP ÁN CHÍNH XÁC

Từ (1) và (2) suy ra $DA = DG$. Xét ΔCAG có CD là trung tuyến, $\widehat{CGA} = 75^0 > \widehat{CAG} = 60^0$, do đó $CA > CG$, vậy theo bổ đề ta có $\widehat{GCD} > \widehat{ACD}$, hay $\widehat{BCD} > \widehat{ACD}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Xin được chúc mừng bạn: *Cao Nguyễn Quỳnh Hương*, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi** đã có lời giải đúng gửi về Tòa soạn.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/486. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình* $\sqrt{3x+4} = \sqrt[3]{y^3+5y^2+7y+4}$. (1)

Lời giải. *Trước hết ta chứng minh nhận xét sau :*

Với $a \ge 0, a \in \mathbb{Z}, a\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$. Thật vậy:

• Xét $a = 0$ thì $a = \sqrt{a} = 0 \in \mathbb{Z}$.

• Xét a nguyên dương, đặt

$$a\sqrt{a} = b\ (b \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b^2}{a^2}.$$

Nếu $\sqrt{a} \notin \mathbb{Z}$ thì b không chia hết cho a, b^2 không chia hết cho a^2, do đó $a = \frac{b^2}{a^2} \notin \mathbb{Z}$. Điều này mâu thuẫn với $a \in \mathbb{Z}$. Vậy $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$.

Trở lại bài toán:

ĐK: $x \ge -\frac{4}{3}$. Lập phương hai vế của (1) ta có

$$(3x+4)\sqrt{3x+4} = y^3+5y^2+7y+4. \quad (2)$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$, kết hợp với (2) suy ra

$$3x+4 \in \mathbb{Z}, \quad (3x+4)\sqrt{3x+4} \in \mathbb{Z}.$$

Sử dụng nhận xét suy ra $\sqrt{3x+4} \in \mathbb{Z}$. Đặt

$$\sqrt{3x+4} = k\ (k \ge 0, k \in \mathbb{Z}).$$

thay vào (2) ta có $k^3 = y^3+5y^2+7y+4$ (3)

Nhận thấy

$y^3+5y^2+7y+4 = (y+1)^3+2(y+1)^2+1 > (y+1)^3$ (do $2(y+1)^2+1 > 0$ với mọi y);

$y^3+5y^2+7y+4 = (y+2)^3-(y^2+5y+4)$

$= (y+2)^3-(y+1)(y+4) < (y+2)^3$

khi $y < -4$ hoặc $y > -1$ (do $(y+1)(y+4) > 0$ khi $y < -4$ hoặc $y > -1$).

• Với $y < -4$ hoặc $y > -1$, kết hợp với (3) suy ra $(y+1)^3 < k^3 < (y+2)^3$, điều này không thể xảy ra.

• Với $y = -4$ thay vào (3) ta có $k^3 = -8 \Leftrightarrow k = -2$ (không thỏa mãn điều kiện $k \ge 0$).

• Với $y = -3$ thay vào (3) ta có $k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$. Suy ra $x = -1$ (thỏa mãn).

• Với $y = -2$ thay vào (3) ta có $k^3 = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{2}$ (không thỏa mãn điều kiện $k \in \mathbb{Z}$).

• Với $y = -1$ thay vào (3) ta có $k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1$. Suy ra $x = -1$ (thỏa mãn).

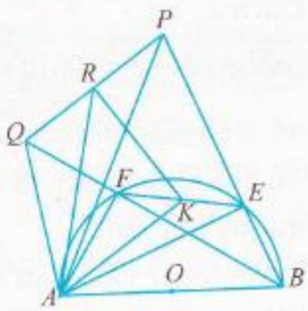
Vậy phương trình (1) có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1;-1), (-1;-3)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán yêu cầu giải phương trình tìm nghiệm nguyên có hai ẩn và chứa căn thức bậc hai, bậc ba, ta thường sử dụng tính chất của số nguyên và của bất đẳng thức để hạn chế miền nghiệm của một ẩn, từ đó tìm nghiệm của ẩn còn lại. Đa số các bạn tham gia gửi bài đều giải theo cách trên, tuy nhiên nhiều bạn công nhận luôn nhận xét trên mà không chứng minh hoặc xét thiếu trường hợp. Tuyên dương các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội**: *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT dân lập Lương Thế Vinh; **Thanh Hóa:** *Lê Phú Tấn*, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/486. *Trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB lấy hai điểm E, F (E thuộc cung BF). Điểm P di động trên tia đối của tia EB, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt đường thẳng BF tại Q. Gọi R là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng đường tròn đường kính AR luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Gọi K là trung điểm của EF, suy ra K là điểm cố định. Ta sẽ chứng minh K thuộc đường tròn đường kính AR.



Ta có các tứ giác $ABEF$ và $ABPQ$ nội tiếp nên

$$\widehat{APQ} = \widehat{ABQ} = \widehat{ABF} = \widehat{AEF}$$

và $\widehat{AQP} = 180° - \widehat{ABP} = 180° - \widehat{ABE} = \widehat{AFE}$.

Suy ra $\Delta AEF \backsim \Delta APQ$ (g.g).

Do K và R lần lượt là trung điểm EF và PQ nên $\Delta AFK \backsim \Delta AQR$, ta có

$$\frac{AF}{AQ} = \frac{AK}{AR} \Rightarrow \frac{AF}{AK} = \frac{AQ}{AR},$$

và $\widehat{FAK} = \widehat{QAR} \Rightarrow \widehat{RAK} = \widehat{QAF}$.

Suy ra $\Delta RAK \backsim \Delta QAF$ (c.g.c).

Từ đó suy ra $\widehat{AKR} = \widehat{AFQ} = 90^0$. Do đó K thuộc đường tròn đường kính AR khi P thay đổi. ❐

Nhận xét. 1) Có thể hạ $AH \perp PQ$ tại H, suy ra E, F, H thẳng hàng (đường thẳng Simson), từ đó chứng minh tứ giác $AKRH$ nội tiếp, dẫn đến $\widehat{AKR} = \widehat{AHR} = 90^0$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hóa: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, *Lê Phú Tấn*, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Hà Nội:** *Lê Tuấn Tú*, 9T, THPT DL Lương Thế Vinh; **TP. Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lê Hoàng Duy*, 9/4, THCS Lê Anh Xuân, Tân Phú.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/486. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^3 - 7x + \sqrt{x-2} = y + 4 \\ y^3 - 7y + \sqrt{y-2} = z + 4 \\ z^3 - 7z + \sqrt{z-2} = x + 4 \end{cases}.$$

Lời giải. ĐK: $x \ge 2; y \ge 2; z \ge 2$. Xét hàm số

$$f(t) = t^3 - 7t + \sqrt{t-2}, \quad t \ge 2.$$

Với hai số thực phân biệt a, b ta có:

$$f(a) - f(b) = a^3 - b^3 - 7(a-b) + \sqrt{a-2} - \sqrt{b-2}$$

$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) - 7(a-b) + \frac{a-b}{\sqrt{a-2} + \sqrt{b-2}}$$

$$= (a-b)\left(a^2 + ab + b^2 - 7 + \frac{1}{\sqrt{a-2} + \sqrt{b-2}}\right).$$

Với $a, b \ge 2 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 \ge 8$

$$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 - 7 + \frac{1}{\sqrt{a-2} + \sqrt{b-2}} > 0$$

nên $a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$.

Hệ phương trình trong đầu bài tương đương với

$$\begin{cases} f(x) = y + 4 \\ f(y) = z + 4 \\ f(z) = x + 4 \end{cases}.$$

Giả sử $x = \max(x, y, z)$. (1)

Nếu $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow y + 4 > z + 4 \Rightarrow y > z$

$\Rightarrow f(y) > f(z) \Rightarrow z + 4 > x + 4 \Rightarrow z > x$

trái giả thiết (1). Vậy

$x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow y + 4 = z + 4 \Rightarrow x = y = z$.

Thay vào một phương trình trong hệ, ta được

$x^3 - 7x + \sqrt{x-2} = x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 8x - 4 + \sqrt{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-3) + 3x(x-3) + (x-3) + (\sqrt{x-2} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2 + 3x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ (số hạng trong dấu ngoặc thứ hai dương khi $x \ge 2$). Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (3; 3; 3)$. ❐

Nhận xét. Vì hệ phương trình trong đầu bài không thay đổi khi hoán vị vòng quanh theo thứ tự $x \to y \to z \to x$ nên có thể giả thiết $x = \max(x, y, z)$ nghĩa là $x \ge y$; $x \ge z$. Điều then chốt của bài toán là chứng minh $x = y = z$.

NGUYỄN ANH DŨNG

T6/486. *Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Chứng minh rằng $a^3b + b^3c + c^3a \le 8$.*

Lời giải. Do tính bất biến qua hoán vị tròn của a, b, c ta có thể giả sử là a là số lớn nhất trong các số a, b, c. Từ giả thiết bài toán ta có

$$ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{3^2 - 5}{2} = 2.$$

Lại có $5 - a^2 = b^2 + c^2 \le (b+c)^2 = (3-a)^2$, cho ta $a \ge 2$ hoặc $a \le 1$. Vì a lớn nhất trong 3 số a, b, c cho nên dễ thấy phải có $a \ge 2$. Do $a + b + c = 3$ suy ra b, $c \le 1$ và ta có

$$a^3b + b^3c + c^3a \le a^3b + bc + ca = ab(a^2 - 1) + 2$$

$$\le \frac{1}{4}(a^2 + 4b^2)(a^2 - 1) + 2$$

$$\le \frac{1}{4}(5 + 3b^2)(4 - b^2) + 2$$

$$= 8 - \frac{1}{4}(1 - b^2)(4 - 3b^2) \le 8.$$

BA+BA+BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$, $b = 1$ và $c = 0$. Tương tự, khi b hoặc c lớn nhất, ta có bất đẳng thức và đẳng thức chỉ xảy ra với (a,b,c) là hoán vị của $(2,1,0)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Phú Yên.** *Đặng Hải Đăng*, 10A6, THPT Ngô Gia Tự; **Vĩnh Long:** *Châu Minh Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Quảng Ngãi:** *Trần Nguyễn Quy*, 10T2, THPT chuyên Lê Khiết, TP. Quảng Ngãi; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Ngọc Duy, Đỗ Minh Hiệp, Vương Tùng Dương*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** *Bùi Khánh Vĩnh, Nguyễn Bá Đình*, 10CT1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; *Nguyễn Hùng Sơn*, 11A2, THPT Lê Quý Đôn, huyện Trực Ninh; **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông Cống, *Đỗ Cao Bách Tùng, Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/486. *Giải phương trình*

$$\frac{1}{4}\left(|\sin x|^n + |\cos x|^n\right) = \frac{|\sin x|^m + |\cos x|^m}{|\sin 2x|^k + 4|\cos 2x|^k}$$

$(m,n,k \in \mathbb{N}, n \ge m, k \ge 2)$.

Lời giải. ĐK: Nếu $m=0$ thì

$$\sin x.\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne k.\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Nhận xét. Nếu a là số thực, $0 \le a \le 1$, $n \ge m$ là các số nguyên dương thì

$$a^m - a^n = a^m(1 - a^{n-m}) \ge 0 \Rightarrow a^m \ge a^n.$$

Áp dụng ta có:

$$0 < |\sin x|^n + |\cos x|^n \le |\sin x|^m + |\cos x|^m;$$

$$0 < |\sin 2x|^k + 4|\cos 2x|^k \le 4\left(|\sin 2x|^2 + |\cos 2x|^2\right) = 4,$$

$$|\sin 2x|^k + 4|\cos 2x|^k = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{4}\left(|\sin x|^n + |\cos x|^n\right) \le \frac{|\sin x|^m + |\cos x|^m}{|\sin 2x|^k + 4|\cos 2x|^k}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m > 0$ và $x = k.\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Như vậy:

• PT vô nghiệm nếu $m = 0$,

• PT có duy nhất một họ nghiệm $x = k.\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ nếu $m > 0$. ❐

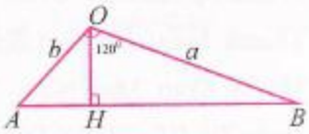
➢***Nhận xét.*** Đây là bài toán lượng giác đơn giản. Rất tiếc không có bạn học sinh nào chú ý đến trường hợp $m = 0$.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/486. *Cho tam giác OAB có góc $\widehat{AOB} = 120^0, OA = b, OB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên cạnh AB. Chứng minh rằng*

$$a.HA + b.HB \le \sqrt{3}ab.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với



$$\frac{HA}{b} + \frac{HB}{a} \le \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} \le \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} \le \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\frac{A-B}{2} \le 1.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\widehat{A} = \widehat{B} = 30^0$, hay ΔAOB cân tại đỉnh O. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; *Đàm Nguyệt Ánh*, 10 Toán 2, THPT chuyên ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Vũ Đăng Linh*, 11A1, THPT Thuận Thành 1, Thuận Thành; **Thanh Hóa:** *Lê Phú Tấn*, 9G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Thừa Thiên Huế:** *Bùi Nhật Minh*, 12 Toán 1, *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT Bến Tre, Mỏ Cày Nam; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Nhật Hào*, 10T, THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu.

HỒ QUANG VINH

BA+BA+BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Bài T9/486. *Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho số $2018^{n-2017}-1$ chia hết cho n.*

Lời giải. (Của bạn *Châu Minh Khánh*, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**).

Chọn $n=2017p$ với p là số nguyên tố và $p>2018$.

Khi đó $2018^{n-2017}-1=2018^{2017(p-1)}-1$. Theo định lý Fermat nhỏ ta có $2018^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ nên suy ra

$$2018^{2017(p-1)}\equiv 1 \pmod p.$$

Lại có

$2018\equiv 1 \pmod{2017} \Rightarrow 2018^{2017(p-1)}\equiv 1 \pmod{2017}$.

Vì $(p,2017)=1$ nên $2018^{2017(p-1)}\equiv 1 \pmod{2017p}$ hay $2018^{n-2017}-1$ chia hết cho n, ở đó $n=2017p$ (với p là số nguyên tố lớn hơn 2018). Vì có vô số số nguyên tố lớn hơn 2018 nên suy ra ta có vô số số $n=2017p$. ❐

➢***Nhận xét.*** Xin được chúc mừng bạn sau đây có lời giải tốt: **TP. Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Lê Hoàng Duy*, 9/4, THCS Lê Anh Xuân, quận Tân Phú; **Thừa Thiên Huế:** *Võ Thị Thu Trang*, 10H2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Minh Long*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thái Bình:** *Đặng Minh Đức*, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** *Phạm Anh Đức*, 9R, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 10 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T10/486. *Tìm tất cả các số tự nhiên n để số $4^n+15^{2n+1}+19^{2n}$ chia hết cho $18^{17}-1$.*

Lời giải. Kí hiệu $B(a)$ là bội của số nguyên a. Đặt

$$A=4^n+15^{2n+1}+19^{2n}$$
$$=(2^{2n+1}+15^{2n+1})+(19^n+2^n)(19^n-2^n). \quad (1)$$

Ta có: $15^{2n+1}+2^{2n+1}=17(15^{2n}-15^{2n-1}.2+15^{2n-2}.2^2$
$$-...-15.2^{2n-1}+2^{2n}) \quad (2)$$

$19^n-2^n=17(19^{n-1}+19^{n-2}.2+...+19.2^{n-2}+2^{n-1})$. (3)

Theo khai triển nhị thức Newton, ta dễ thấy:

$$(a-b)^k=\left[\begin{array}{l} B(a)+b^k \text{ với } k \text{ chẵn} \\ B(a)-b^k \text{ với } k \text{ lẻ}\end{array}\right..$$

Kết hợp với (2), (3) suy ra:

$$15^{2n+1}+2^{2n+1}=17\left[(17-2)^{2n}-(17-2)^{2n-1}.2+(17-2)^{2n-2}.2^2-...-(17-2).2^{2n-1}+2^{2n}\right]$$
$$=17\left[B(17)+\underbrace{2^{2n}+2^{2n}+...+2^{2n}}_{(2n+1)\text{ số } 2^{2n}}\right]$$
$$=17\left[B(17)+(2n+1)2^{2n}\right] \quad (4)$$

$$19^{2n}-2^{2n}=17\left[B(17)+\underbrace{2^{n-1}+2^{n-1}+...+2^{n-1}}_{n\text{ số } 2^{n-1}}\right]$$
$$=17\left[B(17)+n2^{n-1}\right] \quad (5)$$

$$19^n+2^n=(17+2)^n+2^n=B(17)+2^{n+1}. \quad (6)$$

Thay (4), (5), (6) vào (1) ta được:

$$A=17\left[B(17)+(2n+1)2^{2n}\right]+17\left[B(17)+n2^{n-1}\right].\left[B(17)+2^{n+1}\right]$$
$$=17\left[B(17)+(2n+1)2^{2n}\right]+17\left[B(17)+n2^{2n}\right]$$
$$=17\left[B(17)+(3n+1)2^{2n}\right]. \quad (7)$$

Do $3n+1$ chia 3 dư 1, còn 17 chia 3 dư 2 nên $(3n+1, 17)=1$. Từ $(2^{2n},17)=1$ suy ra $(3n+1).2^{2n}$ không chia hết cho 17. Vậy từ (7) suy ra A không chia hết cho 17^2. (8)

Mặt khác: $18^{17}-1=17\left[18^{16}+18^{15}+...+18+1\right]$

$$=17\left[B(17)+\underbrace{1+1+...+1}_{17\text{ số } 1}\right]=17\left[B(17)+17\right]\vdots 17^2. \quad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra $A=4^n+15^{2n+1}+19^{2n}$ không chia hết cho $18^{17}-1$ với mọi số tự nhiên n. Vậy không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn bài toán. ❐

➢***Nhận xét.*** Lời giải bài toán chủ yếu dùng khai triển Newton và một số hằng đẳng thức để đánh giá tính chia hết của một số. Rất tiếc rằng không có bạn nào gửi lời giải của bài này về Tòa soạn.

TRẦN HỮU NAM

Bài T11/486. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho $f(0)$ là một số hữu tỷ và thỏa mãn điều kiện $f(x+f^2(y))=f^2(x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.* (1)

Lời giải. Giả sử $f(0)=q\in\mathbb{Q}$. Ký hiệu $P(u, v)$ là phép thế $x=u, y=v$ vào (1). Khi đó với

$P(x+y-q^2,0)$, ta thu được (1) có dạng

$$f(x+y)=f^2(x+y-q^2) \qquad (2)$$

và ứng vớita thu được $f(y)=f^2(y-q^2)$. Do đó $x=0$, $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét $P(x,y-q^2)$ ta thu được $f(x+f(y))=f^2(x+y-q^2)$. Kết hợp với (2) suy ra $f(x+f(y))=f(x+y), \forall x,y\in\mathbb{R}$. (3)

Trong (3), với $y=0$, thì $f(x+q)=f(x), \forall x,y\in\mathbb{R}$ nên bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $f(x+mq)=f(x), \forall x,y\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}$. (4)

Từ (3) với $x=0$, thì $f(f(y))=f(y), \forall y\in\mathbb{R}$. (5)

Xét $P(x,\ 0)$ ta được $f(x+q^2)=f^2(x)$ nên bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được

$$f(x+nq^2)=(f(x))^{2^n}, \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}. \qquad (6)$$

Kết hợp (5) và (6), suy ra

$$f(x)=f(x+mq)=f(x+nq^2)=(f(x))^{2^n}, \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$$

nên $f(x)\in\{0,1\}$.

• Nếu $f(0)=q=1$ thì $f(x)\equiv 1$. Thật vậy, nếu $\exists u$ để $f(u)=0$ thì $1=f(0)=f(f(u))=f(u)=0$, mâu thuẫn.

• Nếu $f(0)=q=0$ thì $f(x)\equiv 0$. Thật vậy, nếu $\exists v$ để $f(u)=1$ thì đặt $x=y=\frac{1}{2}$ vào (3), ta được

$$f\left(\frac{1}{2}+f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f(1)=f(f(u))=1. \qquad (7)$$

Nếu $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ thì mâu thuẫn với (7).

Nếu $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ thì từ (7) suy ra $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$ nên nếu $f\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ thì dẫn đến

$$1=f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}+f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=f(0)=0,$$

thì dẫn đến mâu thuẫn.

Nếu xảy ra $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ thì dẫn đến

$$1=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}+f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=f(0)=0,$$

cũng mâu thuẫn.

➢ ***Nhận xét.*** Có hai hàm số thỏa mãn các điều kiện bài ra là $f(x)\equiv 1$ và $f(x)\equiv 0$. Một số bạn sau khi nhận được đẳng thức

$$f(x)=f^2(x)=f^4(x)=...=f^{2^n}(x), \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$$

đã cho kết luận $f(x)$ là hàm hằng là chưa đúng. Xin được chúc mừng các bạn sau có lời giải đúng: **Bắc Ninh:** *Võ Đăng Linh*, 11A1, THPT Thuận Thành 1. **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/486. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:*

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\ge \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Lời giải. Đặt

$$\cos\frac{A}{2}=x,\ \cos\frac{B}{2}=y,\ \cos\frac{C}{2}=z,$$

$$\sin\frac{A}{2}=m, \sin\frac{B}{2}=n, \sin\frac{C}{2}=p.$$

Dễ thấy

$$2mx+2ny+2pz=\sin A+\sin B+\sin C$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4xyz.$$

Do đó $\frac{m}{yz}+\frac{n}{zx}+\frac{p}{xy}=2$. Vậy chú ý rằng

$$(x+y+z)^2\ge 3(yz+zx+xy),$$

theo bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$\frac{2}{3}(x+y+z)^2\ge 2(yz+zx+xy)$$
$$=\left(\frac{m}{yz}+\frac{n}{zx}+\frac{p}{xy}\right)(yz+zx+xy)$$
$$\ge\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}\right)^2.$$

Do đó $x+y+z\ge\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}\right)$. Điều đó có nghĩa là

BẢ BẢ BẢ CHÍN + CHÍN + CHÍN

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\geq$$
$$\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\sin\frac{A}{2}}+\sqrt{\sin\frac{B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. ❐

➢ ***Nhận xét.*** 1) Bài toán này khó, chỉ có 6 bạn tham gia giải: **Hà Nội:** *Đàm Nguyệt Ánh*, 10T2, THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, TP. Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 12T2, THPT chuyên Quốc Học Huế, TP. Huế; **TP Hồ Chí Minh:** *Bùi Khánh Vĩnh*, 10T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, THPT Thành Thới A, Mỏ Cày; **Vĩnh Long:** *Thái Đức Duy*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, TP. Vĩnh Long.

2) Trừ bạn *Đàm Nguyệt Ánh*, 5 bạn còn lại đều phải sử dụng đạo hàm trong lời giải.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/486. *Một con lắc lò xo nằm ngang gồm vật nặng có khối lượng m = 100g, lò xo có độ cứng là k = 160 N/m. Lấy g = 10m/s². Khi vật đang ở vị trí cân bằng, người ta truyền cho vật vận tốc v = 2m/s theo phương ngang để vật dao động. Do giữa vật và mặt phẳng ngang có lực ma sát với hệ số ma sát μ = 0,01 nên dao động của vật sẽ tắt dần. Tìm tốc độ trung bình của vật trong suốt quá trình chuyển động.*

Lời giải. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta xác định được vị trí biên đầu tiên:

$$\frac{1}{2}kA_0^2+\mu mgA_0=\frac{1}{2}mv_0^2\Rightarrow A_0=4,99\text{ cm}.$$

Độ giảm biên độ sau một nửa chu kì là:

$$\Delta A=\frac{2\mu mg}{k}=0,0125\text{ cm}.$$

Gọi N là số nửa chu kì vật thực hiện được, thì N phải là số nguyên thỏa mãn:

$$\left(\frac{A_0}{\Delta A}-\frac{1}{2}\right)\leq N<\left(\frac{A_0}{\Delta A}+\frac{1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow 398,7\leq N<399,7$$

Chọn $N = 399$ nên tính từ vị trí biên ban đầu, trước khi dừng, số nửa chu kì vật thực hiện được là 399. Suy ra thời gian của chuyển động:

$$t=N\frac{T}{2}+\frac{T}{4}=31,36\ s.$$

Quãng đường đi được: $S=A_0+N(2A_0-N.\Delta A)$
$$=4,99+1992=1996,99\text{cm}.$$

Suy ra, tốc độ trung bình :

$$\bar{v}=\frac{S}{t}=\frac{1996,99}{31,6}=63,679\text{ cm/s}.$$ ❐

➢ ***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Thanh Hóa:** *Lê Tiến Đạt*, 11A1, THPT Nông cống I, Thanh Hóa; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Diễm Ly*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Tân Tiến, Văn Giang.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/486. *Một đoạn mạch gồm ba phần tử R, L, C mắc nối tiếp. Biết cường độ dòng điện qua mạch có biểu thức* $i=I_0\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$ (A). *Tính từ thời điểm cường độ dòng điện qua mạch bị triệt tiêu, sau khoảng thời gian* $\frac{1}{4}$ *chu kì thì điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của mạch là bao nhiêu?*

Lời giải. Gọi t_1 là thời điểm cường độ dòng điện triệt tiêu, ta có: $I_0\cos\left(\omega t_1+\frac{\pi}{6}\right)=0$, lấy nghiệm nhỏ nhất ta được $t_1=1/300$ (s).

Thời điểm t_2 sau t_1 là $\frac{T}{4}$: $t_2=t_1+\frac{T}{4}=\frac{1}{120}$ (s).

Điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của mạch trong khoảng thời gian ấy bằng:

$$\Delta q=\int_{t_1}^{t_2}i.dt=-\frac{I_0}{100\pi}\text{ (C)}.$$

➢ ***Nhận xét.*** Chúc mừng các bạn đã có lời giải đúng đề ra kì này: **Hưng Yên:** *Nguyễn Thị Diễm Ly*, 12A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Thừa Thiên Huế:** *Phan Trần Hướng*, 12T1, *Ngô Nguyễn Quỳnh Mơ*, 12T2, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN XUÂN QUANG

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 31

Problem. *Suppose $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is a continuous function satisfying $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$. Show that $f(x)=a.x$ for some constant a.*

Solution. We have $f(2)=f(1)+f(1)=f(1)\times 2$, and then

$$f(3)=f(2)+f(1)=f(1)\times 3,\ldots$$

Therefore we have $f(n)=a.n$ for any positive integers n $(a=f(1))$.

We also have $f(0)=f(0+0)=2f(0)$, thus $f(0)=0$. This fact together with the equality $f[n+(-n)]=f(n)+f(-n)$ imply that $f(n)=a.n$ for any integers n.

Since

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2.f\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1).\left(\frac{1}{2}\right)=a.\left(\frac{1}{2}\right).$$

Similarly, we have $f\left(\frac{1}{n}\right)=a.\left(\frac{1}{n}\right)$ for any non-zero integer n.

And we can show $f\left(\frac{m}{n}\right)=a.\left(\frac{m}{n}\right)$ for any integer m, n (n is non-zero) (for example

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$=2.a.\left(\frac{1}{3}\right)=a.\left(\frac{2}{3}\right),\ldots).$$

Hence we have proved that $f(r)=a.r$ for any rational number r.

Consider the function $g(x)=f(x)-ax$. It is continuous and it is zero at all rational points. Using the definition of continuity and the fact that any irrational number can be the limit of some rational sequence, we have $g(x)=0$ everywhere. In other words, $f(x)=a.x$ for all x $(a=f(1))$.

TỪ VỰNG

continuous : liên tục

rational : hữu tỉ

irrational : vô tỉ

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(*College of Science – Vietnam National University, Hanoi*)

BA+BA BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Bài toán. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) có các số hạng thỏa mãn*

$$\begin{cases} x_0=1;\ x_1=4 \\ x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n,\ \forall n\geq 0 \end{cases}.$$

Lời giải. Ta thấy $x_{n+2}-x_{n+1}=2x_{n+1}-2x_n=2(x_{n+1}-x_n), \forall n\geq 0$. Do đó nếu ta đặt $y_n=x_n-x_{n-1}, \forall n\geq 1$ thì dãy số (y_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $y_1=x_1-x_0=3$ và công bội $r=2$. Từ đó, ta có:

$$x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\ldots+(x_1-x_0)+x_0$$

$$=y_n+y_{n-1}+\ldots+y_1+x_0=3(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+1)+1=3\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+1=3.2^n-2. \quad \square$$

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành, Bùi Văn Quyến, Nguyễn Tiến Thành, Nguyễn Minh Khoa*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An:** *Phan Đại Pháp*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu , TP. Vinh; *Tăng Văn Minh Hùng*, 11T1, THPT Đô Lương I, Đô Lương; **Phú Yên:** *Nguyễn Kim Phương Trang*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 11A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre; **Tiền Giang:** *Lê Hoàng Bảo*, 12 Toán, THPT chuyên Tiền Giang.

HỒ HẢI (*Hà Nội*)

PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 24)

Problem T9/490. Given real numbers a, b, c such that

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge a^4+b^4+c^4.$$

Prove that

$$|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|+|a+b+c| = 2(|a|+|b|+|c|).$$

TOWARDS MATHEMMATICAL OLYMPIAD

Problem T10/490. Find all triples of positive integers (a, b, c) such that $2^a+5^b=7^c$.

Problem T11/490. The sequence (u_n) is determined as follows

$$u_1=14,\ u_2=20,\ u_3=32,\ u_{n+2}=4u_{n+1}-8u_n+8u_{n-1}$$

with $n\ge 2$. Show that $u_{2018}=5.2^{2018}$.

Problem T12/489. Given a triangle ABC with (O) is the circumcircle and I is the incenter. Let D be the second intersection of AI and (O). Let E be the intersection between BC and the line passing through I and perpendicular to AI. Assume that K, L respectively are the intersections between BC, DE and the line passing through I and perpendicular to OI. Prove that $KI=KL$.

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**

(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

HIỂU RÕ BẢN CHẤT ...

(Tiếp theo trang 17)

Câu 8. Gọi d là đường thẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (P): $2x+3y-z+1=0$ và tạo với trục Ox một góc nhỏ nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(5;-3;1)$. **B.** $M(2;-3;-1)$.

C. $M(4;6;2)$. **D.** $M(5;-6;1)$.

Câu 9. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;0)$ và nằm trong mặt phẳng (xOy) và cách điểm $B(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất. Tìm vectơ chỉ phương của d.

A. $\vec{u}=(1;2;0)$. **B.** $\vec{u}=(1;-1;0)$.

C. $\vec{u}=(1;1;0)$. **D.** $\vec{u}=(-2;1;0)$.

Câu 10. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và song song với đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ và cách điểm $A(-1;2;3)$ một khoảng lớn nhất. Hỏi (P) song song với đường thẳng nào sau đây?

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y}{12}=\dfrac{z+1}{-4}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. **D.** $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{-1}$.

Câu 11. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;4)$, nằm trong mặt phẳng (P): $2x+y-3=0$ và tạo với trục Oy một góc nhỏ nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(-1;6;4)$. **B.** $M(-1;-6;4)$.

C. $M(-1;6;-4)$. **D.** $M(1;2;6)$.

Câu 12. Cho mặt phẳng (P): $2x+y+z-4=0$, $A(1;1;1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua A nằm trong (P) và cách O một khoảng nhỏ nhất. Hỏi d đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(-1;6;0)$. **B.** $M(-1;3;3)$.

C. $M(0;3;1)$. **D.** $M(0;0;4)$.

Câu 13. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;-2;1)$, vuông góc với trục Oy, và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất, d nhận vectơ nào làm vectơ chỉ phương?

A. $\vec{u}=(1;0;2)$. **B.** $\vec{u}=(-1;2;-1)$.

C. $\vec{u}=(1;0;1)$. **D.** $\vec{u}=(-1;0;1)$.

ĐÁ SÁ SẠ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

THỬ SỨC TRƯỚC KÌ THI 2018

ĐỀ SỐ 7

(Thời gian làm bài: 90 phút)

Câu 1. Biểu thức

$\frac{x^{10}}{10!}+\frac{x^9}{9!}\cdot\frac{(1-x)}{1!}+\frac{x^8}{8!}\cdot\frac{(1-x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(1-x)^{10}}{10!}$ bằng

A. 10!. **B.** 20!. **C.** $\frac{1}{10!}$. **D.** $\frac{1}{100!}$.

Câu 2. Cho hàm số $y=x^2.e^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. hàm số không có điểm cực trị.

B. hàm số chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại.

C. hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

D. hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và đạt cực đại tại $x=2$.

Câu 3. Phương trình $\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}=m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $\sqrt{2}\le m\le 2$. **B.** $1\le m\le\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

C. $1\le m\le 2$. **D.** $0\le m\le 1$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho điểm $A(3,-1,0)$ và đường thẳng d: $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{2-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z=0$. **B.** $x+y-z-2=0$.

C. $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Câu 5. Cặp (a, b) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

A. $a=-3, b=0$. **B.** $a=3, b=0$.

C. $a=0, b=-9$. **D.** không tồn tại cặp (a, b) thỏa mãn như vậy

Câu 6. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1+x_2+...+x_n=\frac{3n(n+3)}{2}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Khẳng định nào dưới đây là đúng và đầy đủ nhất.

A. (x_n) là một cấp số cộng với công sai âm.

B. (x_n) là một cấp số nhân với công bội âm.

C. (x_n) là một cấp số cộng với công sai dương.

D. (x_n) là một cấp số nhân với công bội dương.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=(1-i)\bar{z}+2i$ là

A. một đường tròn. **B.** một đường thẳng.

C. một elip. **D.** một hypebol hoặc parabol.

Câu 8. Cho tứ diện $S.ABC$ có thể tích V. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Thể tích khối tứ diện có đáy là tam giác MNP và đỉnh là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{4}$. **D.** $\frac{V}{8}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\frac{m}{3}x^3-(m-2)x^2+x+2$. Để đạo hàm $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất thì giá trị của m là

A. –1 hoặc 1. **B.** 1 hoặc 4.

C. – 4 hoặc 4. **D.** không có giá trị nào.

Câu 10. Trong không gian cho ba điểm $A(1,1,1)$, $B(-1,2,1)$, $C(3,6,-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $M(1,2,0)$. **B.** $M(0,0,-1)$.

C. $M(1,3,-1)$. **D.** $M(1,3,0)$.

Câu 11. Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Xác suất để có ít nhất một lá thư được bỏ đúng phong bì là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 12. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{15}$.

Câu 13. Một túi đựng 10 tấm thẻ được đánh số từ 1 tới 10. Rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ túi đó. Xác suất để tổng số ghi trên ba thẻ rút được là một số chia hết cho 3 bằng

SẠ LÀ BÍ=CHÍN+CHUM+CHÍN

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2C_3^3+C_4^3+C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3}$.

C. $\frac{2C_3^3+C_4^3}{C_{10}^3}$. D. $\frac{2C_3^1C_3^1C_4^1}{C_{10}^3}$.

Câu 14. Cho hàm số $g(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ với $x>0$. Đạo hàm của $g(x)$ là

A. $g'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$. B. $g'(x)=\frac{1-x}{\ln x}$.

C. $g'(x)=\frac{1}{\ln x}$. D. $g'(x)=\ln x$.

Câu 15. A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y=\frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. 1. B. 2. C. 4. D. 8.

Câu 16. Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{-x^2+mx+1}{x-1}$ đi qua điểm $A(-1,1)$ khi và chỉ khi m bằng

A. 0. B. 1. C. -1. D. 2.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho điểm $M(0,-1,2)$ và hai đường thẳng

$d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$, $d_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{3}$.

Phương trình đường thẳng đi qua M cắt cả d_1 và d_2 là

A. $\frac{x}{-\frac{9}{2}}=\frac{y+1}{\frac{9}{2}}=\frac{z+3}{8}$. B. $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-2}{4}$.

C. $\frac{x}{9}=\frac{y+1}{-9}=\frac{z-2}{16}$. D. $\frac{x}{-9}=\frac{y+1}{9}=\frac{z-2}{16}$.

Câu 18. Đồ thị hàm số $y=\frac{mx^2-2x+1}{2x+1}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên (hoặc ngang) khi và chỉ khi

A. $m=0$. B. $m\neq 4$. C. $m\neq -8$. D. $m=8$.

Câu 19. Một nhóm gồm 10 học sinh trong đó có hai bạn A và B, đứng ngẫu nhiên thành một hàng. Xác suất để hai bạn A và B đứng cạnh nhau là

A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{10}$.

Câu 20. Số nguyên dương x nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}<\frac{1}{100}$ là

A. 2499. B. 2500. C. 2501. D. 2502.

Câu 21. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\sqrt{4-x^2}$. Khi đó $M-m$ bằng

A. 4. B. $2-\sqrt{2}$. C. $2(\sqrt{2}-1)$ D. $2(\sqrt{2}+1)$

Câu 22. Giá trị của tích phân

$$\int_0^{100}x(x-1)...(x-100)\,dx \text{ bằng}$$

A. 0. B. 1. C. 100. D. một giá trị khác.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=x^x$ với $x>0$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $f'(x)=x.x^{x-1}$.

B. $f'(1)=1$.

C. hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{1}{e}$.

D. hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $e^{-\frac{1}{e}}$.

Câu 24. Số giá trị nguyên của m để hàm số $y=x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+1-m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu là

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 25. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2-x-1}}$ là

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 26. Hệ số của x^6 trong khai triển

$$(2x+1)^6\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)^4$$

thành đa thức là

A. $\frac{1}{2}C_{14}^6$. B. $\frac{1}{4}C_{14}^6$. C. C_{14}^6. D. $4C_{14}^8$.

Câu 27. Một tấm bìa carton dạng tam giác ABC có diện tích S. Tại một điểm D thuộc cạnh BC người ta cắt theo hai đường thẳng lần lượt song song với hai cạnh AB và AC để phần bìa còn lại là một hình bình hành có một đỉnh là A. Diện tích hình bình hành lớn nhất bằng

SĨ+ĐÀ+ĐÀ=CHÍN+CHÍN+CHÍN

A. $\frac{S}{4}$. B. $\frac{S}{3}$. C. $\frac{S}{2}$. D. $\frac{2S}{3}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90^0, \widehat{BSC} = 60^0, \widehat{CSA} = 120^0$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $4\pi a^2$. B. $2\pi a^2$. C. πa^2. D. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng

A. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi - 1}{2}$. C. $\frac{\pi}{2} - 1$. D. $\frac{\pi}{4} - 1$.

Câu 30. Có hai cơ sở khoan giếng A và B. Cơ sở A: giá của mét khoan đầu tiên là 8000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Cở sở B: giá của mét khoan đầu tiên là 6000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước đó. Một công ty giống cây trồng muốn thuê khoan hai giếng với độ sâu lần lượt là 20 mét và 25 mét để phục vụ sản xuất. Giả thiết chất lượng cũng như thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau. Công ty ấy nên chọn cơ sở nào để tiết kiệm chi phí nhất?

A. luôn chọn A.

B. luôn chọn B.

C. giếng 20 mét chọn A còn giếng 25 mét chọn B.

D. giếng 20 mét chọn B còn giếng 25 mét chọn A.

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC cắt SA, SB, SC lần lượt tại B', C', D'. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 32. Cho $f(x) = (1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \ldots \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Giá trị $f'(0)$ bằng

A. 0. B. 1. C. n. D. $\frac{1}{n}$.

Câu 33. Kí hiệu A và B lần lượt là tập nghiệm của các phương trình

$$\log_3 x(x+2) = 1 \text{ và } \log_3(x+2) + \log_3 x = 1.$$

Khi đó khẳng định đúng là

A. $A = B$. B. $A \subset B$. C. $B \subset A$. D. $A \cap B = \varnothing$.

Câu 34. Tập nghiệm của bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \frac{3x-1}{x+1}\right) \le 0$$

A. $(-1, 3]$. B. $(-1, +\infty)$.

C. $[3, +\infty)$. D. $(-1, +\infty) \cup [3, +\infty)$.

Câu 35. Một nhóm học sinh gồm a bạn lớp A, b bạn lớp B và c bạn lớp C $(a, b, c \in \mathbb{N}; a, b, c \ge 4)$. Chọn ngẫu nhiên ra 4 bạn. Xác suất để chọn được 4 bạn thuộc cả ba lớp là

A. $\frac{C_a^1 C_b^1 C_c^4 C_{a+b+c-3}^1}{C_{a+b+c}^4}$.

B. $1 - \frac{C_{a+b}^4 + C_{b+c}^4 + C_{c+a}^4}{C_{a+b+c}^4}$.

C. $\frac{C_a^2 C_b^1 C_c^1 + C_a^1 C_b^2 C_c^1 + C_a^1 C_b^1 C_c^2}{C_{a+b+c}^4}$.

D. $1 - \frac{C_{a+b}^4 + C_{b+c}^4 + C_{c+a}^4}{C_{a+b+c}^4} - \frac{C_a^4 + C_b^4 + C_c^4}{C_{a+b+c}^4}$.

Câu 36. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM bằng

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 37. Cho tứ diện $SABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC.

B. trọng tâm tam giác ABC.

C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

D. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 38. Đồ thị hàm số $y = 2x + m - \frac{1}{2x+1}$ có tâm đối xứng là điểm

BA + BA + BA = CHÍN + CHÍN + CHÍN

A. $\left(\frac{1}{2}, m+1\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2}, m-1\right)$.

Câu 39. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** một giá trị khác.

Câu 40. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 2AC$. M là một điểm thay đổi trên các cạnh BC. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB, AC. Gọi V và V' tương ứng là thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi tam giác ABC và hình chữ nhật $MHAK$ khi quay quanh trục AB. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) là một đường thẳng có vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (0,1,3)$. **B.** $\vec{u} = (0,1,-3)$.

C. $\vec{u} = (2,1,-3)$. **D.** $\vec{u} = (2,0,0)$.

Câu 42. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\}\, dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 43. Cho mặt nón tròn xoay đỉnh S đáy là đường tròn tâm O và có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng a. A và B là hai điểm bất kỳ trên (O). Thể tích của khối chóp $S.OAB$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $\frac{a^3}{96}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho hai điểm $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $(a,b \neq 0)$. Tập hợp tất cả các điểm cách đều ba điểm O, A, B là một đường thẳng có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = \frac{a}{2}, \\ y = \frac{b}{2}, \\ z = t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = a, \\ y = b, \\ z = t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = at, \\ y = bt, \\ z = t \end{cases}$

Câu 45. Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có bốn phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng thì được 1 điểm, trả lời sai thì bị trừ 0,5 điểm. Một thí sinh do không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Xác suất để thí sinh đó làm bài được số điểm không nhỏ hơn 7 là

A. $\frac{7}{10}$. **B.** $C_{10}^8\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

C. $A_{10}^8\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2$. **D.** $\frac{109}{262144}$.

Câu 46. Phương trình $(4x)^{\log_8 x} + x^{\log_8(4x)} = 4$ có tập nghiệm là

A. $\{2,8\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{2}, 8\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right\}$. **D.** $\left\{2, \frac{1}{8}\right\}$.

Câu 47. Số mặt phẳng cách đều tất cả các đỉnh của một hình lăng trụ tam giác là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 48. Cho $f(x) = e^{e^x}$. Giá trị $f'(1)$ bằng

A. e. **B.** e^e **C.** e^{2e} **D.** e^{e+1}

Câu 49. Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi m bằng

A. -3 hoặc 1. **B.** 1 hoặc 3.

C. -1 hoặc 3. **D.** -3 hoặc -1.

Câu 50. Trong không gian Descartes $Oxyz$ cho điểm $M(1,-1,2)$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Mặt phẳng đi qua M cắt (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $x - y + 2z - 2 = 0$. **B.** $x - y + 2z = 0$.

C. $x - y + 2z - 6 = 0$. **D.** $x - y + 2z - 4 = 0$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

BA BÀ BA=CHÍN+CHÍN

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 6

1A	2C	3D	4B	5C	6A	7D	8B	9C	10A
11D	12B	13C	14A	15D	16B	17C	18A	19D	20B
21C	22A	23D	24B	25A	26C	27D	28B	29A	30C
31D	32B	33A	34C	35D	36B	37A	38C	39B	40D
41A	42B	43C	44D	45B	46A	47C	48D	49B	50C

Câu 1. $\alpha = 2(a^2 - b^2) \in \mathbb{R},\ \beta = 2(a^2 + b^2) - 2b \in \mathbb{R}$.

Câu 3. Diện tích mỗi mặt khối lập phương: $S_1 = a^2$.

Diện tích toàn phần khối lập phương: $S_2 = 6a^2$.

Diện tích toàn phần khối chữ thập:

$$S_{tp} = 5S_2 - 8S_1 = 22a^2.$$

Câu 4. Dựa vào đồ thị suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = a > 0$ và một tiệm cận ngang $y = b > 0$. Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị hàm số là một đường cong đi xuống từ trái sang phải trên các khoảng xác định của nó nên:

$$y' = \frac{c - ab}{(x-a)^2} < 0, \forall x \neq a \Rightarrow c - ab < 0.$$

Câu 5. $T = \left(a^{\log_2 5}\right)^{\log_2 5} + \left(b^{\log_4 6}\right)^{\log_4 6} + 3\left(c^{\log_7 3}\right)^{\log_7 3}$

$= 4^{\log_2 5} + 16^{\log_4 6} + 3.49^{\log_7 3} = 5^2 + 6^2 + 3^3 = 88.$

Câu 6. Khẳng định: Với mọi $a > b > 1$, ta có $a^b > b^a$ là sai ví dụ ta thử $a = 31,\ b = 3$ thì sẽ thấy.

Câu 9. BPT có tập nghiệm là: $S = (-4;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ và $x < 6 \Rightarrow x \in \{-3; -2; -1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 10. Phương trình mp(yOz) là $x = 0$. Từ giả thiết có: $b - 1 = 0,\ a - 1 = 0$ và $\dfrac{|1.1 + 1.0 + c.0|}{\sqrt{2 + c^2}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a = b = 1,\ c = -\sqrt{2} \Rightarrow a + b + c = 2 - \sqrt{2} \in (0; 3).$

Câu 13. $f'(x) = \dfrac{(x^2+5)'}{x^2+5} = \dfrac{2x}{x^2+5},\ f'(2) = \dfrac{4}{9}.$

Do đó $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{(3k+1)x^2+1}}{x} = 9f'(2)$

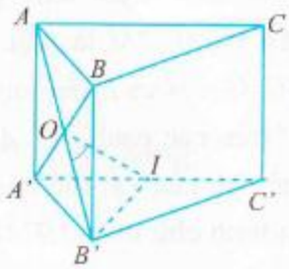
$\Rightarrow \sqrt{3k+1} = 9 \cdot \dfrac{4}{9} \Rightarrow k = 5.$

Câu 15. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và I là trung điểm của $A'C'$. Ta có:

$$\widehat{B'OI} = (\widehat{AB', BC'}) = 60^o.$$

Mặt khác $OB' = \dfrac{AB'}{2} = \dfrac{BC'}{2} = OI$ nên $\Delta B'OI$ đều.

Suy ra $AB' = 2OB' = 2B'I = 2\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}\right) = 2a\sqrt{3}.$



Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên tam giác $AA'B'$ vuông tại A' và có

$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2}$

$= \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2a\sqrt{2}.$

Thể tích của khối lăng trụ đã cho là: $V = AA'.S_{ABC} = 2a\sqrt{2}.\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{6}a^3.$

Câu 16. $y' = (3x^2 - 2x + m)2^{x^3 - x^2 + mx + 1}\ln 2.$

ycbt $\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + m \geq 0, \forall x \in [1;\ 2]$

$\Leftrightarrow m \geq \max\limits_{x \in [1;\ 2]} g(x) = g(1) = -1, g(x) = -3x^2 + 2x.$

Câu 17. ***Nhắc lại:*** Xác suất của biến cố A được định nghĩa $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, với $n(A)$ là số phần tử của A, $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử. Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 36$. Gọi A là biến cố "$b^2 - 4c < 0$", ta có

$A = \{(1,\ 1); ...(1,\ 6);\ (2,\ 2); ...(2,\ 6);\ (3,\ 3); ...(3,\ 6);$
$(4,\ 5); (4,\ 6)\}.$

Suy ra $n(A) = 17$. Vậy xác suất để phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm là $\dfrac{17}{36}$.

Câu 18. $0 = f'(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in [0;\ 3] \\ x = 2 \in [0;\ 3] \end{array}\right.$

$f(0) = -12,\ f(3) = -3\sqrt{13},\ f(1) = -5\sqrt{5},\ f(2) = -8\sqrt{2}.$

$\Rightarrow m + M = -12 - 3\sqrt{13} = a - b\sqrt{c}$

$\Rightarrow S = a + b + c = -12 + 3 + 13 = 4.$

Câu 19. $a + bi = \dfrac{1+3i}{1-2i} + i = \dfrac{3+4i}{1-2i} = -1 + 2i.$

Từ đó có $a = -1, b = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{5}.$

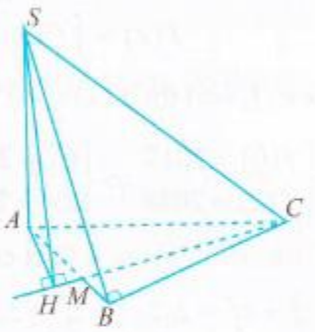
Câu 20. $\dfrac{1}{a} + b\ln\dfrac{3}{2} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^3 + 2x^2 + 3}{x+2}dx$

BỘ ĐỀ ĐẶC CHIÊN + CHIÊN + CHIÊN

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3} + 3\ln\frac{3}{2}.$$

Suy ra: $ab - 8 < k^2 + 1 \Rightarrow 3.3 - 8 < k^2 + 1 \Rightarrow k \neq 0$.

Câu 21. Trong mặt phẳng (ABC), kẻ $AH \perp CM$ tại H.



Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ CM \perp AH \end{cases} \Rightarrow CM \perp SH.$$

Do đó khoảng cách d từ điểm S đến đường thẳng CM là độ dài đoạn SH.

ΔBCM vuông tại B có:

$$CM = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Từ hai tam giác vuông đồng dạng AHM và CBM, ta suy ra $AH = \frac{AM.BC}{CM} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$. ΔSAH vuông tại A, có: $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{\sqrt{110}}{5}$.

Câu 22. Tổng diện tích cần phải sơn là:

$$S_{xq} = 2(2\pi r_1 h) + 6(2\pi r_2 h)$$
$$= 2[2\pi.(0,2)(4,2)] + 6[2\pi.(0,13).(4,2))$$
$$\approx 31,1394 \text{ m}^2.$$

Vậy số tiền chủ nhà phải chi trả để sơn 8 cây cột nhà là $380000 \times 31,1394 \approx 11833000$ đồng.

Câu 23. Để thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng nhất thì $\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = 1 \Rightarrow t = 171$.

Câu 24. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-3;2)$ và mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}_P = (1;-3;2)$, $(P) \perp (Q) \Rightarrow$ mặt phẳng (Q) có VTPT là $\vec{n}_Q = [\vec{n}_P, \overrightarrow{AB}] = -4(0;2;3)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là $2y + 3z - 11 = 0$.

$\Rightarrow a + b + c = 0 + 2 + 3 = 5$.

Câu 25. Xét khai triển $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, đạo hàm hai vế được $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^{k-1}$.

Chọn $x = 1$ ta được $n.2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$. Kết hợp giả thiết có $n.2^{n-1} = 256n \Rightarrow n = 9$. Với $n = 9$ ta có:

$$\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^{9} C_9^k 2^{9-k}.(-3)^k.x^{18-3k}.$$

Suy ra: $18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$. Vậy số hạng cần tìm là: $2^3.3^6.C_9^6 = 489888$.

Câu 26. PT đã cho viết lại

$$8\left(8^x + \frac{1}{8^x}\right) + 24\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) - 125 = 0$$

Đặt $t = 2^x + \frac{1}{2^x} \Rightarrow t^3 = \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 = 8^x + \frac{1}{8^x} + 3t$

Từ đó cho ta $8t^3 - 125 = 0$.

Câu 27. Theo định nghĩa phép vị tự, ta có:

$$\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Vì $\overrightarrow{OA} = (-3;\ 2)$ nên $\overrightarrow{OA'} = \left(1;\ -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow A'\left(1;\ -\frac{2}{3}\right)$.

Tương tự $B'\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $C'\left(-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Từ đó $S = 1.\left(-\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{1}{3}\right).\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{14}{27}$.

Câu 28. $N \in d \Rightarrow N(2t-2; t+1; -t+1)$.

Theo giả thiết $A(1;\ 3;\ 2)$ là trung điểm của cạnh $MN \Rightarrow M(4-2t;\ 5-t;\ t+3)$.

Mà $M \in (P) \Rightarrow t = -2 \Rightarrow N(-6;-1;3)$. Đường thẳng Δ qua $N(-6;-1;3)$ và nhận $\overrightarrow{NA} = (7;4;-1)$ là một VTCP, suy ra $\Delta: \frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

Câu 29. Ta có:

$$y' = \frac{(1+3x-x^2)'}{2\sqrt{1+3x-x^2}} = \frac{3-2x}{2\sqrt{1+3x-x^2}} \Rightarrow 2yy' = 3-2x.$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên ta được:

$$2(y'.y' + y''.y) = -2 \text{ hay } (y')^2 + y.y'' = -1.$$

Câu 30. Phương trình $f(x) = 4^{m+2\log_4\sqrt{2}}$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < 4^{m+2\log_4\sqrt{2}} < 2$

$$\Leftrightarrow 2m + 1 < 1 \Leftrightarrow m < 0.$$

Câu 31. Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \frac{u^2-1}{2} \Rightarrow udu = dx$,

$$2x^2 + 4x + 1 = \frac{u^4 + 2u^2 - 1}{2}.$$

Ta được: $\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (au^4 + bu^2 + c)du$,

với $a = 1$, $b = 2$, $c = -1 \Rightarrow a + b + c = 2$.

Câu 32. Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ và trục hoành là:

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

$$V=\pi\int_1^e\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\int_1^e \ln^2 x d(\ln x)=\frac{\pi}{3}.$$

Câu 33. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$, khi đó O, O' lần lượt là đỉnh của khối nón và tâm của đường tròn đáy của khối nón. Khối nón có chiều cao $h=OO'=a$ và bán kính đáy $r=\frac{a}{2}$. Diện tích toàn phần của khối nón đó

$$S_{tp}=S_{xq}+\pi r^2=\pi r(l+r)=\pi r\left(\sqrt{h^2+r^2}+r\right)$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5}+1).$$

Mà $S_{tp}=\frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{b}+c) \Rightarrow b.c=5.1=5.$

Câu 34. BPT đã cho tương đương với

$$98+28.\left(\frac{2}{7}\right)^x \le 351\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^x}$$

Đặt $t=\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^x}$, $t>0$ thì bất phương trình trên trở thành $28t^2-351t+98\le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{7}\le t\le \frac{49}{4}$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^2 \le \left(\frac{2}{7}\right)^x \le \left(\frac{2}{7}\right)^{-4} \Leftrightarrow -4\le x\le 2.$$

Từ đó $b-2a=2-2(-4)=10\in(\sqrt{7};\ 4\sqrt{10})$.

Câu 35. Ta có:

$$x+1=m\sqrt{2x^2+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}=m \qquad (*)$$

Lập bảng biến thiên hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$ và dựa vào bảng biến thiên đó, (*) có hai nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$ tại hai điểm phân biệt tức là

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 36. $0=y'=4x^3-4(m^2+1)x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m^2+1} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ hàm số đã cho luôn có 3 điểm cực trị với mọi m. Do hệ số $a=1>0$, nên $x_{CT}=\pm\sqrt{m^2+1}$.

$\Rightarrow y_{CT}=-\left(m^2+1\right)^2+2.$

Vì $(m^2+1)^2\ge 1 \Rightarrow y_{CT}\le 1$. Vậy giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $m=0$.

Câu 37. $x\in(-\infty;1)$ thì

$$f(x)=\int f'(x)dx=\ln(1-x)+C_1.$$

$x\in(1;+\infty)$ thì $f(x)=\int f'(x)dx=\ln(x-1)+C_2$.

$$\begin{cases} f(0)=2017 \\ f(2)=2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2017 \\ C_2=2018 \end{cases};\ S=f(3)-f(-1)=1.$$

Câu 38. Với $z_0\ne 0$, ta có

$z_0^2+z_1^2=z_0z_1 \Rightarrow z_1^2=z_0(z_1-z_0)$

$$\Rightarrow |z_1|^2=|z_0||z_1-z_0| \Rightarrow |z_1-z_0|=\frac{|z_1|^2}{|z_0|} \qquad (1)$$

Với $z_1\ne 0$, ta có $z_0^2+z_1^2=z_0z_1 \Rightarrow z_0^2=z_1(z_0-z_1)$

$$\Rightarrow |z_0|^2=|z_1||z_0-z_1| \Rightarrow |z_0-z_1|=\frac{|z_0|^2}{|z_1|} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $|z_0-z_1|=\frac{|z_1|^2}{|z_0|}=\frac{|z_0|^2}{|z_1|}$

$\Rightarrow |z_0|=|z_1|=|z_1-z_0| \Rightarrow OA=OB=AB$

$\Rightarrow OAB$ là tam giác đều.

Câu 39. $f'(x)=-3x^2+4x-9+(\cos x-2)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$u<v \Rightarrow u<3v\log e \Rightarrow f(u)>f(3v\log e).$$

Câu 40. Đặt $t=\ln x \Rightarrow t\in(0;1)$. Từ yêu cầu bài toán có $f'(t)=\frac{4-2m}{(t-2m)^2}>0, \forall t\in(0;\ 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} 2m\le 0 \\ 2m\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ \frac{1}{2}\le m<2 \end{array}\right.. \text{ Vì } m\in\mathbb{Z}^+ \Rightarrow m=1.$$

Câu 41. $M\in d \Rightarrow M(2t+1;-t-2;\ 2t+3)$.

Phương trình mp(ABC) là: $x+2y-2z-2=0$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{9}{2}$.

$$V=3 \Rightarrow \frac{1}{3}d(M,(ABC)).S_{ABC}=3 \Rightarrow d(M,(ABC))=2$$

$$\Rightarrow t=-\frac{5}{4} \text{ hoặc } t=-\frac{17}{4}.$$

Câu 42. Với mọi $x_0>0$, hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;\ x_0)\cup(x_0;\ +\infty)$.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0<x<x_0 \\ 2x & \text{khi } x\ge x_0 \end{cases}.$$

BẠN A BẠN=CHÍN+CHỮ=CHÍN

f liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{x_0} = x_0^2 + 12 \quad (1)$$

f có đạo hàm tại điểm x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \quad (2)$$

Giải hệ (1), (2) được $x_0 = 2$ và $a = 8\sqrt{2}$. Dễ thấy khi đó đạo hàm f' liên tục tại x_0; do đó f' liên tục trên $(0;\ +\infty)$. Vậy $S = x_0 + a = 2(1+4\sqrt{2})$.

Câu 43. Gọi r là bán kính của đường tròn (T), theo giả thiết đường tròn (T) có chu vi bằng $4\pi\sqrt{3}$. nên $4\pi\sqrt{3} = 2\pi r \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;\ -2;\ 3)$ và bán kính $R = 4$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) là:

$$\frac{|2x_I + y_I - 2z_I + m|}{3} = \frac{|-6+m|}{3} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 12 \end{array}\right..$$

Câu 44. Ta có $\begin{cases} (SAB)\perp(ABCD) \\ (SAD)\perp(ABCD) \\ (SAB)\cap(SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABCD).$

Ta có: $SB\perp BC, AB\perp BC \Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SBA} = 30^o$

$\Rightarrow \widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SBA} = 30^o$

$\Rightarrow SA = AB\tan\widehat{SBA} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.$

$V = \dfrac{1}{3}(2a)^2\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \dfrac{3V}{a^3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}.$

Câu 45. Ta có $P = \left|\dfrac{z+i}{z}\right| = \left|1+\dfrac{i}{z}\right|$ và

$1 - \left|\dfrac{i}{z}\right| \le \left|1+\dfrac{i}{z}\right| \le 1 + \left|\dfrac{i}{z}\right|$ nên $1 - \dfrac{1}{|z|} \le P \le 1 + \dfrac{1}{|z|}.$

Do $|z| \ge 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \le 1 - \dfrac{1}{|z|} \le P \le 1 + \dfrac{1}{|z|} \le \dfrac{3}{2},$

từ đó $2M - m = 2.\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}.$

Câu 46. Kẻ $AH\perp BC$. Ta có

$S_b = \pi ca + \pi c^2 = \pi c(a+c),\ S_c = \pi b(a+b)$

$S_a = \pi.AH.b + \pi.AH.c = \pi.AH(b+c) = \pi.\dfrac{bc}{a}\cdot(b+c).$

Vì $b < c \Rightarrow S_b > S_c$. Mặt khác

$$a > c \Rightarrow a^2 > c^2,\ ab > bc$$

$\Rightarrow a^2 + ab > bc + c^2 \Rightarrow S_c > S_a$. Vậy $S_b > S_c > S_a$.

Câu 47. Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

$$a+b+c+d+e = a\frac{q^5-1}{q-1} = 40 \Rightarrow \frac{q^5-1}{q-1} = \frac{40}{a}. \quad (1)$$

Dễ thấy năm số $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}, \dfrac{1}{d}, \dfrac{1}{e}$ tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó với công bội $\dfrac{1}{q}$. Từ giả thiết ta có $10 = \dfrac{q^5-1}{aq^4(q-1)} \Rightarrow \dfrac{q^5-1}{q-1} = 10aq^4 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $aq^2 = \pm 2$. Lại có $S = a^5q^{10}$.

Vậy $|S| = 32$.

Câu 48. PT $\Leftrightarrow 2\sin 2x + a\cos 2x = 2 - 2a$.

PT có nghiệm $\Leftrightarrow 2^2 + a^2 \ge (2-2a)^2$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8a \le 0 \Leftrightarrow 0 \le a \le \frac{8}{3}.$$

Câu 49. $u_k = u_{k-1} + 4(k-1) + 3$

$= u_{k-2} + 4(k-2) + 4(k-1) + 2.3 = \cdots$

$= u_1 + 4(1+2+\cdots+k-1) + 3(k-1)$

$= (2k+3)(k-1)$

$\Rightarrow \lim\dfrac{\sqrt{u_{kn}}}{n} = \lim\dfrac{\sqrt{(2kn+3)(kn-1)}}{n} = k\sqrt{2}$. Do đó

$$\frac{a^{2019}+b}{c} = \lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+\cdots+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}$$

$$= \lim\frac{\sqrt{2}(1+4+4^2+\cdots+4^{2018})}{\sqrt{2}(1+2+2^2+\cdots+2^{2018})}$$

$$= \lim\frac{\dfrac{4^{2019}-1}{4-1}}{\dfrac{2^{2019}-1}{2-1}} = \frac{2^{2019}+1}{3}.$$

Từ đó $S = a+b-c = 2+1-3 = 0$.

Câu 50. $f(x) = F'(x) = \dfrac{4a-b}{(x+4)^2} = (4a-b)(x+4)^{-2}$

$$\Rightarrow f'(x) = -2(4a-b)(x+4)^{-3} = \frac{-2(4a-b)}{(x+4)^3}.$$

Ta có $2f^2(x) = (F(x)-1)f'(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4} = \frac{-2(4a-b)[(a-1)x+b-4]}{(x+4)^4}$$

$\Leftrightarrow 4a - b = -(a-1)x - b + 4$ (*) (do $x \ne -4, 4a-b \ne 0$).

Biểu thức (*) đúng với mọi $x \ne -4$ nên có $a = 1,\ b \in \mathbb{R}$. Do $4a - b \ne 0$ nên $a = 1, b = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

PHẠM TRỌNG THƯ
(GV THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp)

BA+BA+BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

BẠN CÓ BIẾT ?

MỘT MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC ĐA THỨC

HOÀNG ĐỨC TÂN

(Hà Nội) Sưu tầm và biên soạn

Năm 1995 Andrew Wiles, nhà toán học Anh đã chứng minh một trong những bài toán số học nổi tiếng nhất là Định lý lớn Fermat: *Với* $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ *phương trình* $x^n + y^n = z^n$ *không có nghiệm trong tập hợp các số nguyên dương*. Năm 2003, P. Mihăilescu chứng minh giả thuyết Catalan: *Phương trình* $x^y - z^t = 1$ *có nghiệm duy nhất* $(x;y;z;t) = (3;2;2;3)$ *trong tập hợp các số tự nhiên lớn hơn* 1. Liệu có hay không một điểm chung giữa các định lý đó? Có đấy!. Năm 1981 W. Stothers đã phát biểu và chứng minh một khẳng định như vậy (tuy nhiên khẳng định đó không phải với các số tự nhiên mà là đối với các đa thức). Năm 1983 định lý của Stothers được R. Mason tái phát hiện lại. Năm 1998 một sinh viên toán là Noah Snyder đã đưa ra một chứng minh đẹp hơn cho định lý đó.

Đầu tiên ta ký hiệu $\deg f$ là bậc của đa thức f, và $k(f)$ là số các nghiệm (thực hay phức) khác nhau của đa thức f: *Nếu*

$$f(x) = \alpha(x-a_1)^{n_1}.(x-a_2)^{n_2}...(x-a_r)^{n_r},$$

trong đó α *là một số khác* 0, $a_1, a_2, ..., a_r$ *là các số khác nhau (thực hay phức không quan trọng) thì* $\deg f = n_1 + n_2 + ... + n_r$ *và* $k(f) = r$.

Ký hiệu $D(f)$ là ước chung lớn nhất (ƯCLN) của f và đạo hàm f' của nó. Ta có kết quả sau.

Bổ đề 1. $\deg f = \deg D(f) + k(f)$ *đối với mọi đa thức* f *khác* 0.

Chứng minh. Theo công thức Leibniz ta có

$$f'(x) = \alpha[n_1(x-a_1)^{n_1-1}.(x-a_2)^{n_2}...(x-a_r)^{n_r} + n_2.(x-a_1)^{n_1}.(x-a_2)^{n_2-1}...(x-a_r)^{n_r} + ... + n_r.(x-a_1)^{n_1}.(x-a_2)^{n_2}...(x-a_r)^{n_r-1}].$$

Cho nên ta có $D(f) =$ ƯCLN $= (f(x); f'(x))$

$$= \alpha.(x-a_1)^{n_1-1}.(x-a_2)^{n_2-1}...(x-a_r)^{n_r-1}$$

(lưu ý rằng ta có thể không viết hệ số cao nhất α do đa thức ước chung lớn nhất được xác định chính xác đến thừa số không đổi khác 0) và do đó:

$$\deg D(f) = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + ... + (n_r - 1) = n_1 + n_2 + ... + n_r - r = \deg f - k(f).$$

Chứng minh của Noah Snyder.

Xét đẳng thức $f(x) + g(x) = h(x)$, trong đó f và g là các đa thức nguyên tố cùng nhau. Ký hiệu $J(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$. Rõ ràng $J(x)$ chia hết cho $D(f), D(g)$ Bởi vì:

$$J(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = f'(x).g(x) + g'(x).g(x) - g(x).g'(x) + f(x).g'(x) = [f'(x) + g'(x)].g(x) - [f(x) + g(x)].g'(x)$$

nên $J(x) = h'(x).g(x) - h(x).g'(x)$, do đó $J(x)$ cũng chia hết cho $D(h)$. Do hai đa thức f và g là nguyên tố cùng nhau nên hai đa thức $D(f)$ và $D(g)$ nguyên tố cùng nhau; Từ tính chất nguyên tố cùng nhau của hai đa thức f và h ta cũng suy ra hai đa thức $D(f)$ và $D(h)$ nguyên tố cùng nhau; và từ tính chất nguyên tố cùng nhau của hai đa thức g và h ta cũng suy ra hai đa thức $D(g)$ và $D(h)$ cũng nguyên tố cùng nhau.

Vì vậy đa thức $J(x)$ chia hết cho tích $D(f).D(g).D(h)$, nghĩa là bậc của đa thức $J(x)$ không thể nhỏ hơn tổng bậc của các đa thức $D(f), D(g), D(h)$. Do bậc của đạo hàm của một đa thức nhỏ hơn bậc của chính đa thức đó một đơn vị, cho nên nên $\deg J$ không vượt quá $\deg f + \deg g - 1$, do đó:

$$\deg f + \deg g - 1 \geq \deg J \geq \deg f - k(f) + \deg g - k(g) + \deg h - k(h)$$

tức là $k(f) + k(g) + k(h) - 1 \geq \deg h$.

Vì $k(f)+k(g)+k(h)=k(fgh)$ nên ta đã chứng minh được định lý Stothers - Mason - Snyder sau: *Bậc của tổng hai đa thức bất kỳ nguyên tố cùng nhau sẽ nhỏ hơn số nghiệm của đa thức là tích hai đa thức đó với tổng của chúng.*

Bởi vì đẳng thức $f+g=h$ ta có thể viết dưới dạng $f=h+(-g)$ hay dạng $g=h+(-f)$ nên không chỉ có bậc của tổng mà cả bậc của mỗi đa thức bất kỳ trong hai đa thức nguyên tố cùng nhau cũng phải nhỏ hơn số nghiệm của tích các đa thức ấy với tổng của chúng. Từ định lý Stothers - Mason – Snyder sẽ suy ra được nhiều kết quả hay đối với các đa thức. Sau đây chỉ xin trình bày ba kết quả hay được suy ra từ định lý đó.

Định lý lớn Fermat đối với các đa thức. *Giả sử f, g và h là các đa thức nguyên tố cùng nhau, có ít nhất là một đa thức trong các đa thức ấy không phải là một hằng số. Khi đó đẳng thức: $f^n+g^n=h^n$ là không thể có với $n\geq 3$.*

Chứng minh. Theo Định lý Stothers - Mason - Snyder thì bậc của mỗi đa thức f^n, g^n, h^n (lưu ý rằng $\deg f^n = n\deg f$, $\deg g^n = n\deg g$, $\deg h^n = n\deg h$) không vượt quá:

$$\deg f+\deg g+\deg h-1.$$

Cộng ba bất đẳng thức đó, ta nhận được:

$$n(\deg f+\deg g+\deg h)\leq 3(\deg f+\deg g+\deg h-1)$$

$$\Rightarrow n\leq 3-\frac{3}{\deg f+\deg g+\deg h}<3.$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Định lý Davenport (1965). *Giả sử f và g là các đa thức nguyên tố cùng nhau có các bậc khác 0. Khi đó:* $\deg(f^3-g^2)\geq\frac{1}{2}\deg f+1.$

Chứng minh. Nếu $\deg f^3\neq\deg g^2$ thì:

$$\deg(f^3-g^2)\geq\deg f^3=3\deg f\geq\frac{1}{2}\deg f+1.$$

Cho nên ta có thể coi rằng $\deg f^3=\deg g^2=6m$.

Xét các đa thức $F=f^3, G=g^2, H=F-G=f^3-g^2$. Rõ ràng $\deg H\leq 6m$. Theo Định lý Stothers - Mason - Snyder:

$$\max(\deg F,\deg G,\deg H)\leq k(FGH)-1$$
$$\leq\deg f+\deg g+\deg H-1$$

tức là $6m\leq 2m+3m+\deg H-1$.

Vì vậy $\deg H\geq m+1=\frac{1}{2}\deg f+1$. Ta có điều cần chứng minh.

Nhận xét. Đối với các đa thức:

$$f(t)=t^6+4t^4+10t^2+6$$

$$g(t)=t^9+6t^7+21t^5+35t^3+\frac{63}{2}t$$

thì bất đẳng thức Davenport trở thành đẳng thức.

Rõ ràng phương trình Diophantine $f^\alpha+g^\beta=h^\gamma$ của các đa thức f,g,h là có nghiệm nếu một trong các số α,β,γ bằng 1. Cho nên ta sẽ coi rằng $\alpha,\beta,\gamma\geq 2$. Ta có kết quả thú vị sau đây.

Định lý. *Giả sử α,β,γ là các số tự nhiên, ngoài ra $2\leq\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Khi đó phương trình $f^\alpha+g^\beta=h^\gamma$ có các nghiệm nguyên tố cùng nhau chỉ với các bộ số $(\alpha,\beta,\gamma)\in(2,2,\gamma)$, $(2,3,3)$, $(2,3,4)$ và $(2,3,5)$.*

Chứng minh. Giả sử a,b và c là bậc của các đa thức f, g và h. Khi đó theo Định lý Stothers - Mason - Snyder ta có:

$$\alpha a\leq a+b+c-1 \quad (1)$$
$$\beta b\leq a+b+c-1 \quad (2)$$
$$\gamma c\leq a+b+c-1. \quad (3)$$

Do đó: $\alpha(a+b+c)\leq\alpha a+\beta b+\gamma c\leq 3(a+b+c)-3$.

Có nghĩa là $\alpha<3$. Theo điều kiện $\alpha\geq 2$ cho nên $\alpha=2$. Với $\alpha=2$ bất đẳng thức (1) có dạng:

$$a\leq b+c-1 \quad (4)$$

Cộng các bất đẳng thức (4), (2) và (3) ta nhận được: $\beta b+\gamma c\leq 3(b+c)+a-3$.

Do tính tới $\beta\leq\gamma$ và áp dụng bất đẳng thức (4) một lần nữa, ta nhận được: $\beta(b+c)\leq 4(b+c)-4$, có nghĩa là $\beta\leq 4$, tức là $\beta=2$ hoặc $\beta=3$.

Ta còn phải chứng minh rằng nếu $\beta=3$ thì $\gamma\leq 5$.

Với $\beta=3$ thì bất đẳng thức (2) có dạng:

$$2b\leq a+c-1. \quad (5)$$

Cộng các bất đẳng thức (4) và (5) ta nhận được:

$$b\leq 2c-2.$$

Trong trường hợp đó từ bất đẳng thức (4) ta suy ra: $a\leq 3c-3$. Từ hai bất đẳng thức sau cùng và bất đẳng thức (3) ta suy ra: $\gamma c\leq 6c-6$. Cho nên $\gamma\leq 5$. Đó là điều phải chứng minh.

Bạn đọc thân mến! Bài viết xin được tạm dừng ở đây. Rất mong nhận được các kết quả thú vị khác của định lý Stothers - Mason - Snyder từ các bạn yêu toán.

BA+BA+BA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

NHIỀU CÁCH GIẢI CHO MỘT BÀI TOÁN

BÀI TOÁN. *Cho đường tròn (O), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên các đoạn thẳng OD, OC lần lượt lấy M, N sao cho CN = OM. Đường thẳng AM cắt đường tròn (O) tại P. Chứng minh rằng* $\widehat{ANP} \neq 90^0$.

Cách giải 1.

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của NP với đường tròn (O) và AB $(I \neq P)$. Dễ thấy $I \neq C$. Giả sử

$\widehat{ANP} = 90^0$; do $\widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IAN} = \widehat{NIB} = \widehat{OAM}$

$$\Rightarrow \Delta NIA \backsim \Delta OMA \Rightarrow \frac{IN}{OM} = \frac{AN}{OA}.$$

Mà $CN = OM$, nên $\frac{IN}{CN} = \frac{AN}{OA}$.

$\Delta ONA \backsim \Delta OKN \Rightarrow \frac{AN}{NK} = \frac{OA}{ON}$. Do vậy $\frac{IN}{CN} = \frac{NK}{ON}$

$\Rightarrow \Delta CNI \backsim \Delta ONK \Rightarrow \widehat{NCI} = \widehat{NOK} = 90^0$.

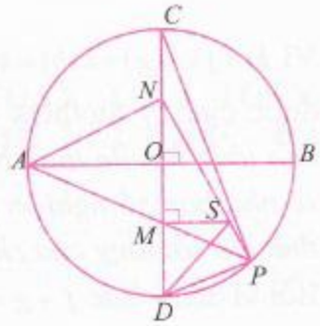
Tam giác CDI có hai góc vuông (vô lí!). Do vậy $\widehat{ANP} = 90^0$ là sai! Vậy $\widehat{ANP} \neq 90^0$.

Cách giải 2.

Từ $CN = OM$ (gt), ta có $ON = MD$, $MN = R$.

Giả sử $\widehat{ANP} = 90^0$. Qua M vẽ đường thẳng vuông góc với CD cắt PN tại S. Ta có: $\Delta OAN = \Delta MNS$ (g.c.g) $\Rightarrow ON = MS$.

ΔMDS vuông tại M có $MS = MD$ $(= ON) \Rightarrow \Delta MDS$ vuông cân tại M



$\Rightarrow \widehat{MSD} = \widehat{MDS} = 45^0$.

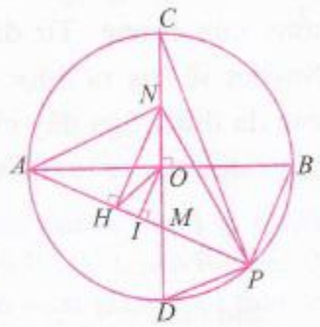
Ta có

$\widehat{MPD} = \widehat{MSD} = 45^0$

$\Rightarrow$ tứ giác $MSPD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SPD} = \widehat{SMN} = 90^0$

hay $SP \perp DP$, $CP \perp DP$ (vô lí!) nên $\widehat{ANP} = 90^0$ là sai. Vậy $\widehat{ANP} \neq 90^0$.

Cách giải 3.



Vẽ $NH \perp AP$ tại H, $OI \perp AP$ tại I. Ta có I là trung điểm của AP. Giả sử $\widehat{ANP} = 90^0$.

Khi đó $NI = \frac{1}{2}AP$ (1)

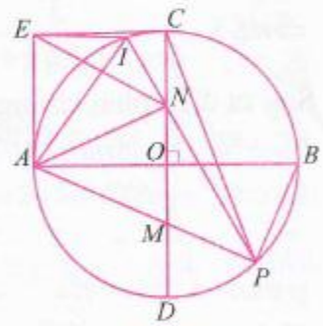
Ta có $\widehat{APB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $\widehat{HNM} = \widehat{BAP}$ (cùng phụ với $\widehat{AMN}$). $\Rightarrow \Delta HMN \backsim \Delta PBA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HN}{AP} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow HN = \frac{1}{2}AP \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow H \equiv I$, do đó $N \equiv O$ (vô lí!)

Do vậy $\widehat{ANP} = 90^0$ là sai. Vậy $\widehat{ANP} \neq 90^0$.

Cách giải 4.



Gọi I là giao điểm của NP với đường tròn (O) $(I \neq P)$. Các tiếp tuyến tại C, A của đường tròn (O) cắt nhau ở E.

Tứ giác $AECO$ là hình vuông. Ta có $MN = AE$, $MN \parallel AE$, nên tứ giác $EAMN$ là hình bình hành $\Rightarrow EN \parallel AM \Rightarrow \widehat{ENI} = \widehat{API}$.

Mà $\widehat{API} = \widehat{EAI}$ nên vậy $\widehat{ENI} = \widehat{EAI}$

$\Rightarrow$ tứ giác $EINA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{AEI}$

Mà $\widehat{AEI} < \widehat{AEC} = 90^0$, nên $\widehat{ANP} < 90^0$.

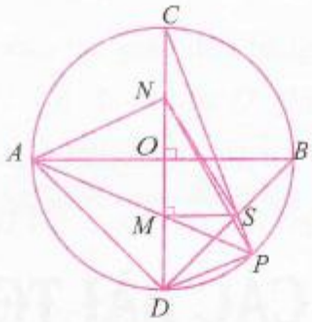
Cách giải 5.

Vẽ đường thẳng vuông góc với CD tại M, đường thẳng này cắt CP tại S. Ta có

BẢN BÁO CHÍ + CHÍN + CHÍN

$S \notin NP$; nên

$$\widehat{ANP} \neq \widehat{ANS} \quad (1)$$



$\widehat{DPS} + \widehat{DMS}$

$= 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow MDPS$ nội tiếp

nên $\widehat{MDS} = \widehat{MPS} = 45^0$.

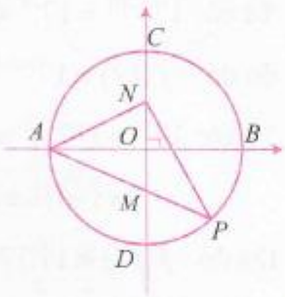
ΔMDS vuông cân tại $M \Rightarrow MS = MD$. Ta có $\Delta ONA = \Delta MSN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OAN} = \widehat{MNS}$ nên

$$\widehat{ANS} = \widehat{AND} + \widehat{MNS} = \widehat{AND} + \widehat{OAN} = 90^o \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{ANP} \neq 90^0$.

Cách giải 6.

Chọn hệ trục tọa độ vuông góc Oxy sao cho O trùng với tâm O của đường tròn, trục Ox trùng với tia OB, trục Oy trùng với tia OC.



Đặt $CN = OM = l$ (với $0 < l < a$). Ta có $O(0;0)$, $A(-a;0)$, $B(a;0)$, $C(0;a)$, $D(0;-a)$, $M(0;-l)$, $N(0;a-l)$. Hệ số góc m của đường thẳng AN là $m = \dfrac{y_N - y_A}{x_N - x_A} = \dfrac{a-l}{a}$. PT của đường thẳng AM là

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{-l} = 1 \Rightarrow lx + ay + al = 0.$$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AM và đường tròn tâm O là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} lx + ay + al = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = a^2 & (2) \end{cases}$$

Mà $\dfrac{a^2(y+l)^2}{l^2} + y^2 = a^2 \Leftrightarrow (a^2 + l^2)y^2 + 2a^2ly = 0$

$$\Leftrightarrow y\left[(a^2+l^2)y + 2a^2l\right] = 0 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -\frac{2a^2l}{a^2+l^2}.$$

• Nếu $y_1 = 0$ thì $x_1 = -a$, là tọa độ $A(-a;\ 0)$

• Nếu $y_2 = -\dfrac{2a^2l}{a^2+l^2}$ thay vào (1) tính được $x_2 = \dfrac{a(a^2-l^2)}{a^2+l^2}$. Tọa độ điểm P là

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{a(a^2-l^2)}{a^2+l^2}, -\frac{2a^2l}{a^2+l^2}\right) = (x_P, y_P)$$

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng NP ta có $k = \dfrac{y_N - y_P}{x_N - x_P} = \dfrac{(a-l)(a^2+l^2) + 2a^2l}{a(l^2-a^2)}$.

Tam giác ANP vuông tại $N \Leftrightarrow AN \perp NP$

$\Leftrightarrow k.m = -1 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{m}$

Vậy $AN \perp NP \Leftrightarrow \dfrac{(a-l)(a^2+l^2) + 2a^2l}{a(l^2-a^2)} = -\dfrac{a}{a-l}$

$\Leftrightarrow (a-l)l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$ hoặc $l = a$.

Do đó tam giác ANP vuông tại N khi N trùng với C hoặc N trùng với O

Các trường hợp khác tam giác ANP không vuông tại N.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(*TP. Hồ Chí Minh*)

➢***Nhận xét.*** Cách giải 1 và Cách giải 4 bạn đọc có thể tham khảo thêm trong bài *Lời giải đơn giản từ phương pháp suy diễn lôgic* (Tạp chí TH&TT số 263, tháng 5 năm 1999); Cách giải 3 xem thêm cuốn sách 255 *bài toán chọn lọc hình học*, Sở Giáo dục Hà Tây, năm 1993. Cách giải 6 xem bài *Bàn về lợi thế của phương pháp tọa độ* (Tạp chí TH&TT số 260, tháng 2 năm 1999).

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn hãy gửi lời giải Bài toán 13 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trước ngày 31.5.2018.

BÀI TOÁN 13. *Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương chứa vô hạn số nguyên tố.*

NGUYỄN VIỆT HẢI (*Hà Nội*)

BA BA BA=CHÍN+CHÍN

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải các bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở Tạp chí TH&TT số 488, T2.2018.

Bài 18 (*AME 1986*). *Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho n^3+100 chia hết cho $n+10$.*

Giải. Đặt $n^3+100=(n^2+an+b)(n+10)+c$

$$=n^3+(10+a)n^2+(10a+b)n+10b+c.$$

Suy ra: $\begin{cases}10+a=0\\10a+b=0\\10b+c=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-10\\b=100\\c=-900\end{cases}$.

Từ thuật toán Euclid suy ra

$$n+10=(n^3+100,n+10)=(-900,n+10)$$
$$=(900,n+10).$$

Vậy số nguyên dương lớn nhất cần tìm là $n=890$.

Bài 19 (*PuMAC 2008*). *Đặt $f(x)=x^{x^{x^{x}}}$. Tìm hai chữ số tận cùng của số $f(17)+f(18)+f(19)+f(20)$.*

Giải. Ta sẽ tính từng số hạng riêng biệt.

- $f(20)=20^{20^{20^{20}}}\equiv 0 \pmod{100}$.
- Vì $19\equiv -1 \pmod 4$ nên

$$f(19)=19^{19^{19^{19}}}\equiv -1 \pmod 4. \quad (1)$$

Vì $19\equiv -1 \pmod{20}$ nên $19^{19^{19}}\equiv -1 \pmod{20}$ hay $19^{19^{19}}=20k-1,\ k\in\mathbb{N}^*$. Theo định lý về ϕ - hàm Euler, ta có: $19^{\phi(25)}=19^{20}\equiv 1 \pmod{25}$.

Do đó $f(19)=19^{20k-1}\equiv 19^{-1}.19^{20k} \pmod{25}$

$$\equiv 19^{-1} \pmod{25}\equiv 4 \pmod{25}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và theo định lý về phần dư Trung Hoa suy ra: $f(19)=79 \pmod{100}$.

- $18^2\equiv 0 \pmod 4\Rightarrow 18^{18^{18^{18}}}\equiv 0 \pmod 4$;

$18^2\equiv -1 \pmod{25}\Rightarrow 18^4\equiv 1 \pmod{25}$

$$\Rightarrow 18^{18^{18^{18}}}\equiv 1 \pmod{25};$$

Do đó $f(18)=76 \pmod{100}$.

- $17\equiv 1 \pmod 4\Rightarrow f(17)\equiv 1 \pmod 4$; (3)

$17^4\equiv 1 \pmod{20}\Rightarrow 17^{17^{17^{17}}}\equiv 17 \pmod{20}$.

Ta có: $17^{\phi(25)}=17^{20}\equiv 1 \pmod{25}$,

do đó $f(17)\equiv 17^{20k+17}\equiv 17^{17} \pmod{25}$.

Ta có: $17^{16}=(17^2)^8\equiv 14^8\equiv(14^2)^4$

$$\equiv(-4)^4\equiv 6 \pmod{25}.$$

Do đó $f(17)\equiv 17.17^6\equiv 17.6\equiv 2 \pmod{25}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $f(17)\equiv 77 \pmod{100}$.

Từ các kết quả trên ta có:

$$f(17)+f(18)+f(19)+f(20)$$
$$\equiv 77+76+79+0$$
$$\equiv 232\equiv 32 \pmod{100}.$$

Vậy hai chữ số cuối của tổng là 32.

Nhận xét. 1) Từ (1), (2), không dùng định lý phần dư Trung Hoa ta có thể suy trực tiếp ra $f(19)\equiv 79 \pmod{100}$ như sau:

Ký hiệu $x=f(19)$. Từ $x\equiv -1 \pmod 4$ và $x\equiv 4 \pmod{25}$ ta có: $x\equiv 4k-1=25m+4$. Do đó $25m\equiv -1 \pmod 4$. Suy ra $m\equiv 3 \pmod 4$.

Vậy $x=25(4t+3)+4=100t+79$.

Từ đó $f(19)=79 \pmod{100}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 20. *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, ta có thể tìm được một tập gồm n số nguyên liên tiếp sao cho không số nào trong chúng là lũy thừa của một số nguyên tố.*

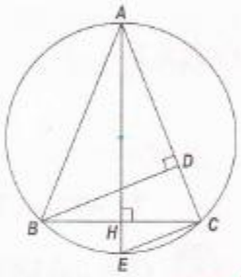
NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

BA+DA BA CHÍN+BÁNH+CHÍN

GIẢI ĐÁP: ĐÃ LÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CHƯA ?

(*Đề đăng trên TH&TT số 486, tháng 12 năm 2017*)

Phân tích sai lầm. Lời giải đã mắc sai lầm ngay bước đầu. Khi so sánh $BD = \dfrac{AC.BC}{4AE}$ với đại lượng biến thiên $\dfrac{(AC+BC)^2}{4AE}$ mà không phải với một hằng số. Sai lầm này thường hay mắc phải khi giải toán cực trị.



Lời giải đúng.

Vẽ đường kính AE, ta có

$\Delta BDC \backsim \Delta ACE$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{BC}{AE}$$

$$\Rightarrow DB = \frac{AC.BC}{AE} \Leftrightarrow DB^2 = \frac{AC^2.BC^2}{AE^2} \quad (1)$$

Gọi H là giao điểm của AE và BC. Tam giác ACE vuông tại C có CH là đường cao nên ta có:

$$AC^2 = AH.AE \quad (2)$$

$$BC^2 = 4HC^2 = 4AH.HE \quad (3).$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta được:

$$DB^2 = \frac{4AH.AH.HE}{AE} = \frac{4AH.AH.(AE-AH)}{AE}$$

$$= \frac{1}{R}AH.AH.(4R-2AH)$$

$$\le \frac{1}{R}\left(\frac{AH+AH+4R-2AH}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{R}\left(\frac{4R}{3}\right)^3 = \frac{64R^2}{27}.$$

Vậy $BD \le \dfrac{8\sqrt{3}R}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi $AH = 4R - 2AH$ hay $AH = \dfrac{4}{3}R$.

Vậy giá trị lớn nhất của đường cao BD là $\dfrac{8\sqrt{3}R}{9}$ khi $AH = \dfrac{4}{3}R$.

Nhận xét. Các bạn tham gia bài này đều phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng. Các bạn được khen là: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. **Thừa Thiên Huế:** *Bùi Nhật Minh*, *Nguyễn Ngọc Mai*, *Nguyễn Ngọc Thanh*, 12T1, *Phan Hoàng Minh Đức*, 12T2, *Mai Thanh Hằng*, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế.

KIHIVI

GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA F - Đúng hay sai?

Bài toán. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn*

$$\begin{cases} x^3 - 3y = 1 + 3y^2 \\ y^3 + 3x^2 = 3x - 1 \end{cases}.$$

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = 2x^2 - y^2$.

Sau đây là lời giải của bạn Dương:

Ta có: $\begin{cases} x^3 - 3y = 1 + 3y^2 \\ y^3 + 3x^2 = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3y^2 + 3y + 1 \\ -3x^2 + 3x - 1 = y^3 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2.$$

Do đó:

$$F = 2x^2 - y^2 = 2x^2 - (x-2)^2 = 2x^2 - (x^2 - 4x + 4)$$

$$= x^2 + 4x - 4 = x^2 + 4x + 4 - 8$$

$$= (x+2)^2 - 8 \ge -8.$$

Đẳng thức $F = -8$ xảy ra khi $x = -2 \Rightarrow y = -4$.

Vậy $\min F = -8$.

Theo bạn kết quả của bạn Dương đúng hay sai ?

NGUYỄN VĂN XÁ

(GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh)

BÀ + BÀ = CHÍN + CHÍN + CHÍN

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 490 (4.2018)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXBGD Việt Nam
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập
NXBGD Việt Nam
PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập : TS.* TRẦN HỮU NAM** ***Thư kí Tòa soạn : ThS.* HỒ QUANG VINH**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Vũ Hữu Chín — Một số bài toán về tính chất của đa giác.

8 Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, năm học 2017 – 2018.

10 Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT chuyên Bình Long, Bình Phước, năm học 2017-2018.

12 **Chuẩn bị cho kì thi THPT Quốc Gia**
Võ Trọng Trí – Hiểu rõ bản chất hình học của bài toán cực trị tọa độ không gian để giải nhanh bài toán trắc nghiệm.

18 **Phương pháp giải toán**
Trần Trung Dũng – Ứng dụng định lý Lagrange trong bài toán chứng minh sự tồn tại của các đại lượng toán học.

23 **Đề ra kỳ này**
Problems in This Issue
T1/490, ..., T12/490, L1/490, L2/490.

25 **Giải bài kỳ trước**
Solutions to Previous Problems

32 **Tiếng Anh qua các bài toán** - *Bài số* 31.
Bài dịch số 27 - Tiếng Anh qua các bài toán.

34 Thử sức trước kì thi 2018 - Đề số 7.

38 Đáp án và hướng dẫn giải đề số 6.

42 **Bạn có biết**
Hoàng Đức Tân – Một mối quan hệ giữa các đa thức.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

47 **Sai lầm ở đâu?**
Nguyễn Văn Xá – Giá trị nhỏ nhất của F – Đúng hay sai?

BA+BA TẠP+CHÍN+CHÍN+CHÍN

Ảnh bìa 1. Nhà toán học, thiên văn học Pháp, *Joseph Louis Lagrange* (1736 – 1813).

Biên tập: LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG ***Mĩ thuật:*** QUỐC HIỆP, THANH LONG
Trị sự, phát hành: NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN ***Thiết kế, chế bản:*** NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

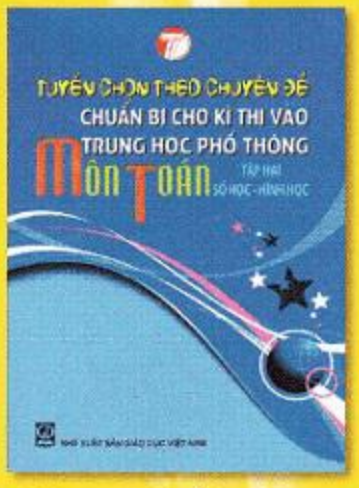
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ

CHUẨN BỊ CHO KÌ THI VÀO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG MÔN TOÁN

Bộ sách gồm hai tập tuyển chọn theo chuyên đề những bài viết hay trên Tạp chí TH&TT và một số bài viết thêm của các nhà giáo có kinh nghiệm nhằm giúp các bạn HS THCS ôn tập và thi có hiệu quả vào lớp 10 các trường THPT và THPT chuyên. Bộ sách cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho các thầy cô giáo và các bậc phụ huynh HS.

200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng



200 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 35.000 đồng

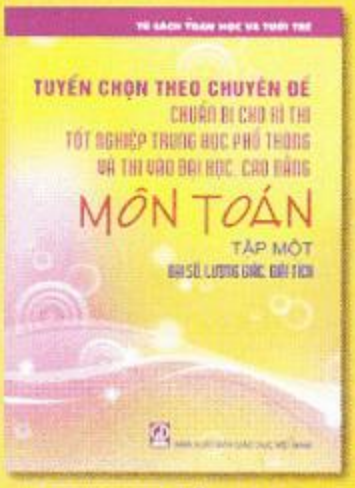
GIÁ BÌA=CHÍN+CHÍN+CHÍN

Bộ sách TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ

CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Bộ sách có hai tập gồm 10 chương với nhiều chuyên đề được tuyển chọn từ các bài viết của các thầy cô giáo giỏi chuyên môn và có kinh nghiệm giảng dạy trong cả nước, được sắp xếp theo đúng thứ tự trong Cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Phần cuối mỗi cuốn giới thiệu một số đề tự luyện và có hướng dẫn giải.



260 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 46.000 đồng

240 trang, Khổ 17×24cm
Giá bìa: 44.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

HỘI THẢO

SÁCH GIÁO KHOA THEO ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC: NHÌN TỪ KINH NGHIỆM QUỐC TẾ

Thực hiện Nghị quyết số 88/2014/QH13 ngày 28 tháng 11 năm 2014 của Quốc hội về đổi mới chương trình, sách giáo khoa giáo dục phổ thông, triển khai nhiệm vụ biên soạn sách giáo khoa theo chương trình giáo dục phổ thông mới, với mục đích trao đổi, học hỏi kinh nghiệm quốc tế trong việc biên soạn sách giáo khoa, NXB Giáo dục Việt Nam tổ chức Hội thảo *Sách giáo khoa theo định hướng phát triển năng lực: Nhìn từ kinh nghiệm quốc tế*.

Tại Hội thảo, các chuyên gia đến từ Viện Bồi dưỡng Giáo dục thuộc Trường Đại học Potsdam – Đức và chuyên gia của Đại học Timepere – Phần Lan đã trình bày nhiều vấn đề quan trọng và thú vị về kinh nghiệm làm sách giáo khoa phát triển năng lực. Hội thảo được diễn ra trong 3 ngày 16, 17 và 18 tháng 3 năm 2018 tại Hà Nội và 3 ngày 20, 21 và 22 tháng 3 năm 2018 tại TP. Hồ Chí Minh. Hội thảo là một bước chuẩn bị của NXB Giáo dục Việt Nam nhằm thực hiện nhiệm vụ biên soạn SGK mới phục vụ đổi mới giáo dục phổ thông. Dưới đây là một số hình ảnh trong các buổi Hội thảo tại Hà Nội và TP. Hồ Chí Minh.

Chủ tịch HĐTV NXBGD Việt Nam *Nguyễn Đức Thái* phát biểu khai mạc Hội thảo.

GS. *Bernd Meier* và TS. *Nguyễn Văn Cường* chia sẻ các quan điểm cơ bản về biên soạn sách giáo khoa.

Bà *Eenariina Hämäläinen*, chuyên gia của Đại học Timepere chia sẻ về cách biên soạn sách giáo khoa ở Phần Lan.

Quang cảnh trong Hội thảo tại Hà Nội

Trao đổi trong Hội thảo tại TP. Hà Nội

Trao đổi trong Hội thảo tại TP. Hồ Chí Minh

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT04M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 04 năm 2018

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng