TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

8 2011
Số 410

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 48
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.
ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

ĐOÀN VIỆT NAM TẠI KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ
lần thứ 52 - năm 2011

DÀNH CHO TRUNG HỌC CƠ SỞ

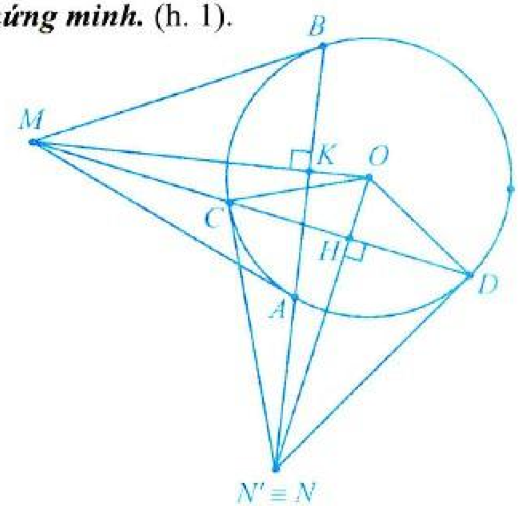
MỘT SỐ TÍNH CHẤT THÚ VỊ CỦA TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

DƯƠNG BỬU LỘC
(GV THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh)

Trong các Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 thường xuất hiện dạng bài toán đường tròn có hai tiếp tuyến cắt nhau. Ở bài báo này chúng tôi xin nêu một vài tính chất thú vị về đường thẳng qua hai tiếp điểm.

TÍNH CHẤT 1. *Nếu từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD với (O) thì đường thẳng AB luôn đi qua giao điểm N của hai tiếp tuyến tại C và D với đường tròn (O).*

Chứng minh. (h. 1).

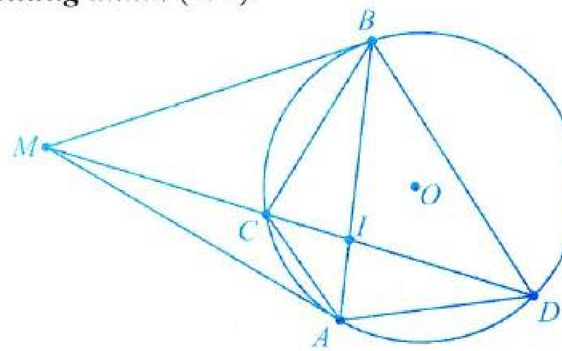


Hình 1

Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với với CD cắt CD tại H, cắt AB tại N'. Do OM vuông góc với AB tại K nên tứ giác $MKHN'$ nội tiếp, suy ra $OH.ON' = OK.OM = OB^2 = OC^2 = OD^2$ $\Rightarrow N'D \perp OD$, $N'C \perp OC \Rightarrow N' \equiv N$. Do đó ba điểm A, B, N thẳng hàng. ❐

TÍNH CHẤT 2. *Nếu từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và một cát tuyến MCD với (O) thì đường thẳng AB luôn cắt CD tại điểm I thỏa mãn hệ thức $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{MC}{MD}$.*

Chứng minh. (h. 2).



Hình 2

Ta có $$\frac{MC}{MD} = \frac{MC.MD}{MD^2} = \frac{MA^2}{MD^2} = \frac{MA}{MD}\cdot\frac{MB}{MD} = \frac{AC}{AD}\cdot\frac{BC}{BD}$$

(do $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$, $\Delta MBC \backsim \Delta MDB$)

$$= \frac{AC}{BD}\cdot\frac{BC}{AD} = \frac{IC}{IB}\cdot\frac{IB}{ID} = \frac{IC}{ID}$$

(do $\Delta IAC \backsim \Delta IDB$, $\Delta IBC \backsim \Delta IDA$). ❐

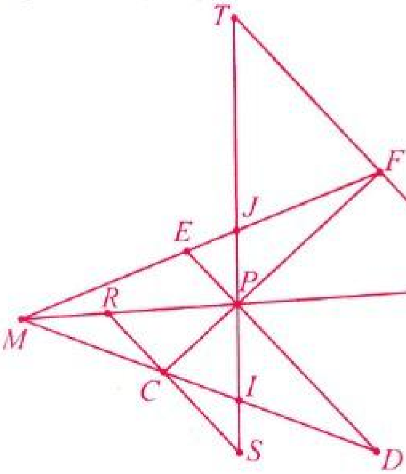
TÍNH CHẤT 3. *Nếu từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB và hai cát tuyến MCD, MEF với (O) thì đường thẳng AB luôn đi qua giao điểm (nếu có) của các cặp đường thẳng DE và CF, CE và DF.*

Để chứng minh tính chất 3 ta cần bổ đề sau.

Bổ đề. *Giả sử đường thẳng CD và đường thẳng EF cắt nhau tại M, đường thẳng DE và đường thẳng CF cắt nhau tại P. Một đường thẳng bất kì qua P cắt CD, EF lần lượt tại I và J.*

Khi đó, nếu $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{IC}{ID}$ thì $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{JE}{JF}$.

Chứng minh. (h. 3).



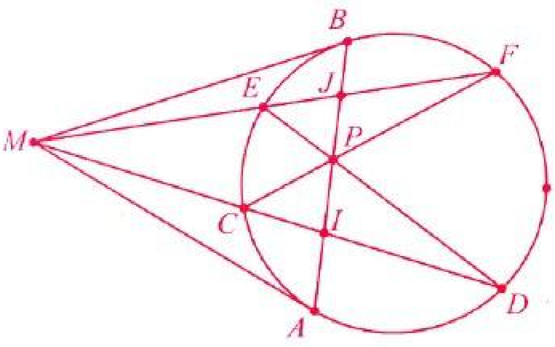
Hình 3

Từ C kẻ đường thẳng song song với DE cắt MP, IJ lần lượt tại R, S.

Từ F kẻ đường thẳng song song với DE cắt MP, IJ lần lượt tại U, T. Ta có

$$\frac{JE}{JF}=\frac{PE}{TF}=\frac{PE}{FU}.\frac{FU}{TF}$$
$$=\frac{ME}{MF}.\frac{CR}{CS}=\frac{ME}{MF}.\frac{CR}{PD}.\frac{PD}{CS}$$
$$=\frac{ME}{MF}.\frac{MC}{MD}.\frac{ID}{IC}=\frac{ME}{MF}\left(\text{do } \frac{MC}{MD}=\frac{IC}{ID}\right).$$

Chứng minh tính chất 3. (h. 4).



Hình 4

Gọi P là giao điểm của DE và CF; Q là giao điểm của CE và DF; J là giao điểm của AB và EF.

Theo tính chất 2, ta có $\frac{ME}{MF}=\frac{JE}{JF}$ (1)

Gọi J' là giao điểm của IP và EF.

Theo bổ đề, ta có $\frac{ME}{MF}=\frac{J'E}{J'F}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra J trùng J'. Chứng tỏ điểm P nằm trên AB. Chứng minh tương tự ta được điểm Q nằm trên AB. ❒

Cuối cùng, mời bạn đọc vận dụng ba tính chất trên để giải các bài tập sau.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Từ điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn. Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (O) tại C và D cắt nhau tại một điểm nằm trên AB.

(Đề thi vào lớp 10 TP. Hồ Chí Minh năm 2008)

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E, D. Gọi H là giao điểm của BD, CE. Từ A kẻ các tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) với M, N là các tiếp điểm. Chứng minh rằng ba điểm M, H, N thẳng hàng.

(Đề thi vào lớp 10 TP. Hồ Chí Minh năm 2006)

3. Chứng minh rằng nếu tứ giác $ABCD$ có các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tiếp xúc với một đường tròn tại M, N, P, Q thì bốn đường thẳng AC, BD, MP, NQ đồng quy.

4. Cho đường tròn (O). Từ một điểm A bên ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN (B, C là các tiếp điểm, M nằm giữa A và N). Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với OB cắt BC, BN lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng $DM = DE$.

5. Giả sử tứ giác nội tiếp $ABCD$ có AB cắt CD tại M, AD cắt BC tại N, AC cắt BD tại P. Chứng minh rằng OP vuông góc với MN.

6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi P là giao điểm của AD và BC, Q là giao điểm của AB và DC. Từ Q vẽ các tiếp tuyến QE, QF với (O). Chứng minh rằng ba điểm P, E, F thẳng hàng.

7. Cho sáu điểm phân biệt A, B, C, D, E, F nằm trên cùng một đường tròn (O) theo thứ tự đó. Các tiếp tuyến tại A, D với (O) và các đường thẳng BF, CE đồng quy. Chứng minh rằng ba đường thẳng AD, BC, EF hoặc cùng song song hoặc đồng quy.

8. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O) có các cạnh AB, BC, CD, DA tiếp xúc với (O) lần lượt tại G, H, K, L. Gọi E là giao điểm của AB và CD; F là giao điểm của AD và BC và P là giao điểm của GK và HL. Chứng minh rằng OP vuông góc với EF.

International Mathematical Olympiad Amsterdam 2011

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ

LẦN THỨ 52 - NĂM 2011

HÀ HUY KHOÁI
(*Trưởng đoàn Việt Nam*)

Kì thi Olympic Toán học Quốc tế lần thứ 52 (IMO 2011) diễn ra tại Amsterdam, Hà Lan, từ ngày 12 đến 24/7/2011. Kì thi lần này có 101 nước và vùng lãnh thổ cử đội tuyển học sinh tham gia, với 564 thí sinh, và 2 nước tham gia với tư cách quan sát viên.

Đoàn Việt Nam tham dự IMO 2011 gồm 6 học sinh: *Võ Văn Huy*, Lớp 12, THPT Lê Hồng Phong, **Phú Yên**; *Nguyễn Thành Khang*, Lớp 12, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**; *Lê Hữu Phước*, Lớp 12, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, *Nguyễn Văn Quý*, Lớp 12, THPT chuyên **Bắc Ninh**; *Nguyễn Văn Thế*, Lớp 12, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định;** *Đỗ Kim Tuấn*, Lớp 12, THPT chuyên Hà Nội – Amsterdam, **Hà Nội** và các Thầy giáo *Hà Huy Khoái* (Viện Toán học, Trưởng đoàn); *Nguyễn Khắc Minh* (Bộ GD&ĐT, Phó đoàn) cùng với một số Quan sát viên.

Như thường lệ, có 6 bài thi, chia làm 2 ngày, mỗi ngày 3 bài thi làm trong thời gian 4 giờ 30 phút, với số điểm tối đa cho mỗi bài là 7.

Các nước có đề được chọn là: Mexico (B1), Anh (B2), Bêloruxia (B3), Iran (B4, B5), Nhật Bản (B6). Theo đánh giá chung, đề thi năm nay khá hay, đặc biệt là bài 2 (Tổ hợp) và bài 6 (Hình học). Trong buổi thảo luận về việc chọn đề, nhiều ý kiến cho rằng, cần "*chấm dứt mạch 18 năm liên tục có 2 bài hình trong đề thi*", và đề nghị thay vào đó là 2 bài tổ hợp. Như vậy cấu trúc đề thi năm nay như sau: trong 2 bài "dễ" (B1, B4) có 1 bài Đại số – Số học, 1 bài Tổ hợp; trong 2 bài "trung bình" (B2, B5) có 1 bài Tổ hợp, 1 bài Số học; trong 2 bài khó (B3, B6) có một bài Đại số, 1 bài Hình học.

Có thể nhận thấy bài ra năm nay có nhiều chỗ khá tinh tế. Chẳng hạn Bài 2, Bài 3, và Bài 6, mà nhiều bạn nhìn qua nghĩ là không khó. Tuy nhiên lời giải (của những bạn trong đội tuyển và của nhiều bạn khác đưa lên mạng) thường mắc sai lầm khi nhận định những trường hợp "tương tự", "dễ suy ra", mà không nhận thấy đó chính là những điểm tinh tế nhất của bài toán. Do đó điểm đạt được chỉ là 0–2. Bạn *Nguyễn Văn Quý* có lời giải khá độc đáo cho Bài 3, tiếc rằng không kết thúc được!

Tuân thủ nguyên tắc 1/2 tổng số thí sinh được nhận Huy chương, trong đó tỉ lệ Vàng : Bạc : Đồng là 1 : 2 : 3, căn cứ điểm của thí sinh, Ban Giám khảo đã quyết định trao Huy chương Đồng cho những người có tổng điểm từ 16 đến 21; Huy chương Bạc: tổng điểm từ 22 đến 27; Huy chương Vàng: tổng điểm từ 28 đến 42. Người duy nhất đạt điểm tuyệt đối 42/42 là thí sinh *Lisa Sauermann*, Đức.

Cả sáu bạn trong đội tuyển Việt Nam đều được trao Huy chương Đồng với kết quả cụ thể trong bảng cuối trang.

Theo quy định, các kì IMO không tính "giải đồng đội", tuy nhiên nếu xếp theo tổng điểm thì thứ tự 10 đoàn đầu tiên sẽ là: 1. Trung Quốc, 2. Mỹ, 3. Singapore, 4. Nga, 5. Thái Lan, 6. Thổ Nhĩ Kỳ, 7. Triều Tiên, 8. Đài Loan, 9. Rumani, 10. Iran. Đoàn Việt Nam xếp thứ 31 trên tổng số 101 đoàn tham gia.

Họ và tên	*Điểm bài thi*					
	Bài 1	*Bài 2*	*Bài 3*	*Bài 4*	*Bài 5*	*Bài 6*
Võ Văn Huy	7	0	1	7	2	0
Nguyễn Thành Khang	7	1	1	7	2	0
Lê Hữu Phước	7	0	0	7	7	0
Nguyễn Văn Quý	7	0	4	0	7	1
Nguyễn Văn Thế	7	0	2	1	7	0
Đỗ Kim Tuấn	7	0	0	7	7	0

Vài nhận xét.

1) Trong kì thi này có thể thấy sự tiến bộ vượt bậc của một số nước. Điển hình là Singapore (vị trí của Singapore trong 5 năm gần đây: 22 (2010); 30 (2009); 32 (2008); 36 (2007); 27 (2006). Đặc biệt, nếu như từ khi bắt đầu tham gia Olympic (1988), họ mới đạt 01 Huy chương Vàng (1996), thì năm nay Singapore đạt 4 Huy chương Vàng, và trong số 10 thí sinh có điểm cao nhất, đoàn Singapore chiếm đến 3. Một số đoàn khác, như Thái Lan, Thổ Nhĩ Kỳ cũng giữ vững vị trí cao, nhiều nước ở châu Mỹ Latinh và châu Phi cũng cải thiện đáng kể trên bảng xếp hạng.

2) Năm nay lần đầu tiên sau nhiều năm, đoàn Việt Nam không có Huy chương Vàng, thậm chí là Huy chương Bạc. Đồng thời thứ tự cũng thấp nhất (31/101) trên bảng xếp hạng kể từ khi tham gia Olympic. Việc đội tuyển Việt Nam sẽ không còn mạnh như nhiều năm trước đây là điều đã được cảnh báo trong nhiều hội thảo của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Do nhiều nguyên nhân, học sinh ngày nay không còn mặn mà với các kì thi học sinh giỏi. Việc bỏ các kì thi học sinh giỏi và các trường chuyên cấp THCS cũng làm cho trình độ học sinh bị giảm sút. Nhiều kiến thức phải học rất vội vàng trong thời gian ngắn trước khi đi thi và rất thiếu cơ bản. Mặt khác, nhiều nước ngày càng cải tiến quy trình tuyển chọn, bồi dưỡng nên đội tuyển của họ mạnh dần qua từng năm và do đó đẩy lùi dần vị trí của đội tuyển Việt Nam! Nếu chúng ta không có những giải pháp hữu hiệu thì chắc chắn chúng ta ngày càng bị các đội khác bỏ xa. Việc đội tuyển Việt Nam gặp "bất lợi" do cấu trúc đề thi năm nay chỉ làm ta thấy rõ hơn và nhanh hơn xu hướng đó.

3) Năm nay Ban Giám khảo dành đến ba buổi để thảo luận về việc thay đổi quy chế của kì thi, để đảm bảo đề thi được giữ bí mật tuyệt đối trong thời đại công nghệ thông tin hiện nay. Kết quả là: Hoãn việc bỏ phiếu về những đề nghị thay đổi đến IMO 2012 ; lập Ban kiểm tra với nhiệm vụ xem xét lại những bài thi có dấu hiệu "đáng ngờ" trong khoảng từ nay đến IMO 2012 và nếu thấy có điều gì bất thường sẽ trình lên Ban Giám khảo IMO 2012. Việc này sẽ được tiến hành thường xuyên, cũng tương tự như "kiểm tra doping" của thể thao sau ngày kết thúc giải đấu.

IMO 2012 sẽ được tổ chức ở Achentina.

Sau đây là 6 bài toán thi.

NGÀY THỨ NHẤT (18/7/2011)

Bài 1. *Cho tập hợp $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ gồm bốn số nguyên dương phân biệt, ta kí hiệu tổng $a_1+a_2+a_3+a_4$ bởi s_A. Giả sử n_A là số các cặp (i, j) với $1\le i\le j\le 4$ sao cho a_i+a_j chia hết s_A. Tìm tất cả các tập hợp A gồm bốn số nguyên dương phân biệt mà với chúng n_A đạt được giá trị lớn nhất có thể.*

Bài 2. *Giả sử S là một tập hợp hữu hạn điểm trên mặt phẳng với ít nhất hai điểm. Giả thiết rằng không có ba điểm nào của S cùng nằm trên một đường thẳng.* ***Cối xay gió*** *là một quá trình bắt đầu với một đường thẳng l đi qua chỉ một điểm $P\in S$. Đường thẳng này quay theo chiều kim đồng hồ chung quanh* ***tâm*** *P cho đến khi lần đầu tiên gặp một điểm khác nào đó của S. Điểm này, kí hiệu Q, lại được lấy làm tâm mới, và bây giờ đường thẳng quay theo chiều kim đồng hồ chung quanh Q, cho đến khi gặp điểm tiếp theo của S. Quá trình được tiếp tục không dừng, với tâm luôn luôn là một điểm của S.*

Chứng minh rằng ta có thể chọn điểm $P\in S$ và đường thẳng l đi qua P sao cho cối xay gió nhận mỗi điểm của S làm tâm quay vô hạn lần.

Bài 3. *Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm giá trị thực xác định trên tập các số thực và thỏa mãn*

$$f(x+y)\le yf(x)+f(f(x))$$

với mọi số thực x và y. Chứng minh rằng $f(x)=0$ với mọi $x\le 0$.

NGÀY THỨ HAI (19/7/2011)

Bài 4. *Giả sử $n>0$ là một số nguyên. Cho một cái cân hai đĩa và n quả cân với trọng lượng là 2^0, $2^1,\ldots,2^{n-1}$. Ta muốn đặt lên cái cân mỗi một trong n quả cân, lần lượt từng quả một, theo cách để bảo đảm đĩa cân bên phải không bao giờ nặng hơn đĩa cân bên trái. Ở mỗi bước ta chọn một trong các quả cân chưa được đặt lên cân, rồi đặt nó hoặc vào đĩa bên trái, hoặc vào đĩa bên phải, cho đến khi tất cả các quả cân đều đã được đặt lên cân. Xác định xem có bao nhiêu cách để thực hiện được mục đích đề ra?*

Bài 5. *Giả sử f là một hàm từ tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ vào tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$. Giả thiết rằng với hai số nguyên tùy ý m và n, hiệu $f(m)-f(n)$ chia hết cho $f(m-n)$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên m, n nếu $f(m)\le f(n)$, thì $f(n)$ chia hết cho $f(m)$.*

Bài 6. *Giả sử ABC là một tam giác nhọn với đường tròn ngoại tiếp Γ. Giả sử l là một tiếp tuyến nào đó của Γ, và giả sử l_a, l_b và l_c là những đường thẳng nhận được bằng cách lấy đối xứng l qua các đường BC, CA, và AB tương ứng. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác tạo thành bởi các đường thẳng l_a, l_b và l_c tiếp xúc với đường tròn Γ.*

ĐỀ THI VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG HÀ NỘI

Năm học 2011 - 2012

VÒNG 1

(Dành cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)

(Thời gian làm bài : 120 phút)

Câu 1. (3 *điểm*)

1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)y^2+x+y=3\\(y-2)x^2+y=x+1.\end{cases}$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}.$$

Câu 2. (3 *điểm*)

1) Chứng minh rằng không tồn tại các bộ ba số nguyên $(x\,;y\,;z)$ thỏa mãn đẳng thức

$$x^4+y^4=7z^4+5.$$

2) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x\,;y)$ thỏa mãn đẳng thức

$$(x+1)^4-(x-1)^4=y^3.$$

Câu 3. (3 *điểm*)

Cho hình bình hành $ABCD$ với $\widehat{BAD}<90^\circ$. Đường phân giác của góc $\widehat{BCD}$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O khác C. Kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng (d) lần lượt cắt các đường thẳng CB, CD tại E, F.

1) Chứng minh rằng $\Delta OBE=\Delta ODC$.

2) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

3) Gọi giao điểm của OC và BD là I, chứng minh rằng $IB.BE.EI=ID.DF.FI$.

Câu 4. (1 *điểm*)

Với x, y là những số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}.$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (3 *điểm*)

1) Giải phương trình

$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}x^2+y^2=2x^2y^2\\(x+y)(1+xy)=4x^2y^2.\end{cases}$$

Câu 2. (2,5 *điểm*)

1) Với mỗi số thực a ta gọi phần nguyên của a là số nguyên lớn nhất không vượt qua a và kí hiệu là $[a]$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, biểu thức $n+\left[\sqrt[3]{n-\frac{1}{27}}+\frac{1}{3}\right]^2$ không biểu diễn được dưới dạng lập phương của một số nguyên dương.

2) Với x, y, z là các số thực dương thỏa mãn đẳng thức $xy+yz+zx=5$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{3x+3y+2z}{\sqrt{(6(x^2+5)}+\sqrt{6(y^2+5)}+\sqrt{z^2+5}}.$$

Câu 3. (3,5 *điểm*)

Cho hình thang $ABCD$ với BC song song với AD. Các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{CDA}$ là các góc nhọn. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. P là điểm bất kì trên đoạn thẳng BC (P không trùng với B, C). Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BIP cắt đoạn thẳng PA tại M khác P và đường tròn ngoại tiếp tam giác CIP cắt đoạn thẳng PD tại N khác P.

1) Chứng minh rằng năm điểm A, M, I, N, D cùng nằm trên một đường tròn. Gọi đường tròn này là (K).

(Xem tiếp trang 28)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

Năm học 2011 - 2012

(Đề thi đã đăng trên THTT số 409, tháng 7 năm 2011)

VÒNG 1

Câu 1. 1) *Đáp số.* $A=\dfrac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)}$.

2) Với $y=1$ thì $A=\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow 4x^3-8x^2+11x-7=0$ $\Leftrightarrow x=1$.

Câu 2. Gọi năng suất dự kiến là x sản phẩm mỗi ngày ($x\in\mathbb{N}^*$). Thời gian hoàn thành theo kế hoạch là $\dfrac{200}{x}$. Bốn ngày đầu họ làm được $4x$ sản phẩm. Trong những ngày sau năng suất là $x+10$ sản phẩm mỗi ngày. Số ngày hoàn thành số sản phẩm còn lại là $\dfrac{200-4x}{x+10}$. Theo bài ra ta có

$$\frac{200}{x}=\frac{200-4x}{x+10}+4+2\Leftrightarrow x=20\ \text{(do } x\in\mathbb{N}^*).$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày nhóm công nhân cần sản xuất 20 sản phẩm.

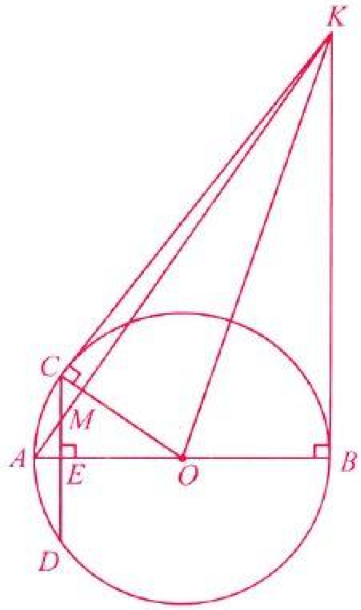
Câu 3. PT hoành độ giao điểm giữa parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$x^2=mx-m^2+3\Leftrightarrow x^2-mx+m^2-3=0 \qquad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT (1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=12-3m^2>0\Leftrightarrow -2<m<2$. Ta có

$$\begin{cases}x_1>0\\x_2>0\\x_1^2+x_2^2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\x_1+x_2=m>0\\x_1.x_2=m^2-3>0\\(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Câu 4. (h. 1). 1) Trong tam giác vuông CEO có $CE=\sqrt{CO^2-OE^2}=3$. Do $\widehat{CAE}=\widehat{KOB}=\dfrac{1}{2}\widehat{COB}$ và $\widehat{CEA}=\widehat{KBO}=90^o$ nên $\Delta AEC\backsim\Delta OBK$, suy ra $\dfrac{KB}{CE}=\dfrac{OB}{AE}\Rightarrow KB=\dfrac{CE.OB}{AE}=15.$



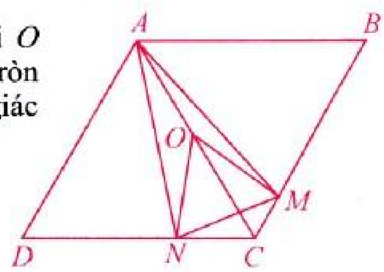
Hình 1

2) Do $ME//BK$ nên $\dfrac{ME}{BK}=\dfrac{AE}{AB}\Rightarrow ME=\dfrac{BK.AE}{AB}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow CM=CE-ME=\dfrac{3}{2}.$

Vậy $S_{CKM}=\dfrac{1}{2}CM.BE=\dfrac{27}{4}$ (đvdt).

Câu 5. (h. 2). Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MAN. Ta có $\widehat{MON}=2\widehat{MAN}=60^o$; $OM=ON$ nên $\widehat{OMN}=\widehat{ONM}=60^o$.



Hình 2

Do $\widehat{MON}+\widehat{MCN}=180^o$ nên tứ giác $OMCN$ nội tiếp, từ đó $\widehat{OCN}=\widehat{OMN}=60^o$. Mà $\widehat{ACN}=\dfrac{120^o}{2}=60^o$. Suy ra A, O, C thẳng hàng. Vậy O thuộc đường thẳng AC cố định.

Câu 6. Đặt $S_1=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}$,

$S_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$.

Khi đó, ta có $S_1+S_2=\sqrt{81}-\sqrt{1}=8$.

Lại có $\sqrt{2k}-\sqrt{2k-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k-1}}$

$>\dfrac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+1}}=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}$ với $k\ge 1$.

Do vậy $S_1>S_2$ nên $S_1>4$.

VÒNG 2

Câu 1. 1) Từ giả thiết suy ra $a>0$ và

$a+\dfrac{\sqrt{2}}{8}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}}\Rightarrow\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{8}\right)$

$\Rightarrow 4a^2+\sqrt{2}a-\sqrt{2}=0$ (1)

2) Từ (1) suy ra

$a^2=\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{4}\Rightarrow S=a^2+\sqrt{\dfrac{(1-a)^2}{8}+a+1}$

$=a^2+\dfrac{a+3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(1-a)}{4}+\dfrac{(a+3)\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}.$

Câu 2. 1) ĐK $x+y>0$. Ta có PT thứ nhất của hệ tương đương với

$$(x+y)^2-1+2xy\left(\dfrac{1}{x+y}-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(x+y-1)-\dfrac{2xy(x+y-1)}{x+y}=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$

$\Leftrightarrow x+y=1$ (do $x^2+y^2+x+y>0$).

Kết hợp với PT thứ hai của hệ ta có

$\begin{cases}x+y=1\\x^2-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\y=3.\end{cases}$

2) Ta có $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0$

$\Leftrightarrow ab(a+b)^2+2(a+b)+1=0$

$\Leftrightarrow (ab-1)(a+b)^2+(a+b+1)^2=0$ (1)

Từ (1) suy ra $a+b\neq 0$ và $1-ab=\left(\dfrac{a+b+1}{a+b}\right)^2$ (đpcm).

Câu 3. Giả sử $a\ge b\ge c$. Ta có

$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

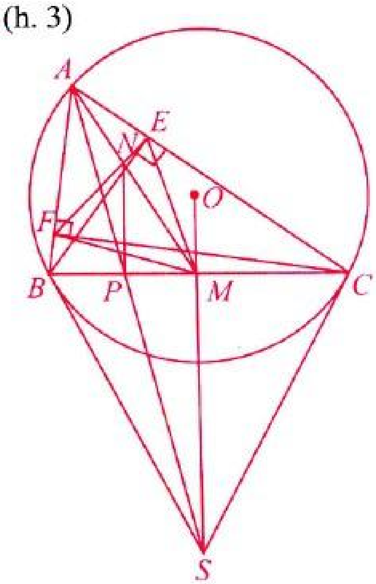
Vì p là số nguyên tố và $p\ge 3$, suy ra $a^4+b^4+c^4$ chia hết cho p khi và chỉ khi $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ chia hết cho p hay $a^2b^2+c^2(a^2+b^2)\,\vdots\,p$

$\Leftrightarrow a^2b^2-c^4\,\vdots\,p\Leftrightarrow (ab-c^2)(ab+c^2)\,\vdots\,p.$

Do $p=a^2+b^2+c^2>ab+c^2>ab-c^2\ge 0$ và p là số nguyên tố nên $ab-c^2=0\Rightarrow a=b=c$

$\Rightarrow p=3a^2\Rightarrow a=b=c=1$ và $p=3$.

Câu 4. (h. 3)



Hình 3

1) Do $\widehat{BAE}=\widehat{SBM}$ và $\widehat{AEB}=\widehat{BMS}=90^o$ nên $\Delta AEB\backsim\Delta BMS$, suy ra $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BS}{BM}$.

Mà $BM=ME$ nên $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{BS}{ME}$ (1)

2) Tam giác BME cân tại M nên $\widehat{MEB}=\widehat{MBE}$.

Lại có $\widehat{SBM}+\widehat{ABE}=\widehat{BAE}+\widehat{ABE}=90^o=\widehat{AEB}$

$\Rightarrow\widehat{SBA}=\widehat{AEM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AEM\backsim\Delta ABS$.

3) Từ kết quả câu 2 ta có $\widehat{BAP}=\widehat{EAN}$. Mà $\widehat{ABP}=\widehat{AEN}$ (cùng bù với $\widehat{CEF}$) nên $\Delta AEN\backsim\Delta ABP$, suy ra $\dfrac{AN}{AP}=\dfrac{NE}{PB}$ (3)

Vì $\Delta MAE\backsim\Delta SAB$ (câu 2) và tương tự ta có $\Delta MAF\backsim\Delta SAC$ nên $\widehat{AME}=\widehat{ASB}$, $\widehat{AMF}=\widehat{ASC}$

(Xem tiếp trang 11)

GS NGÔ BẢO CHÂU GIẢNG BÀI KHAI TRƯƠNG VIỆN NGHIÊN CỨU CAO CẤP VỀ TOÁN

(Tặng GS. *Ngô Bảo Châu*, khi anh bước sang tuổi 40, vào ngày 28/6/2011)

TRẦN VĂN NHUNG
(Tổng Thư kí Hội đồng Chức danh giáo sư nhà nước, nguyên Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

*Vào lúc 9 giờ sáng ngày 23/6/2011, tại Trụ sở của Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán (Viện NCCCT, tên tiếng Anh: Vietnam Institute for Advanced Studies in Mathematics, VIASM) ở Tòa nhà Thư viện Tạ Quang Bửu, Trường ĐHBK Hà Nội, GS. TSKH.**Ngô Bảo Châu** - người vừa được tặng Giải thưởng Fields cao quý nhất về Toán học trên thế giới (gọi như nhà báo **Hàm Châu** là "Giải Nobel Toán học") vào ngày 19/8/2010, đã có bài giảng đầu tiên để bắt đầu một chuỗi các hoạt động khoa học khai trương Viện này.*

1. XÂY DỰNG VIỆN VÀ CHƯƠNG TRÌNH TOÁN HỌC

Sau thành tựu Toán học xuất sắc và vang dội thế giới của GS. TSKH *Ngô Bảo Châu*, được sự quan tâm của Đảng và Nhà nước, mà trực tiếp là Thủ tướng *Nguyễn Tấn Dũng* và Phó Thủ tướng, GS. TS. *Nguyễn Thiện Nhân*, Chính phủ đã ra quyết định thành lập Viện NCCCT và phê duyệt Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010–2020 (gọi tắt là Chương trình). Bộ trưởng Bộ GD&ĐT GS. TS. *Phạm Vũ Luận*, cũng đã kí Quyết định bổ nhiệm GS. TSKH. *Ngô Bảo Châu* làm Giám đốc Khoa học, GS. TSKH. *Lê Tuấn Hoa* làm Giám đốc Điều hành của Viện, GS. TSKH. *Bùi Văn Ga* làm Trưởng Ban Điều hành và GS. TSKH. *Trần Văn Nhung* làm Phó Trưởng Ban Điều hành Chương trình. Sau bài giảng đầu tiên, GS. *Ngô Bảo Châu*, GS. *Lê Tuấn Hoa*, GS. *Ngô Việt Trung*, GS. *Trần Văn Nhung* đã được Phó Thủ tướng GS. *Nguyễn Thiện Nhân*, Bộ trưởng GS. *Phạm Vũ Luận* và Thứ trưởng GS. *Bùi Văn Ga* tiếp thân mật, trao đổi về công việc và những khó khăn cụ thể để Chính phủ và các Bộ, Ngành hỗ trợ Viện sớm đưa các hoạt động khoa học vào nề nếp. Nghe tin Việt Nam đã thành lập Viện NCCCT, một số nước, một số nhà khoa học (có cả những nhà toán học đã từng nhận Giải thưởng Fields) đã chúc mừng và hứa sẽ sang thăm, giảng bài và hợp tác nghiên cứu toán học tại Viện khi điều kiện làm việc và cơ sở vật chất ở đây tạm hoàn thiện.

Trước khi bắt đầu bài giảng của GS. *Ngô Bảo Châu*, GS. *Lê Tuấn Hoa* đã thông báo cho các thính giả biết việc bổ nhiệm hai đồng Giám đốc và chương trình khoa học kì này của Viện. Thay mặt Hội đồng Chức danh giáo sư nhà nước (HĐCDGSNN), Tổng Thư kí GS. *Trần Văn Nhung*, Ủy viên GS. *Nguyễn Ngọc Thanh*, GS. *Nguyễn Phùng Hồng* và Chánh Văn phòng PGS. *Đỗ Tất Ngọc* đã tặng hoa và chúc mừng Giám đốc Khoa học GS. *Ngô Bảo Châu* và Giám đốc Điều hành GS. *Lê Tuấn Hoa*. Xin nhắc lại rằng, TSKH. *Ngô Bảo Châu* đã được phong GS của ĐH Paris 11 năm 2004 khi anh 32 tuổi và được HĐCDGSNN phong đặc cách GS của Việt Nam năm 2005 khi anh 33 tuổi. Năm 2004 anh được trao Giải thưởng Clay cùng với thầy mình là GS. *G. Laumon* vì chứng minh được Bổ đề cơ bản cho các nhóm Unita. Cho đến nay anh vẫn là người giữ kỉ lục GS trẻ nhất khi được phong và hiện vẫn đang là GS trẻ nhất Việt Nam (39 tuổi, vào năm 2011).

GS. *Ngô Bảo Châu* sẽ làm việc ba tháng hè này tại Việt Nam. Trước khi đến làm việc và giảng bài tại Viện NCCCT trong Tòa nhà Thư viện Tạ Quang Bửu, anh đã dâng hương, hoa trước tượng của GS. *Tạ Quang Bửu* (1910 – 1986) để tưởng nhớ đến Cố Hiệu trưởng Trường ĐHBK Hà Nội và Cố Bộ trưởng Bộ ĐH&THCN – người đã có công lao to lớn xây dựng và phát triển nền giáo dục đại học, khoa học, nói riêng là Toán học và đào tạo nhân tài cho đất nước, cùng với những nhà toán học lão thành xuất sắc khác, như GS. *Lê Văn Thiêm*, GS. *Hoàng Tụy*, GS. *Nguyễn Cảnh Toàn*, GS. *Phan Đình Diệu*, GS. *Nguyễn Thúc Hào*,… GS. *Ngô Bảo Châu* nguyên là học sinh Khối chuyên Toán A0 khóa XII của Trường ĐHTH Hà Nội, mà sự ra đời của hệ này do đề xuất của GS. *Hoàng Tụy* và được sự ủng hộ của các GS nói trên. Thật là có ý nghĩa khi nhớ lại: Năm 1974 (khi ấy anh mới 2 tuổi), GS. *Tạ Quang Bửu* đã mời một số nhà toán học giỏi người Pháp và người Việt Nam ở Pháp, như GS. *B. Malgrange*, GS. *F. Phạm*, GS. *Lê Dũng Tráng* và GS. *A. Chenciner* sang Việt Nam để tổ chức một chuỗi bài giảng về Lí thuyết các kì dị, cũng tại ĐHBK Hà Nội. Là một sinh viên ĐHTH Hà Nội mới ra trường, tôi cũng được đến nghe giảng. Khi đó lí thuyết này còn rất mới mẻ trên thế giới nhưng đã hứa hẹn nhiều ứng dụng quan trọng. Nhờ vậy mà đến nay Việt Nam đã hình thành được một nhóm nghiên cứu mạnh trong lĩnh vực này.

Khác với năm 1974, lần này Việt Nam đã có hẳn một viện để tổ chức các bài giảng một cách bài bản, đó là Viện NCCCT, và giảng viên là GS. *Ngô Bảo Châu* và các GS, các nhà toán học xuất sắc trong và ngoài nước, 100% là người Việt Nam. Tất nhiên nay mai sẽ có thêm những bài giảng của các nhà khoa học hàng đầu thế giới và sự tham gia của các thính giả quốc tế nữa. Chỉ qua ví dụ so sánh đơn giản này, chúng ta đã có thể thấy một bước tiến đáng trân trọng của nền Toán học nước nhà. Càng tự hào bao nhiêu chúng ta càng nhớ đến công lao to lớn của các bậc thầy đi trước bấy nhiêu, những nhà toán học đã có tầm nhìn chiến lược tạo nên đội ngũ hôm nay những người Việt Nam giảng dạy, nghiên cứu và ứng dụng toán học ở trong và ngoài nước. Đồng thời chúng ta cũng phải luôn luôn ghi nhớ sự giúp đỡ và hợp tác của bạn bè, đồng nghiệp quốc tế, phải "fairplay", và hậu thế phải tiếp bước các bậc tiền bối để phát triển Toán học Việt Nam lên một tầm cao mới.

Theo tôi được biết thì từ năm 1967 đến nay đã có một số nhà toán học hàng đầu thế giới sau khi nhận Giải thưởng Fields như GS. *A. Grothendieck* (Pháp), GS. *L. Schwartz* (Pháp), GS. *A. Hironaka* (Nhật Bản), và một số nhà khoa học xuất sắc khác, sau khi nhận Giải Nobel, như GS. *J. E. Stiglitz* (Hoa Kỳ, về kinh tế), GS. *R. J. Aumann* (Israel-Hoa Kỳ-Đức, về kinh tế), …, đã từng sang thăm và giảng bài tại Việt Nam. Năm 1967, khi đang học lớp 10 (trên 10) chuyên toán A0 khóa I của Trường ĐHTH Hà Nội, tôi đã thấy GS. *Grothendieck*, khi ông lên thăm và giảng bài về Đại số đồng điều, ở khu sơ tán huyện Đại Từ, tỉnh Bắc Thái. Lần đầu tiên trong đời nhìn thấy con trâu đen, ông đòi cưỡi. Mọi người đành phải chiều ông, nhưng sợ ông bị ngã. Nguyên khí quốc tế mà! Thế là, với cái đầu trọc, ông vừa đội mũ rơm vừa cưỡi trâu. Những nhà bác học hàng đầu thế giới nói trên đã từng ủng hộ mạnh mẽ cuộc đấu tranh chính nghĩa của dân tộc ta chống Mỹ và ủng hộ công cuộc xây dựng, đổi mới đất nước ta, gần ba mươi năm qua, bằng cả trái tim và khối óc của mình.

2. GIẢNG TOÁN HẤP DẪN NHƯ KỂ CHUYỆN

Trước đây tôi chưa bao giờ dám nghĩ đến sẽ có một ngày mà người được mời về giảng bài tại Việt Nam, sau khi nhận Giải thưởng Fields hoặc Nobel, lại chính là một người Việt Nam. Tôi đã cùng các thính giả khác nghe từ đầu đến cuối hơn hai giờ bài giảng đầu tiên tại Viện NCCCT của GS. *Ngô Bảo Châu* trong chuỗi bài giảng của anh về các dạng tự đẳng cấu và các dạng modular (automorphic and modular forms). Thật xúc động và tự hào khi lần đầu tiên chúng tôi được nghe một bài giảng trực tiếp bằng tiếng Việt giọng Hà Nội thứ thiệt, không cần ai phiên dịch, mà giảng viên lại là người vừa được trao Giải thưởng Fields cao quý nhất về Toán học trên thế giới. Hãy thử hình dung về một điều ước ở bên ngoài Toán học: Cũng sẽ vui mừng biết bao nếu một ngày nào đó chúng ta được xem ngay tại nước mình một bộ phim Việt Nam vừa được trao Giải Oscar mà từ kịch bản đến đạo diễn và diễn viên cơ bản là người Việt Nam!

GS. *Ngô Bảo Châu* giảng bài trong một căn phòng khá rộng và lịch sự. Bốn mươi nhăm thính giả với mái tóc bạc có, hoa râm có, đen có, ngồi chật kín, lắng nghe rất chăm chú và ghi chép cẩn thận. Mọi người đều biết đây là một cơ hội quý, một cơ hội hiếm có, nên phải tận dụng, vì được nghe một bài giảng ở tầm cao, chiều sâu và tổng hợp như vậy sẽ rất bổ ích cho bất kì ai, dù người đó muốn có cái nhìn tổng quan hay muốn tìm vấn đề cụ thể để đi sâu nghiên cứu. GS. *Ngô Bảo Châu* nói: *Sau khi kết thúc, loạt bài giảng của mình và các đồng nghiệp sẽ được tập hợp và biên tập lại thành tập bài giảng của Viện bằng tiếng Anh (Lecture Notes Series of VIASM).*

Chỉ trong một khoảng thời gian hơn hai tiếng đồng hồ, nhưng với tầm hiểu biết sâu rộng và với tài thuyết giảng của mình, GS. *Ngô Bảo Châu* đã "kể" cho người nghe một câu chuyện toán học dài xuyên qua gần hai mươi thế kỉ, từ thế kỉ thứ III sau Công nguyên với các phương trình nghiệm nguyên cổ điển của *Diophantine* thành Alexandria, từ Bài toán lớn Phermat được phát biểu năm 1637, cho đến những thành tựu toán học kiệt xuất của nhân loại trong thế kỉ XX, XXI, trong đó có những phần liên quan đến Chứng minh của anh cho Bổ đề cơ bản do *R. Langlands* phỏng đoán. Anh cũng đã "vẽ" ra một bức tranh toàn cảnh "nối những bến bờ xa lạ" trong Toán học và Vật lí lại với nhau, như phương trình Diophantine, lí thuyết số, biểu diễn Galois, biểu diễn các nhóm Lie, dạng modular và dạng tự đẳng cấu, đường cong elliptic, hình học, tô pô, …. Nói là một bức tranh toàn cảnh vừa đúng theo cả nghĩa đen lẫn nghĩa bóng, vì anh đã để lại một bức tranh "kí họa" chiếm hết cả một cái bảng to, gồm nhiều lĩnh vực của Toán học và Vật lí được mô tả như những "hòn đảo cô lập", chúng được nối lại với nhau bởi các "nhịp cầu" nhằng nhịt. Mỗi "đảo", mỗi "cầu" đều có tên, có đảo hai, ba tên (vì các lĩnh vực Toán học giao thoa), có cầu hai, ba, bốn người cùng tham gia "bắc". Rồi còn chi tiết hơn nữa, nhịp cầu đó được bắc khi nào, trong bối cảnh nào. Và cuối cùng thì Bổ đề cơ bản nằm ở đâu trong bức tranh này? Nó liên quan đến nhiều đảo và cầu trong bức tranh, vì nó là cả một chương trình do *R. Langlands* đề xuất từ 30 năm trước.

Trong bài giảng của mình, GS. *Ngô Bảo Châu* có nhắc đến tên và thành tựu khoa học của nhiều nhà toán học kiệt xuất đã từng giành được Giải thưởng Fields, trong đó có *A. Wiles* (sinh năm 1953) người Anh và *G. Faltings* (sinh năm 1954) người Đức. Trong vòng 20–30 năm gần đây, khi theo dõi tiến độ giải quyết Bài toán lớn Phermat trên thế giới, tôi để ý nhiều hơn đến hai nhà toán học này và chính mình cũng đã có hai bài đăng trên *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* về hai nhà toán học xuất sắc đó. *A. Wiles* có công lớn vì vào năm 1994 đã chứng minh được Định lí lớn Phermat sau 357 năm tồn tại. Khi đó anh đã 41 tuổi nên không được trao Giải thưởng Fields, mà chỉ được trao Kỉ niệm chương bằng bạc của Hội Toán học Thế giới năm 1998. Năm 1983, *G. Faltings* đã chứng minh được giả thuyết do một nhà toán học người Anh là *L.J. Mordell* (1888–1972) nêu ra năm 1922, sau hơn 60 năm tồn tại, và anh đã được trao Giải thưởng Fields năm 1986. Còn *Ngô Bảo Châu* (sinh năm 1972) của chúng ta thì sao? Năm 2008 anh đã chứng minh xong Bổ đề cơ bản do nhà toán học Canada *R. Langlands* (sinh năm 1936) nêu ra trước đó 30 năm. So với hai người trước, GS. *Ngô Bảo Châu* "may mắn hơn" theo nghĩa: Khi anh giải quyết xong vấn đề được nêu ra thì người "ra đề" vẫn còn sống và anh còn được gặp, được cùng làm việc với *R. Langlands* một thời gian tại Viện Nghiên cứu cao cấp Princeton (IAS, Hoa Kỳ).

Tôi để ý theo dõi cách GS. *Ngô Bảo Châu* giảng bài. Anh nói hoàn toàn bằng tiếng Việt, vừa nói vừa dùng phấn viết nhanh lên bảng bằng tiếng Anh rất chuẩn mực. Tôi lại rất thích kiểu "2 trong 1" này, vì ở dưới các thính giả toán học trẻ Việt Nam còn được học thêm từ vựng toán học bằng tiếng Anh. Tất nhiên sau này khi có cả giảng viên và thính giả quốc tế đến Viện thì cả nói và viết sẽ đều bằng tiếng Anh. Trong suốt bài giảng hơn hai giờ, anh không hề dùng powerpoint, không hề nhìn một trang tài liệu, giáo án nào, tất cả đều từ đầu mà ra, vừa nói vừa viết một cách từ tốn, sinh động, hấp dẫn. Người giảng bài còn trẻ trung, không hề có dấu hiệu mệt mỏi. Mặc dù trong phòng lớn có micro, nhưng anh không dùng và nói đủ to để mọi người vẫn nghe rõ. Tất cả người nghe đều bị cuốn hút, cho đến khi kết thúc bài giảng không một ai ra về trước và cuối cùng là một tràng vỗ tay vang dội.

Sáng 28/6, đúng vào ngày sinh của mình, GS. *Ngô Bảo Châu* đã tiếp tục giảng bài thứ hai tại Viện, với 50 thính giả tham dự, tức là nhiều hơn hôm đầu. Buổi chiều, GS. TSKH. *Đỗ Ngọc Diệp* giảng về biểu diễn các nhóm Lie. Sáng 30/6, GS. *Ngô Bảo Châu* giảng bài thứ ba cho 57 thính giả. Như vậy số người đến nghe GS. *Ngô Bảo Châu* giảng bài tăng dần, chứ không giảm dần. Điều này thường hiếm thấy đối với các bài giảng toán học. Những ngày gần đây, một nhà toán học trẻ xuất sắc người Việt Nam ở nước ngoài, GS. TS. *Vũ Hà Văn* (ĐH Yale, Mỹ), đã bắt đầu các bài giảng thú vị về " Phương pháp xác suất trong toán học hiện đại". Song song với chuỗi bài giảng ở Viện NCCCT, từ 11 đến 30/7/2011, còn có chuỗi bài giảng ở Trường hè "Toán học cho sinh viên" do Viện Toán học, Viện KH–CN Việt Nam, tổ chức, thu hút 100–200 sinh viên từ mọi miền đất nước. GS. *Hoàng Tụy*, GS. *Ngô Bảo Châu*, GS. *Vũ Hà Văn* và nhiều GS nổi tiếng khác đã đến dự khai mạc Trường hè này.

Tới nghe các bài giảng của GS. *Ngô Bảo Châu* và sau này còn có thể phối hợp với anh giảng bài cho trường hè ba tháng này là các giáo sư toán học hàng đầu trong nước gần chuyên ngành và các nhà toán học trẻ của Việt Nam từ trong nước và từ Pháp, Mỹ, ..., về, như GS. *Đoàn Quỳnh*, GS. TSKH. *Hà Huy Khoái*, GS. TSKH. *Ngô Việt Trung*, GS. TSKH. *Lê Tuấn Hoa*, GS. TSKH. *Nguyễn Hữu Việt Hưng*, GS. TSKH. *Nguyễn Tự Cường*, GS. TSKH. *Đỗ Ngọc Diệp*, GS. TSKH. *Đỗ Đức Thái*, GS. TS. *Nguyễn Quốc Thắng*, PGS. TS. *Bùi Thế Tâm*, PGS. TSKH. *Phùng Hồ Hải*, PGS. TS. *Lê Hải Khôi*, TS. *Nguyễn Chu Gia Vượng*, TS. *Lê Hùng Việt Bảo* (ĐH Harvard, Mỹ), TS. *Ngô Đắc Tuấn* (ĐH Paris 13), TS. *Bùi Hùng*, TS. *Lê Minh Hà*, TS. *Phan Dương Hiệu* (ĐH Paris 8–13), TS. *Ngô Quang Hưng* (ĐH Suny Buffalo, Mỹ),.... Trong số các thính giả đến nghe bài giảng có nhiều nhà toán học giỏi và nhà toán học trẻ. Họ cũng đã từng được mời đi giảng bài và hợp tác nghiên cứu khoa học ở nhiều nước trên thế giới.

* * *

Trước khi kết thúc bài viết, Tác giả xin chúc cho Viện NCCCT của GS. *Ngô Bảo Châu*, GS. *Lê Tuấn Hoa* và Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010–2020 thành công tốt đẹp, góp phần phát triển Toán học Việt Nam, và xin chúc GS. *Ngô Bảo Châu* bước sang tuổi 40 khỏe mạnh, tiếp tục thành đạt và cống hiến nhiều hơn nữa cho Tổ quốc Việt Nam và Thế giới!

LỜI GIẢI ĐỀ THI... *(Tiếp trang 7)*

$\Rightarrow \widehat{EMF} = \widehat{BSC} \Rightarrow \widehat{SBP} = \widehat{MEN}$ (do hai tam giác cân có hai góc ở đỉnh bằng nhau).

Suy ra $\Delta EMN \backsim \Delta BSP \Rightarrow \dfrac{NE}{PB} = \dfrac{NM}{PS}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{AN}{AP} = \dfrac{NM}{PS} \Rightarrow NP // MS$ mà $MS \perp BC$ nên $NP \perp BC$.

Câu 5. Nếu ta chọn ra 44 bi màu đỏ, 44 bi màu xanh, 44 bi màu tím và 45 bi màu vàng hoặc trắng (mỗi màu có ít nhất 1 viên) thì tổng số bi lấy ra là $44 + 44 + 44 + 45 = 177$ viên bi. Do đó không có 45 bi nào cùng màu. Vậy bài toán không đúng nếu ta chỉ lấy ra 177 viên bi.

Nếu lấy ra 178 viên bi thì số bi màu trắng và vàng có tối đa là 45, như vậy vẫn còn lại ít nhất $178 - 45 = 133$ bi có màu đỏ hoặc màu xanh hoặc màu tím.

Theo nguyên lí Dirichlet sẽ tồn tại một màu mà có ít nhất $\left[\dfrac{133}{3}\right] + 1 = 45$ viên bi.

NGUYỄN THANH HỒNG

(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội) giới thiệu.

BÀI TOÁN ERDÖS - SZEKERES CHO NGŨ GIÁC LỒI SUY RỘNG

ĐOÀN HỮU DŨNG *(Liên đoàn Cờ Việt Nam)*
NGUYỄN TIẾN THỊNH *(HV Cao học, ĐHSP Thái Nguyên)*

1. GIỚI THIỆU BÀI TOÁN

Năm 1932 Esther Klein nhận xét rằng:

Mọi tập năm điểm trên mặt phẳng ở vị trí tổng quát (không có ba điểm nào thẳng hàng) đều chứa bốn điểm là đỉnh của tứ giác lồi.

Năm 1935 Erdös–Szekeres đã đưa ra giả thuyết sau đây.

Giả thuyết Erdös–Szekeres. *Mọi tập hợp trên mặt phẳng gồm không ít hơn $2^{n-2}+1$ điểm $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ ở vị trí tổng quát đều chứa n điểm là đỉnh của đa giác lồi.*

Bất chấp sự đơn giản trong phát biểu và những cố gắng của hàng trăm nhà toán học, sau ba phần tư thế kỉ, giả thuyết Erdös–Szekeres mới được chứng minh cho $n = 3, 4, 5$. Trường hợp $n = 6$ mới được George Szekeres và Lindsay Peters chứng minh nhờ máy tính năm 2006.

2. ĐA GIÁC LỒI SUY RỘNG

Trong giả thuyết Erdös-Szekeres, điều kiện các điểm ở "vị trí tổng quát" là một hạn chế cần bỏ. Hiển nhiên, khi bỏ điều kiện này (tức là các điểm có thể thẳng hàng), thì ta không thể có đa giác lồi theo nghĩa thông thường. Vì vậy, việc đầu tiên là phải mở rộng khái niệm đa giác lồi.

Định nghĩa đa giác lồi suy rộng. *Cho một tập Ω gồm hữu hạn điểm trên mặt phẳng. Kí hiệu bao lồi của tập Ω – tập lồi nhỏ nhất chứa Ω là $\operatorname{conv}\Omega$. Ta nói Ω là **đa giác lồi suy rộng** nếu mọi điểm của Ω đều nằm trên biên của tập $\operatorname{conv}\Omega$, biên của tập $\operatorname{conv}\Omega$ được kí hiệu là $\partial\operatorname{conv}\Omega$ theo cách thông thường. Thí dụ, nếu ba điểm thẳng hàng ta sẽ coi đó là ba đỉnh của một tam giác suy rộng, bốn điểm thẳng hàng là bốn đỉnh của một tứ giác lồi suy rộng,...*

Định nghĩa cấu hình (s, i, j) của tập Ω. *Cho tập Ω là một tập hữu hạn điểm trên mặt phẳng ở vị trí bất kì. Kí hiệu $\Omega_1 = \Omega \setminus \partial\operatorname{conv}\Omega$, $\Omega_2 = \Omega \setminus \{\partial\operatorname{conv}\Omega \cup \partial\operatorname{conv}\Omega_1\}$.*

Ta nói tập Ω có cấu hình (s, i, j) nếu $|\partial\operatorname{conv}\Omega| = s$, $|\partial\operatorname{conv}\Omega_1| = i$, *và* $|\partial\operatorname{conv}\Omega_2| = j$.

Chú ý. Do ở phổ thông các bạn chưa có khái niệm về bao lồi (convex hull) cho một tập, hơn nữa tập Ω của ta ở đây là tập rời rạc. Vì thế để thể hiện ý tưởng bài toán và làm chính xác tuyệt đối về mặt toán học ta phải sử dụng các kí hiệu trên.

3. TỒN TẠI NGŨ GIÁC LỒI SUY RỘNG

Ta có thể mở rộng các nghiên cứu về giả thuyết Erdös–Szekeres cho trường hợp các điểm có thể thẳng hàng.

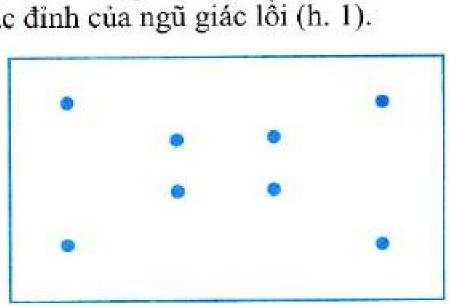
Bài toán. *Cần tối thiểu bao nhiêu điểm ở vị trí bất kì để có thể lấy ra được năm điểm là đỉnh của một ngũ giác lồi suy rộng?*

Câu trả lời có trong Mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề. *Mọi tập có ít nhất chín điểm trên mặt phẳng ở vị trí bất kì đều chứa năm điểm là đỉnh của đa giác lồi suy rộng.*

Cách chứng minh Mệnh đề trên nhờ tổng quát những phân tích của Esther Klein, Đoàn Hữu Dũng và Bonnice.

Chứng minh. Trước hết ta có thí dụ về tám điểm mà không thể lấy ra được năm điểm nào là các đỉnh của ngũ giác lồi (h. 1).



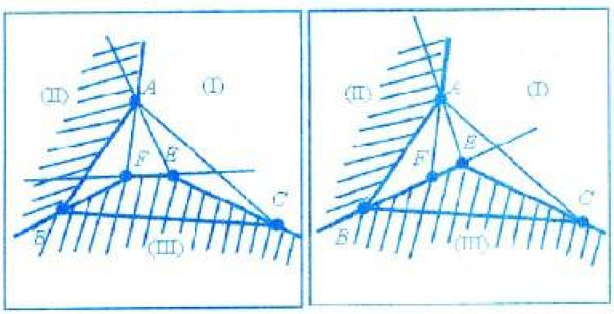
Hình 1

Ta giả sử tập Ω gồm chín điểm ở vị trí bất kì trên mặt phẳng. Nếu $\partial\operatorname{conv}\Omega$ chứa ít nhất năm điểm của Ω thì năm điểm bất kì liên tiếp trong số các đỉnh của $\partial\operatorname{conv}\Omega$ là các đỉnh của ngũ giác lồi (suy rộng). Vì vậy chỉ còn phải xét trường hợp $\partial\text{conv}\Omega$ chứa bốn hoặc ba điểm.

Kí hiệu các điểm còn lại của Ω sau khi bỏ đi các đỉnh thuộc $\partial\text{conv}\Omega$ là Ω_1. Lại lấy bao lồi của Ω_1. Nếu $\partial\text{conv}\Omega_1$ tạo thành ngũ giác hoặc lục giác lồi (suy rộng), thì bài toán được giải. Như vậy, chỉ còn phải xét trường hợp $\partial\text{conv}\Omega_1$ gồm bốn đỉnh hoặc ba đỉnh. Khi ấy các điểm còn lại (một, hai hoặc ba điểm) sẽ thuộc phần trong của $\text{conv}\Omega_1$. Nói cách khác, ta chỉ còn phải xét các cấu hình sau: (4,4,1); (4,3,2); (3,4,2) và (3,3,3) với bao lồi ngoài cùng là tứ giác hoặc tam giác.

Ta có cấu hình $(3,3,3)$ chứa cấu hình $(3,3,2)$ bằng cách bỏ đi một đỉnh của tam giác trong cùng; cấu hình $(4,3,2)$ chứa cấu hình $(4,3,1)$ bằng cách bỏ đi một trong hai điểm trong cùng. Vậy chỉ còn phải chứng minh các cấu hình $(3,3,2)$, $(4,3,1)$, $(3,4,2)$ và $(4,4,1)$ chứa ngũ giác lồi (suy rộng).

Cấu hình (3, 3, 2). Ta gọi E, F là hai điểm nằm trong tam giác ABC. Các tia FA, FB, EA, EC chia mặt phẳng thành ba miền lồi: miền (I) giới hạn bởi tia EC, tia đối của tia AF và đoạn AE. Miền (II) giới hạn bởi tia đối của các tia AF, BF và đoạn AB. Miền (III) giới hạn bởi tia FB, đoạn FE và tia EC (B, F, E hoặc F, E, C có thể thẳng hàng) (h. 2).

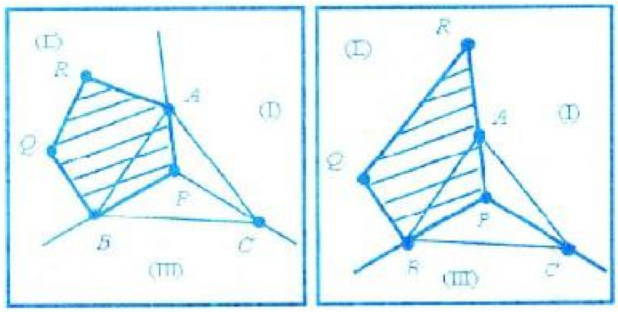


Hình 2

Nếu có một đỉnh của $\partial\text{conv}\Omega$ thuộc miền (III) thì nó cùng với bốn điểm B, F, E, C là các đỉnh của một ngũ giác lồi (suy rộng nếu B, F, E thẳng hàng).

Ngược lại thì phải có đúng hai đỉnh của $\partial\text{conv}\Omega$ thuộc một trong hai miền (I) hoặc (II). Vậy tồn tại ít nhất một miền (I) hoặc (II) chứa hai đỉnh, của tam giác ngoài cùng. Hai đỉnh này cùng với ba điểm A, E, C (hoặc A, F, B) là các đỉnh của một ngũ giác lồi (suy rộng).

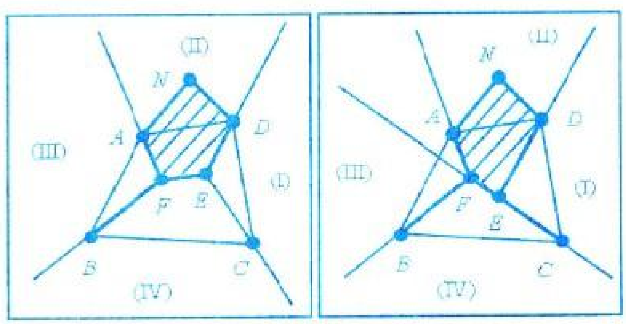
Cấu hình (4, 3, 1). Giả sử tam giác ABC chứa điểm P thuộc phần trong. Ta kẻ các tia PA, PB, PC. Các tia này chia mặt phẳng thành ba miền lồi: miền (I) giới hạn bởi hai tia PA và PC; miền (II) giới hạn bởi hai tia PA và PB; miền (III) giới hạn bởi hai tia PB và PC. Vì $|\partial\text{conv}\Omega| = 4$, hay đa giác ngoài là tứ giác (suy rộng). Vậy tồn tại ít nhất một miền trong ba miền (I), (II), (III) chứa hai đỉnh của $\partial\text{conv}\Omega$, thí dụ miền (II) chứa hai điểm R và Q. Khi ấy A, B, P cùng với R và Q tạo thành các đỉnh của ngũ giác lồi (suy rộng, thí dụ, khi P, A, R thẳng hàng) (h. 3).



Hình 3

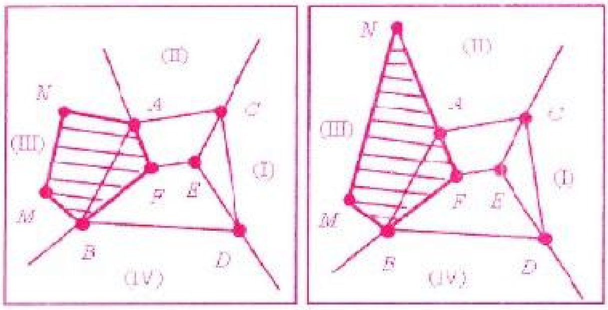
Cấu hình (3, 4, 2). Tứ giác $ABCD$ chứa hai điểm E, F thuộc phần trong. Các tia FA, FB, EC, ED chia mặt phẳng thành bốn miền lồi. Miền (I) giới hạn bởi tia EC và ED. Miền (II) giới hạn bởi tia ED, đoạn EF và tia FA. Miền (III) giới hạn bởi tia FA và tia FB. Miền (IV) giới hạn bởi tia FB, đoạn FE và tia EC (h. 4).

Nếu có một đỉnh N của $\partial\text{conv}\Omega$ thuộc miền (II) thì N cùng với A, F, E, D (hoặc B, F, E, C nếu N thuộc miền (IV)) tạo thành các đỉnh của ngũ giác lồi (suy rộng) (h. 4).



Hình 4

Ngược lại ít nhất một trong hai miền (I) hoặc (III) phải chứa đúng hai đỉnh của $\partial\text{conv}\Omega$ – tam giác ngoài cùng. Thí dụ N và M nằm trong miền (III). Khi ấy A, F, B, N, M là các đỉnh một ngũ giác lồi (suy rộng, khi F, A, N hoặc F, B, M thẳng hàng) (h. 5).

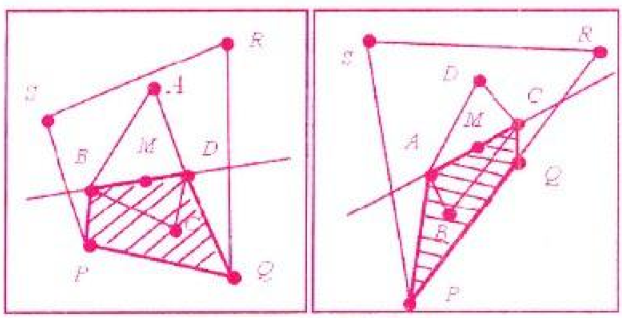


Hình 5

Cấu hình (4, 4, 1). Gọi các đỉnh thuộc $\partial\text{conv}\Omega_1$ là A, B, C, D. Ta chia tứ giác $ABCD$ thành hai tam giác bởi một đường chéo AC (hoặc BD). Gọi M là điểm thuộc miền trong tứ giác $ABCD$.

Khả năng 1. Điểm M thuộc phần trong của một tam giác (tam giác ABC hoặc tam giác ACD), thì ta có cấu hình (4, 3, 1). Cấu hình này đã xét ở trên.

Khả năng 2. Điểm M thuộc đường chéo của tứ giác $ABCD$, khi đó ta có ba đỉnh thẳng hàng là A, M, C (hoặc B, M, D). Đường thẳng đi qua ba đỉnh ấy chia mặt phẳng thành hai miền. Vì $|\partial\text{conv}\Omega| = 4$ nên có ít nhất hai đỉnh của $\partial\text{conv}\Omega$ thuộc cùng một miền. Hai đỉnh này cùng với ba điểm thẳng hàng là các đỉnh một ngũ giác lồi suy rộng (h. 6).



Hình 6

Vậy Mệnh đề trên đã được chứng minh xong.

Hệ quả. *Giả thuyết Erdös–Szekeres đúng cho trường hợp* $n = 3, 4, 5$.

Kết luận. Bài toán Erdös–Szekeres có rất nhiều mở rộng và biến thể. Bài toán xét trong bài viết này là trường hợp đơn giản nhất (tuy nhiên do khuôn khổ bài viết tác giả chưa thể liệt kê hết các dạng hình của chứng minh, cũng như đi vào việc nêu đầy đủ lịch sử về lời giải bài toán). Bài toán đề xuất rất nhiều câu hỏi mở. Các bạn cũng có thể thử chứng minh giả thuyết Erdös–Szekeres với $n = 6$. Hi vọng rằng chúng ta còn có dịp trở lại bài toán này.

TIN TỨC

HỘI THẢO, TẬP HUẤN QUỐC GIA cho giáo viên Toán các trường THPT chuyên tại Bắc Ninh

Trong các ngày từ 20 đến 25/7/2011 vừa qua, Vụ Giáo dục Trung học và Chương trình phát triển Giáo dục Trung học Bộ GD&ĐT đã phối hợp tổ chức ***Khóa tập huấn phát triển chuyên môn giáo viên giảng dạy môn Toán trường THPT chuyên*** tại Trung tâm Văn hóa Kinh Bắc, TP. Bắc Ninh, Tỉnh Bắc Ninh.

Khóa tập huấn này nhằm giúp giáo viên tiếp cận với những cách nhìn mới tổng quan, cốt lõi, hệ thống về nội dung chuyên hiện hành; những ý tưởng phát triển chương trình; những đơn vị kiến thức mới của bộ môn góp phần đổi mới phương pháp giảng dạy và nâng cao chất lượng đào tạo học sinh giỏi Toán của các trường THPT chuyên. Tham sự đợt Tập huấn có các Giáo sư, Giảng viên, Chuyên viên của Viện Toán học Việt Nam, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, Trường ĐHKHTN, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh, Trường ĐHSP Hà Nội, Vụ Giáo dục Trung học, Bộ GD&ĐT, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội cùng với hơn 250 giáo viên Toán ở 63 tỉnh thành phố trong cả nước đang trực tiếp giảng dạy cho lớp chuyên ở các trường THPT chuyên, chuyên viên phụ trách môn Toán của Phòng Giáo dục Trung học của các Sở GD–ĐT. Đây cũng là bước khởi động hoạt động giáo dục Toán chuyên sâu cấp Quốc gia, làm tiền đề để tiếp tục thực hiện các Khóa tập huấn vào 4 kì tiếp theo cho chương trình hoạt động 5 năm (2011–2015) của Bộ GD&ĐT.

Với phương châm HỢP TÁC + GIAO LƯU, KẾT NỐI + CHIA SẺ, THỐNG NHẤT + PHÁT TRIỂN và được sự nhiệt tình giúp đỡ của UBND, Sở GD–ĐT Tỉnh Bắc Ninh, Khóa Tập huấn đã thành công tốt đẹp, để lại ấn tượng sâu sắc cho các đại biểu tham dự. Hi vọng rằng kết quả đào tạo, bồi dưỡng học sinh giỏi Toán có bước phát triển cao hơn.

THANH LOAN

Giải đáp bài : CHẤM ĐIỂM MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

(Đề đăng trên THTT số 408, tháng 6, năm 2011)

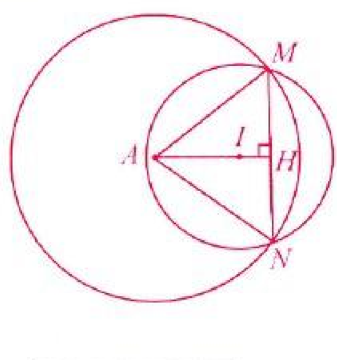
Lời giải của bạn *An* trên THTT số 408 xét còn thiếu trường hợp. Lời giải đó chỉ xét trường hợp hai tâm của hai đường tròn *nằm khác phía nhau so với đường thẳng MN*, chưa xét đến trường hợp hai tâm *nằm về cùng một phía so với đường thẳng MN*.

Để lời giải bài tập đã cho được hoàn chỉnh ta cần xét thêm một trường hợp nữa, cụ thể như sau:

Tương tự như lời giải bạn *An* ở phần đầu ta tìm được $IH=\frac{3}{2}$; $IA=5$. Xảy ra hai khả năng sau:

1) A và I nằm khác phía nhau đối với đường thẳng MN. Lúc này PT đường tròn (C') cần tìm là $(x-5)^2+(y-1)^2=13$.

2) A và I nằm về cùng một phía đối với đường thẳng MN (hình vẽ).



Lúc đó

$$AH=AI+IH=\frac{13}{2}.$$

Suy ra bán kính đường tròn (C') là

$$R'=\sqrt{AH^2+HM^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{43}.$$

Trong khả năng này, PT đường tròn (C') là

$$(x-5)^2+(y-1)^2=43.$$

Kết hợp hai khả năng trên ta thấy có hai đường tròn thỏa mãn điều kiện đề bài lần lượt có PT:

$$(x-5)^2+(y-1)^2=13$$

và $(x-5)^2+(y-1)^2=43$.

Nhận xét. Các lời bình gửi về Tòa soạn đều chỉ đúng thiếu sót của bạn *An* trong lời giải đã nêu (không xét khả năng thứ hai, dẫn đến thiếu đáp số). Đại đa số các bạn đều mở lòng khoan dung chấm cho bạn *An* 5 điểm (với điểm tối đa cho bài tập này là 10). Sau đây là những bạn có đáp án tốt hơn cả:

Hà Nam: *Nguyễn Đức Nam*, 11A5, THPT Duy Tiên B; **Ninh Bình:** *Nguyễn Văn Linh*, 11A, THPT Yên Mô A; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mậu Thành*, 11 Toán 1, *Trần Võ Hoàng*, 12 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nam Định:** *Đỗ Thế Dương*, 10A1, THPT Giao Thủy B; **Đồng Tháp:** *Trần Chí Thiện*, 11T, THPT Thành phố Cao Lãnh; **Trà Vinh:** *Phó Nghĩa Văn*, 10A1, THPT chuyên Trà Vinh.

NGỌC HIỂN

MỘT LỜI GIẢI HAY?

Có một bài toán với nội dung:

Giải phương trình $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$ (1)

Một cuốn sách đã trình bày lời giải như sau:

ĐK $x\ge\frac{1}{2}$. Phương trình (1) tương đương với

$$2x-1-\sqrt{2x-1}=x^2-x.$$

Phương trình có dạng $f(\sqrt{2x-1})=f(x)$

Trong đó $f(t)=t^2-t$, với $t\ge\frac{1}{2}$ $\left(\text{do } x\ge\frac{1}{2}\right)$.

Ta có $f'(t)=2t-1\ge 0,\ \forall t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ $\left(\text{vì } f(t)\right.$ liên tục trên $\left.\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\right)$.

Do đó $f(\sqrt{2x-1})=f(x)\Leftrightarrow\sqrt{2x-1}=x\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Theo bạn thì lời giải trên có thực sự hay không? Lời giải của bạn như thế nào?

LÊ VĂN QUÝ

(GV THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THCS

Bài T1/410.(Lớp 6). Tìm các cặp số nguyên dương x, y nguyên tố cùng nhau sao cho

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{7}{25}.$$

NGUYỄN VĂN TIẾN
(GV THCS Lâm Thao, Phú Thọ)

Bài T2/410. (Lớp 7). Cho tam giác đều ABC, các đường cao AH, BK cắt nhau tại điểm G. Tia phân giác góc BKH cắt các đoạn thẳng CG, AH, BC lần lượt tại các điểm M, N, P. Chứng minh rằng $KM = NP$.

PHẠM HUY THÔNG
(Hà Nội)

Bài T3/410. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = 2011ca - ab - bc$$

trong đó a, b, c là các số thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2 \leq 2.$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Sở GD-ĐT Thái Bình)

Bài T4/410. Cho tam giác ABC vuông cân ở A. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Đường vuông góc với CM kẻ từ O cắt MN tại G. So sánh độ dài hai đoạn thẳng GM và GN.

PHAN TUẤN KHẢI
(Hà Nội)

Bài T5/410. Giải phương trình

$$\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}.$$

THỚI NGỌC ÁNH
(GV THCS Phổ Minh, Đức Phổ, Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/410. Cho tam giác ABC. AM, BN, CP là các đường phân giác trong ($M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$) của tam giác đó. Tìm số đo của góc BAC để PM vuông góc với NM.

HÀN NGỌC ĐỨC
(Trung tâm CNTT EVNIT, Hà Nội)

Bài T7/410. Giải phương trình

$$(\sin x-2)(\sin^2 x-\sin x+1)=3\sqrt[3]{3\sin x-1}+1.$$

HOÀNG ANH TUẤN
(GV Trung tâm GDTX Văn Bàn, Lào Cai)

Bài T8/410. Tìm các giá trị của a, b để phương trình

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

có nghiệm và tổng a^2+b^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐÀO CHÍ THANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/410. Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^{2012}-a^{2010}+3)(b^{2012}-b^{2010}+3)(c^{2012}-c^{2010}+3) \geq 9(ab+bc+ca).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T10/410. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng bất kì cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại M, N, P theo thứ tự. Gọi X, Y, Z lần lượt là trọng tâm các tam giác ANP, BPM, CMN. Chứng minh rằng

$$S_{XYZ}=\frac{2}{9}S_{ABC}.$$

NGUYỄN MINH HÀ
(GV THPT chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài T11/410. Cho dãy số $(a_n), (n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $a_1=0$; $a_2=38$; $a_3=-90$ và $a_{n+1}=19a_{n-1}-30a_{n-2}, \forall n \geq 3$.

Chứng minh rằng a_{2011} chia hết cho 2011.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T12/410. Với số nguyên dương n lớn hơn 2. Tìm số các hàm số

$$f:\{1, 2, 3,..., n\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

thỏa mãn tính chất

$$|f(k+1)-f(k)| \geq 3 \text{ với } k \in \{1, 2, ..., n-1\}.$$

MAI TUẤN ANH
(GV THCS Nga Điền, Nga Sơn, Thanh Hóa)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/410. Trong không gian có trọng trường đều với gia tốc bằng $\vec{g}$. Một vật có khối lượng m được ném thẳng đứng lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $\vec{v}_0$. Biết lực cản không khí tỉ lệ với vận tốc của vật theo công thức $\vec{F}_c = -k\vec{v}$.

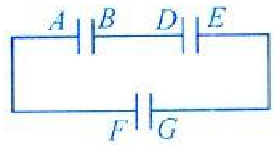
1) Hãy xác định độ cao cực đại của vật theo v_0, k, g và m.

2) Hãy so sánh công của lực cản không khí khi vật chuyển động đi lên với công của lực cản không khí khi vật rơi xuống.

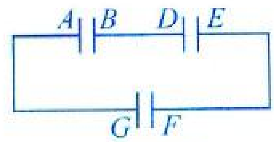
PHẠM XUÂN THI
(3CB-38 Biên Hòa, Đồng Nai)

Bài L2/410. Cho ba tụ điện $C_1 = 2\mu F$ (hai cốt là A và B), $C_2 = 3\mu F$ (hai cốt là D và E) và $C_3 = 3{,}6\mu F$ (hai cốt là F và G) có các điện tích lần lượt là $q_1 = q_A = 10^{-4}$ C, $q_2 = q_D = 3.10^{-4}$ C và $q_3 = q_F = 2{,}16.10^{-4}$ C (hình vẽ)

Mắc các tụ điện trên theo các sơ đồ 1 và 2. Hãy xác định các hiệu điện thế U_{AB}, U_{DE} và U_{FG} trong sơ đồ 1 và U^*_{AB}, U^*_{DE} và U^*_{FG} trong sơ đồ 2.



Sơ đồ 1



Sơ đồ 2

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trên THTT số 409, tháng 7/2011 ở bài T12/409, trang 17 đã in: ... Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_1+S_2)$. Xin được sửa thành: ... Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_1-S_2)$. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT

PROBLEMS IN THIS ISUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/410. (For 6th grade). Find all pairs of co-prime positive integers x, y so that

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}=\frac{7}{25}.$$

T2/410. (For 7th grade). Let ABC be an equilateral triangle whose altitudes AH, BK intersect at G. The angle-bisector of angle BKH meets CG, AH, BC at M, N, P respectively. Prove that $KM = NP$.

T3/410. Find the minimum value of the expression $S = 2011ca - ab - bc$ where a, b, c satisfy $a^2+b^2+c^2 \le 2$.

T4/410. Let ABC be an isosceles right triangle with right angle at A. Let M, N, O be respectively the midpoints of AB, AC, BC. The line perpendicular to CM from O cuts MN at G. Compare the lengths of the two segments GM and GN.

T5/410. Solve the equation

$$\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/410. Let ABC be a triangle. Let AM, BN, CP be its internal angle-bisectors ($M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$). Find the measure of angle BAC so that PM is perpendicular to NM.

T7/410. Solve the equation

$$(\sin x-2)(\sin^2 x-\sin x+1)=3\sqrt[3]{3\sin x-1}+1.$$

T8/410. Find all values of a, b so that the equation

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

has at least one solution and the sum a^2+b^2 is smallest possible.

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/410. Let a, b, c be positive numbers. Prove that

$$(a^{2012}-a^{2010}+3)(b^{2012}-b^{2010}+3)(c^{2012}-c^{2010}+3) \ge 9(ab+bc+ca).$$

When does equality occur?

(Xem tiếp trang 27)

★ **Bài T1/406.** *Cho m là một số nguyên dương. Hãy tìm các chữ số x và y ($x \neq 0$) sao cho số $A = \overline{xy5} + 100m(m+5)$ là số chính phương.*

Lời giải. Số $A = \overline{xy5} + 100m(m+5)$ $(m \in \mathbb{N}^*)$ chia hết cho 5 nên có dạng
$A = (10t+5)^2 = 100t^2 + 100t + 25$ với $t \in \mathbb{N}$.

Từ đó có

$$100t^2 + 100t + 25$$
$$= 100x + 10y + 5 + 100m^2 + 500m \qquad (1)$$

Do đó $10y + 5 - 25$ phải chia hết cho 100, suy ra $y = 2$, thay vào đẳng thức (1) được

$$t^2 + t = m^2 + 5m + x \qquad (2)$$

Đặt $t = m + v$, thay vào đẳng thức (2) được

$$(m+v)^2 + m + v = m^2 + 5m + x$$
$$\Leftrightarrow 2m(2-v) = v^2 + v - x.$$

Đẳng thức này xảy ra với số m bất kì khi và chỉ khi $v = 2$ và $x = v^2 + v = 6$. Các chữ số phải tìm là $x = 6$, $y = 2$. □

➢**Nhận xét.** Nhiều bạn tìm được đáp số nhưng chưa lập luận chặt chẽ để nghiệm trên là duy nhất. Các bạn có lời giải tốt là:

Nam Định: *Phạm Quang Huy*, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Hà Tĩnh:** *Trần Thị Như Ý*, 6A, THCS Trung Đồng, Can Lộc; **Quảng Ngãi:** *Vũ Thi Thi*, 6A, THCS Hành Phước, *Nguyễn Thị Kiều Duyên*, 6A, THCS Nguyễn Kim Vang, Nghĩa Hành, *Trần Thị Mỹ Ninh*, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/406.** *So sánh hai số A và B. Biết rằng $A = 4023^2$;*

$$\frac{B}{12} = \frac{(3^4+3^2+1)(5^4+5^2+1)...(2011^4+2011^2+1)}{(2^4+2^2+1)(4^4+4^2+1)...(2010^4+2010^2+1)}.$$

Lời giải. Với n là số tự nhiên, ta có

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^4 + 2n^2 + 1) - n^2$$
$$= (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+1-n)(n^2+1+n) \qquad (*)$$

Cho n các giá trị lần lượt từ 2 đến 2011, ta có

$$\frac{B}{12} = \frac{(3^2+1-3)(3^2+1+3)}{(2^2+1-2)(2^2+1+2)} \times \frac{(5^2+1-5)(5^2+1+5)}{(4^2+1-4)(4^2+1+4)}$$
$$\times ... \times \frac{(2011^2+1-2011)(2011^2+1+2011)}{(2010^2+1-2010)(2010^2+1+2010)}.$$

Mặt khác, với mọi số tự nhiên k, ta có

$$\frac{(k+1)^2+1-(k+1)}{k^2+1+k} = \frac{k^2+1+k}{(k+1)^2+1-(k+1)} = 1.$$

Áp dụng kết quả trên với $k = 2, 3, \ldots, 2011$ giản ước các nhân tử chung, ta được

$$\frac{B}{12} = \frac{2011^2+1+2011}{2^2+1-2}, \text{ suy ra}$$
$$B = \frac{12.(2011^2+1+2011)}{3} = 16184532.$$

Mà $A = 4023^2 = 16184529$, vậy $A < B$. □

➢**Nhận xét.** 1) Tòa soạn nhận được nhiều bài giải đúng, tất cả đều áp dụng đẳng thức (*) để rút gọn biểu thức $\frac{B}{12}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và trình bày ngắn gọn:

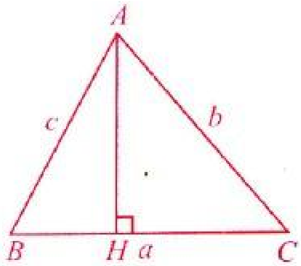
Phú Thọ: *Nguyễn Thanh Quang*, $7A_4$, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Đình Mậu*, $7A_3$, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: *Vũ Trung Hoa, Nguyễn Hiền Linh*, $7A_1$, THCS & THPT Hai Bà Trưng, TX. Phúc Yên, *Đỗ Thị Như Quỳnh, Trần Việt Huy*, 7A, THCS Yên Lạc; **Nam Định**: *Phạm Quang Huy*, $6A_4$, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định; **Hải Phòng**: *Nguyễn Khánh Hưng*, $7A_1$, THCS Hồng Bàng; **Thanh Hóa**: *Lê Quang Dũng*, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An**: *Lương Đình Ân*, 6B, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Thúy Hiền, Lê Trung Anh, Nguyễn Mai Lê*, 7B, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Vĩnh Long**: *Đoàn Hoàng Gia Bảo*, 6/1, THCS Lê Quý Đôn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★Bài T3/406. *Cho tam giác nhọn ABC. Tìm phần nguyên của*

$$M=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C+\sin A}+\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}.$$

Lời giải. Kẻ đường cao AH và đặt $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.



Trong tam giác vuông HAB ta có $AH=c\sin B$.

Trong tam giác vuông HAC ta có $AH=b\sin C$.

Suy ra $c\sin B=b\sin C \Rightarrow \sin B=\frac{b}{c}\sin C$.

Tương tự ta có $\sin A=\frac{a}{c}\sin C$.

Do đó $\frac{\sin A}{\sin C+\sin A}=\frac{\frac{a}{c}\sin C}{\frac{b}{c}\sin C+\sin C}=\frac{a}{b+c}$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{\sin B}{\sin C+\sin A}=\frac{b}{c+a};\quad \frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{c}{a+b}.$$

Suy ra $M=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ (*)

• Do a, b, c là các số dương nên

$$\frac{a}{b+c}>\frac{a}{a+b+c},\ \frac{b}{c+a}>\frac{b}{a+b+c},\ \frac{c}{a+b}>\frac{c}{a+b+c}.$$

Suy ra $M>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$ (1)

• Theo BĐT tam giác ta có $b+c>a$, nên

$$\frac{a}{b+c}=\frac{2a}{(b+c)+(b+c)}<\frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự $\frac{b}{c+a}<\frac{2b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b}<\frac{2c}{a+b+c}$.

Suy ra $M<\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2b}{a+b+c}+\frac{2c}{a+b+c}=2$ (2)

Từ (1) và (2) có $1<M<2$ nên $[M]=1$. ❐

➢**Nhận xét.** 1) Để dẫn đến công thức (*) nhiều bạn đã dựa vào chứng minh nhận xét

$\sin A=\frac{2S_{ABC}}{bc}$, $\sin B=\frac{2S_{ABC}}{ac}$, $\sin C=\frac{2S_{ABC}}{ab}$ hoặc

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$.

(với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

2) Một số bạn đã sử dụng ngay định lí sin, công thức cộng cung, bất đẳng thức Nesbit (không chứng minh) là không phù hợp với yêu cầu bài ra cho cấp THCS. Có bạn tự đưa ra $\sin A<\sin B+\sin C$ mà không có lập luận cũng không đạt yêu cầu.

3) Tuyên dương các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, chính xác:

Phú Thọ: *Nguyễn Nhật Phương*, 8B, THCS Phong Châu, *Bùi Đức Thịnh*, 8A3, THCS Lâm Thao, *Vũ Tuấn Linh*, 9E, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Thị Khánh Linh*, 9A1, THCS Yên lạc; **Hà Nam:** *Nguyễn Mạnh Hải*, 9A2, THCS Trần Phú, TP. Phủ Lý; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Quốc Đạt*, 9C, THCS Thiệu Phú, Thiệu Hóa, *Nguyễn Trọng Nhật*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Đậu Xuân Quang*, 9B, THCS Diễn Châu, *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Thị Nhiên*, 9A, THCS Phúc Thọ, Nghi Lộc, *Nguyễn Đức Nguyên*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Hà Tĩnh:** *Dương Hoài Nam*, 8/1, THPT Mỹ Châu; **TP. Hồ Chí Minh:** *Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy*, 7A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Long An:** *Nguyễn Ngọc Phương Vy*, 9/8, THCS TT CĐ 2; **Bà Rịa Vũng Tàu:** *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, 9A1, THCS Hắc Dịch, Tân Bình.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★Bài T4/406. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}2x^2+3xy=3y-13 & (1)\\ 3y^2+2xy=2x+11 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. (Theo bạn *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An).**

Rõ ràng $x=1$ không thỏa mãn PT (1), vậy $x\neq 1$. Khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}y=\dfrac{2x^2+13}{3(1-x)}\\ 3.\left(\dfrac{2x^2+13}{3(x-1)}\right)^2+2x.\dfrac{2x^2+13}{3(1-x)}=2x+11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x^2+13}{3(1-x)} \\ 2x^3 - 5x^2 - 86x - 136 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x^2+13}{3(1-x)} \\ (x+2)(x+4)(2x-17) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \dfrac{7}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{17}{2} \\ y = -7. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm $(x\,;y)$ là $\left(-2;2\frac{1}{3}\right)$, $(-4;3)$, $\left(8\frac{1}{2};-7\right)$. □

➤**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã giải bài toán trên theo cách sau

• Cộng (1) và (2) được $(2x+3y)(x+y)=2x+3y-2$ (3)

• Nhân (1) với (2) và (2) với (3), rồi cộng từng vế được

$$(2x+3y)^2 = 6(x+y)+7 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x+y=-1 \end{cases};\ \begin{cases} 2x+3y=3 \\ x+y=\dfrac{1}{3} \end{cases};\ \begin{cases} 2x+3y=-4 \\ x+y=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Từ đây cũng tìm được nghiệm của hệ đã cho.

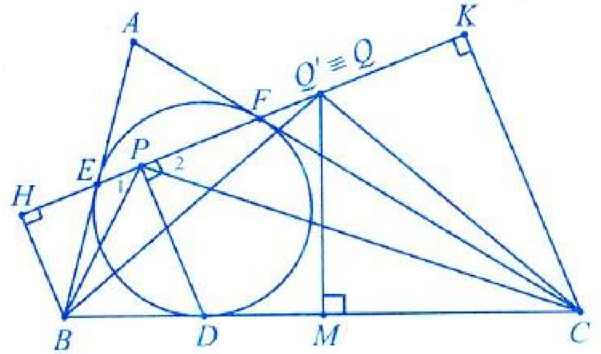
2) Tất cả các bạn tham gia đều có lời giải đúng. Ngoài bạn *Đức*, các bạn sau cũng có lời giải ngắn gọn:

Phú Thọ: *Nguyễn Thanh Quang*, 7A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Cao*, 9A, THCS Phương Khoan, Sông Lô, *Hà Quý Đôn*, 8B, THCS Lập Thạch; **Thanh Hóa:** *Lê Thị Khanh*, *Lê Phạm Kỳ Anh*, *Nguyễn Trọng Nhật*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Trương Công Phú*, 9B, THPT Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Công Khoa*, 10A1, THPT Đô Lương III; **Quảng Ngãi:** *Huỳnh Đặng Hiếu*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

TRẦN HỮU NAM

★Bài T5/406. *Đường tròn nội tiếp trong tam giác ABC (AB ≠ AC) tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại E, D, F. Hạ DP vuông góc với EF. Đường trung trực của BC cắt đường thẳng EF tại Q. Chứng minh rằng tứ giác BPQC nội tiếp.*

Lời giải. Từ B và C, kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt EF lần lượt tại H và K. Tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{HEB} = \widehat{AEF} = \widehat{AFE} = \widehat{KFC}$, mà $\widehat{BHE} = \widehat{CKF} = 90^\circ$ nên $\Delta BHE \backsim \Delta CKF$



$\Rightarrow \dfrac{BH}{CK} = \dfrac{BE}{CF}$, mặt khác $BE = BD$; $CF = CD$ nên $\dfrac{BH}{CK} = \dfrac{BD}{CD}$.

Lại có $BH//DP//CK$, nên theo định lí Thales ta có $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{HP}{PK}$.

Suy ra $\dfrac{BH}{CK} = \dfrac{HP}{PK} \Rightarrow \Delta BHP \backsim \Delta CKP$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{P_2}$.

Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP cắt đường thẳng EF tại Q'. Khi đó $\widehat{P_1} = \widehat{BCQ'}$, $\widehat{P_2} = \widehat{CBQ'}$, suy ra $\widehat{BCQ'} = \widehat{CBQ'}$ hay $Q'B = Q'C$, do đó Q' nằm trên trung trực của BC, nghĩa là Q' trùng Q. Do đó B, P, Q, C cùng nằm trên một đường tròn (đpcm). □

➤**Nhận xét.** 1) Trong quá trình tìm tòi lời giải, các bạn đã đưa ra một số kết quả thú vị như: $MH//PC$, $MK//PB$ (M là trung điểm của BC); PD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại điểm nằm trên MQ. Các kết quả này cũng giúp các bạn đưa ra những lời giải đẹp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Phạm Đức Hiển*, 9A, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc**: *Vũ Thị Quỳnh Anh*, 9A, THCS Vĩnh Yên. **Hà Nam:** *Nguyễn Mạnh Hải*, $9A_2$, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Hải Phòng:** *Hoàng Phú Đức*, 9A4, THCS Núi Đèo, Thủy Nguyên; **Thanh Hóa**: *Nguyễn Trọng Nhật*, *Lê Thị Khanh*, *Lê Phạm Kỳ Anh*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Lê Văn Hùng*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn. **Nghệ An**: *Trương Công Phú*, *Lê Hồng Đức*, 9B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Nguyễn Đức Nguyên*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Quảng Ngãi**: *Huỳnh Đặng Hiếu*, 9B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa. **TP. Hồ Chí Minh** : *Phạm Tuấn Huy*, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Đỗ Nguyễn Hoàng Anh*, $9A_1$, THCS Hắc Dịch, Tân Thành.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★Bài T6/406. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt{2x^2+2y^2-2x+2y+1}+\sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1}+\sqrt{2x^2+2y^2+4x+4y+4}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$$

đẳng thức xảy ra khi $ay=bx$.

Ta có

$$2\sqrt{2x^2+2y^2-2x+2y+1}=\sqrt{\left((-x+y+1)^2+(x+y)^2\right)(3+1)}\ge\sqrt{3}(-x+y+1)-(x+y) \quad (1)$$

Tương tự

$$2\sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1}=\sqrt{\left((x-y+1)^2+(x+y)^2\right)(3+1)}\ge\sqrt{3}(x-y+1)-(x+y) \quad (2)$$

Mặt khác

$$2\sqrt{2x^2+2y^2+4x+4y+4}=2\sqrt{(x+y+2)^2+(x-y)^2}\ge2(x+y+2) \quad (3)$$

Cộng theo vế các BĐT (1), (2), (3), ta được

$$2P\ge4+2\sqrt{3}\Rightarrow P\ge2+\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}-x+y+1=-\sqrt{3}(x+y)\ge0\\ x-y+1=-\sqrt{3}(x+y)\ge0\\ x+y+2\ge0\\ x=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y=-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Vậy $\min P=2+\sqrt{3}$ đạt được khi

$$x=y=-\frac{1}{2\sqrt{3}}.\ \square$$

➤**Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán bằng cách khác: Sử dụng bất đẳng thức

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}\ge\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

(có kèm theo chứng minh) để ước lượng hai số hạng đầu của P; kết hợp với (3) suy ra kết quả.

Một số bạn sử dụng tính chất : *Trong tam giác nhọn ABC, điểm M có tổng các khoảng cách tới ba đỉnh A, B, C đạt giá trị nhỏ nhất khi ba góc* $\widehat{AMB}$; $\widehat{BMC}$; $\widehat{CMA}$ *cùng bằng* 120°. Tuy nhiên làm như vậy dài và phức tạp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Thanh Hoá: *Lê Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Trọng Nhật*, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hoá; **Nghệ An:** *Nguyễn Sỹ Tuân*, 10A7, THPT Đô Lương I; **Đà Nẵng:** *Trần Hậu Long*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **Đồng Nai:** *Dương Quốc Khánh*, 10C2, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hoà; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thống*, 10 Tin, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Đồng Tháp:** *Võ Hoài Bão*, 10T, THPT TP. Cao Lãnh; **Cà Mau:** *Lê Hoàng Minh*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển.

NGUYỄN ANH DŨNG

★Bài T7/406. *Giải phương trình* $f(g(x))+g(2+f(x))=23$, *trong đó*

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-4x+9;\ g(x)=\begin{cases}14\ \text{khi}\ x\ge3\\ 2^x+\dfrac{12}{5-x}\ \text{khi}\ x<3.\end{cases}$$

Lời giải. Ta có $f(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2+1\ge1$, suy ra

$$2+f(x)\ge3,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Vậy $g(2+f(x))=14,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình đã cho trở thành

$$f(g(x))=9\Leftrightarrow\frac{1}{2}(g(x))^2-4g(x)+9=9$$

$$\Leftrightarrow g(x)=0 \text{ hoặc } g(x)=8.$$

• Với $x\ge3$ thì $g(x)=14$, với $x<3$ thì $\frac{12}{5-x}>0$ nên $g(x)>0$. Vậy PT $g(x)=0$ vô nghiệm.

• Xét phương trình $g(x)=8$ (1)

Rõ ràng ta chỉ cần xét $x<3$. Ta có

$$g'(x)=2^x\ln2+\frac{12}{(5-x)^2}>0,\ \forall x<3.$$

Do đó $g(x)$ là hàm số đồng biến trong khoảng $(-\infty\ ;\ 3)$. Suy ra nghiệm của PT (1) (nếu có) là duy nhất.

Dễ thấy $x=2$ là một nghiệm của PT (1).

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$. ❐

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Văn Linh*, 12A2, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường; **Hà Nội:** *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Thanh Hoá:** *Hoàng Văn Hiệp*, 11B2, THPT Triệu Sơn II; **Hà Tĩnh:** *Phạm Tiến Dũng*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Long*, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Bến Tre:** *Khưu Thành Quý*, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre; **Cà Mau:** *Lê Hoàng Minh*, 10T1, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển; **Bình Định:** *Nguyễn Văn Hải*, 11B, THPT Tây Sơn; **Yên Bái:** *Nguyễn Hải Linh*, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành.

NGUYỄN THANH HỒNG

★Bài T8/406. *Cho tam giác ABC. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$h_a+h_b+h_c-9r\le 2(R-2r).$$

Lời giải. Để giải bài toán ta cần kết quả sau:

Bổ đề. *Giả sử I, H thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, trực tâm tam giác ABC, p là nửa chu vi của tam giác đó thì ta có hệ thức*

$$IH^2=4R^2+4Rr+3r^2-p^2 \qquad (1)$$

Chứng minh. Từ hệ thức $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (với $a=BC$, $b=AC$; $c=AB$) suy ra

$$(a+b+c)\overrightarrow{IH}=a\overrightarrow{AH}+b\overrightarrow{BH}+c\overrightarrow{CH}.$$

Bình phương vô hướng hai vế, ta được

$$(a+b+c)^2IH^2=a(a+b+c)AH^2+b(a+b+c)BH^2+c(a+b+c)CH^2-abc(a+b+c).$$

Do đó

$$(a+b+c)IH^2=a.AH^2+b.BH^2+c.CH^2-abc$$
$$=a(4R^2-a^2)+b(4R^2-b^2)+c(4R^2-c^2)-abc$$
$$=(a+b+c)4R^2-(a^3+b^3+c^3)-abc$$

Hay $2p.IH^2=2p.4R^2-(a^3+b^3+c^3)-abc.$

Từ đó để ý rằng

$a^3+b^3+c^3=2p(p^2-3r^2-6Rr)$; $abc=4pRr$ (*xem THTT số 337, tháng 7 năm 2005, trang 6*), ta suy ra hệ thức (1). Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài **T8/406.** Ta thấy BĐT cần chứng minh tương đương với

$$R(h_a+h_b+h_c)-9Rr\le 2(R^2-2Rr) \qquad (2)$$

Lại có $R.h_a=R.\dfrac{4S_{ABC}}{2a}=\dfrac{abc}{2a}=\dfrac{bc}{2}.$

Tương tự $R.h_b=\dfrac{ac}{2}$; $R.h_c=\dfrac{ab}{2}.$

Suy ra $R(h_a+h_b+h_c)=\dfrac{1}{2}(bc+ac+ab)$

$$=\frac{1}{2}(p^2+r^2+4Rr).$$

Vậy BĐT (2) tương đương với

$$p^2+r^2\le 4R^2+6Rr \qquad (3)$$

Từ kết quả bổ đề và $IH^2\ge 0$, suy ra

$$p^2+r^2\le 4R^2+4Rr+4r^2.$$

Do $R\ge 2r$ nên $4r^2\le 2Rr$. Từ đó

$$p^2+r^2\le 4R^2+6Rr.$$

BĐT (3) được chứng minh nên BĐT đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I\equiv H$ và $R=2r$, hay tam giác ABC đều. ❒

➢**Nhận xét.** 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn sử dụng kết quả sau:

Với mọi tam giác ABC ta có bất đẳng thức

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C)\ge \cos A.\cos B.\cos C.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều cũng cho lời giải tốt.

2) Các bạn có lời giải đúng và gọn:

Hà Nội: *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên, *Trần Đăng Phúc*, 10A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Trương Giang Khang*, 10A1, THPT Thuận Thành số 1; **Nam Định:** *Phùng Mạnh Linh*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Trần Trung Hiếu*, 10 Toán 2, THPT chuyên Thái Bình, *Vũ Huy Hoàng*, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** *Nguyễn Hiền Trang*, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, *Phạm Hùng Vương*, 11C1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành, *Lê Hoàng Hiệp, Trần Trung Hiếu*, 10A1, THPT Thái Hòa, TX. Thái Hòa, *Hoàng Danh Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mậu Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** *Nguyễn Văn Từ Thiện*, 12T1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn; **Đồng Nai:** *Dương Quốc Khánh*, 10C2, THPT Lê Hồng Phong, *Ong Thế Phương*, 10 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP. Biên Hòa.

HỒ QUANG VINH

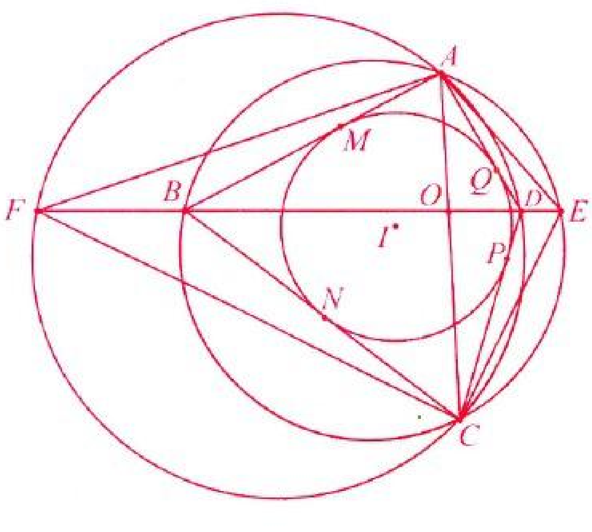
★Bài T9/406. *Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, ACD theo thứ tự cắt lại các tia OD, OB tại E, F. Chứng minh rằng tứ giác ABCD ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác AECF ngoại tiếp.*

Lời giải. ***Cách 1.*** Trước hết, xin phát biểu không chứng minh một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề. *Tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (I); M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB, BC, CD, DA; O là giao điểm của AC và BD. Khi đó* $\dfrac{OA}{OC}=\dfrac{MA}{MC}.$

Trở lại giải bài toán **T9/406**.

• *Chứng minh điều kiện cần* (h.1).



Hình 1

Giả sử tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) và M, N, P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh AB, BC, CD, DA.

Đặt $AM = AQ = x$; $BM = BN = y$; $CN = CP = z$; $DP = DQ = t$ (1)

Ta thấy $\Delta OAE \backsim \Delta OBC$, $\Delta OCE \backsim \Delta OBA$, $\Delta OAF \backsim \Delta ODC$, $\Delta OCF \backsim \Delta ODA$.

Do đó $AE = \dfrac{OA}{OB}.CB$; $\quad CE = \dfrac{OC}{OB}.AB$;

$$AF = \frac{OA}{OD}.CD; \quad CF = \frac{OC}{OD}.AD \qquad (2)$$

Vì $y + z + \dfrac{zy}{x} + \dfrac{zy}{t} = z + \dfrac{zy}{x} + \dfrac{yz}{t} + y$, nên

$$(y+z) + \frac{z}{x}.\frac{y}{t}.(t+x) = \frac{z}{x}(x+y) + \frac{y}{t}(z+t).$$

Từ đó theo (1) và bổ đề, suy ra

$$CB + \frac{OC}{OA}.\frac{OB}{OD}AD = \frac{OC}{OA}.AB + \frac{OB}{OD}.CD.$$ Hay

$$\frac{OA}{OB}.CB + \frac{OC}{OD}.AD = \frac{OC}{OB}.AB + \frac{OA}{OD}.CD.$$

Từ đó theo (2), suy ra $AE + CF = AF + CE$.

Vậy tứ giác $AECF$ ngoại tiếp.

• *Chứng minh điều kiện đủ.*

Hoàn toàn tương tự phép chứng minh điều kiện cần. ❐

Cách 2. (Theo bạn *Ong Thế Phương*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**).

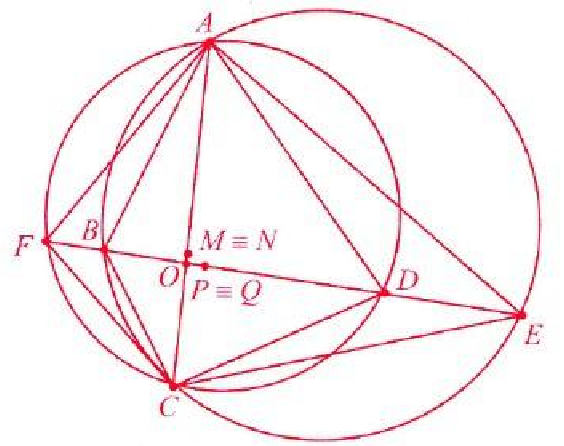
Trước hết xin phát biểu không chứng minh hai bổ đề đơn giản.

Bổ đề 1. *Cho tứ giác $ABCD$. Đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, CBD theo thứ tự tiếp xúc với BD tại E, F. Khi đó, tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi E trùng F.*

Bổ đề 2. *Nếu đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC tại T thì*

$$\frac{TB}{TC} = \frac{\cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}.$$

Trở lại giải bài toán **T9/406** (h.2).



Hình 2

Gọi M, N theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp các tam giác BAC, DAC với AC; P, Q theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, CEF với EF.

Vì các tứ giác $ABCD$, $AECF$ nội tiếp nên $\widehat{CAB} = \widehat{CEF}$; $\widehat{ACB} = \widehat{AEF}$; $\widehat{CAD} = \widehat{CFE}$; $\widehat{ACD} = \widehat{AFE}$ (1)

Vậy tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp

$\Leftrightarrow M \equiv N$ (theo bổ đề 1) $\Leftrightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NA}{NC}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cot\widehat{CAB}}{\cot\widehat{ACB}} = \dfrac{\cot\widehat{CAD}}{\cot\widehat{ACD}}$ (theo bổ đề 2)

$\Leftrightarrow \dfrac{\cot\widehat{CEF}}{\cot\widehat{AEF}} = \dfrac{\cot\widehat{CFE}}{\cot\widehat{AFE}}$ (theo (1))

$\Leftrightarrow \dfrac{\cot\widehat{AEF}}{\cot\widehat{AFE}} = \dfrac{\cot\widehat{CEF}}{\cot\widehat{CFE}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{PE}{PF} = \dfrac{QE}{QF}$ (theo bổ đề 2)

$\Leftrightarrow P \equiv Q \Leftrightarrow AECF$ ngoại tiếp (theo bổ đề 1). ❐

➢**Nhận xét.** 1) Đây là bài toán khó nên có ít bạn tham gia giải và chỉ có 7 bạn giải đúng.

2) Bạn *Dương Quốc Khánh*, 10C2, THPT Lê Hồng Phong, Biên Hoà, **Đồng Nai** có lời giải khá hay bằng công cụ tích vô hướng.

3) Cùng với các bạn *Phương, Khánh*, 5 bạn sau đây có lời giải đúng:

Hà Nội: *Trần Đăng Phúc*, 10A1, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Nam:** *Nguyễn Chí Linh*, 11T, THPT chuyên Biên Hoà; **Đồng Nai:** *Phạm Vũ Minh*, 10C1, THPT Xuân Lộc; **Nghệ An:** *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III; **Bến Tre:** *Lê Thị Minh Thảo*, 10T, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN MINH HÀ

★**Bài T10/406.** *Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1}=\dfrac{k+u_n}{1-u_n}$, $(k > 0)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $u_{13} = u_1$. Hãy tìm tất cả các giá trị của k.*

Lời giải. Từ $u_{n+1}=\dfrac{k+u_n}{1-u_n} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{k}} = \dfrac{\sqrt{k}+\dfrac{u_n}{\sqrt{k}}}{1-\sqrt{k}.\dfrac{u_n}{\sqrt{k}}}$ (1)

Đặt $\sqrt{k} = \tan\alpha$; $\dfrac{a}{\sqrt{k}} = \tan\beta$

$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Từ (1), chứng minh bằng quy nạp, ta có

$\dfrac{u_n}{\sqrt{k}} = \tan((n-1)\alpha+\beta)$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $u_{13} = u_1 \Leftrightarrow \tan(12\alpha+\beta) = \tan\beta$

$\Leftrightarrow 12\alpha = l\pi \,(l \in \mathbb{Z})$.

Vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nhận xét $\tan^2\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{6}}{1+\cos\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 7-4\sqrt{3}$;

$\tan^2\dfrac{5\pi}{6} = \cot^2\dfrac{\pi}{12} = 7+4\sqrt{3}$. Do đó $u_{13} = u_1$

$\Leftrightarrow k \in \left\{7-4\sqrt{3}, \dfrac{1}{3}, 1, 3, 7+4\sqrt{3}\right\}$. ❐

➢**Nhận xét.** Đây là bài toán đại số giải bằng phương pháp lượng giác, thuộc dạng cơ bản. Các bạn học sinh sau có lời giải tốt:

Bắc Giang: *Đinh Thành Tuân*, 10T, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên; **Hà Nam:** *Lại Thái Sơn*, 9A, THCS Đinh Công Tráng, Thanh Liêm, *Nguyễn Chí Linh*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Thái Bình:** *Vũ Huy Hoàng*, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** *Hoàng Văn Hiệp*, 11B2, THPT Triệu Sơn II; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Mậu Thành*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:** *Lê Trần Nhạc Long*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng; **TP. Hồ Chí Minh:** *Lương Xuân Vinh*, 12T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Đồng Nai:** *Nguyễn Ngọc Duy*, 10T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, *Phạm Văn Minh*, 10G, THPT Xuân Lộc.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★**Bài T11/406.** *Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 0$, $x_{n+1}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{x_n}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

Lời giải. Nhận xét rằng $x_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xét hàm số $f(x)=\left(\dfrac{1}{27}\right)^x$ nghịch biến trong khoảng $[0,+\infty)$. Khi đó $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $f(x) \le f(0)$ nên $0 \le x_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \dfrac{1}{27}$ nên $x_1 \le x_3$ và $x_4 = f(x_3) \le f(x_1) = x_2$.

Tiếp theo, ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, $x_{2n-1} \le x_{2n+1}$ và $x_{2n+2} \le x_{2n}$ với $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Thật vậy, giả sử có $x_{2n-1} \le x_{2n+1}$ thì $f(x_{2n-1}) \ge f(x_{2n+1})$ nên $x_{2n} \ge x_{2n+2}$ và vì vậy $f(x_{2n}) \le f(x_{2n+2})$.

Suy ra $x_{2n+1} \le x_{2n+3}$.

Tương tự, giả sử có $x_{2n} \ge x_{2n+2}$ thì $f(x_{2n}) \le f(x_{2n+2})$ nên $x_{2n+1} \le x_{2n+3}$ và vì vậy $f(x_{2n+1}) \ge f(x_{2n+3})$. Suy ra $x_{2n+2} \ge x_{2n+4}$.

Vậy (x_{2n-1}) là dãy đơn điệu giảm và dãy (x_{2n}) là dãy đơn điệu tăng và đều thuộc $[0;1]$ nên có giới hạn hữu hạn: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n-1} = b$

và $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(f(x_{2n}))$

$= f(f(a))$, nên $a = \left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{27}\right)^a}$, suy ra $a = \frac{1}{3}$.

Tương tự, ta cũng thu được $b = \frac{1}{3}$. Vậy nên

$a = b$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}$. □

➤**Nhận xét.** Đây là dạng toán quen thuộc về phép lặp liên tiếp của hàm đơn điệu nên có nhiều bạn tham gia giải và có lời giải đúng theo trình tự của cách giải ở trên. Danh sách các bạn có lời giải đúng:

Phú Thọ: *Nguyễn Thành Nho*, 10A3, THPT Long Châu Sa; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Xuân Việt*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Ninh:** *Phong Thanh Dương*, 11A, THPT Yên Phong 2; **Bắc Giang:** *Đinh Thành Tuân*, 10T, THPT chuyên Bắc Giang; **Hà Nội:** *Lương Hữu Bằng*, 11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên, *Nguyễn Minh Hạnh*, 10A2, THPT Lê Quý Đôn, Đống Đa, *Nguyễn Việt Dũng*, 11A1 Toán, THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; **Hà Nam:** *Nguyễn Chí Linh*, 11T, THPT chuyên Biên Hòa; **Nam Định:** *Phùng Mạnh Linh*, 11T1, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** *Phan Đức Minh*, 12A5, THPT Thái Phiên; **Quảng Ninh:** *Phạm Mạnh Tùng*, 11T, THPT chuyên Hạ Long; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Tường*, *Đỗ Thanh Tùng*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** *Vũ Huy Hoàng*, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Quốc Đạt*, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Ngọc Minh*, *Lê Hoàng Hiệp*, 10A1, THPT Thái Hòa, *Hoàng Danh Thắng*, 11A1 THPT Quỳnh Lưu III; **Hà Tĩnh:** *Phạm Tiến Dũng*, 11T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Nguyễn Văn Quý*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Võ Văn Tiên*, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** *Phạm Tuấn Anh*, 11/1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, *Nguyễn Văn Từ Thiện*, 12T1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn; **Bến Tre:** *Khưu Thành Quý*, 11T, THPT chuyên Bến Tre; **Phú Yên:** *Huỳnh Văn Thống*, 10 Tin, THPT chuyên Lương Văn Chánh.

NGUYỄN VĂN MẬU

★**Bài T12/406.** *Cho tập hợp $X=\{0, 1, 2, 3, ..., n\}$ với n là số nguyên dương. Với $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$ thuộc X^3, ta nói xRy nếu $x_k \le y_k$ với $k = 1, 2, 3$. Hãy xác định số nguyên dương nhỏ nhất p sao cho với bất kì tập con A có p phần tử nào của X^3 đều có tính chất: Nếu x, y thuộc A thì xRy hoặc yRx.*

Lời giải. Với mỗi $x = (x_1, x_2, x_3)$, đặt $s(x) = x_1 + x_2 + x_3$.

Ta nói tập $Y \subset X^3$ là tập loại T nếu với mỗi $x, y \in Y$ ta có xRy hay yRx.

Ta nói tập $Y \subset X^3$ là tập loại F nếu không tồn tại $x, y \in Y$ nào để xRy.

Với mỗi $k \in \{0,1,...,3n\}$ đặt $A_k = \{a \in Y \mid s(a) = k\}$.

Dễ thấy A_k là tập loại F. Ngoài ra

$$\begin{cases} |A_k| \le |A_{k+1}|, \text{ với } k = 1, 2, ..., \left[\frac{3n}{2}\right] \\ |A_k| = |A_{3n-k}|. \end{cases}$$

Đặt $r = \left[\frac{n}{2}\right]$. Khi đó trong các tập A_k, tập A_{n+r} có số phần tử lớn nhất. Kí hiệu $q = |A_{n+r}|$.

Bổ đề. *Phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_s = t \ (t \ge s)$ có đúng C_{s+t-1}^{s-1} nghiệm tự nhiên.*

(Bổ đề này khá quen biết với các bạn học sinh chuyên Toán).

Sử dụng bổ đề trên ta tính được $q = C_{n+r+2}^2 - 3C_{r+1}^2$.

Với mỗi $k = 0, 1, ..., n$, ta đặt $B_k = \{(k,a) \mid n-k \ge a \in X\} \cup \{(a, n-k), k \le a \in X\}$.

• Với $k = 0, 1, ..., r$ và $j = 0, 1, 2, ..., n$, đặt $B_{kj} = \{(a,b,j) \mid (a,b) \in B_k\}$, có $(n+1)(r+1)$ tập B_{kj}.

• Với $k = r+1, ..., n$ và $(a,b) \in A_k$ đặt $A_k(a,b) = \{(a,b,k) \mid k \in X\}$, ta được $(n-r)^2$ tập như vậy.

Số các tập B_{kj}; $A_k(a,b)$ là $d = (n-r)^2 + (n+1)(r+1)$.

Dễ thấy $d = q$. Kí hiệu các tập nêu trên là $(X_i)_{i=1}^q$. Rõ ràng các tập X_i có tính chất T và $(X_i)_{i=1}^q$ là một phân hoạch của X^3.

Với mỗi tập $A \subset X^3$ mà $|A| \geq q+1$ phần tử thì theo nguyên lí Dirichlet với mỗi $x, y \in A$ tồn tại X_i sao cho $x, y \in X_i$. Do đó xRy hoặc yRx. Thành thử $p = q + 1$ chính là số cần tìm (vì tập A_{n+r} có tính chất F và $\left|A_{n+r}\right| = q$).

Đáp số. $p = C_{n+r+2}^2 - 3C_{r+1}^2 + 1$ với $r = \left[\dfrac{n}{2}\right]$. ❐

➤**Nhận xét.** Đây là một bài toán khó và rất tiếc không có bạn nào giải đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★Bài L1/406. *Bạn An nhìn thấy quả táo chín trên một cành cây. Với thẳng cánh tay lên cao, An vẫn không thể bứt được quả táo vì còn thiếu 40cm nữa. An liền hạ thấp người xuống 30cm so với khi đứng thẳng và bật nhảy lên bứt được táo. Trong quá trình bật nhảy, An đã tác dụng xuống mặt đất một lực. Hãy tính giá trị tối thiểu của lực này và tính công suất tương ứng mà bạn An đã sản sinh ra. Biết rằng bạn An nặng 50kg và gia tốc rơi tự do nơi bạn An bứt táo là 9,8m/s².*

Lời giải. Để bứt được quả táo, vận tốc nhảy của bạn An phải thỏa mãn

$$v \geq \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Gọi F là lực tương tác của An và đất trong quá trình bật nhảy. Áp dụng định lí động năng trong quá trình bật nhảy ta có

$$\frac{mv^2}{2} = (F - mg).s \;\Rightarrow F = \frac{mv^2}{2s} + mg \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $F \geq \dfrac{mgh}{s} + mg$.

Vậy lực tối thiểu cần tìm là $F_{\min} = \dfrac{mgh}{s} + mg$.

Thay số h = 40cm; s = 30cm; m = 50kg; g = 9,8m/s², ta tính được $F_{\min} = 1143$N.

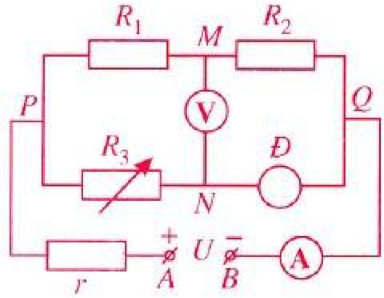
Công suất trung bình sản ra trong thời gian bật nhảy

$$P = F_{\min}.v_{tb} = F_{\min}.\frac{v}{2} \approx 1600\text{W}. ❐$$

➤**Nhận xét.** Các bạn có lời giải đúng: **Hà Nam:** *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa; **Hưng Yên:** *Nguyễn Văn Đức*, 10A1, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang; **Nghệ An:** *Phan Nguyễn Thanh Sơn*, 11A1, THPT Diễn Châu 3.

NGUYỄN XUÂN QUANG

★Bài L2/406. *Cho mạch điện như hình vẽ. Hiệu điện thế U_{AB}= 16V, đèn Đ loại 3V- 3W, các điện trở r = 2Ω và R_2= 4Ω, R_3 là biến trở. Ampe kế* **A** *có điện trở không đáng kể, còn vôn kế* **V** *có điện trở rất lớn.*



a) Đèn Đ sáng bình thường, vôn kế **V** *có cực dương mắc vào M và chỉ 5V. Hãy tìm điện trở R_1, giá trị của biến trở R_3 và số chỉ của ampe kế khi đó.*

b) Thay đèn Đ bằng một điện trở có cùng giá trị của đèn. Tìm giá trị của biến trở R_3 để công suất tiêu thụ trên nó là lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó và số chỉ của vôn kế khi đó. Bỏ qua điện trở của các dây nối, coi các điện trở không thay đổi theo nhiệt độ.

Lời giải. a) Cường độ dòng điện đi qua đèn là

$$I_D = \frac{P_D}{U_D} = \frac{3}{3} = 1(\text{A}).$$

Ta có $U_{MB} = U_{MN} + U_{NB} = 5 + 3 = 8(\text{V})$.

Cường độ dòng điện I_2 qua R_2 bằng

$$I_2 = \frac{U_{MB}}{R_2} = \frac{8}{4} = 2(\text{A}).$$

Cường độ dòng điện I qua ampe kế bằng

$$I = I_D + I_2 = 1 + 2 = 3(\text{A}).$$

Hiệu điện thế U_r giữa hai đầu điện trở r là

$$U_r = rI = 2.3 = 6(\text{V}).$$

Ta có $U_{PB} = U_{AB} - U_{AP} = 16 - 6 = 10(\text{V})$

$$R_1 + R_2 = \frac{U_{PB}}{I_2} = 5(\Omega).$$

Suy ra $R_1 = 5 - R_2 = 5 - 1 = 4(\Omega)$.

Tương tự $R_3 + R_D = \dfrac{U_{PB}}{I_D} = \dfrac{10}{1} = 10(\Omega)$, trong đó R_D là điện trở của đèn

$$R_D = \frac{U_D^2}{\mathscr{P}_D} = \frac{3^2}{3} = 3(\Omega).$$

Vậy $R_3 = 10 - R_D = 10 - 3 = 7(\Omega)$.

b) Vôn kế **V** có điện trở rất lớn nên dòng điện đi qua nó có cường độ nhỏ không đáng kể, nên có thể bỏ qua. Gọi R là điện trở tương đương của $R_1 + R_2$ mắc song song với $R_3 + R_D$. Ta có

$$R = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_D)}{R_1+R_2+R_3+R_D} = \frac{5R_3+15}{R_3+8}.$$

Điện trở toàn mạch là

$$r + R = 2 + \frac{5R_3+15}{R_3+8} = \frac{7R_3+31}{R_3+8}.$$

Cường độ dòng điện I trong mạch chính bằng

$$I = \frac{U_{AB}}{r+R} = \frac{16(R_3+8)}{7R_3+31} \qquad (1)$$

Mặt khác

$$U_{PB} = I_2(R_1+R_2) = I_D(R_3+R_D) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{I_2}{R_3+R_D} = \frac{I_D}{R_1+R_2} = \frac{I}{R_1+R_2+R_3+R_D}$$

trong đó $I = I_2 + I_D$.

Vậy $I_D = \dfrac{I(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3+R_D} = \dfrac{5I}{8+R_3}$ (3)

Thay (3) vào (1) ta có $I_D = \dfrac{80}{31+7R_3}$ (4)

Công suất tiêu thụ trên R_3 bằng $\mathscr{P} = R_3 I_D^2$ (5)

Thay (4) vào (5) ta được

$$\mathscr{P} = \frac{6400R_3}{(31+7R_3)^2} = \frac{6400}{\left(7\sqrt{R_3} + \dfrac{31}{\sqrt{R_3}}\right)^2} \qquad (6)$$

Theo hệ quả BĐT Cauchy, $\mathscr{P}$ cực đại khi

$$7\sqrt{R_3} = \frac{31}{\sqrt{R_3}}, \text{ hay } R_3 = \frac{31}{7} \approx 4{,}43(\Omega) \qquad (7)$$

Thay (7) vào (6) ta tính được $\mathscr{P}_{\max} \approx 7{,}37\text{W}$.

Số chỉ của vôn kế **V** là

$$U_{MN} = U_{MQ} + U_{QN} = U_{MQ} - U_{NQ} = R_2 I_2 - R_D I_D$$

Từ (4) và (7) suy ra $I_D \approx 1{,}29\text{A}$.

Từ (2) ta có

$$I_2 = \frac{I_D(R_3+R_D)}{R_1+R_2} \approx \frac{1{,}29(4{,}43+3)}{1+4} \approx 1{,}92(\text{A}).$$

Vậy $U_{MN} \approx 4 \times 1{,}92 - 3 \times 1{,}29 = 3{,}81(\Omega)$. □

➤**Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Bắc Ninh: *Lê Văn Mạnh*, 12 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hà Nam**: *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, Phủ Lý; **Nam Định**: *Bùi Xuân Hiển*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình**: *Nguyễn Văn Minh*, 10A2, THPT Bắc Đông Quan; **Hưng Yên**: *Đỗ Văn Mạnh*, 10A9, THPT Nam Khoái Châu; **Thanh Hóa**: *Trần Văn Thắng*, 10A5, THPT Nông Cống 2, *Mai Văn Tùng*, 12A1, THPT Hậu Lộc 4, *Bùi Thị Thúy*, 12A3, THPT Lê Hoàn; **Nghệ An**: *Nguyễn Thanh Long*, 12 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, *Trần Hoàng Bách*, *Nguyễn Đức Nguyên*, 9C, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, *Phan Nguyễn Thanh Sơn*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, *Hồ Diên Phúc*, 11A1, THPT Quỳnh Lưu III, *Nguyễn Ngọc Minh*, 10A2, K48, THPT Thái Hòa; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Viết Hùng*, 11T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị**: *Lê Quang Hải*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Tiền Giang**: *Bùi Hữu Thuận*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Tháp**: *Huỳnh Thanh Dư*, 10 Lí, THPT Cao Lãnh.

NGUYỄN VĂN THUẬN

PROBLEMS... (*Tiếp trang 17*)

T10/410. Let ABC be a triangle. An arbitrary line cuts the lines BC, CA, AB at M, N, P respectively. Let X, Y, Z be respectively the centroids of triangles ANP, BPM, CMN. Prove that

$$S_{XYZ} = \frac{2}{9} S_{ABC}.$$

T11/410. Let $(a_n), (n \in \mathbb{N}^*)$ be a sequence given by $a_1 = 0$; $a_2 = 38$; $a_3 = -90$ and

$a_{n+1} = 19a_{n-1} - 30a_{n-2}$, $\forall n \geq 3$.

Prove that a_{2011} is divisible by 2011.

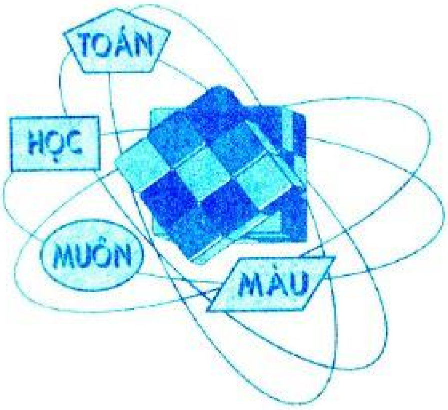
T12/410. For all positive integers n greater than 2. Find the number of functions

$$f: \{1, 2, 3, \dots, n\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

satisfying

$|f(k+1) - f(k)| \geq 3$ where $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

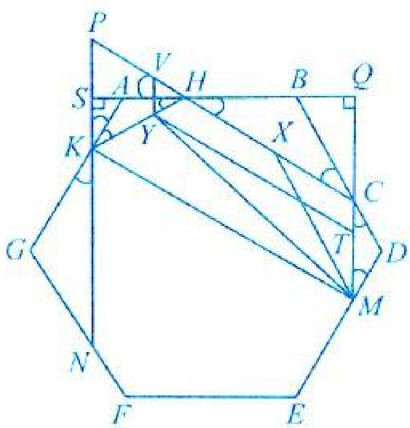
Translated by LE MINH HA



Giải đáp bài 8
MÈO đuổi CHUỘT

(Đề đăng trên THTT số 406, tháng 4 năm 2011)

a) Giả sử Chuột chạy theo đường gấp khúc *CHKN*. Ta chỉ ra rằng Mèo chạy theo đoạn thẳng *MK* sẽ bắt gặp Chuột tại điểm *K*, nghĩa là cần chứng minh $MK = CH + HK$ (hình vẽ).



Ta biết $\widehat{DBA} = \widehat{BAG} = \widehat{CDM} = 120^\circ$. Từ đó theo giả thiết $\widehat{BCH} = \widehat{BHC} = \widehat{AHK} = \widehat{AKH}$ $= \widehat{GKN} = \widehat{AKP} = \widehat{AHP} = \widehat{DCM} = \widehat{DMC} = \widehat{BCQ}$ $= 30^\circ$, do đó ΔPHK là tam giác đều. Dễ thấy $CM = HK = PK$ và $PK // CM$ nên *CMKP* là hình bình hành, suy ra $MK = CP = CH + HK$.

Cách khác. Tính độ dài. Giả sử $AB = BD = a$ thì $HK = \dfrac{CH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $CH + HK = a\sqrt{3}$.

Còn $KM = AD = 2.\dfrac{BD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Do đó $KM = CH + HK$.

b) Giả sử Mèo chạy bắt gặp Chuột tại điểm *X* trên đoạn *CH* (hoặc tại điểm *Y* trên đoạn *HK*). Dễ thấy $\widehat{MCH} = \widehat{MTY} = 120^\circ$, nên $MX > CX$ (hoặc $MY > TY = CV = CH + HY$). Cả hai trường hợp này đều không xảy ra vì tốc độ của Mèo và Chuột bằng nhau, mặc dù Mèo chạy trên đoạn thẳng là đường ngắn nhất rồi.

Kết luận. Mèo chạy trên đoạn thẳng *MK* sẽ bắt gặp Chuột tại điểm *K* trong thời gian ít nhất.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm:

1) *Đinh Ngọc Hải*, 11 Lí, THPT chuyên Biên Hòa, TP. Phủ Lý, **Hà Nam**;
2) *Đinh Việt Thắng*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. Nam Định**;
3) *Đào Việt Anh*, 10 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên**;
4) *Phạm Minh Tâm*, 11A1, THPT Diễn Châu 3, Diễn Châu, **Nghệ An**;
5) *Trần Quang Khanh*, 11TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, **Bình Định**;
6) *Trần Thị Mỹ Ánh*, 11A1, PT cấp II-III Phan Chu Trinh, TX. Sông Cầu, **Phú Yên**.

PHI PHI

ĐỀ THI ... *(Tiếp trang 5)*

2) Giả sử các đường thẳng *BM* và *CN* cắt nhau tại *Q*, chứng minh rằng *Q* cũng nằm trên đường tròn (*K*).

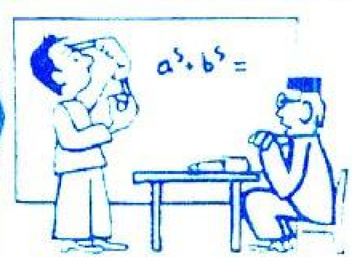
3) Trong trường hợp *P, I, Q* thẳng hàng, chứng minh rằng $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{BD}{CA}$.

Câu 4. (1 *điểm*)

Giả sử *A* là một tập con của tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$. Tập *A* có phần tử nhỏ nhất là 1, phần tử lớn nhất là 100 và mỗi *x* thuộc *A* ($x \neq 1$), luôn tồn tại *a*, *b* cũng thuộc *A* sao cho $x = a + b$ (*a* có thể bằng *b*). Hãy tìm một tập *A* có số phần tử nhỏ nhất.

PHẠM VĂN HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội) giới thiệu.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN



Trục đối xứng và tâm đối xứng của đồ thị hàm số là những tính chất hình học hay của hàm số, nhiều bài toán mà khi giải sử dụng tới nó thì đạt được kết quả nhanh chóng. Vấn đề đặt ra là đối với một hàm số cho trước làm thế nào nhanh chóng biết được đồ thị của nó có trục đối xứng hay tâm đối xứng không ? Và hãy tìm trục đối xứng, tâm đối xứng đó nếu có.

Bài viết này xin giới thiệu một phương pháp sử dụng đạo hàm để giải quyết yêu cầu trên đối với đồ thị các hàm đa thức.

DẤU HIỆU VỀ TRỤC ĐỐI XỨNG, TÂM ĐỐI XỨNG của đồ thị hàm đa thức

NGUYỄN VĂN NHIỆM
(GV trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \quad (a_n\neq 0) \qquad (1)$ là một đa thức với các hệ số thực, đối số $x\in\mathbb{R}$. Gọi đồ thị hàm số $y=f(x)$ (1) là (*C*).

Ta dễ dàng chứng minh được các nhận xét sau:

• Nếu $f(x)$ là hằng số, hoặc nhị thức bậc nhất thì mọi đường thẳng vuông góc với đồ thị hàm số (1) đều là trục đối xứng của nó và mọi điểm nằm trên đồ thị (*C*) đều là tâm đối xứng của nó.

Bây giờ giả sử $\deg f=n\geq 2$.

• Nếu đồ thị hàm số (1) có tâm đối xứng thì *n* là số tự nhiên lẻ và tâm đối xứng thuộc đồ thị.

• Nếu đồ thị hàm số (1) có trục đối xứng thì *n* là số tự nhiên chẵn và trục đối xứng cùng phương với trục Oy.

Ta viết $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \quad (a_n\neq 0, n\geq 2)$ dưới dạng

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^n \qquad (2)$$

Lấy đạo hàm của *f*(*x*) theo *x* từ cấp 1 đến cấp *n*

$$f'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+\ldots+nb_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x)=1.2b_2+\ldots+n(n-1)b_n(x-x_0)^{n-2}$$

. . . .

$$f^{(k)}(x)=k!b_k+\ldots+n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$$

$$f^{(n)}(x)=n!b_n.$$

Thay $x=x_0$ vào các hệ thức trên ta được

$$b_0=f(x_0);\ b_1=\frac{f'(x_0)}{1!};\ b_2=\frac{f''(x_0)}{2!};\ \ldots;$$

$$b_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!};\ \ldots;\ b_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Do đó $$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (3)$$

Xét phép tịnh tiến hệ trục toạ độ Oxy theo vectơ $\overrightarrow{OI}=(x_0;f(x_0))$, ta có công thức chuyển hệ trục toạ độ $\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y+f(x_0).\end{cases}$

Trong hệ trục IXY đồ thị (*C*) có phương trình

$$Y=\frac{f'(x_0)}{1!}X+\frac{f''(x_0)}{2!}X^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}X^n \qquad (4)$$

Từ (4) suy ra:

Đồ thị (*C*) nhận đường thẳng $x=x_0$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi hàm số (4) là hàm số chẵn.

Đồ thị (C) nhận điểm $I(x_0;f(x_0))$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi hàm số (4) là hàm số lẻ.

Vậy ta có các kết quả sau đây.

Mệnh đề 1

Đồ thị hàm đa thức $y=f(x)$ $(\deg f\geq 2)$ nhận đường thẳng $x=x_0$ làm trục đối xứng khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của các phương trình $f^{(2k+1)}(x)=0, \forall k\in\mathbb{N}$.

Mệnh đề 2

Đồ thị hàm đa thức $y=f(x)$ $(\deg f\geq 2)$ nhận điểm $I(x_0;f(x_0))$ làm tâm đối xứng khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của các phương trình $f^{(2k)}(x)=0, \forall k\in\mathbb{N}^*$.

Hệ quả. Phương trình

$f(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+...+a_0=0,$

$(a_{2n}\neq 0, n\in\mathbb{N}^*)$ chuyển về dạng

$$a_{2n}X^n+A_{n-1}X^{n-1}+...+A_0=0$$

khi và chỉ khi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ có trục đối xứng cùng phương với trục Oy.

II. MỘT SỐ THÍ DỤ ÁP DỤNG

★**Thí dụ 1.** *Giải phương trình*

$$x^4-2x^3+x-\frac{1}{4}=0.$$

Phân tích. Đặt vế trái của phương trình là *f*(*x*), ta thấy $f'(x)$ và $f'''(x)$ nhận $x=\frac{1}{2}$ làm nghiệm nên theo Mệnh đề 1 đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=\frac{1}{2}$ làm trục đối xứng.

Lời giải. Đặt $x=\frac{1}{2}+X$, PT đã cho trở thành

$$X^4-\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{16}=0\Leftrightarrow X=\pm\sqrt{\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Vậy $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}}$. ❒

★**Thí dụ 2.** *Tìm a để đồ thị hàm số $y=x^4+4ax^3-2x^2-12ax$ có trục đối xứng.*

Lời giải. Ta có

$$y'=4x^3+12ax^2-4x-12a,$$
$$y''=12x^2+24ax-4,$$
$$y'''=24x+24a.$$

Theo Mệnh đề 1, đồ thị hàm số trên có trục đối xứng khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases}y'=0\\ y'''=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^3+12ax^2-4x-12a=0\\ 24x+24a=0\end{cases}$$

có nghiệm. Tìm được $a\in\{-1;0;1\}$. ❒

★**Thí dụ 3.** *Chứng minh rằng nếu phương trình*

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ (a\neq 0)$$

có các nghiệm dạng $x_0-\beta; x_0-\alpha;\ x_0+\alpha;$ $x_0+\beta$ $(\alpha\neq\beta)$ thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=x_0$.

Lời giải. Do $f(x)$ nhận các nghiệm dạng $x_0\pm\beta; x_0\pm\alpha$ nên

$$f(x)=a\left((x-x_0)^2-\alpha^2\right)\left((x-x_0)^2-\beta^2\right)$$
$$=a(x-x_0)^4-a(\alpha^2+\beta^2)(x-x_0)^2+a\alpha^2\beta^2.$$

Suy ra

$$f'(x)=4a(x-x_0)^3-2a(\alpha^2+\beta^2)(x-x_0)$$
$$f''(x)=12a(x-x_0)^2-2a(\alpha^2+\beta^2)$$
$$f'''(x)=24a(x-x_0).$$

Xét hệ $\begin{cases}f'(x)=0\\ f'''(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=x_0.$

Vậy đường thẳng $x=x_0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$. ❒

➤***Nhận xét.*** Thí dụ 3 cho ta một điều kiện cần để một đa thức *f*(*x*) bậc bốn (tổng quát một đa thức bậc chẵn, lớn hơn 0) có các nghiệm lập thành cấp số cộng là đồ thị hàm số $y=f(x)$ có trục đối xứng.

★**Thí dụ 4.** *Chứng minh rằng nếu phương trình $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0\ (a\neq 0)$ có các nghiệm dạng $x_0-\beta; x_0-\alpha;\ x_0; x_0+\alpha;$ $x_0+\beta$ $(\alpha\neq\beta)$ thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tâm đối xứng là điểm $I(x_0;0)$.*

Lời giải. Ta có

$$f(x)=a\left((x-x_0)^2-\alpha^2\right)\left((x-x_0)^2-\beta^2\right)(x-x_0).$$

Xét hệ $\begin{cases} f''(x)=0 \\ f^{(4)}(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = x_0.$

Suy ra điểm $I(x_0;0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$. ❐

➢***Nhận xét.*** Thí dụ 4 cho ta một điều kiện cần để một đa thức $f(x)$ bậc năm (tổng quát một đa thức bậc lẻ, lớn hơn 1) có các nghiệm lập thành một cấp số cộng là đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tâm đối xứng thuộc trục Ox.

★ Thí dụ 5. *Tìm m để phương trình* $f(x)=x^5-mx^4-2mx^3+2m^2x^2+9x-45=0$ *có 5 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.*

Lời giải. • *Điều kiện cần.* Ta có

$f'(x)=5x^4-4mx^3-6mx^2+4m^2x+9$

$f''(x)=20x^3-12mx^2-12mx+4m^2$

$f'''(x)=60x^2-24mx-12m$

$f^{(4)}(x)=120x-24m.$

Xét hệ $\begin{cases} f''(x)=0 \\ f^{(4)}(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x)=0 \\ x=\dfrac{m}{5} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=5. \end{array}\right.$

• *Điều kiện đủ.* – Với $m=0$, ta được phương trình

$$x^5+9x-45=0 \quad (1)$$

Cách 1. Dễ thấy phương trình (1) có nghiệm duy nhất, suy ra với $m=0$, yêu cầu bài toán không thoả mãn.

Cách 2. Đồ thị hàm số $y=x^5+9x-45$, có tâm đối xứng là điểm $I(0;-45)\notin Ox$.

Suy ra với $m=0$, yêu cầu bài toán không thoả mãn.

– Với $m=5$, ta được phương trình

$$x^5-5x^4-10x^3+50x^2+9x-45=0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có tập nghiệm $\{-3;-1;1;3;5\}$ lập thành cấp số cộng. Vậy $m=5$. ❐

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 410 (8.2011)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT Biên tập: 04.35121607
ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 04.35121606
Email: tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

TRONG SỐ NÀY

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH *Mĩ thuật :* MINH THƠ
Trị sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỀM, VŨ ANH THƯ *Chế bản :* NGUYỄN THỊ OANH

TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẮC GIANG

20 năm XÂY DỰNG và TRƯỞNG THÀNH

Hiệu trưởng
ThS. BẠCH ĐĂNG KHOA

Tập thể cán bộ, giáo viên và nhân viên nhà trường.

Trường THPT chuyên Bắc Giang được thành lập ngày 26/8/1991, khi đó mang tên Trường PTTH Năng khiếu Hà Bắc. Năm 1997 tỉnh Hà Bắc tách thành hai tỉnh Bắc Giang và Bắc Ninh, trường đổi tên thành Trường PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên Bắc Giang. Kể từ ngày 18/11/2004 đến nay theo Quy chế trường THPT chuyên của Bộ GD&ĐT và Quyết định của UBND Tỉnh Bắc Giang, trường được mang tên Trường THPT chuyên Bắc Giang.

Khi mới thành lập trường chỉ có 8 lớp với 3 môn chuyên (Toán, Vật lí, Tiếng Nga) gồm 150 học sinh và 22 cán bộ giáo viên. NGƯT *Cao Ngọc Thành* là Hiệu trưởng đầu tiên, tiếp đến là NGƯT *Nguyễn Đức Hiển*. Đến nay, nhà trường đã có 29 lớp với 10 môn chuyên (Toán, Vật lí, Hóa học, Sinh học, Tin học, Ngữ văn, Lịch sử, Địa lí, Tiếng Anh, Tiếng Pháp) gồm 856 học sinh. Hội đồng nhà trường có 4 Cán bộ Quản lí: Hiệu trưởng ThS. *Bạch Đăng Khoa*; các Phó Hiệu trưởng: NGƯT. ThS. *Nguyễn Sinh Long*, NGƯT. ThS. *Hồ Thị Lân*, ThS. *Lưu Hải An* và 91 cán bộ, giáo viên, nhân viên; trong đó có 30 Thạc sĩ, 08 giáo viên đang học thạc sĩ, 01 giáo viên đang làm Nghiên cứu sinh.

Trải qua 20 năm xây dựng và trưởng thành, nhà trường luôn hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ chính trị là trường trọng điểm, có chất lượng giáo dục toàn diện cao nhất tỉnh; là nơi khơi nguồn, phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi, đào tạo nguồn nhân lực chất lượng cao cho địa phương và đất nước. Nhà trường đã có 669 lượt học sinh đoạt giải Quốc gia, 01 Huy chương Đồng Olympic Quốc tế về Hóa học, 01 Huy chương Bạc Olympic Quốc tế về Toán và nhiều giải Toán, Vật lí Khu vực; có nhiều học sinh đạt điểm tuyệt đối 30/30, nhiều học sinh là thủ khoa các trường đại học hàng đầu trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học (năm 2010, nhà trường xếp thứ hạng 30/200 trường có điểm thi đại học bình quân cao nhất nước). Song song với việc đào tạo, bồi dưỡng kiến thức, nhà trường thường xuyên tạo điều kiện để học sinh tham gia, tổ chức các hoạt động ngoại khóa, chuyên đề nhằm phát huy tính năng động, sáng tạo của học sinh chuyên như: Tổ chức thi tìm hiểu 1000 năm Thăng Long Hà Nội nhân dịp chào mừng Thủ đô tròn 1000 năm tuổi, hay hoạt động nghĩa tình, chia sẻ với Trường THPT Cù Huy Cận huyện Vũ Quang tỉnh Hà Tĩnh khi thầy và trò nhà trường bạn phải đương đầu với hai trận lũ lụt lịch sử đầu năm học 2010–2011 ...

Với sự quan tâm sâu sắc của các cấp ủy Đảng và Chính quyền, sự nỗ lực vươn lên, nhà trường đã đạt được những thành tích đáng trân trọng và tự hào. Nhà trường đã được Chủ tịch Nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba, hạng Nhì; được nhận Cờ thi đua của Chính phủ, của Tỉnh và nhiều Bằng khen các cấp; liên tục nhiều năm liền đạt danh hiệu Trường Tiên tiến Xuất sắc. Các tổ chức luôn được công nhận Vững mạnh Xuất sắc. Hội đồng giáo dục nhà trường có Thầy giáo *Trần Văn Chút* được phong tặng danh hiệu Nhà giáo Nhân dân, 10 thầy cô giáo được phong tặng Nhà giáo Ưu tú và nhiều nhà giáo được tặng Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ trưởng Bộ GD&ĐT, của Chủ tịch UBND Tỉnh. Nhiều thế hệ học sinh ra trường đã trưởng thành, tô thắm thêm lá cờ truyền thống vẻ vang của nhà trường như: TS. *Nguyễn Minh Ngọc* (giảng viên ĐH Pari Pháp), TS. *Ngô Thị Thanh Diệp* (giảng viên ĐH Y Dược TP. Hồ Chí Minh),...

Trên đà phát triển sự nghiệp trồng người, Trường THPT chuyên Bắc Giang xin cảm ơn sự quan tâm của các cấp lãnh đạo, của những người đã dành tình cảm và những điều tốt đẹp cho nhà trường. Mong rằng nhà trường sẽ là nơi tụ hội, trở về của các thế hệ cán bộ, giáo viên, học sinh đã từng gắn bó với mái trường thân thương này.

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT08M1
Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2011
Giá : 8000 đồng
Tám nghìn đồng