https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

11
2002

SỐ 305 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

CHÀO MỪNG NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM

CHÚC MỪNG TRƯỜNG TRUNG VƯƠNG ĐÓN NHẬN HUÂN CHƯƠNG ĐỘC LẬP

Các giáo viên giỏi cấp Thành phố của trường Trưng Vương

VẼ HÌNH HOA NHIỀU CÁNH

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(*Hà Nội*)

Để vẽ những đường cong như parabol, elip hoặc hypebol... ta phải xác định tọa độ một số điểm thuộc đường cong ấy rồi nối lại. Số điểm càng nhiều, hình vẽ càng chính xác. Nếu chỉ thực hiện bằng tay, chúng ta gặp nhiều khó khăn mà hình vẽ thiếu chính xác.

Máy vi tính sẽ giúp chúng ta nhanh chóng xác định được hình dạng của đường cong khi biết phương trình của đường cong đó, với độ chính xác tùy ý. Ngoài ra khi vẽ hình máy còn giúp ta thực hiện một số chức năng sau :

- Thấy rõ một số đặc điểm của đường cong.
- Từ 1 hình đơn giản máy giúp ta thực hiện các phép biến hình như các phép đồng dạng, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm, phép quay ... rồi kết hợp lại thành các hình phức tạp hơn
- Sáng tạo thêm các đường cong mới.

Chúng tôi sẽ lần lượt giới thiệu một số đường cong được vẽ bằng máy vi tính, trước hết là :

HÌNH HOA NHIỀU CÁNH.

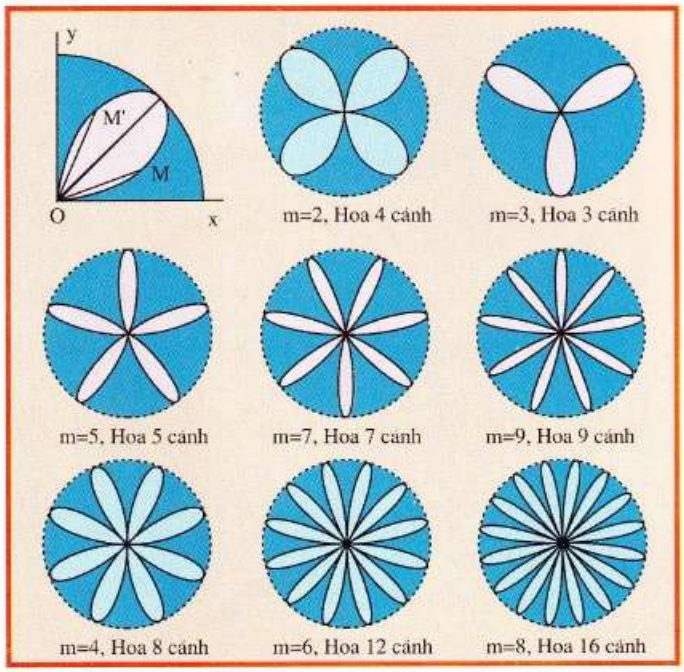
1. Phương trình. Trong mặt phẳng tọa độ Đề–các vuông góc Oxy, cho đường cong $\mathscr{H}$ gồm các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn phương trình tham số : (1) $\begin{cases} x = a.\sin(mt).\cos t \\ y = a.\sin(mt).\sin t \end{cases}$

trong đó t là tham số, a, m là các hằng số : $m \in N$, $m \geq 2$, biểu thị về số cánh hoa, còn $a \in R^+$ chỉ kích thước của $\mathscr{H}$.

Để mô tả các đặc điểm của $\mathscr{H}$, ta gọi (O) là vòng tròn lượng giác tâm O với bán kính $OA_0 = a$.

Gọi $A_1, A_2, ..., A_{2m-1}, A_{2m} \equiv A_0$ là các điểm cuối của các bán kính tính ngược chiều kim đồng hồ: $\widehat{A_oOA_i} = \frac{\pi i}{m}$ $(i = 1, 2, ..., 2m)$. Kí hiệu Q_i $(i = 1, 2, ..., 2m)$ là các hình quạt tròn tạo thành từ các cặp bán kính OA_{i-1}, OA_i và cung $A_{i-1}A_i$ của vòng tròn (O).

Sau đây là một số tính chất của $\mathscr{H}$ mà bạn đọc dễ dàng chứng minh được với kiến thức toán trong chương trình THPT.



2) Vẽ hình 1 cánh hoa

Khi cho t chạy trong $\left[0, \frac{\pi}{m}\right]$ thì các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn phương trình (1) vẽ nên đường cong $\mathscr{H}_1$ có dạng 1 cánh hoa "nội tiếp trong hình quạt tròn Q_1", nghĩa là đường cong $\mathscr{H}_1$ tiếp xúc với OA_0 và OA_1 tại điểm O, tiếp xúc với cung $\overset{\frown}{A_oA_1}$ tại điểm $I\left(a\cos\frac{\pi}{2m}, a\sin\frac{\pi}{2m}\right)$ với I là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{A_oA_1}$.

Đường cong $\mathscr{H}_1$ nhận OI làm trục đối xứng.

Diện tích hình $\mathscr{H}_1$ bằng nửa diện tích hình quạt tròn Q_1.

(Xem tiếp trang 8)

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

NGUYỄN PHƯỚC
(GV THCS Kim Long, Thừa Thiên – Huế)

Trong các cuộc thi chọn học sinh giỏi THCS, thi vào lớp 10 khối chuyên Toán –Tin thường có bài toán giải phương trình (PT) bậc 4 dạng đặc biệt. Khi giải các PT này nhiều lúc phải đặt ẩn phụ và quy về giải PT bậc thấp hơn. Bài này giới thiệu một cách đặt ẩn phụ để giải một số dạng PT bậc 4 xuất phát từ cách giải PT có hệ số đối xứng (xem bài *Nét đẹp của phương trình hệ số đối xứng* trên THTT số 304 tháng 10 / 2002).

Giải PT bậc 4 có hệ số đối xứng lệch

Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ $(a \neq 0)$ (1) gọi là PT bậc 4 có hệ số đối xứng lệch.

Cách giải PT này như sau : PT (1) không nhận $x = 0$ là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 được :

$$(1) \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0 \qquad (2)$$

Đặt ẩn phụ $t = x-\frac{1}{x}$ suy ra $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

Lúc đó PT(2) trở thành $at^2 + bt + c + 2a = 0$ (3). Nếu PT này vô nghiệm thì PT(1) vô nghiệm (vì nếu PT(1) có nghiệm thì PT(3) có nghiệm). Nếu PT(3) có nghiệm t thì thay nghiệm đó vào cách đặt ẩn phụ $x^2 - tx - 1 = 0$ ta tìm được nghiệm x của PT(1).

Ví dụ 1. *Cho phương trình*

$$3x^4 - 4x^3 + mx^2 + 4x + 3 = 0 \qquad (4)$$

a) Với giá trị nào của m thì PT vô nghiệm.

b) Giải PT với m = –5.

Giải. PT (4) không nhận $x = 0$ là nghiệm nên

$$(4) \Leftrightarrow 3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x-\frac{1}{x}\right)+m=0$$

Đặt ẩn phụ $t = x - \frac{1}{x}$ thì PT trên trở thành

$$3t^2 - 4t + m + 6 = 0 \qquad (5)$$

a) PT(5) vô nghiệm khi $\Delta = -3m - 14 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-14}{3}$. Lúc đó PT(4) vô nghiệm.

b) Với $m = -5$ thì PT(5) có dạng $3t^2-4t+1 = 0$. PT này có nghiệm $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{3}$.

Thay vào cách đặt ẩn phụ ta được các PT $x^2 - x - 1 = 0$ và $3x^2 - x - 3 = 0$. Suy ra PT(4) có 4 nghiệm là $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{37}}{2}$.

Giải PT bậc 4 có hệ số đối xứng tỉ lệ

Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bkx + ak^2 = 0$ $(a \neq 0, k \neq 0)$ (6) gọi là PT bậc 4 có hệ số đối xứng tỉ lệ.

Cách giải PT này như sau : PT (6) không nhận $x = 0$ là nghiệm nên chia hai vế cho x^2 được :

$$(6) \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{k}{x}\right)+c=0$$

Đặt ẩn phụ $t = x+\frac{k}{x}$ (k có thể dương hoặc âm), suy ra $t^2 = x^2 + \frac{k^2}{x^2} + 2k$, PT trên trở thành

$$at^2 + bt + c - 2ak = 0 \qquad (7)$$

Nếu PT (7) vô nghiệm thì PT (6) vô nghiệm. Nếu PT (7) có nghiệm t thì thay vào cách đặt ẩn phụ $x^2-tx+k=0$ ta tìm được nghiệm x của PT (6).

Ví dụ 2. *Giải phương trình*

$$2x^4 - 21x^3 + 34x^2 + 105x + 50 = 0 \ (8)$$

Giải. Ta thấy $k = \frac{105}{-21} = -5$ và $k^2 = \frac{50}{2} = 25$ nên giải được theo cách trên.

$$(8) \Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x-\frac{5}{x}\right)+34=0$$

Đặt ẩn số phụ $t = x - \frac{5}{x}$ suy ra $t^2 = x^2 + \frac{25}{x^2} - 10$, PT trên trở thành $2t^2 - 21t + 54 = 0$. PT này có 2 nghiệm $t_1 = 6$ và $t_2 = 4{,}5$. Thay vào

(Xem tiếp trang 5)

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

PHÁT TRIỂN TƯ DUY CỦA HỌC SINH QUA VIỆC DẠY HỆ THỨC VIÉT

NGUYỄN THỊ BÍNH
(GV THCS Trưng Vương)

Ở cấp Trung học cơ sở học sinh bắt đầu bộc lộ khả năng tư duy và phát triển tư duy lôgic. Do đó ở các lớp cuối cấp THCS cần chú ý phát triển tư duy cho học sinh, một phẩm chất cần thiết của người lao động sáng tạo sau này. Bài báo này muốn từ các vấn đề đơn giản trong SGK đi đến các bài toán và vấn đề phức tạp hơn thông qua suy luận, qua đó học sinh hiểu sâu sắc hơn những điều đã biết về hệ thức Vi-ét.

1. Trước hết, ta cho học sinh tiếp cận với **một số vấn đề lí thuyết**. Điều học sinh đã biết là $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 = \frac{c}{a}$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ (*)

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra : Điều kiện để phương trình bậc 2 có hai nghiệm cùng dấu là gì ? Chúng ta phân tích cho học sinh : điều kiện trên bao gồm 2 yêu cầu (*có hai nghiệm* và *hai nghiệm đó cùng dấu*). Học sinh sẽ tự tìm được điều kiện là $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Tương tự là câu hỏi : có hai nghiệm cùng dương. Vậy điều kiện này gồm mấy yêu cầu ? Lúc này học sinh có thể tự phân tích câu và được :

Có hai nghiệm / cùng / dương (tức là 3 yêu cầu) dẫn đến (*) có 2 nghiệm cùng dương :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}.$$

Tương tự : (*) có 2 nghiệm / cùng / âm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0; \frac{c}{a} > 0; -\frac{b}{a} < 0$$

Thực tế giảng dạy cho thấy, chỉ với việc xây dựng lí thuyết như trên, chúng ta cũng đã giúp học sinh phát triển óc suy luận, để từ cái đã biết đi tìm cái chưa biết. Tuy nhiên, việc phát triển tư duy, sự linh hoạt của học sinh thực sự nằm ở phần bài tập.

2. Phát triển tư duy của học sinh thông qua bài tập

Bài toán 1. Cho biểu thức

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

Tìm các số m để có giá trị của x thỏa mãn :

$$A(\sqrt{x}+1) = m(x+1) - 2$$

Hướng dẫn. Sau khi rút gọn, ta có :

$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với TXĐ : $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$.

Như vậy $A(\sqrt{x}+1) = m(x+1) - 2$

$\Leftrightarrow mx - \sqrt{x} + m = 0$ (1)

Đặt $\sqrt{x} = t$ $(t \geq 0, t \neq 2, t \neq 3)$ ta có phương trình : $mt^2 - t + m = 0$ (2)

Bây giờ yêu cầu của bài toán trở thành như thế nào ? Đa số học sinh chỉ nghĩ rằng để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (2) phải có nghiệm. Giáo viên sẽ tận dụng chỗ này, đưa ra những câu hỏi hợp lí như : Thế nếu cả 2 nghiệm của phương trình (2) đều âm thì sao ? Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất 1 nghiệm không âm khi nào ? Đến đây với lí thuyết cơ bản mà giáo viên đã đưa ra cho học sinh, các em sẽ tổng hợp được rằng :

Trường hợp 1. Chỉ có 1 nghiệm không âm $\Leftrightarrow$ $ac \leq 0$ (có dấu = là do "không âm").

Trường hợp 2. Cả hai nghiệm cùng không âm:

$$\Delta \geq 0; \frac{c}{a} \geq 0; -\frac{b}{a} \geq 0$$

Lúc đó bài toán sẽ được học sinh giải như sau:

+ Nếu $m = 0$ thì (2) có nghiệm $t = 0$

+ Nếu $m \neq 0$ thì $ac = m^2 > 0 \Rightarrow$ không xảy ra trường hợp 1.

• $\Delta = 1 - 4m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

• $-\frac{b}{a} = \frac{1}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m > 0$

Như vậy với $0 \le m \le \frac{1}{2}$ thì (2) có ít nhất 1 nghiệm không âm.

Bài toán đến đây chưa kết thúc. Vì nếu như phương trình (2) có nghiệm không âm nhưng nghiệm đó lại đúng bằng 2 hoặc 3 thì lại không được. Về nguyên tắc, học sinh sẽ tính t_1, t_2 rồi đặt chúng bằng 2, bằng 3 để tìm ra điều kiện của m. Tuy nhiên việc giải các phương trình đó thường là dài dòng, phức tạp.

Ở bài tập này ta thấy $t_1.t_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{m} = 1$ (với $m \ne 0$; $m = 0$ thì $t = 0 \ne 2$ và 3) nên nếu $t_1 = 2$ thì $t_2 = \frac{1}{2} \ne 2$ và 3, nếu $t_1 = 3$ thì $t_2 = \frac{1}{3} \ne 2$ và 3. Như vậy PT (2) luôn có ít nhất 1 nghiệm khác 2 và 3 với mọi m thỏa mãn $0 \le m \le \frac{1}{2}$.

Bài toán 2. Xác định các giá trị của m để có số $x < 0$ sao cho

$$m = \frac{x(1-x^2)^2}{1+x^2} : \left[\left(\frac{1-x^3}{1-x}+x\right)\left(\frac{1+x^3}{1+x}-x\right)\right]$$

Hướng dẫn. Đặt vế phải bằng B. Rút gọn được $B = \frac{x}{1+x^2}$ với TXĐ : $x \ne \pm 1$; $B = m \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2} = m \Leftrightarrow mx^2 - x + m = 0$ (2). Đây chính là PT (2) của BT1.

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow x = 0$ không thỏa mãn điều kiện $x < 0$.

+ Nếu $m \ne 0$; $\frac{c}{a} = 1 > 0 \Rightarrow$ không xảy ra trường hợp 2 nghiệm trái dấu.

Vậy để có nghiệm âm thì 2 nghiệm đều phải âm, dẫn đến điều kiện : $\Delta \ge 0$, $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m < 0$

Thêm nữa $x \ne -1$ khi nào ? Những học sinh thông minh sẽ chọn được cách làm tối ưu cho trường hợp này, đó là $a - b + c \ne 0 \Leftrightarrow m + 1 + m \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -\frac{1}{2}$. Tóm lại : $-\frac{1}{2} < m < 0$

Sau đây là bài tập ở mức độ phức tạp hơn mà tôi đã ra cho học sinh trong quá trình giảng dạy.

Bài toán 3. Tìm m để có x sao cho

$$m = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{4x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

Hướng dẫn.

Đặt $D = \frac{\sqrt{4x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$

$D = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với TXĐ $x \ge 0$; $x \ne 4$; $x \ne 9$.

$D = \sqrt{x} - m \Leftrightarrow x - (m+4)\sqrt{x} + 3m - 1 = 0$ (3)

Đặt $\sqrt{x} = t$ ta có $t^2 - (m+4)t + 3m - 1 = 0$ (4)

PT (3) có nghiệm thuộc TXĐ $\Leftrightarrow$ PT (4) có ít nhất 1 nghiệm không âm khác 2 và 3.

+ Trường hợp 1: $ac \le 0 \Leftrightarrow 3m - 1 \le 0 \Leftrightarrow m \le \frac{1}{3}$ (*)

+ Trường hợp 2 : $\Delta \ge 0$; $\frac{c}{a} \ge 0$; $-\frac{b}{a} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 + 16 \ge 0 \\ 3m - 1 \ge 0 \\ m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{3} \ (**)$$

Xét $t_1 = \frac{m+4+\sqrt{\Delta}}{2}$ (ở trường hợp 1, đây cũng là nghiệm không âm của phương trình).

• $t_1 = 2 \Leftrightarrow m + \sqrt{\Delta} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = -m$ (a)

– Nếu $m \ge 0 \Rightarrow$ PT (4) vô nghiệm

– Nếu $m < 0 \Rightarrow$ Từ (a) $\Rightarrow m = 5$ không thuộc khoảng đang xét.

• $t_1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 2 - m$ (b)

– Nếu $m \ge 2 \Rightarrow$ (b) vô nghiệm

– Nếu $m < 2 \Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow (m-2)^2 + 16 = (2-m)^2 \Leftrightarrow 16 = 0$ vô lí.

Như vậy t_1 luôn khác 2 và 3 (***)

Từ (*), (**), (***) $\Rightarrow$ với mọi m, luôn có x thỏa mãn $B = \sqrt{x} - m$.

Chúng ta còn có thể khai thác hệ thức Vi-ét vào giải quyết những bài toán về đồ thị. Điều này chúng tôi cũng đã có dịp nhắc đến trong một phần bài báo *Những bài toán về đường cong phụ thuộc tham số* đăng trên báo "Toán học và Tuổi trẻ" số 191 tháng 5 năm 1993.

Chúng ta còn có thể phát huy tác dụng hơn nữa của những bài tập này nếu kết hợp thêm phương pháp "Bài toán mở" mà chúng tôi đã nói đến trong bài báo "Học mà vui - Vui mà học" in trong báo *Tự học* số 13 tháng 12 năm 2000.

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

NHỮNG LƯU Ý KHI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2002

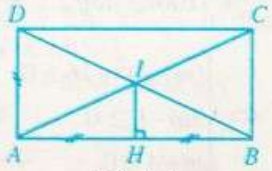
KHỐI B - PHẦN HÌNH HỌC

ĐẶNG THANH HẢI

Câu IV. 1) *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm* $I\left(\frac{1}{2},0\right)$, *phương trình đường thẳng AB là* $x - 2y + 2 = 0$ *và* $AB = 2AD$. *Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.*

Hướng dẫn giải.

Cách 1. (h. 1) Dựng $IH \perp AB \Rightarrow AD = 2IH$ $\Rightarrow AH = 2IH = 2d(I, AB) = \sqrt{5}$. Xét tam giác vuông AIH:



Hình 1

$$AI^2 = AH^2 + IH^2 = \frac{25}{4}$$

Giả sử $A(x_1, y_1)$ $(x_1 < 0)$, thì $y_1 = \frac{x_1+2}{2}$ vì A thuộc đường thẳng AB, khi đó

$$IA^2 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1+2}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$\Rightarrow x_1 = -2$, do đó $A(-2, 0)$.

Tương tự tính được tọa độ của B là $B(2, 2)$. Từ giả thiết I là trung điểm của AC và BD suy ra $C(3, 0)$; $D(-1, -2)$.

Cách 2. Từ PT đường thẳng AB, giả sử $A\left(a, \frac{a}{2}+1\right)$, $B\left(b, \frac{b}{2}+1\right)$ $(a < 0, a \neq b)$. Do I là trung điểm của AC và $BD \Rightarrow C\left(1-a, -\frac{a}{2}-1\right)$, $D\left(1-b, -\frac{b}{2}-1\right)$. Từ công thức tính độ dài $\begin{cases} AC = BD \\ AB = 2AD \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a = -b \\ a^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$. Từ đây dẫn đến kết quả như trên.

Câu IV. 2. *Cho hình lập phương* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ *có cạnh bằng a.*

a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B *và* B_1D.

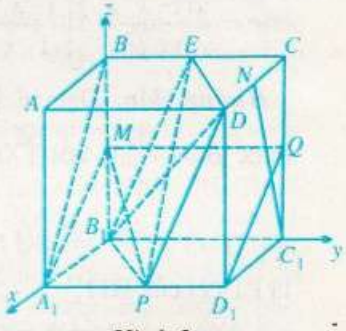
b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1, CD, A_1D_1. *Tính góc giữa hai đường thẳng MP và* C_1N (thí sinh thi Cao đẳng không làm câu b).

Hướng dẫn giải. Cách 1. (h. 2) (PP tọa độ)

a) Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với $B_1(0, 0, 0)$, $A_1(a, 0, 0)$, $C_1(0, a, 0)$, $B(0, 0, a)$, $D(a, a, a)$.

Đường thẳng A_1B qua $A_1(a, 0, 0)$ và nhận $\overrightarrow{A_1B} = (-a, 0, a)$ làm vectơ chỉ phương.

Đường thẳng B_1D qua $B_1(0, 0, 0)$ nhận $\overrightarrow{B_1D} = (a, a, a)$ làm vectơ chỉ phương. Ta có



Hình 2

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & -a \\ a & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & 0 \\ a & a \end{vmatrix}\right)$$

$= (-a^2, 2a^2, -a^2)$. Mà $\overrightarrow{A_1B_1} = (-a, 0, 0)$ nên $\vec{u}.\overrightarrow{A_1B_1} = a^3$; $|\vec{u}| = \sqrt{a^4 + 4a^4 + a^4} = a^2\sqrt{6}$.

Do đó $d(A_1B, B_1D) = \frac{|\vec{u}.\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\vec{u}|} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Từ $D_1(a, a, 0)$; $C(0, a, a)$ có $M\left(0, 0, \frac{a}{2}\right)$, $N\left(\frac{a}{2}, a, a\right)$, $P\left(a, \frac{a}{2}, 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(a, \frac{a}{2}, \frac{-a}{2}\right)$, $\overrightarrow{C_1N} = \left(\frac{a}{2}, 0, a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{C_1N} = 0$. Do đó góc giữa MP và C_1N bằng 90°.

Lưu ý : Giải toán hình học bằng phương pháp tọa độ (PPTĐ) đơn giản song không phải bài toán nào cũng giải quyết được theo phương pháp này. Vậy sử dụng PPTĐ giúp ta dễ dàng giải được các bài toán nào ? Nếu trong bài toán có góc tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình chóp tứ giác đều ... thì ta có thể chọn hệ tọa độ Đề-các vuông góc sao cho các cạnh, các đỉnh trùng với trục tọa độ, gốc tọa độ. Khi đó việc tính toán sẽ thuận lợi.

Cách 2. (PP tổng hợp)

a) Gọi E là trung điểm BC thì A_1B // mp(B_1PDE). Vậy $d(A_1B, B_1D) = d(B, \text{mp}(B_1PDE)) = d$. Ta có

$$V(BB_1PDE) = \frac{1}{3}d.S(B_1PDE) \qquad (1)$$

Vì $B_1E = ED = DP = PB_1 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ nên B_1PDE là hình thoi, và $B_1D = a\sqrt{3}$, $PE = A_1B = a\sqrt{2} \Rightarrow S(B_1PDE) = \dfrac{1}{2}B_1D.PE = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Từ (1) suy ra $V(BB_1PDE) = \dfrac{1}{6}d.a^2\sqrt{6} = 2V(B_1BED) = \dfrac{2}{3}BB_1.S(BED) = \dfrac{a^3}{6}$

$\Rightarrow d = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Gọi Q là trung điểm CC_1 thì A_1M // D_1Q. Từ $\Delta CNC_1 = \Delta C_1QD_1$ suy ra $\widehat{CC_1N} = \widehat{C_1DQ} \Rightarrow C_1N \perp D_1Q$ (2). Mặt khác $A_1D_1 \perp$ mp(CDD_1C_1) $\Rightarrow A_1D_1 \perp C_1N$ (3). Từ (2), (3) suy ra $C_1N \perp$ mp(A_1MQD_1) $\Rightarrow C_1N \perp MP$, hay góc giữa MP và C_1N bằng 90°.

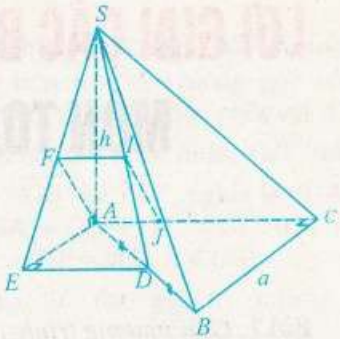
Lưu ý. Để tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau Δ_1, Δ_2 thông thường ta làm như sau :

Cách 1 : Tìm mp(α) chứa Δ_2 sao cho Δ_1 // mp(α). Khi đó $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, \text{mp}(\alpha))$ ($M \in \Delta_1$)

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IJ của Δ_1 và Δ_2. Khi đó $d(\Delta_1, \Delta_2) = IJ$.

Bài luyện tập : *Cho hình chóp SABC, đáy ABC là tam giác vuông tại C, BC = a, SA = h và vuông góc với đáy, D là trung điểm của AB. Dựng đoạn vuông góc chung của AC và SD, từ đó suy ra khoảng cách giữa AC và SD.*

Hướng dẫn giải. Qua D kẻ đường thẳng Δ_1 // AC. Qua A kẻ đường thẳng Δ_2 // BC. Gọi E là giao điểm của Δ_1 và Δ_2. Trong mp(SAE) dựng $AF \perp SE$ (1).



Hình 3

Ta có (h. 3)

$$\begin{cases} ED \perp EA \\ ED \perp SA \end{cases}$$

$\Rightarrow ED \perp$ mp(SAE)

$\Rightarrow ED \perp AF$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow AF \perp$ mp(SED)

$\Rightarrow AF \perp SD$. Trong mp(SED) dựng FI//ED ($I \in SD$). Trong mp (FAC) dựng IJ // FA ($J \in AC$) thì IJ là đoạn thẳng vuông góc chung giữa AC và SD. Xét tam giác vuông SAE ta có $AF = \dfrac{SA.AE}{SE} = \dfrac{ah}{\sqrt{4h^2+a^2}}$. Do đó

$$d(SD, AC) = IJ = AF = \frac{ah}{\sqrt{4h^2+a^2}}.$$

CÁC BÀI LUYỆN TẬP

BT1. *Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy cho các điểm A (2, 1), B (0, 1), C (3, 5), D (–3, –1). Tính tọa độ các đỉnh hình vuông có hai cạnh song song đi qua A và C, hai cạnh song song còn lại đi qua B và D, biết rằng tọa độ các đỉnh hình vuông đều dương.*

BT2. *Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ mp(ABCD) và SA = 2a. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau BD và SC theo a.*

MỘT CÁCH GIẢI... *(Tiếp trang 1)*

cách đặt ẩn phụ suy ra PT (8) có 4 nghiệm là : $3+\sqrt{14}$, $3-\sqrt{14}$, $\dfrac{9+\sqrt{161}}{4}$, $\dfrac{9-\sqrt{161}}{4}$.

Mời các bạn sử dụng cách giải trên để làm các bài tập sau :

1) Xét phương trình với tham số m :

$$x^4 - mx^3 - 5x^2 + mx + 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng PT trên luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Giải PT trên với $m = 2$.

2) Xét phương trình với tham số m :

$$x^4 - mx^3 + 37x^2 - 5mx + 25 = 0$$

a) Với giá trị nào của m thì PT trên có nghiệm

b) Giải PT trên với $m = 13$.

LỜI GIẢI CÁC BÀI THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
MÔN TOÁN THPT NĂM HỌC 2001 - 2002

BẢNG A

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ Trung học Phổ thông)

Bài 1: *Giải phương trình:*

$$\sqrt{4 - 3\sqrt{10 - 3x}} = x - 2.$$

Lời giải: Tập xác định của phương trình: $X = [74/27; 10/3]$.

Xét trên X ta có:

PT đã cho $\Leftrightarrow 4 - 3\sqrt{10 - 3x} = x^2 - 4x + 4$

$\Leftrightarrow 9(10 - 3x) = x^2(4 - x)^2$

$\Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 27x - 90 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2)(x^2 - 7x + 15) = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ (do $x^2 - 7x + 15 > 0 \ \forall x \in R$, và $x + 2 > 0 \ \forall x \in X$).

Vậy PT đã cho có duy nhất nghiệm $x = 3$.

Bài 2: *Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC cân tại A. Xét đường tròn (O) thay đổi đi qua A, không tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC và có tâm O nằm trên đường thẳng BC. Gọi M, N tương ứng là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) với các đường thẳng AB, AC. Hãy tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác AMN.*

Lời giải (*Bạn đọc tự vẽ hình*): Xét các trường hợp sau:

1/ *Trường hợp 1*: $\angle A = 90^0$. Trong trường hợp này, dễ thấy quỹ tích của H là tập $\{A\}$.

2/ *Trường hợp 2*: $\angle A \neq 90^0$.

a/ Phần thuận: Lấy điểm D đối xứng với A qua BC. Vì $O \in BC$ nên $D \in (O)$. Hơn nữa, do ΔABC cân tại A nên D là trung điểm của cung MN không chứa A. Gọi E là điểm xuyên tâm đối của D, ta có $AE \parallel BC$ và $DE \perp MN$. Lấy điểm K đối xứng với D qua MN, ta có $K \in DE$.

Gọi G là giao điểm thứ hai của đường thẳng AH với (O). Do H là trực tâm ΔAMN nên H và G đối xứng với nhau qua MN. Suy ra GD và HK đối xứng với nhau qua MN. (*)

Vì $AG \parallel ED$ (do cùng vuông góc với MN) và $A, G, D, E \in (O)$ nên GD và AE đối xứng với nhau qua đường trung trực l của DE. (**).

Vì $MN \parallel l$ (do cùng vuông góc với DE) nên từ (*) và (**) suy ra $HK \parallel AE$. Dẫn tới $HK \parallel BC$. (1)

Gọi I là trung điểm của MN, ta có $DI = DN\sin(A/2)$. Áp dụng định lý hàm số sin cho ΔDEN, ta được: $DN = 2DO\sin(A/2)$. Suy ra, $DI = 2DO\sin^2(A/2)$. Do đó:

$DK/DO = 2DI/DO = 4\sin^2(A/2)$ (2)

Từ (1) và (2), với lưu ý $\overrightarrow{DK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DO}$, suy ra HK đường thẳng là ảnh của đường thẳng BC qua phép vị tự tâm D tỉ số $4\sin^2(A/2)$. Nói một cách khác, H thuộc đường thẳng d - ảnh của đường thẳng BC qua phép vị tự tâm D tỉ số $4\sin^2(A/2)$.

b/ Phần đảo: Lấy một điểm H bất kì thuộc d. Từ D kẻ đường thẳng song song với AH cắt BC tại O. Vẽ đường tròn (O) tâm O bán kính OA. Dễ thấy, nếu $H \notin \{H_1, H_2\}$, với H_1, H_2 là các điểm nằm trên d sao cho $DH_1 \perp DB$ và $DH_2 \perp DC$, thì (O) sẽ cắt lại AB, AC tương ứng tại M, N.

Giả sử $H \notin \{H_1, H_2\}$. Khi đó, ta có ΔAMN. Vì AD là phân giác của $\angle MAN$ nên OD là trung trực của MN. Suy ra, $AH \perp MN$. Do đó, nếu gọi H' là trực tâm của ΔAMN thì $H' \in AH$. Hơn nữa, bằng các lập luận như đã trình bày ở phần thuận ta sẽ chứng minh được $H' \in d$. Từ đó suy ra $H' \equiv H$, tức H là trực tâm của ΔAMN.

c/ Kết luận: Vậy, quỹ tích của điểm H là tập hợp $d \setminus \{H_1, H_2\}$ được xác định như trên.

Bài 3: *Cho các số nguyên dương m, n với $m < 2001$, $n < 2002$. Cho 2001×2002 số thực đôi một khác nhau. Điền các số đã cho vào các ô vuông con của bảng ô vuông kích thước 2001×2002 (bảng gồm 2001 hàng và 2002 cột) sao cho mỗi số được điền vào một ô và mỗi ô được điền một số. Ta gọi một ô vuông con của bảng là ô "xấu" nếu số nằm trong ô đó bé hơn ít nhất m số nằm cùng cột với nó và đồng thời bé hơn ít nhất n số nằm cùng hàng với nó.*

Với mỗi cách điền số nói trên, gọi s là số ô "xấu" của bảng số nhận được. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của s.

Lời giải: Ta sẽ giải bài toán tổng quát của bài đã ra khi thay 2001 bởi p và thay 2002 bởi q.

Bằng phương pháp quy nạp theo $p + q$, ta sẽ chứng minh:

$$s \geq (p - m)(q - n) \qquad (*)$$

Dễ dàng kiểm tra được tính đúng đắn của (*) đối với bảng $p \times q$ mà $p + q = 2; 3; 4$.

Giả sử (*) đúng đối với bảng $p \times q$ mà $p + q = k$.

Xét bảng $p \times q$ mà $p + q = k + 1$. Dễ thấy, (*) đúng nếu $m = p$ hoặc $n = q$.

Xét trường hợp: $m < p$ và $n < q$. Ta gọi một ô vuông con của bảng là ô "*xấu theo hàng*" ("*xấu theo cột*") nếu số nằm trong ô đó bé hơn ít nhất n số (tương ứng, m số) nằm cùng hàng (tương ứng, cùng cột) với nó. Mỗi hàng có q–n số *xấu theo hàng*, mỗi cột có p–m số *xấu theo cột*.

Nếu trong bảng $p \times q$, mỗi ô "*xấu theo hàng*" cũng đồng thời là ô "*xấu theo cột*" và ngược lại, thì $s = (p - m)(q - n)$, trong trường hợp này, ta có điều cần chứng minh. Giả sử, trong bảng $p \times q$ có các ô chỉ "*xấu theo hàng*" (không theo cột) hoặc chỉ "*xấu theo cột*" (không theo hàng). Gọi *a* là số nhỏ nhất trong tất cả các số nằm ở các ô như vậy. Không mất tổng quát, giả sử ô chứa *a* là ô "*xấu theo hàng*". Khi đó, tất cả $(p - m)$ ô "*xấu theo cột*" của cột chứa *a* cũng đồng thời là $(p - m)$ ô "*xấu*" của bảng. Bỏ cột chứa *a*, ta sẽ nhận được bảng $p \times (q - 1)$ mà một ô vuông con của bảng này là ô "*xấu*" thì nó là ô "*xấu*" của bảng p x q. Vì $p + (q - 1) = k$, nên theo giả thiết qui nạp ta có số ô "xấu" của bảng $p \times (q - 1)$ không ít hơn $(p - m)(q - 1 - n)$. Do đó, số ô "xấu" của bảng $p \times q$ không ít hơn : $(p - m)(q - 1 - n) + (p - m) = (p - m)(q - n)$.

Theo nguyên lí quy nạp, (*) được chứng minh.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách điền số vào bảng sao cho bảng số nhận được có số ô "*xấu*" bằng $(p - m)(q - n)$. Sắp xếp p x q số theo thứ tự tăng dần, rồi theo thứ tự đó lần lượt điền các số vào các ô của bảng theo qui tắc từ trên xuống dưới - từ trái qua phải. Dễ thấy, bảng số nhận được nhờ cách điền số vừa nêu có số ô "*xấu*" bằng $(p - m)(q - n)$.

Vậy $s_{min} = (p - m)(q - n)$.

Áp dụng kết quả bài toán trên vào bài đã ra, ta có: $s_{min} = (2001 - m)(2002 - n)$.

Bài 4: *Giả sử a, b, c là các số thực sao cho đa thức*

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

có ba nghiệm thực (các nghiệm không nhất thiết đôi một khác nhau).

Chứng minh rằng:

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}.$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải: Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng:

$$-6a(a^2 - 2b) \leq -27c + 10(a^2 - 2b)^{3/2} \qquad (1)$$

Giả sử α, β, γ là ba nghiệm thực của đa thức P(x). Theo định lý Viet ta có: $\alpha + \beta + \gamma = -a$, $\alpha\beta\gamma = -c$ và $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = a^2 - 2b$. Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow 6(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \leq$$
$$\leq 27\alpha\beta\gamma + 10(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{3/2} \qquad (2)$$

Tiếp theo, xem Lời giải bài 4 Bảng B (Tạp chí TH & TT, số 304 tháng 10/2002, tr. 11).

Bài 5: *Hãy tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình*

$$x + y + u + v = n\sqrt{xyuv}$$

có nghiệm nguyên dương x, y, u, v.

Lời giải: Với $x, y, u, v \in Z^+$, ta có thể viết lại PT của bài ra dưới dạng tương đương sau:

$$(x + y + u + v)^2 = n^2xyuv$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2(y+u+v)x + (y + u + v)^2 = n^2xyuv \quad (1)$$

Giả sử n là số nguyên dương sao cho PT (1) có nghiệm nguyên dương x, y, u, v. Gọi (x_0, y_0, u_0, v_0) là nghiệm nguyên dương của PT (1) mà tổng các thành phần của nghiệm có giá trị nhỏ nhất. Không mất tổng quát, giả sử $x_0 \geq y_0 \geq u_0 \geq v_0$. Dễ thấy:

(i) $(y_0 + u_0 + v_0)^2$ chia hết cho x_0.

(ii) x_0 là nghiệm nguyên dương của tam thức bậc hai

$$f(x) = x^2 - n^2y_0u_0v_0x + 2(y_0 + u_0 + v_0)x +$$
$$+ (y_0 + u_0 + v_0)^2.$$

Từ (i) và (ii), theo định lý Viet ta có: ngoài nghiệm x_0 tam thức f(x) còn có nghiệm nguyên dương $x_1 = (y_0 + u_0 + v_0)^2/x_0$. Điều này chứng tỏ (x_1, y_0, u_0, v_0) là một nghiệm nguyên dương của PT (1). Từ định nghĩa nghiệm (x_0, y_0, u_0, v_0) ta có:

$$x_1 \geq x_0 \geq y_0 \geq u_0 \geq v_0 \qquad (2)$$

Từ (5.2), theo định lí về dấu của tam thức bậc hai ta được:

$$0 \leq f(y_0) = y_0^2 - n^2y_0^2u_0v_0 + 2(y_0 + u_0 + v_0)y_0$$
$$+ (y_0 + u_0 + v_0)^2 \leq 16y_0^2 - n^2y_0^2u_0v_0$$

$\Rightarrow n^2y_0^2u_0v_0 \le 16y_0^2 \Rightarrow n^2 \le n^2u_0v_0 \le 16$
$\Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4\}$.

+Với $n = 1$, p.t. (5.1) có nghiệm nguyên dương $x = y = u = v = 4$.

+Với $n = 2$, p.t. (5.1) có nghiệm nguyên dương $x = y = u = v = 2$.

+Với $n = 3$, p.t. (5.1) có nghiệm nguyên dương $x = y = 1, u = v = 2$.

+Với $n = 4$, p.t. (5.1) có nghiệm nguyên dương $x = y = u = v = 1$.

Vậy, tất cả các giá trị nguyên dương n cần tìm là: $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Bài 6: *Xét phương trình:*

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{k^2x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$$

trong đó n là tham số nguyên dương.

1/ Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình nêu trên có duy nhất nghiệm lớn hơn 1; kí hiệu nghiệm đó là x_n.

2/ Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn bằng 4 khi $n \to +\infty$.

Lời giải: Viết lại PT của bài ra dưới dạng:

$$\frac{-1}{2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = 0 \ (1)$$

Kí hiệu $f_n(x)$ là hàm số ở vế trái của PT (6.1).

1/ Dễ thấy, với mỗi $n \in N^*$, hàm số $f_n(x)$ liên tục và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Hơn nữa, ta có: $f_n(x) \to +\infty$ khi $x \to 1^+$ và $f_n(x) \to -1/2$ khi $x \to +\infty$. Từ đó suy ra với mỗi $n \in N^*$, PT (6.1) có duy nhất nghiệm $x_n > 1$.

2/ Với mỗi $n \in N^*$, ta có:

$$f_n(4) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(2k)^2-1} + \dots + \frac{1}{(2n)^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{-1}{2(2n+1)} < 0 = f_n(x_n).$$

Từ đó, do hàm $f_n(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$, suy ra: $x_n < 4 \ \forall n \in N^*$. (2)

Mặt khác, do với mỗi $n \in N^*$, hàm $f_n(x)$ khả vi trên đoạn $[x_n; 4]$ nên theo định lý Lagrange, với mỗi $n \in N^*$ tồn tại $t \in (x_n; 4)$ sao cho:

$$\frac{f_n(4) - f_n(x_n)}{4 - x_n} = f_n'(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} + \frac{-4}{(4t-1)^2} + \dots + \frac{-n^2}{(n^2t-1)^2} < \frac{-1}{9} \quad \forall n \in N^*.$$

hay: $\dfrac{-1}{2(2n+1)(4-x_n)} < \dfrac{-1}{9} \quad \forall n \in N^*$

$$\Rightarrow x_n > 4 - \frac{9}{2(2n+1)} \quad \forall n \in N^* \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được:

$$4 - \frac{9}{2(2n+1)} < x_n < 4 \quad \forall n \in N^*.$$

Từ đó, theo định lý về giới hạn của dãy số kẹp giữa hai dãy số dần tới cùng một giới hạn, ta có điều đề bài yêu cầu chứng minh.

VẼ HÌNH HOA NHIỀU CÁNH

(Tiếp bìa 2)

3) Vẽ hình hoa nhiều cánh

Từ hình 1 cánh hoa $\mathscr{H}_1$ thực hiện liên tiếp các phép quay tâm O, góc quay $\pi + \dfrac{\pi}{m}$ (hoặc $\dfrac{\pi}{m} - \pi$) ta được hình hoa nhiều cánh $\mathscr{H}$. Có thể thay thế các phép quay trên bằng phép đối xứng lần lượt qua các trục OD_i mà $OD_i \perp OA_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2m$).

– Với m chẵn thì các hàm $x(t)$, $y(t)$ đều có chu kì $t_0 = 2\pi$, hình $\mathscr{H}$ có $2m$ cánh hoa, mỗi cánh hoa nội tiếp trong một hình quạt tròn Q_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 2m$).

– Với m lẻ thì các hàm $x(t)$, $y(t)$ đều có chu kì $t_0 = \pi$, hình $\mathscr{H}$ có m cánh hoa, mỗi cánh hoa nội tiếp trong một hình quạt tròn Q_j ($j = 1, 3, 5, \dots, 2m - 1$).

KÌ THI OLYMPIC TOÁN HOA KỲ 2002

Bài 1. *Gọi S là một tập hợp gồm 2002 phần tử, và gọi N là một số nguyên với $0 \le N \le 2^{2002}$. Chứng minh rằng có thể tô màu mọi tập hợp con của S bằng màu xanh hoặc đỏ thỏa mãn các điều kiện sau :*

(a) hợp của hai tập con đỏ bất kì là đỏ ;

(b) hợp của hai tập con xanh bất kì là xanh ;

(c) có đúng N tập con đỏ.

Kết quả đúng cả khi 2002 được thay bởi số tự nhiên n bất kì.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng điều này có thể thực hiện được với tập hợp $S_n = \{1, 2, 3, ..., ..., n\}$ và số nguyên N mà $0 \le N \le 2^n$. Kí hiệu $\mathcal{T}(S)$ là mọi tập con của S. Trường hợp $n = 1$ là tầm thường. Giả định rằng cách tô màu như trên đúng với tập hợp $S_n = \{1, 2, ..., n\}$ và số nguyên N_n mà $0 \le N_n \le 2^n$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một cách tô màu như thế cho tập hợp $S_{n+1} = \{1, 2, ..., n, n+1\}$ và số nguyên N_{n+1} mà $0 \le N_{n+1} \le 2^{n+1}$. Ta xét các trường hợp sau :

(i) $0 \le N_{n+1} \le 2^n$. Áp dụng giả thiết quy nạp vào S_n và $N_n = N_{n+1}$, ta được cách tô màu $\mathcal{T}(S_n)$ thỏa mãn các điều kiện (a), (b), (c). Tất cả tập con chưa tô màu của S_{n+1} chứa phần tử $n+1$ được tô màu xanh thì được cách tô màu $\mathcal{T}(S_{n+1})$ thỏa mãn các điều kiện (a), (b) và (c).

(ii) $2^n + 1 \le N_{n+1} \le 2^{n+1}$. Áp dụng giả thiết quy nạp vào S_n và $N_n = 2^{n+1} - N_{n+1}$, ta được một cách tô màu $\mathcal{T}(S_n)$ thỏa mãn các điều kiện (a), (b), (c). Mọi tập con chưa tô màu của S_{n+1} chứa phần tử $n+1$ được tô màu xanh. Sau cùng, ta đổi màu mỗi tập con như sau : nếu nó màu xanh thì tô lại bằng màu đỏ ; nếu nó màu đỏ thì tô lại bằng màu xanh. Dễ dàng thấy rằng cách tô màu $\mathcal{T}(S_{n+1})$ này thỏa mãn các điều kiện (a), (b), (c).

Bài 2. *Cho ABC là tam giác thỏa mãn điều kiện*

$$\left(\cot g\frac{A}{2}\right)^2 + \left(2\cot g\frac{B}{2}\right)^2 + \left(3\cot g\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{6s}{7r}\right)^2 \quad (1)$$

trong đó s và r lần lượt là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với một tam giác T có các cạnh đều là số nguyên dương không có ước chung và xác định các số nguyên này.

Lời giải. Đặt $u = \cot g\frac{A}{2}$, $v = \cot g\frac{B}{2}$, $w = \cot g\frac{C}{2}$; $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Gọi D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB. Thế thì $DI = r$ và $AD = s - a$, (I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC). Như thế $u = \frac{AD}{DI} = \frac{s-a}{r}$.

Tương tự, $v = \frac{s-b}{r}$ và $w = \frac{s-c}{r}$. Ta có

$$\frac{s}{r} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{r} = u + v + w$$

Hệ thức (1) đã cho có dạng

$$49[u^2 + 4v^2 + 9w^2] = 36(u + v + w)^2 \quad (2)$$

Khai triển và rút gọn hệ thức trên được

$13u^2 + 160v^2 + 405w^2 - 72(uv + vw + wu) = 0$,

hay $(3u - 12v)^2 + (4v - 9w)^2 + (18w - 2u)^2 = 0$

$\Rightarrow u : v : w = 36 : 9 : 4$.

(Điều này cũng nhận được khi sử dụng BĐT Bu–nhi–a–cốp–xki kết hợp với (2)

$(6^2 + 3^2 + 2^2)[u^2 + (2v)^2 + (3w)^2] \ge$

$\ge (6.u + 3.2v + 2.3w)^2$).

Suy ra

$$\frac{s-a}{36} = \frac{s-b}{9} = \frac{s-c}{4} = \frac{2s-b-c}{9+4} = \frac{2s-c-a}{4+36} =$$

$$= \frac{2s-a-b}{36+9} = \frac{a}{13} = \frac{b}{40} = \frac{c}{45}.$$

Từ đó tam giác ABC đồng dạng với tam giác có độ dài các cạnh là 13, 40, 45.

(Kì sau đăng tiếp)

NGUYỄN SINH NGUYÊN
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)
giới thiệu

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2001-2002

Cuộc thi thường niên lần này được tính từ tháng 9.2001 đến hết tháng 8.2002. Rất vui mừng là đã thấy tên các bạn tham gia giải bài trải từ các tỉnh cực Bắc đến các tỉnh cực Nam. Các tỉnh có nhiều bạn được giải là *Vĩnh Phúc, Nam Định , Nghệ An, Hà Tĩnh, Hòa Bình, Phú Thọ, Hải Dương, Quảng Trị, Quảng Ngãi*... Vùng đồng bằng sông Cửu Long vẫn còn tham gia ít và điểm đạt được chưa cao. Hi vọng cuộc thi sau có nhiều bạn ở các tỉnh khác được giải.

Sau đây là danh sách các bạn được giải cuộc thi này. Chúc mừng các bạn.

MÔN TOÁN

Giải Xuất sắc (4 giải)

1. *Nguyễn Lâm Tuyền*, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình
2. *Hoàng Ngọc Minh*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ
3. *Hà Hữu Cao Trình*, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình
4. *Nguyễn Đức Tâm*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định

Giải Nhất (10 giải)

1. *Nguyễn Xuân Trường*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc
2. *Nguyễn Huy Cung*, 12T2, , THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
3. *Lê Phương*, 11T1 THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai
4. *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 11T, THPT Sa Đéc, Đồng Tháp
5. *Nguyễn Thành Nam*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương
6. *Trần Võ Huy*, 11T PTNK ĐHQG Tp.HCM
7. *Lê Đình Huy*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương
8. *Vũ Khắc Kỷ*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định
9. *Phạm Anh Minh*, 9A, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng
10. *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ, Cần Thơ.

Giải Nhì (13 giải)

1. *Phan Quốc Hưng*, 12B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị
2. *Trần Tiến Hoàng*, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị
3. *Phan Thành Nam*, 11T2, THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên
4. *Mai Quang Thành*, 11T1, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa
5. *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
6. *Phạm Thành Trung*, 11T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương
7. *Lê Hùng Việt Bảo*, 10A Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội
8. *Lê Bảo Khánh*, 10A, PTCT ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội
9. *Nguyễn Tiến Việt*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa
10. *Phạm Duy Hiển*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định
11. *Nguyễn Trường Thọ*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ
12. *Nguyễn Trung Kiên A*, 8A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ
13. *Phan Hoàng Phương Trang*, 6/2, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà, Quảng Trị

Giải Ba (22 giải)

1. *Trần Bá Bách*, 12A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc
2. *Nguyễn Văn Giáp*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc
3. *Nguyễn Mạnh Long*, 12N, THPT Thăng Long, Hà Nội
4. *Trịnh Thùy Nhung*, 12T, THPT Lương Văn Tụy, Tx. Ninh Bình, Ninh Bình
5. *Vũ Hữu Phương*, 12C, toán THPT chuyên Hoàng Văn Thụ , Hòa Bình
6. *Nguyễn Thị Thùy Dương*, 11 sinh, THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh
7. *Nguyễn Văn Thảo*, 11Toán THPT NK Hàn thuyên , Bắc Ninh
8. *Nguyễn Chí Hiệp*, 11A1, khối PTCT-T, ĐHSP Hà Nội
9. *Nguyễn Hoàng Thanh*, 11A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội
10. *Phạm Văn Trung*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
11. *Nguyễn Hoài Phương*, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định
12. *Vũ Quang Thanh*, 10A, PTCT ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội
13. *Phạm Kim Hùng*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định
14. *Trần Xuân Dũng*, 9A, THCS NK Trần Phú, Hải Phòng

15. *Dương Đỗ Nhuận*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định
16. *Nguyễn Ngọc Tú*, 9B THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, Thanh Hóa
17. *Đoàn Duy Thuyết*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định
18. *Doãn Thị Kim Huế*, 8C, THCS Phan Huy Thành, Ân Thi, Hưng Yên
19. *Phan Tuấn Anh*, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng, Bắc Giang
20. *Lưu Thị Thu Trang*, 8A THCS Yên Phong , Bắc Ninh
21. *Phạm Huy Hoàng*, 8B, THCS NK Trần Phú, Hải Phòng
22. *Trần Hải Đăng*, 7A9, THCS Trần Đại Nghĩa, Tp. HCM

Giải khuyến khích (30 giải)

1. *Nguyễn Minh Công*, 12T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa
2. *Lê Trung Hiếu*, 12T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai
3. *Trần Anh Hoàng*, 12T, PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh
4. *Nguyễn Duy Hưng*, 12B2, THPT chuyên Vĩnh Phúc
5. *Trần Thái An Nghĩa*, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
6. *Nguyễn Văn Tâm*, 12A1, THPT Giá Rai, Tx. Bạc Liêu, Bạc Liêu.
7. *Nguyễn Quốc Tuấn*, 12A, THPT Lào Cai
8. *Nguyễn Lâm Hưng*, 11T, PTNK - ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh
9. *Nguyễn Duy Thành*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi
10. *Vũ Nhật Huy*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc
11. *Nguyễn Thế Lộc*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương
12. *Nguyễn Tiến Thành*, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương
13. *Lê Việt Hà*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ
14. *Lê Thái Hoàng*, 10 Tin, THPT NK Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình
15. *Phan Tuấn Thành*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương
16. *Nguyễn Thị Quỳnh Trang*, 10A2, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An
17. *Lê Bảo Trung*, 10A2, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An
18. *Nguyễn Quang Tùng*, 10T, THPT Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội
19. *Bùi Tuấn Anh*, 9A, THPT Trần Phú, Hải Phòng
20. *Trần Phan Bình*, 9B, THCS Trần Phú, Tx. Phủ Lý, Hà Nam
21. *Bùi Hữu Đức*, 9A THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc
22. *Nguyễn Viết Hoàng*, 9, THCS Võ Thị Sáu, Phù Yên, Sơn La
23. *Nguyễn Quốc Khánh*, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định
24. *Nguyễn Đức Phương*, 9A, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng
25. *Trần Mạnh Tuấn*, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, Thanh Hóa
26. *Trần Quốc Hoàn*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Hải Dương
27. *Bùi Lê Trọng Thanh*, 9D1, THCS Nguyễn Nghiêm, Tx. Quảng Ngãi, Quảng Ngãi.
28. *Nguyễn Vũ Lân*, 8A, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng
29. *Vũ Nhật Minh*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Nghĩa Tân, Cầu Giấy, Hà Nội
30. *Đinh Xuân Tuyên*, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định

MÔN VẬT LÍ

Giải Nhất (2 giải)

1. *Chu Anh Dũng*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc
2. *Lê Đức Đạt*, 12 Lí, THPT NK Hà Tĩnh

Giải Nhì (3 giải)

1. *Trần Quang Vũ*, 11A7, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An
2. *Nguyễn Xuân Đức*, 11Lí, THPT NK Hà Tĩnh
3. *Phạm Cung Sơn*, 11A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

Giải Ba (6 giải)

1. *Nguyễn Minh Kiên*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc
2. *Ma Nam*, 12 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai
3. *Lê Hữu Hà*, 11Lí, THPT NK Hà Tĩnh
4. *Vũ Quốc Hiển*, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ
5. *Phan Thị Kim Hoa*, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái
6. *Nguyễn Văn Thắng*, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi

Giải Khuyến khích (6 giải)

1. *Nguyễn Thị Bích Ngọc*, 12A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An
2. *Nguyễn Quốc Long*, 11 Lí, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương
3. *Nguyễn Văn Tý*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh
4. *Hồ Quốc Huy*, A7, K29, THPT Phan Bội Châu, Vinh , Nghệ An
5. *Lê Văn Dương*, 12A1, THPT Hậu Lộc I, Thanh Hóa
6. *Trần Minh Khuê*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc .

Các bạn được giải cuộc thi này và các bạn được giải Vui hè hãy cho biết địa chỉ mới nhất của mình để tòa soạn chuyển bằng chứng nhận và tặng phẩm. Ngoài phong bì ghi rõ "Thư báo địa chỉ mới".

THTT

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/305. Chứng minh rằng dãy số $2003 + 23k$ với $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

NGUYỄN TRUNG LẬP
(SV K4 hệ CNKHTN, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T2/305. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{3x^2-x+2001}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}-\sqrt[3]{6x-2003} = \sqrt[3]{2002}$$

HOÀNG ANH TUẤN
(SV K33 khoa Toán A ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T3/305. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 10$$

trong đó a, b, c là các số thực thuộc $[1, 2]$.

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/305. Cho tam giác ABC với góc A tù. Gọi D và E là chân đường vuông góc hạ từ C tới AB và từ B tới AC theo thứ tự. Gọi M và N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C tới DE. Chứng minh công thức về diện tích :

$$S_{ABC} = S_{ADE} + S_{BEM} + S_{CDN}$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THPT Ngô Gia Tự, Cam Ranh, Cam Nghĩa, Khánh Hòa)

Bài T5/305. Cho tam giác ABC với góc A vuông và đường cao AH. Đường phân giác của góc BAH cắt BH tại E. Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đường thẳng AH tại F. Chứng minh rằng $CF // AE$.

NGUYỄN VIẾT HÀ
(SV K27G khoa Toán Tin ĐHSP 2 Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/305. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn các điều kiện sau :

1) $\dfrac{a}{2002} > \dfrac{b}{d} > \dfrac{c}{2004}$ với d là số nguyên dương nhỏ nhất có thể được.

2) $\dfrac{a}{2002} - \dfrac{c}{2004} = \dfrac{2}{2002.2004}$

TRẦN TUYẾT THANH
(GV khoa cơ bản HV Phòng không – Không quân, Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T7/305. Hỏi phương trình $x^2 = 100^{\sin x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[2\pi, 3\pi]$?

TRẦN VĂN BÌNH
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài T8/305. Xét hàm $f : R^2 \to R$ thỏa mãn các điều kiện sau :

1) $f(x, y) = f(y, x)$ với mọi $x, y \in R$.

2) $f(x, ky_1 + y_2) = kf(x, y_1) + f(x, y_2)$ với mọi $k, x, y_1, y_2 \in R$

3) $f(x, x) \ge 0$ với mọi $x \in R$ và $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Chứng minh rằng :

1) $|f(x, y)|^2 \le f(x, x).f(y, y)$ với mọi $x, y \in R$.

2) $\sqrt{f(x+y, x+y)} \le \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$ với mọi $x, y \in R$.

LÂM HOÀNG NGUYÊN
(SV Toán K2001 ĐH KHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T9/305. Gọi R và r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi h_a, h_b, h_c theo thứ tự là độ dài các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác hạ từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng : $\dfrac{h_a}{l_a}+\dfrac{h_b}{l_b}+\dfrac{h_c}{l_c} \ge 1 + \dfrac{4r}{R}$

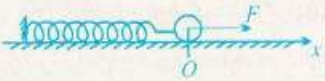
NGUYỄN MINH PHƯƠNG
(Phú Thọ)

Bài T10/305. Trong không gian cho một đường tròn (ω) không nằm trên mặt phẳng (α). Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa (ω) và mặt phẳng (α). Một mặt cầu thay đổi (O) luôn đi qua đường tròn (ω) và cắt mặt phẳng (α). Gọi I là tâm mặt cầu đi qua điểm S và giao tuyến của (α) và (O). Chứng minh rằng điểm I chạy trên một đường thẳng cố định.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCTT, ĐHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/305. Một con lắc lò xo nằm ngang, lò xo có khối lượng không đáng kể và độ cứng $k = 100$N/m, vật nặng có khối lượng $m = 400$g. Chọn trục Ox cùng phương với trục lò xo, O là



vị trí cân bằng. Tại thời điểm $t = 0$ lúc con lắc đang cân bằng người ta tác dụng lên m một lực $F = 2$(N) theo chiều dương của trục trong thời gian 0,3s. Viết phương trình dao động của vật. Bỏ qua ma sát.

NGUYỄN VĂN HẠNH
(GV THPT Hà Huy Tập, Vinh, Nghệ An)

Bài L2/305. Hai quả cầu nhỏ có điện tích và khối lượng lần lượt là q_1, m_1 và q_2, m_2. Ban đầu chúng có vận tốc giống nhau về hướng và độ lớn. Chúng bắt đầu chuyển động vào trong một điện trường đều. Sau 1 khoảng thời gian nào đó thì thấy hướng chuyển động của quả cầu thứ nhất quay đi góc 60° và độ lớn của nó giảm 2 lần, còn hướng chuyển động quả cầu thứ hai thì quay đi góc 90°.

a) Hỏi vận tốc quả cầu thứ hai tăng hay giảm bao nhiêu lần ?

b) Xác định $k_2 = \dfrac{q_2}{m_2}$ theo $k_1 = \dfrac{q_1}{m_1}$

NGUYỄN THANH NHÀN
(GV THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/305. Prove that the sequence of numbers $2003 + 23k$ ($k = 1, 2, 3, 4, ...$) has an infinite number of terms that are powers of a same prime number.

T2/305. Solve the equation

$$\sqrt[3]{3x^2-x+2001}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}-\sqrt[3]{6x-2003} = \sqrt[3]{2002}$$

T3/305. Prove that

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 10$$

where a, b, c are real numbers belonging to the segment $[1, 2]$.

T4/305. Let ABC be a triangle with obtuse angle A, let D and E be respectively the orthogonal projections of C on AB and of B on AC, let M and N be respectively the orthogonal projections of B and C on DE. Prove the following equality of areas :

$$S_{ABC} = S_{ADE} + S_{BEM} + S_{CDN}$$

T5/305. Let ABC be a triangle with right angle A and with altitude AH. The bisector of angle BAH cuts BH at E. The line passing through E and the midpoint M of AB cuts the line AH at F. Prove that CF is parallel to AE.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/305. Find all positive integers a, b, c satisfying the following conditions :

i) $\dfrac{a}{2002} > \dfrac{b}{d} > \dfrac{c}{2004}$ with the least possible positive integer d,

ii) $\dfrac{a}{2002} - \dfrac{c}{2004} = \dfrac{2}{2002.2004}$

T7/305. How many roots of the equation $x^2 = 100^{\sin x}$ are there in the segment $[2\pi, 3\pi]$?

T8/305. The function $f : R^2 \to R$ satisfies the following conditions :

i) $f(x, y) = f(y, x)$ for all $x, y \in R$,

ii) $f(x, ky_1 + y_2) = kf(x, y_1) + f(x, y_2)$ for all $k, x, y_1, y_2 \in R$,

iii) $f(x, x) \ge 0$ for all $x \in R$ and $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Prove that :

1) $|f(x, y)|^2 \le f(x, x).f(y, y)$ for all $x, y \in R$.

2) $\sqrt{f(x+y, x+y)} \le \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$ for all $x, y \in R$.

T9/305. Let R and r be the circumradius and the inradius of triangle ABC respectively, let h_a, h_b, h_c be the lengths of the altitudes of ABC insued from A, B, C respectively, let l_a, l_b, l_c be the lengths of the angled-bisectors of ABC issued from A, B, C respectively. Prove that

$$\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c} \ge 1 + \frac{4r}{R}$$

T10/305. In space, let (ω) be a circle not lying in a given plane (α), let S be a point not belonging to (α) and to the plane containing (ω). Consider a variable sphere (O) passing through (ω) and cutting (α). Let I be the center of the sphere passing through S and the intersection of (α) and (O). Prove that I moves on a fixed line.

Bài T1/301. *Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y sao cho $x^2+xy+y^2+14x+14y+2018$ chia hết cho 101.*

Lời giải. (Theo lời giải của bạn *Phan Thành Việt*, 7D, trường THCS Lương Thế Vinh, thị xã Tuy Hoà, **Phú Yên**).

Do (4, 101) = 1, ta có :

$4(x^2+xy+y^2+14x+14y+2018) \vdots 101$

$\Leftrightarrow (2x+y+14)^2+3y^2+28y+7876-202y-5353 \vdots 101$

$\Leftrightarrow (2x+y+14)^2+3(y-29)^2 \vdots 101$ (1)

Đặt $X = 2x+y+14$ và $Y = y-29$, từ (1) ta có $X^2+3Y^2 \equiv 0 \pmod{101}$, hay

$X^2 \equiv -3Y^2 \pmod{101}$.

Nếu (X, 101) = 1 thì (Y, 101) = 1 và theo định lí Phec–ma dẫn đến điều mâu thuẫn :

$1 \equiv X^{100} \equiv (-3Y^2)^{50} \equiv (-3)^{50}Y^{100} \equiv (-3)^{50} \equiv -1 \pmod{101}$

Từ đó suy ra $X^2+3Y^2 \equiv 0 \pmod{101} \Leftrightarrow X \equiv Y \pmod{101}$, nghĩa là

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+14 \equiv 0 \pmod{101} \\ y-29 \equiv 0 \pmod{101} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \equiv y \equiv 29 \pmod{101}$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là $x = 29 + 101m$, $y = 29 + 101n$, với $m, n \in \mathbf{Z}$.

Nhận xét. 1) Các bài giải đúng đều biến đổi đại số để đưa giả thiết về dạng X^2+3Y^2 chia hết cho 101 như trên, hoặc X^2-XY+Y^2 (với $X = 2x+y+14$, $Y = x+2y+14$) chia hết cho 101, rồi chứng tỏ rằng X và Y chia hết cho 101.

2) Phần lớn các bài giải sai đều dùng bất đẳng thức. Có 1 bạn tìm được kết quả đúng, song quá trình giải lại viết đồng dư thức cho số hữu tỉ không nguyên.

3) Chỉ có 6 bài giải đúng. Đó là các bạn:

Vĩnh Phúc : *Trương Ngọc Cương*, lớp 6B, THCS Vĩnh Yên ; **Bắc Ninh** : *Nguyễn Văn Võ*, 9A THCS Yên Phong ; **Nghệ An** : *Hoàng Xuân Trung*, 9A THCS Nghi Hương, Cửa Lò ; **Phú Yên** : *Phan Thành Việt*, 7D THCS Lương Thế Vinh ,Tuy Hòa ; **Quảng Ngãi** : *Hoàng Nguyên Khang*, lớp 7/1 THCS thị trấn Châu Ổ, Bình Sơn ; **Đồng Tháp** : *Lữ Thiện Nhân*, 9A1, Sa Đec.

NGUYỄN HUY ĐOAN

Bài T2/301. *Giải phương trình*

$$(x-18)(x-7)(x+35)(x+90) = 2001x^2$$

Lời giải. (của bạn *Đỗ Văn Tuyến*, 9A3, THCS Trần Phú, Phú Xuyên, **Hà Tây**, và nhiều bạn khác).

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Từ phương trình đã cho ta có phương trình tương đương sau :

$$(x^2+17x-630)(x^2+83x-630) = 2001x^2$$

$$\left(x+17-\frac{630}{x}\right)\left(x+83-\frac{630}{x}\right) = 2001$$

Đặt $y = x+50-\dfrac{630}{x}$, ta thu được phương trình $(y-33)(y+33) = 2001$ có nghiệm là $y_{1,2} = \pm\sqrt{3090}$. Suy ra $x+50-\dfrac{630}{x} = \pm\sqrt{3090}$.

Ta có 4 nghiệm của phương trình đã cho là

$$x_{1,2} = -25+\frac{\sqrt{3090} \pm \sqrt{8110-100\sqrt{3090}}}{2}$$

$$x_{3,4} = -25+\frac{-\sqrt{3090} \pm \sqrt{8110+100\sqrt{3090}}}{2}$$

Nhận xét. Có rất nhiều bạn gửi lời giải và có đáp số đúng cho bài toán này.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/301. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $\dfrac{2}{ab}+\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{a^4+b^4}{2}$ *trong đó a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b = 1.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Trung Kiên*, 8A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**)

Ta giải bài toán tổng quát :

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{m}{ab}+\frac{n}{a^2+b^2}+p(a^4+b^4)$$

trong đó a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện a + b = c với c, m, n, p là các hằng số dương mà $2m \geq n$.

• Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ với x, y dương

ta có $\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{a^2+b^2} \geq \dfrac{4}{(a+b)^2} = \dfrac{4}{c^2}$ (1)

• Từ $(a+b)^2 \geq 4ab$ có $\dfrac{1}{4ab} \geq \dfrac{1}{(a+b)^2} = \dfrac{1}{c^2}$ (2)

và có $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)^2}{2}\right)^2 = \frac{c^4}{8}$ (3)

Từ (1) (2) (3) ta có

$$T = \frac{2m-n}{2ab} + n\left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) + p(a^4+b^4)$$

$$\geq \frac{2(2m-n)}{c^2} + \frac{4n}{c^2} + \frac{pc^4}{8} = \frac{4m+2n}{c^2} + \frac{pc^4}{8}$$

Các đẳng thức (1) (2) (3) đồng thời xảy ra khi $a = b = c/2$.

Áp dụng với $c = 1$, $m = 2$, $n = 1$, $p = 1/2$ ta có giá trị nhỏ nhất của biểu thức ở đề bài là $\frac{161}{16}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. 1) Một số bạn đã xét bài toán với mức độ tổng quát khác nhau. Bạn *Trần Hồng Đức*, 9A3, THCS Trần Phú, Phú Xuyên, **Hà Tây** còn xét bài toán với n biến thực dương $a_1 + a_2 + ... + a_n = c$ (c là hằng số). Gần 300 bài giải đã gửi về Tòa soạn và đa số giải đúng. Một số bạn giải sai do tính toán sai đáp số hoặc áp dụng bất đẳng thức không chuẩn xác.

2) Hoan nghênh các bạn lớp 7, lớp 8 có lời giải đúng và các bạn chú ý tổng quát hóa bài toán :

Phú Thọ : *Nguyễn Hà Giang, Nguyễn Việt Sơn*, 8A3, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh, *Kim Đình Hải*, 8D, THCS Đồng Văn, Yên Lạc, *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch, *Nguyễn Duy Hội*, 7A, THCS Tam Dương ; **Hà Tây :** *Trịnh Xuân Đạt*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Hoa Phú, Ứng Hòa ; **Bắc Giang :** *Thân Ngọc Thức*, 8A, THCS Nguyên Hồng, Tân Yên ; **Bắc Ninh :** *Mẫn Văn Đức, Nguyễn Trường Giang*, 8A, THCS Yên Phong ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thị Minh*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, *Phạm Trường Xuân*, 7/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Bích Diệp*, 8A, THCS Nguyễn Thiện Thuật, Khoái Châu ;**Thanh Hóa :** *Lê Xuân Quý*, 8D, THCS Van Hà, Thiệu Hóa ; **Nghệ An :** *Phan Thị Hường*, 8B, THCS Nghi Vạn, Nghi Lộc, *LươngAnh Tuấn, Đậu Thế Linh*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Phan Trung Hậu*, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, *Lê Ngọc Thạch*, 8A, *Nguyễn Lê Phước*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Thừa Thiên - Huế :** *Lê Bảy*, 8/4, THCS Vinh Thanh, Phú Vang ; **Quảng Ngãi :** *Hoàng Nguyên Khang*, 7/1, THCS Châu Ổ, *Trần Văn Duy*, 8/1, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn ; **Bình Định :** *Hà Huy Thức*, 7A, THCS Ngô Mây, *Ngô Thanh Hoàng*, 8A7, THCS Đống Đa, Tp. Quy Nhơn ; **Phú Yên :** *Nguyễn Ngọc Tâm Quyên*, 8E, THCS Trưng Vương, Tx. Tuy Hòa ; **Khánh Hòa :** *Võ Thái Thông*, 7/4 THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Gia Lai :** *Nguyễn Hoài Phương*, 8/2, THCS Phạm Hồng Thái, Tp. PlâyKu ; **Bình Thuận :** *Bùi Quang Hiển*, 8B, THCS Tân An, Hàm Tân ; **Cần Thơ:** *Nguyễn Minh Luân*, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ ; **Đồng Tháp :** *Tưởng Phúc Nhân*, 8A1, THPT Tx. Sa Đec, *Nguyễn Trọng Nguyên*, 6T, THPT Tx. Cao Lãnh.

VIỆT HẢI

Bài T4/301. *Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $0 \leq t \leq 1$. Chứng minh rằng:*

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-tb}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \geq 2\sqrt{1+t}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Từ $0 \leq t \leq 1$ suy ra $b + c - ta \geq b + c - a > 0$. Tương tự $a + b - tc > 0$, $a + c - tb > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\sqrt{\frac{b+c-ta}{a} \times (t+1)} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{b+c-ta}{a} + (t+1)\right] = \frac{a+b+c}{2a}$$

Suy ra : $\sqrt{\frac{b+c-ta}{a}} \leq \frac{a+b+c}{2a\sqrt{t+1}}$

hay $\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}} \geq \frac{2a\sqrt{t+1}}{a+b+c}$

Tương tự có : $\sqrt{\frac{b}{a+c-tb}} \geq \frac{2b\sqrt{t+1}}{a+b+c}$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \geq \frac{2c\sqrt{t+1}}{a+b+c}$$

Cộng theo vế ta được :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-ta}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-tb}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-tc}} \geq 2\sqrt{1+t}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{b+c-ta}{a} = 1+t \\ \frac{a+b-tc}{c} = 1+t \\ \frac{a+c-tb}{b} = 1+t \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \text{ và } t = \frac{1}{2}$$

Lúc đó tam giác ABC đều.

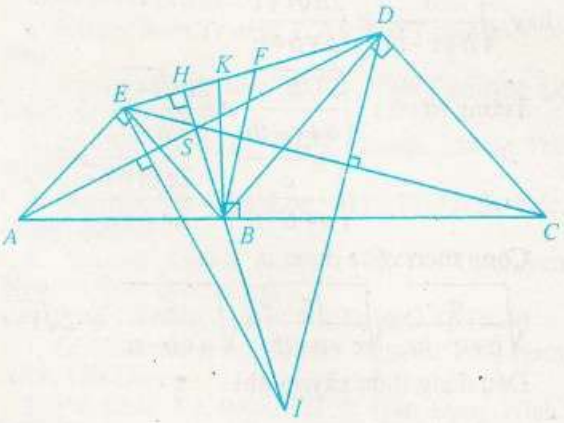
Nhận xét. 1) Nhiều bạn quên điều kiện trước khi áp dụng bất đẳng thức Côsi.

2) Giải tốt bài này có các bạn : **Phú Thọ :** *Trần Thế Hùng*, 9A1, THCS Hạ Hòa ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quang*, 8A3, THCS Vĩnh Tường ; **Bắc Giang :** *Phan Tuấn Anh*, 8A,THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Hải Dương :** *Lê Đình Huy*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Nguyễn Văn Thắng*, 9C, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ ; **Hải Phòng :** *Phạm Quang Dương*, 9A6, THCS Nguyễn Bá Ngọc, Q. Lê Chân, *Lê Trung Sơn*, 9B, THPT

NK Trần Phú, *Đào Thị Huệ*, 9A4, THCS Thủy Đường, Thủy Nguyên ; **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Việt*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Ninh Bình :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, **Thanh Hóa :** *Lê Minh Thông*, 8A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Phú Yên :** *Phan Thành Việt*, 8D, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Kiều Phong*, 8^3, THCS Đồng Khởi, Tân Bình ; **Đồng Tháp :** *Lý Duy Khiêm, Lữ Thiện Nhân*, 9A1, THPT Cao Lãnh.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/301. *Trên một đường thẳng lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự sao cho $AB \neq BC$. Trên một nửa mặt phẳng bờ AC, dựng các tam giác vuông cân ABE (AE = EB) và BCD (BD = DC). Gọi S là giao điểm của AD và CE, gọi H là giao điểm của DE và BS. Gọi F là trung điểm của DE. Đường thẳng vuông góc với AC tại B cắt DE tại K. Chứng minh rằng:* $\frac{KE}{KD}=\frac{BE}{BD}$ *và* $\frac{KH}{KF}=\frac{BH}{BF}$. *Tìm hệ thức liên hệ giữa hai tỉ số này.*



Lời giải. • Từ giả thiết bài toán ta thấy $\widehat{EBK}=\widehat{DBK}=45^o$, hay BK là phân giác của $\widehat{EBD}=90^o$ (1). Do đó : $\frac{KE}{KD}=\frac{BE}{BD}$.

• Qua D dựng đường thẳng vuông góc với EC, cắt đường cao BH' (H' ∈ ED) của ΔEBD tại I. Khi đó vì $\widehat{BDI}=\widehat{ECD}$, $\widehat{DBI}=\widehat{CDE}$, DB = DC nên ΔDBI = ΔCDE (g.c.g) ⇒ ED = BI (2). Tương tự, qua E kẻ EI' ⊥ AD và cắt BH' tại I' thì ED = BI' (3). Từ (2) (3) có I ≡ I'. Trong ΔSED thì ba đường cao đồng quy, nên B, H', S thẳng hàng, suy ra AD, CE, BH' đồng quy hay H ≡ H', nói cách khác BH ⊥ ED. Do F là trung điểm ED, ΔEBD vuông tại B nên $\widehat{FBD}=\widehat{FDB}$, lại có $\widehat{FDB}=\widehat{HBE} \Rightarrow \widehat{HBE}=\widehat{FBD}$ (4). Từ (1), (4) ⇒ BK là phân giác của $\widehat{HBF}$ ⇒ $\frac{KH}{KF}=\frac{BH}{BF}$.

• Đặt AE = BE = a, BD = CD. Khi đó:

$$k_1=\frac{KE}{KD}=\frac{BE}{BD}=\frac{a}{b} \quad (5);$$

$$k_2=\frac{KH}{KF}=\frac{BH}{BF}=\frac{(EB.BD)/DE}{DE/2}=\frac{2ab}{a^2+b^2} \quad (6)$$

Từ (5), (6) có : $k_2=\frac{2k_1}{1+k_1^2}$. Đây là hệ thức liên hệ giữa hai tỉ số cần tìm.

Nhận xét : Những bạn sau có lời giải ngắn gọn hơn cả, đồng thời sử dụng lượng kiến thức tối thiểu, không vượt ra ngoài phạm vi SGK Toán THCS.

Bắc Giang : *Phan Tuấn Anh*, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Trường Thọ*, 9A, *Nguyễn Ánh Tuyết*, 9B, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Đoàn Anh Quân*, 9B, THCS Vĩnh Yên ; **Hà Nội :** *Trần Anh Đức, Nguyễn Trung Kiên, Vũ Nhật Minh*, 9H, *Đỗ Xuân Huy, Nguyễn Hoàng Việt*, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Mạnh Chiến*, 9A, *Phạm Tuấn Hiệp, Lê Trung Sơn*, 9B, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** *Phạm Quang Cường*, 8/3, *Nguyễn Duy Mạnh*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, 9C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Nam Định** *Đoàn Duy Thuyết*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Ninh Bình :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Thu*, 8A, *Nguyễn Danh Quang*, 9A1, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Nguyễn Ngọc Tú*, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, *Nguyễn Trọng Hòa*, 9D, THCS Bắc Sơn II, Tx. Sầm Sơn, *Nguyễn Anh Tuấn*, 9B, THCS Nguyễn Chích, Đông Sơn ; **Nghệ An :** *Đinh Thị Trang*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Minh Chiến*, 8D, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh, *Đậu Thế Linh*, 8A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Thừa Thiên – Huế :** *Lê Bảy*, 8/4, THCS Vinh Thanh, Phú Vang.

HỒ QUANG VINH

Bài T6/301. *Xét dãy số (a_n) được xác định bởi : $a_1 = 5$, $a_2 = 11$ và $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$ với mọi n = 2, 3, ...*

Chứng minh rằng :

a) Dãy số trên có vô số số dương và vô số số âm.

b) a_{2002} chia hết cho 11.

Lời giải. (Dựa theo ý của bạn *Trần Nhật Thu*, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**)

a) Ta có $a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1} =$

$= 2(2a_{n-1} - 3a_{n-2}) - 3a_{n-1} = a_{n-1} - 6a_{n-2} =$

$= 2a_{n-2} - 3a_{n-3} - 6a_{n-2}$

$= -4a_{n-2} - 3a_{n-3}$

Vậy $a_{n+1} + 4a_{n-2} + 3a_{n-3} = 0 \quad \forall n \geq 4$.

Giả sử dãy (a_n) chỉ có hữu hạn số âm. Khi đó tồn tại $n_0 \in N^*$ để $\forall n \geq n_0$ ta có $a_n \geq 0$.

Với $n - 3 \geq n_0$ thì $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n+1} \geq 0$ do đó $a_{n+1} = a_{n-2} = a_{n-3} = 0 \Rightarrow a_{n-4} = 0 \Rightarrow a_{n-5} = 0, \ldots$ $\Rightarrow a_2 = 0$. Mâu thuẫn. Vậy (a_n) có vô số số âm. Chứng minh tương tự ta có dãy (a_n) có vô số số dương.

b) Gọi r_n là dư của a_n khi chia cho 11. Dễ thấy $r_1 = s, r_2 = 0, r_3 = 7, r_4 = 3, r_5 = 7, r_6 = 5, r_7 = 0$. Vậy dãy (r_n) tuần hoàn chu kì 5, có dạng (5, 0, 7, 3, 7) và $r_n = 0 \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod 5$. Vì $2002 \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow r_{2002} = 0 \Leftrightarrow a_{2002} \vdots 11$.

Nhận xét. Bài toán này được rất nhiều bạn tham gia giải. Tất cả các bài giải đều đúng. Câu a) nhiều bạn còn lí luận dài dòng. Trong số các lời giải tốt có : **Thanh Hóa :** *Hoàng Kiên Trung*, 12T1, THPT Lam Sơn, *Lê Tuấn Hưng*, 10 Tin ; **Hải Phòng :** *Phạm Minh Hằng, Lê Hải Yến, Bùi Quỳnh Mai*, NK Trần Phú; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Văn Tiến*, 11A2, **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Hà Tĩnh :** *Trần Khánh Toàn*, 11T, THPT NK Hà Tĩnh ; **Phú Yên :** *Huỳnh Lâm Linh*, 12T2 ; **Thái Nguyên :** *Vũ Thành Nhân*, 11 Toán ; **Hải Dương :** *Bùi Thị Huyền Trang*, 11A5 ; **Phú Thọ :** *Tạ Bảo Trung*, THPT Hùng Vương ; **Đồng Nai :** *Nguyễn Cảnh Lâm*, 11, THPT Lương Thế Vinh ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Duy Thành*, THPT Lê Khiết ; **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Nguyễn Đình Chi*, 10T1.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/301. *Biết rằng với a, b, c xác định thì phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng*

$$|27c + 2a^3 - 9ab| < 2\sqrt{(a^2 - 3b)^3}$$

Lời giải. ***Cách 1.*** Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ Vì $f(x) = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt và hệ số của x^3 là dương nên PT $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-3b}}{3}$, $x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-3b}}{3}$, đồng thời $f(x_1)>0$ và $f(x_2)<0$.

Từ $f(x_1) > 0$ suy ra

$$-2\sqrt{(a^2-3b)^3} < 2a^3 + 27c - 9ab \quad (2)$$

Từ $f(x_2) < 0$ suy ra

$$2a^3 + 27c - 9ab < 2\sqrt{(a^2-3b)^3} \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra

$$|2a^3 + 27c - 9ab| < 2\sqrt{(a^2-3b)^3}$$

Cách 2. Đặt $y = x + \frac{a}{3}$ thì PT (1) trở thành $y^3 + py + q = 0$ (4) trong đó $p = b - \frac{a^2}{3}$ và $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$. Đặt $g(y) = y^3 + py + q$. Vì PT (1) có 3 nghiệm phân biệt thì PT (4) có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow g'(y) = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + p = 0$ có 2 nghiệm $\Rightarrow p < 0$.

Lại đặt $y = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\, t$ thì PT (4) trở thành $4t^3 - 3t + m = 0$, trong đó

$$m = \frac{q}{2\sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3}} = \frac{2a^3 + 27c - 9ab}{2\sqrt{(a^2-3b)^3}}$$

Khảo sát hàm $h(t) = 4t^3 - 3t$ ta thấy $h_{max} = 1$ tại $t = -1/2$ và $h_{min} = -1$ tại $t = 1/2$ nên $h(t) = -m$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $|m| < 1$, suy ra đpcm.

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải được bài này. Một số bạn lập luận chưa chặt chẽ hoặc dùng định lí Vi–ét đối với phương trình bậc 3 nên biến đổi dài dòng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/301. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $3(a + b + c) - 22abc$ trong đó các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$*

Lời giải. (của nhiều bạn)

Do vai trò đối xứng của a, b, c trong biểu thức $F = 3(a + b + c) - 22abc$ không mất tính tổng quát ta giả thiết $a = \min\{a, b, c\}$.

*) Nếu $a = -1$ thì $b = c = 0$ và $F = -3$.

*) Trường hợp $-1 < a < 0$.

$$F \leq 3\left(a + \sqrt{2(b^2+c^2)}\right) - 11a(b^2+c^2)$$

$$= 11a^3 - 8a + 3\sqrt{2(1-a^2)} = f(a)$$

Ta có $f'(a) = 33a^2 - 8 - \frac{3\sqrt{2}.a}{\sqrt{1-a^2}}$ là hàm số nghịch biến trên $(-1, 0)$.

Giải phương trình $f'(a) = 0$ được nghiệm $a = -\sqrt{\frac{2}{11}}$. Do đó $f(a) \leq f\left(-\sqrt{\frac{2}{11}}\right) = 15\sqrt{\frac{2}{11}}$

*) Trường hợp $0 \le a$.

$F \le 3(a+b+c) \le 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3\sqrt{3} < 15\sqrt{\frac{2}{11}}$. Vậy $F_{max} = 15.\sqrt{\frac{2}{11}}$

F đạt giá trị lớn nhất trên khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng $-\sqrt{\frac{2}{11}}$ và hai số còn lại bằng $\frac{3}{\sqrt{22}}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán tìm cực trị có dùng đạo hàm khảo sát và tính toán tương đối phức tạp. Tòa soạn nhận được lời giải của gần 100 bạn, không ít bạn tính toán sai. Các bạn sau có lời giải tốt : **Bắc Giang :** *Đào Tuấn Anh*, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thu Trang*, 10A1, THPT chuyên ; **Hà Tây :** *Nghiêm Ngọc Phương*, 11T1, THPT Nguyễn Huệ ; **Hà Nội :** *Nguyễn Chí Hiệp*, 11A1, PTCT–ĐHSP I, *Trần Đăng Khoa*, 11T, ĐHKHTN – ĐHQG ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Trọng Bắc*, 10A1, THPT Lê Văn Hưu, *Lê Văn Nguyên*, 11A, THPT Lương Đắc Bằng ; **Nghệ An :** *Phan Công Mạnh*, 11A1, THPT Nghi Lộc I ; **Phú Yên:** *Lê Hoài Vũ*, 10A2, THPT Lương Văn Chánh...

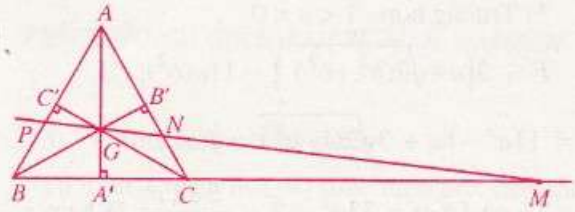
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/301. *Cho tam giác đều ABC có cạnh AB = a. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác, cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng*

$\frac{1}{GM^4}+\frac{1}{GN^4}+\frac{1}{GP^4}$ *là không đổi*

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn *Nguyễn Chí Hiệp*, 11A1, khối PTCT – ĐHSP **Hà Nội**)

Không mất tính tổng quát giả sử tam giác ABC có chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Đặt A', B', C' theo thứ tự là giao điểm của AG và BC, BG và CA, CG và AB.



Dễ thấy : $GA' = GB' = GC' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Lấy trên đường thẳng đã cho điểm X (khác G). Đặt $\left(\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GX}\right) = \alpha$. Ta có :

$\left(\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GX}\right) \equiv \left(\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GA'}\right) + \left(\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GX}\right) \pmod{360^o}$

$\equiv -120^o + \alpha \pmod{360^o}$

$\left(\overrightarrow{GC'}, \overrightarrow{GX}\right) \equiv \left(\overrightarrow{GC'}, \overrightarrow{GA'}\right) + \left(\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GX}\right) \pmod{360^o}$

$\equiv 120^o + \alpha \pmod{360^o}$

Từ đó suy ra :

$$\frac{1}{GM^4}+\frac{1}{GN^4}+\frac{1}{GP^4}$$

$$= \left(\frac{1}{a\sqrt{3}/6}\right)^4\left(\left(\frac{GA'}{GM}\right)^4+\left(\frac{GB'}{GN}\right)^4+\left(\frac{GC'}{GP}\right)^4\right)$$

$$= \frac{144}{a^4}\left(\cos^4(\overrightarrow{GA'}, \overrightarrow{GX}) + \cos^4(\overrightarrow{GB'}, \overrightarrow{GX}) + \right.$$

$$\left. + \cos^4\left(\overrightarrow{GC'}, \overrightarrow{GX}\right)\right)$$

$$= \frac{144}{a^4}\left(\cos^4\alpha + \cos^4(-120^o+\alpha) + \cos^4(120^o+\alpha)\right)$$

$$= \frac{144}{a^4}.\frac{1}{4}\left((1+\cos 2\alpha)^2 + (1+\cos(-240^o+2\alpha))^2 + \right.$$

$$\left. + (1+\cos(240^o+2\alpha))^2\right)$$

$$= \frac{36}{a^4}\left(3+2(\cos 2\alpha+\cos(120^o+2\alpha)+\cos(-120^o+2\alpha)\right)$$

$$+\left(\cos^2 2\alpha+\cos^2(120^o+2\alpha)+\cos^2(-120^o+2\alpha)\right)$$

$$= \frac{36}{a^4}\left(3+2\left(\cos 2\alpha+\cos(120^o+2\alpha)+\cos(-120^o+2\alpha)\right)+\right.$$

$$\left. + \frac{1+\cos 4\alpha}{2}+\frac{1+\cos(240^o+4\alpha)}{2}+\frac{1+\cos(-240^o+4\alpha)}{2}\right)$$

$$= \frac{36}{a^4}\left(\frac{9}{2}+2\left(\cos 2\alpha+\cos(120^o+2\alpha)+\cos(-120^o+2\alpha)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\cos 4\alpha+\cos(120^o+4\alpha)+\cos(-120^o+4\alpha)\right)\right)$$

Chú ý rằng :

$\cos x + \cos(120^o + x) + \cos(-120^o + x) = 0\ \forall x$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{GM^4}+\frac{1}{GN^4}+\frac{1}{GP^4} = \frac{36}{a^4}.\frac{9}{2} = \frac{162}{a^4} \text{ (không đổi)}$$

Nhận xét . 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Tuy nhiên, đa số các lời giải không thoát được khỏi căn bệnh : "phép chứng minh phụ thuộc hình vẽ". Trong bài toán này để thoát khỏi căn bệnh trên cách tốt nhất là sử dụng khái niệm góc định hướng. Cũng cần nói thêm rằng : có khá nhiều bạn đã bắt đầu có kiến thức về vấn đề này nhưng do không nắm vững khái

niệm góc định hướng nên kết quả cuối cùng vẫn không được như mong muốn.

2) Bạn *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, **Phú Yên** còn chứng minh sự không đổi của biểu thức.

$$f(\alpha) = \cos^4\alpha + \cos^4(-120^o + \alpha) + \cos^4(120^o + \alpha)$$

bằng cách chứng minh rằng $f'(\alpha) = 0\ \forall\alpha$.

3) Bạn *Mai Thị Kim Nhung* ,11B, THPT Hải Lăng Quảng Trị cho một lời giải tốt bằng phương pháp tọa độ.

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Phú Thọ : *Lê Vân Dung*, 10A2, THPT chuyên Hùng Vương ; **Hải Phòng :** *Hoàng Thị Tuyết Mai, Lê Hải Yến*, 11T, THPT NK Trần Phú ; **Ninh Bình :** *Trần Minh Mẫn*, 12T, THPT Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa :** *Lê Tuấn Hưng*, 10 Tin, THPT Lam Sơn ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Nhật Huy*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Trương Công Định*, 12A4, THPT Vũng Tàu ; **Hòa Bình :** *Ngô Nhất Sơn*, 10T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Hà Nội :** *Nguyễn Vũ Anh*, 11Tin, THPT Hà Nội – Amsterdam ; **Nghệ An :** *Đinh Viết Sang*, 11A1, THPT Phan Bội Châu ; **Đồng Tháp :** *Lữ Thiện Phúc*, 11T, THPT Sa Đéc.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/301. *Cho tứ diện ABCD có thể tích V. Một mặt phẳng đi qua trọng tâm G của tứ diện đó cắt các cạnh DA, DB, DC lần lượt tại A', B', C'. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các thể tích tứ diện*

$$T = V_{AA'B'C'} + V_{BA'B'C'} + V_{CA'B'C'}$$

Lời giải 1. a) Trước hết, ta chứng minh hệ thức sau :

$$v_1(AA'B'C') + v_2(BA'B'C') + v_3(CA'B'C') = v_4(DA'B'C') \quad (1)$$

trong đó $v(XYZW)$ là thể tích của tứ diện $XYZW$.

Việc chứng minh (1) đưa về chứng minh hệ thức sau tương đương với nó :

$$a + b + c = d \quad (2)$$

trong đó a, b, c và d lần lượt là khoảng cách từ A, B, C và D đến mặt phẳng $A'B'C'$.

Muốn vậy, qua G ta dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $A'B'C'$ rồi chiếu vuông góc các đỉnh A, B, C, D của tứ diện lên Δ, ta được các điểm (hình chiếu) là A', B', C', D'. Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ (và cũng là trọng tâm của hệ tứ điểm $\{A, B, C, D\}$) nên ta có: $\vec{s} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (3)

Do đó ta được :

$$\vec{s'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0} \quad (3')$$

($\vec{s'}$ là hình chiếu của $\vec{s}$ lên trục Δ).

Từ đó suy ra : $\overline{GA'} + \overline{GB'} + \overline{GC'} + \overline{GD'} = 0$ (4)

Vì D nằm khác phía với A, B, C đối với mặt phẳng $A'B'C'$ nên trên trục Δ (vuông góc với mp$(A'B'C')$ ở điểm G), D' nằm khác phía với A', B', C' đối với điểm G ; nói khác đi là, $\overline{GD'}$ trái dấu với cả ba $\overline{GA'}$, $\overline{GB'}$ và $\overline{GC'}$, nghĩa là từ (4) ta thu được (2) : $GA' + GB' + GC' = GD'$ ($GA' = d(A, A'B'C') = a, ..., GD' = d(D, A'B'C')$).

Từ (1) suy ra : T đạt giá trị min $\Leftrightarrow$ $v_4(DA'B'C')$ đạt min (5)

b) Sau cùng, ta chứng minh rằng :

$v_4(D.A'B'C')$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ G là trọng tâm $\Delta A'B'C'$ $\Leftrightarrow$ $(A'B'C')//(ABC)$.

Thật vậy, với mỗi vị trí cố định của A' trên cạnh $[DA]$ có vô số thiết diện tam giác $A'B'C'$ của tứ diện $ABCD$ xác định bởi những mặt phẳng cắt, đi qua đường thẳng $A'G$. Gọi P là giao điểm của $A'G$ và $B'C$. Dễ chứng minh được rằng nếu P không phải là trung điểm của $B'C'$ thì $S_{DB'C'}$ (có cạnh $B'C'$ đi qua P) chưa đạt giá trị nhỏ nhất; và do đó, thể tích của hình chóp tam giác $A'DB'C'$ có đỉnh là A' chưa đạt giá trị nhỏ nhất. Lập luận tương tự đối với các đỉnh B' và C', ta đi đến kết luận $v_4(DA'B'C')$ nhỏ nhất khi và chỉ khi thiết diện $\Delta A'BC'$ nhận G làm trọng tâm.

Lại vì mặt phẳng (DAG) cắt mặt bên (DBC) theo đường trung tuyến DA_1 đi qua trung điểm P của $B'C'$, từ đó suy ra $B'C'//BC$ (nhờ định lí đảo của định lí Ta–let áp dụng vào hình thang). Chứng minh tương tự, ta được $C'A'//CA$ và $A'B'//AB$, nghĩa là mp$(A'B'C')$ đi qua G, song song với mp(ABC).

Lời giải 2. Vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ nên ta có : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{DG}$; (i). Từ đó suy ra : $\dfrac{DA}{DA'}\overrightarrow{DA'} + \dfrac{DB}{DB'}\overrightarrow{DB'} + \dfrac{DC}{DC'}\overrightarrow{DC'} = 4\overrightarrow{DG}$ (ii)

Lại vì A', B', C' và G đồng phẳng nên ta có hệ thức : $\dfrac{DA}{DA'} + \dfrac{DB}{DB'} + \dfrac{DC}{DC'} = 4$ (iii)

Áp dụng BĐT Cô–si, ta được :

$$4 = \frac{DA}{DA'} + \frac{DB}{DB'} + \frac{DC}{DC'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{DA.DB.DC}{DA'.DB'.DC'}}$$

Suy ra : $\dfrac{v(DA'B'C')}{v(DABC)} = \dfrac{DA'.DB'.DC'}{DA.DB.DC} \geq \dfrac{27}{64}$ (iv)

Dễ thấy : $T = v(DA'B'C')\left(\dfrac{AA'}{DA'} + \dfrac{BB'}{DB'} + \dfrac{CC'}{DC'}\right)$

$= v(DA'B'C')$ vì $\frac{AA'}{DA'}+\frac{BB'}{DB'}+\frac{CC'}{DC'}=1$, được suy ra từ hệ thức (iii) ở trên.

Cuối cùng, từ (iv) và (v) ta kết luận :

$$\min T = \frac{27}{64}V \Leftrightarrow \frac{DA'}{DA}=\frac{DB'}{DB}=\frac{DC'}{DC}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$G \in (A'B'C') \,//\, (ABC)$.

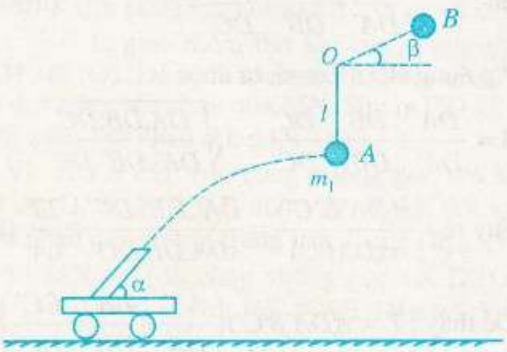
Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn đều sử dụng BĐT Côsi và cho lời giải gần như lời giải 2 ở trên. Riêng có bạn *Nguyễn Thế Lộc*, 12T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và một vài bạn nữa đưa ra lời giải theo hướng của lời giải 1 (phần b), còn không chứng minh phần a) và sử dụng kết quả bài toán T9/137 để suy ra ngay hệ thức (1). Tuy nhiên, nhiều bạn có lời giải chưa gọn.

2) Các bạn sau đây, ngoài bạn *Nguyễn Thế Lộc* có lời giải tương đối gọn và chặt chẽ hơn cả.

Hà Nội : *Trần Anh Tuấn*, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT ch. Hùng Vương, Phú Thọ ; **Yên Bái :** *Trần Bình Minh*, 11A1, THPT ch. Nguyễn Tất Thành ; **Hà Tây :** *Nghiêm Ngọc Phương*, 11T1, THPT ch. Nguyễn Huệ, Hà Đông ; *Kiều Quang Đăng*, 11A12, THPT Thạch Thất ; **Hòa Bình :** *Nguyễn Thùy Dương*, 9A1, THPT Hữu Nghị ; **Hải Dương :** *Phạm Việt Hải*, 11A4, THPT Hồng Quang ; **Nam Định :** *Nguyễn Duy Minh*, 11T1, THPT ch. Lê Hồng Phong ; **Hải Phòng:** *Vương Anh Quyền*, 10 Toán, *Phạm Khoa Thu Hương*, 11 Toán, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** *Bùi Văn Nghĩa*, 10I, THPT Lam Sơn, *Lê Khắc Huyên*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Danh Tuấn*, 12A1, THPT Phan Bội Châu ; **Hà Tĩnh :** *Lê Minh Quang*, 11T, THPT NK Hà Tĩnh ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Đình Minh*, 12/21, THPT Phan Châu Trinh, Hải Châu ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Văn Trung*, 12T, THPT ch. Lê Khiết; **Phú Yên :** *Huỳnh Lâm Linh*, 12T2, *Nguyễn Tiến Hoàng Vũ*, 11T1, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần Võ Huy, Phạm Văn Thắng*, 12 Toán, THPT NK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp.Cần Thơ.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/301. *Một khẩu súng đặt trên xe lăn có nòng nghiêng góc α so với phương ngang ; khối lượng tổng cộng của xe và súng là M. Xe có thể chuyển động trên mặt ngang với hệ số ma sát k = 0,2. Xe đang đứng yên thì súng bắn ra 1 viên đạn, khối lượng m = 10g. Ngay khi đạn rời nòng, xe giật lùi với vận tốc V = 21cm/s. Lên đến điểm cao nhất, đạn xuyên qua một tấm gỗ nhỏ m_1 = 1,12 kg treo vào đầu dây nhẹ dài l = 2m ; 10% năng lượng đạn chuyển thành động năng gỗ. Sau đó, gỗ lên đến vị trí dây nghiêng góc $\beta = 30^o$ thì dây bắt đầu bị chùng. Thời gian đạn rơi đến đất bằng $14\sqrt{10}$ thời gian dây bị chùng. Hãy tìm M, α. Biết rằng trong nòng súng gia tốc của đạn rất lớn so với g. Bỏ qua sức cản không khí và kích thước xe, súng so với quỹ đạo của đạn. Lấy $g = 10m/s^2$.*



Hướng dẫn giải. Kí hiệu A , B tương ứng là vị trí ban đầu của tấm gỗ và vị trí của nó khi dây bắt đầu bị chùng ; v_1 và v_2 là vận tốc tấm gỗ ngay sau va chạm và tại B. Khi dây bị chùng thì lực căng $T = 0 \Rightarrow v_2 = gR.\sin\beta$ (1). Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho chuyển động của tấm gỗ từ A đến B ta có :

$$\frac{m_1 v_1^2}{2}=\frac{m_1 v_2^2}{2}+m_1 gl(1+\cos\beta) \qquad (2).$$

Từ (1) và (2) tìm được $v_1 = \sqrt{70}m/s$; $v_2 = \sqrt{10}$ m/s. Kí hiệu t_1 là thời gian dây bị chùng, kể từ lúc bị chùng tại B cho đến khi căng trở lại tại A thì tầm xa của tấm gỗ là $x = l\sin\beta$, suy ra $t_1 = \frac{x}{v_2\cos\beta} = 2\sqrt{\frac{3}{10}}$ (s). Từ đó thời gian đạn rơi tới đất bằng $t_2 = 14\sqrt{10}t_1 = 28\sqrt{3}$(s) . Vì đạn có vận tốc theo phương ngang tại A, nên khi chạm đất, thành phần v_y theo phương thẳng đứng của đạn bằng : $v_y = gt_2 = 280\sqrt{3}$ (m/s). Kí hiệu v_x là thành phần vận tốc theo phương ngang của đạn, theo đề bài : $\frac{m_1 v_1^2}{2}=\frac{1}{10}\frac{mv_x^2}{2} \Rightarrow v_x = 280$m/s.

Từ đó suy ra : $\text{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x}=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^o$.

Áp dụng định luật II Niutơn (dưới dạng tổng quát và chú ý rằng đạn có gia tốc rất lớn), ta có:

$$M = \frac{mv(\cos\alpha - k\sin\alpha)}{V} \approx 8{,}71\text{kg}$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng :

Phú Thọ : *Lê Việt Hà*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Văn Chí Bửu*,

5 NĂM ĐÀO TẠO CỬ NHÂN KH TÀI NĂNG ĐHQG HÀ NỘI

Ngày 29/10/2002 tại trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội đã diễn ra lễ kỉ niệm 5 năm đào tạo Cử nhân khoa học tài năng (CN KHTN). Đến dự lễ có đồng chí Trần Đình Hoan, UVBCT, Trưởng ban Tổ chức TƯ Đảng; đại diện của Văn phòng Chính phủ; Ban Khoa giáo TƯ; Bộ GD-ĐT; Bộ Tài chính; Viện Toán học; Ban Giám đốc ĐHQG và Ban GH trường ĐHKHTN và các giảng viên, sinh viên của trường. GS Đào Trọng Thi đã trình bày yêu cầu, điều kiện và phương hướng của hệ đào tạo tài năng và đào tạo chất lượng cao của ĐHQG Hà Nội.

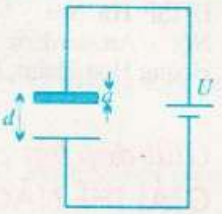
GS Nguyễn Duy Tiến, Trưởng ban điều hành hệ đào tạo CN KHTN đã báo cáo kết quả 5 năm đào tạo. Với những thành tích đáng kể, hệ đào tạo CN KHTN đã được nhận *Bằng khen* của *Thủ tướng Chính phủ*, nhiều giảng viên được nhận Huy chương Vì sự nghiệp GD của Bộ GD-ĐT và Bằng khen của Giám đốc ĐHQG Hà Nội. Đ/c Trần Đình Hoan và nhiều đại biểu đã phát biểu đánh giá cao chất lượng đào tạo và đóng góp ý kiến về sự phát triển của dự án này trong những năm tới.

P.V

12A2, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Bạc Liêu :** *Lê Thanh Hoàn*, 12T1, THPT ch. Bạc Liêu ; **Quảng Ngãi :** *Thới Ngọc Tuấn Quốc*, 10 Lí, THPT Lê Khiết ; **Hải Phòng :** *Đinh Ngọc Tùng*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú ; **Bình Định :** *Phạm Quang Trung*, 12 Lí, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Bắc Ninh :** *Vũ Tuấn Linh, Cao Xuân Bình, Chu Thanh Bình*, 11Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hà Tĩnh :** *Nguyễn Xuân Đức*, 11 Lí, *Nguyễn Văn Tý, Lê Đức Đạt*, 12 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Nghệ An :** *Phạm Xuân Ơn*, K30A3, *Lê Công Tường*, K29 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Ngọc Minh, Nguyễn Thanh Phương* và *Chu Anh Dũng*, 12A3, *Lê Duy Cường*, 11A3, THPT ch. Vĩnh Phúc.

MAI ANH

Bài L2/301. *Một tụ điện phẳng không khí có các bản nằm ngang cố định, được nối với nguồn điện không đổi có hiệu điện thế U. Bên trong tụ điện có đặt một tấm kim loại bề dày a khối lượng m (hình vẽ).*



Ở thời điểm ban đầu tấm kim loại tiếp xúc với bản trên của tụ, sau đó nó được thả ra. Tìm vận tốc của tấm kim loại khi nó chạm vào bản tụ dưới. Biết điện tích mỗi bản tụ bằng điện tích tấm kim loại và bằng S, khoảng cách giữa hai bản tụ là d.

Lời giải. Điện tích của tấm kim loại ở thời điểm ban đầu : $q = \frac{\varepsilon_o S}{d-a}.U$. Điện tích này được bảo toàn trong thời gian chuyển động của tấm kim loại giữa các bản tụ. Ở thời điểm ban đầu bản tụ trên không tích điện còn bản tụ dưới tích điện $-q$. Kí hiệu Q_1, Q_2 là điện tích bản tụ trên và dưới ở thời điểm tấm kim loại gặp bản tụ dưới. Áp dụng định luật bảo toàn điện tích ta có: $Q_1 + Q_2 = -q$ (1). Ở thời điểm tấm kim loại đã dịch chuyển một đoạn x :

$$\left(\frac{Q_{1x}}{2\varepsilon_o S} - \frac{Q_{2x}}{2\varepsilon_o S} - \frac{q}{2\varepsilon_o S}\right)x +$$
$$+\left(\frac{q}{2\varepsilon_o S} + \frac{Q_{1x}}{2\varepsilon_o S} - \frac{Q_{2x}}{2\varepsilon_o S}\right)(d-x-a) = U,$$

với Q_{1x} và Q_{2x} tương ứng là điện tích của bản tụ trên và dưới khi đó. Thay $x = d - a$ vào phương trình trên, ta được (kết hợp với (1)) : $Q_2 = -2q$. Như vậy khi bản kim loại gặp bản tụ dưới thì điện tích bản này là $-2q$, còn điện tích bản trên là $+q$. Do đó công của nguồn là $A = qU$. Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng ta có :

$qU + mg(d - a) = \frac{mv^2}{2}$, với v là vận tốc của tấm kim loại khi chạm bản tụ dưới. Suy ra :

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m} + 2g(d-a)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_o SU^2}{m(d-a)} + 2g(d-a)}$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng :

Quảng Bình : *Nguyễn Thanh Quân*, 11 Lí, THPT chuyên Quảng Bình ; **Hà Tây :** *Đào Xuân Dũng*, 11 Lí 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Hải dương :** *Nguyễn Thị Nhung*, 10A, THPT Nam Sách, *Ngô Quốc Đạt*, 10 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Phú Yên :** *Nguyễn Hải Hưng*, 10 Lí, THPT Lương Văn Chánh ; **Bắc Giang :** *Vũ Văn Đáng*, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Nghệ An :** *Trần Quang Vũ, Phạm Cung Sơn*, 11 Lí, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Hà Tĩnh :** *Lê Đức Đạt*, 12 Lí, *Bùi Hoài Nam*, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Ngọc Minh, Hoàng Vĩnh Hưng*, 12A3, *Kiều Ngọc Thanh*, 11A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Bình Định :** *Vũ Đình Phong*, 12A9, *Phạm Quang Trung*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn.

MAI ANH

Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

ĐÔ THỊ VIỆT NAM – NHỮNG CON SỐ LỚN NHẤT, BÉ NHẤT

Tiếp theo những con số về thế giới, kì này sẽ là các con số về Việt Nam mình. Bạn hãy kể tên mười thành phố đông dân nhất (tính cả nội và ngoại thành) ? Bạn hãy kể tên các đô thị loại 1, các đô thị loại 2 ? Thành phố có mật độ dân số cao nhất ? Thành phố trực thuộc Trung ương có mật độ dân số cao nhất ? Nội thành có mật độ dân số cao nhất ? Thành phố rộng nhất ? Thành phố có diện tích bé nhất ? Thị xã có ít dân nhất ? Thị xã có diện tích bé nhất ?

BÍNH NAM HÀ

Giải đáp :

QUẢ ĐẤT - SỐ VÀ HÌNH

1. Mười nước có dân số lớn nhất (người)

1. Trung Quốc	1 262 368 000
2. Ấn Độ	982 223 000
3. Hoa Kỳ	274 028 000
4. Inđônêxia	206 338 000
5. Braxin	165 851 000
6. Pakixtan	148 146 000
7. LB Nga	147 443 000
8. Nhật Bản	126 281 000
9. Băngladet	124 774 000
10. Nigiêria	106 409 000

(Việt Nam đứng thứ 13 về dân số)

*** Mười nước có dân số ít nhất (người)**

1. Vaticăng	1 000
2. Tuvalu	11 000
3. Nauru	11 000
4. Palau	19 000
5. Xan Marinô	26 000
6. Lictơnxtain	32 000
7. Mônacô	33 000
8. Xanh Kit & Nêvit	39 000
9. Macsan	60 000
10. Anđôra	72 000

*** Mười nước có diện tích lớn nhất (km^2)**

1. LB Nga	17 075 400
2. Canada	9 976 139
3. Trung Quốc	9 600 000
4. Hoa Kỳ	9 170 000
5. Braxin	8 511 956
6. Ôxtrâylia	7 686 848
7. Ấn Độ	3 287 590
8. Achentina	2 776 661
9. Cadăcxtan	2717 300
10. Xuđăng	2 505 813

*** Mười nước có diện tích nhỏ nhất (km^2)**

1. Vaticăng	0,44
2. Mônacô	2
3. Nauru	21
4. Tuvalu	26
5. Xan Marinô	61
6. Lictơnxtain	160
7. Macsan	181
8. Manđivơ	298
9. Manta	316
10. Xâysen	455

2. Sông Cônggô ở nước Cộng hòa dân chủ Cônggô (Daia), chảy từ Nam bán cầu lên Bắc bán cầu rồi lại chảy xuống Nam bán cầu để đổ ra biển (hai lần cắt xích đạo).

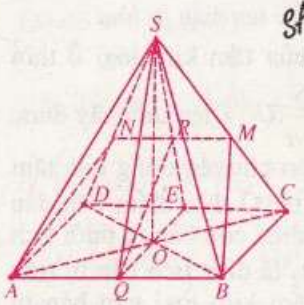
3. Châu Phi vừa có đường xích đạo vừa có kinh tuyến số 0 chạy qua tức là vừa nằm ở Bắc bán cầu vừa ở Nam bán cầu, vừa ở Đông bán cầu vừa ở Tây bán cầu.

Nhận xét : Các bạn được quà tặng của tòa soạn: *Nguyễn Minh Hải*, 7A4, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ** ; *Ngô Minh Tâm*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, **Hà Nội** ; *Nguyễn Thị Hải Vân*, 7/3, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương** ; *Đặng Thị Huyền*, THCS Gia Phố, Hương Khê, **Hà Tĩnh** ; *Thái Đoàn Minh Tuấn*, 9D2, THCS Trung tâm, Sông Công, **Thái Nguyên** ; *Lê Văn Hà*, 10A3, PTCT-Tin, ĐHSP **Hà Nội** ; *Nguyễn Bình Minh*, 12 Sinh, Hà Nội - Amsterdam; *Trần Văn Thuận*, 11D, THPT Hoàng Hoa Thám, Lệ Thủy, **Quảng Bình**.

VKT

Giải đáp bài :

GIẢI THẾ NÀO ?



Lời giải bài toán phạm hai sai lầm

1) Đưa ra công thức sai

$$S_{ABMN} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \widehat{RQE}}$$

Kết quả : SỐ CHẴN HAY SỐ LẺ ?

Lời giải. *(Theo Nguyễn Huy Hùng, 11A1, PTCT ĐH Vinh, Nghệ An và Lê Quốc Nam, 10A3, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, Thanh Hóa).*

Ta thấy hiệu hai số nguyên bất kì luôn cùng tính chẵn, lẻ với tổng của chúng. Vậy con số cuối cùng bạn Thương nhận được sẽ cùng tính chẵn, lẻ với tổng $1 + 2 + ... + 2002 = 1001 \times 2003 = 2005003$. Tổng này là một số lẻ nên số cuối cùng Thương nhận được là số lẻ.

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi về TS đều đúng. Nhưng chỉ có các bạn sau xác định tính chẵn lẻ của số cuối cùng mà Thương nhận được theo thuật toán trên *"đúng 1 phút"* như bạn Hùng và bạn Nam :

Phú Thọ : *Nguyễn Minh Hoàng*, 9A, THCS Đoan Hùng, Đoan Hùng ; **Vĩnh Phúc :** *Vũ Quang Hòa*, 9C, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường ; **Đồng Nai :** *Bùi Công Thức*, kho thành phẩm, Công ty Mabuchi, KCN Biên Hòa 2 ; **Bình Định :** *Lê Tôn Khánh*, 9A12, THCS Lê Hồng Phong, Quy Nhơn.

HỒNG QUANG

HAI BÀ MẸ YÊU TOÁN

Có hai người bạn sau 13 năm mới lại gặp nhau, bà A hỏi bà B :

- Thế nào, cậu đã lấy chồng chưa, có mấy đứa rồi ?

Bà B nói : Hồi cùng học cậu hay đố tớ giải toán. Bây giờ tớ đố cậu bài toán này. Tớ lấy chồng lâu rồi, và hiện nay có 4 đứa con. Năm ngoái bình phương tuổi của đứa lớn nhất bằng tổng các bình phương tuổi của ba đứa còn lại. Năm tới tổng các bình phương của tuổi đứa lớn nhất với bình phương của tuổi đứa nhỏ nhất bằng tổng các bình phương của tuổi hai đứa còn lại. Cậu có thể đoán được tuổi của các cháu không ?

Bà A hỏi lại : - Thế có hai cháu nào bằng tuổi nhau không ?

Bà B trả lời : Không.

Các bạn có thể đoán xem bà A đã tính như thế nào để biết đúng tuổi các con bà B ?

VŨ ĐÌNH HÒA *(Hà Nội)*

☛ vì ở đây hình chiếu vuông góc của *ABMN* lên mặt phẳng đáy không phải là *ABCD*.

2) $\cos 30^o = \frac{1}{2}$ (?)

Giải lại bài toán. Chú ý rằng ΔSQE đều $\Rightarrow R$ là trung điểm *SE* và do đó *M, N* lần lượt là trung điểm của *SC, SD*. Do đó *ABMN* là hình thang cân và

$$S_{ABMN} = \frac{(AB+MN)QR}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$$

Nhận xét. Chỉ có một số bạn tính lại S_{ABCD} chưa chính xác, còn lại đều chỉ đúng hai chỗ sai trong lời giải bài toán này. Các bạn có lời giải lại gọn hơn cả là :

Hà Nội : *Trương Duy Khánh*, 12B1, THPT Phan Đình Phùng, Q. Ba Đình ; **Hải Dương :** *Phùng Văn Đường*, 12A2, THPT Quang Trung, Ninh Giang ; **Hưng Yên :** *Nguyễn Quốc Huy*, 11I, THPT Văn Giang, Văn Giang ; **Đà Nẵng :** *Ngô Đức Hoàng*, 12/20, THPT Phan Châu Trinh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Lưu Huỳnh Châu Pha*, 12A1, THPT Võ Thị Sáu, Q. Bình Thạnh ; **Thái Bình :** *Nguyễn Đạt Thắng*, 11A1, THPT Quỳnh Thọ, Quỳnh Phụ.

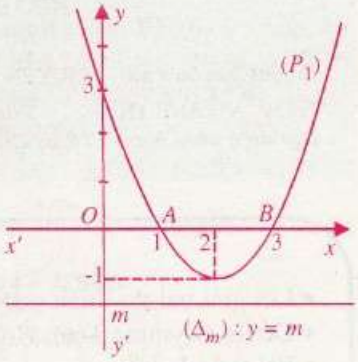
NGỌC HIỀN

MỘT LỜI GIẢI ĐẸP ?

Có một bài toán : *Cho parabol (P) : $y = x^2 - 2x + 3$ và đường thẳng (D) : $y = 2x+m$. Xác định m để (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 2* ? với lời giải như sau :

Phương trình hoành độ giao điểm của (*P*) và (*D*) là $x^2 - 2x + 3 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = m$ (1)

Đặt $y_1 = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P_1) (hình vẽ), $y_2 = m$ có đồ thị là đường thẳng (Δ_m) cùng phương với *Ox* và cắt *Oy* tại (0, *m*). Khi đó (*D*) cắt (*P*) tại hai điểm phân biệt *AB* mà *AB* = 2 $\Leftrightarrow$ (Δ_m) cắt (P_1) tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho : *AB* = 2. Căn cứ vào đồ thị ta thấy $AB = 2 \Leftrightarrow m = 0$.



Đây có phải là một lời giải đẹp ? Các bạn có thỏa mãn với lời giải này không ?

HỒ CÔNG DŨNG
(GV THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận)

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 305 (11-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Phước – Một cách giải phương trình bậc 4 có dạng đặc biệt

2 **Diễn đàn dạy học toán - Math Teaching Forum**
Nguyễn Thị Bính – Phát triển tư duy của học sinh qua việc dạy hệ thức Vi-ét

4 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Đặng Thanh Hải – Những lưu ý khi giải đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng năm 2002 – Khối B – phần Hình học

6 *Nguyễn Khắc Minh* – Lời giải các bài thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn toán THPT năm học 2001–2002 Bảng A

9 **Nhìn ra thế giới – Around the World**
Kì thi Olympic Toán Hoa Kỳ 2002

10 Kết quả cuộc thi giải Toán và Vật lí trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2001 – 2002

12 **Đề ra kì này - Problems in This Issue**
T1/305, ..., T10/305, L1, L2/305

14 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 301

21 5 năm đào tạo cử nhân KH tài năng ĐHQG Hà Nội

22 **Câu lạc bộ - Math Club**
Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake ?

23 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 2 : Trần Đình Viện – Vẽ hình hoa nhiều cánh
Bìa 3: **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**
Bìa 4: 85 năm trường Đồng Khánh - Trưng Vương

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Biên tập :* VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.
Trị sự : VŨ ANH THƯ. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 305 (11/2002)

- Lời giải bài thi Toán quốc tế 2002
- Đề thi Olympic Toán Hoa Kỳ 2002 (tiếp)
- Bài toán Josephus
- Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT năng khiếu ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh
- Lịch sử máy tính ngắn gọn
- Kỉ niệm 200 năm sinh nhà toán học Abel

và các chuyên mục vui khác.

Các bạn nhớ đặt mua THTT cho cả năm tới tại các cơ sở Bưu điện !

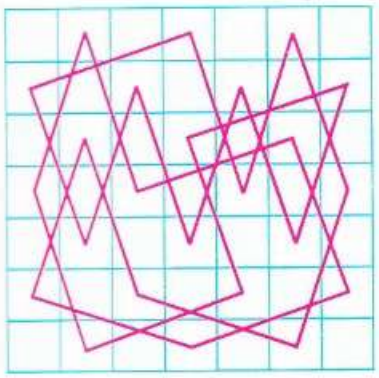
THTT

1 - TH&TT

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

QUÂN MÃ ĐI THEO Ô TRẮNG

Bàn cờ hình vuông gồm $n \times n$ ô vuông được tô hai màu đen (Đ) và trắng (T) sao cho : hai ô vuông bất kì có 1 cạnh chung thì có màu khác nhau và ô vuông ở góc trên bên trái được tô màu đen.



Hình 1

Quân "mã" đi từ ô trắng này đến ô trắng khác trên bàn cờ theo đường chéo của hình chữ nhật kích thước 2×4 ô (hoặc 4×2 ô). Trên hình 1 chỉ ra một đường đi khép kín của quân mã liên tiếp qua tất cả các ô trắng của bàn cờ 7×7 ô mà mỗi ô trắng chỉ qua 1 lần.

Dành cho bạn đọc

Hãy vẽ đường đi khép kín của quân mã liên tiếp qua tất cả các ô trắng của bàn cờ mà mỗi ô chỉ qua 1 lần trong mỗi trường hợp sau :

1) Bàn cờ 6×6 ô. Nêu quy tắc chọn cách đi.

2) Bàn cờ 8×8 ô.

GIẢI ĐÁP : CẮT GIẤY MỘT NHÁT THÀNH HÌNH SAO

Cho mảnh giấy hình vuông $ABCD$.

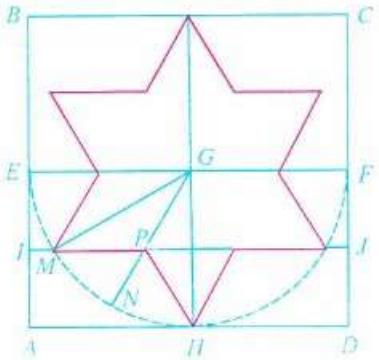
a) ***Cắt thành hình sao 6 cánh đều*** (h. 2)

1) $BC \xrightarrow{EF} AD$ 2) $AD \xrightarrow{IJ} EF$. Mở nếp gấp.

3) $FD \xrightarrow{GH} EA$; 4) $GE \to GM$ có $M \in IJ$

5) $GH \xrightarrow{GN} GM$ có PG. Mở nếp gấp (4) ; 6) $GE \xrightarrow{GM} GN$

Cắt theo HP rồi mở ra được hình sao 6 cánh đều.



Hình 2

b) ***Cắt thành hình sao 5 cánh đều.*** (h. 3)

1) $AB \xrightarrow{HK} DC$; 2) $KH \to KP$ có $P \in AB$. Mở nếp gấp (2) (1)

3) $BC \xrightarrow{EF} AD$ có G ; 4) $GE \xrightarrow{GP} GQ$; 5) $GM \xrightarrow{GN} GF$.

6) $G \xrightarrow{FS} I$. Mở nếp gấp ; 7) $GM \xrightarrow{GQ} GN$; 8) $GF \xrightarrow{GJ} GN$.

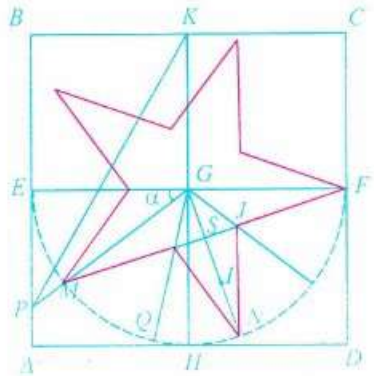
Cắt theo FJ rồi mở ra được hình sao 5 cánh gần đều.

Ta có $KP = KH = 2KB = 2a \Rightarrow PB = BK\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow PE = PB - EB = a(\sqrt{3}-1)$

$\text{tg}\alpha = \dfrac{PE}{GE} = \sqrt{3}-1 \approx 0{,}7320 \Rightarrow \alpha \approx 36^o12'$

$2\alpha \approx 72^o24'$ sai số $\Delta = 0^o25'$



Hình 3

Nhiều bạn cắt thành hình sao 5 cánh gần đều với sai số lớn hơn cách trên, hoặc gấp giấy khá phức tạp (dựa vào bài *Gấp giấy để tạo đa giác đều* THTT số 300 tháng 6/2002).

Các bạn sau được nhận tặng phẩm kì này :

1) *Đinh Thành Vinh*, 12 Lý, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, **Bình Định**.

2) *Trần Văn Viễn*, 12B, THPT Lê Quý Đôn, Thạch Hà, **Hà Tĩnh**.

PHI PHI

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

85 NĂM TRƯỜNG ĐỒNG KHÁNH – TRƯNG VƯƠNG

Từ trái sang phải :
Phó Hiệu trưởng Ngô Thị Tuyết,
Bí thư chi bộ Vũ Hữu Bình
Hiệu trưởng Đỗ Kim Ngân
Phó Hiệu trưởng Đàm Hiếu Chiến

Thành lập năm 1917, với bề dày thành tích 85 năm, 5 lần vinh dự được Bác Hồ về thăm, trường THCS Trưng Vương đang là điểm sáng của ngành Giáo dục thủ đô : năm 2002 được Thủ tướng Chính phủ tặng cờ "Đơn vị thi đua xuất sắc". Lá cờ truyền thống Đồng Khánh - Trưng Vương lấp lánh ba Huân chương Lao động hạng Nhất, Nhì, Ba, trong dịp kỉ niệm 85 năm thành lập trường lại tươi thắm thêm với tấm **Huân chương Độc lập** hạng Ba mà Chủ tịch Nước trao tặng.

Đã từ lâu Trưng Vương là cái nôi, là vườn ươm những tài năng trẻ với 236 giải quốc gia và nhiều giải thành phố, trong đó nổi bật là thành tích về môn Toán. Được phát hiện, chăm sóc và bồi dưỡng từ những năm học ở bậc Trung học cơ sở, học sinh (HS) Trưng Vương khi lên cấp 3 đã gặt hái nhiều thành tích đáng tự hào : trên 40 giải quốc tế về Toán, Vật lí, Tin học. Các HS Hoàng Lê Minh, Đàm Thanh Sơn, Hà Anh Vũ, Ngô Bảo Châu, Nguyễn Xuân Đào, Đào Hải Long, Bùi Mạnh Hùng đã mang về cho đất nước 9 Huy chương Vàng thi Toán quốc tế. HS Việt Nam đầu tiên đạt giải Nhất Toán quốc tế Hoàng Lê Minh, HS Việt Nam đầu tiên hai lần đạt giải Nhất Toán quốc tế Ngô Bảo Châu, HS nữ Việt Nam đầu tiên đạt giải Toán quốc tế Phan Vũ Diễm Hằng, học sinh Việt Nam đầu tiên đạt giải Nhất Tin học quốc tế Nguyễn Tuấn Việt, học sinh Việt Nam đầu tiên đạt giải Nhất Vật lí quốc tế Đinh Sĩ Quảng, học sinh Việt Nam đầu tiên được nhận học bổng ASEAN dành cho học sinh trung học phổ thông Vũ Thành Nam và là một trong hai học sinh Việt Nam đầu tiên được giải thưởng cao nhất của Singapo dành cho học sinh xuất sắc khu vực châu Á - Thái Bình Dương, tất cả đều là những học sinh Trưng Vương.

Tiến sĩ toán học Việt Nam trẻ tuổi nhất Lê Thị Hồng Vân, Tiến sĩ tin học Việt Nam trẻ tuổi nhất Bùi Hải Hưng là học sinh cũ của trường. Nhiều học sinh Trưng Vương đã trở thành những nhà nghiên cứu, nhà sư phạm đang tiếp tục bồi dưỡng những tài năng trẻ toán học : Vũ Đình Hòa, Hoàng Lê Minh, Đỗ Đức Thái.

Trong những năm gần đây, Trưng Vương vẫn tiếp tục là một trong những đơn vị dẫn đầu thủ đô về đội ngũ học sinh giỏi. Năm 2001 hai trong ba học sinh thủ khoa kì thi tốt nghiệp THCS của Hà Nội là học sinh Trưng Vương (Vũ Thu Trang và Hoàng Quỳnh Mai). Năm 2002, Lương Thế Vinh đạt giải Nhất Toán thành phố với điểm số tối đa.

Các thành tích trên gắn liền với tên tuổi của các thầy dạy lớp chuyên Lê Mộng Ngọc, Tôn Thân, và các thầy cô hiện đang là giáo viên của trường : Vũ Hữu Bình, Đàm Hiếu Chiến, Trịnh Thúy Hằng, Hồ Thu Hằng, Lại Thanh Hương. Thật hiếm một tổ chuyên môn có nhiều thầy cô giáo say mê nghiên cứu như ở Tổ nhiên 1 các giáo viên Toán của trường Trưng Vương : NGƯT Vũ Hữu Bình, giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 1999, là tác giả của trên 80 cuốn sách Giáo khoa và sách Tham khảo về Toán. Các thầy cô Đàm Hiếu Chiến, Trịnh Thúy Hằng, Hồ Thu Hằng đã có sách được NXB Giáo dục ấn hành. Các thầy cô Vũ Hữu Bình, Đàm Hiếu Chiến, Nguyễn Thị Bính là cộng tác viên tích cực của báo Toán học và Tuổi trẻ. Bên cạnh đó là một đội ngũ giáo viên dạy giỏi nhiều kinh nghiệm : Đoàn Nguyên Phương, Nguyễn Kim Thu, Nghiêm Phước Hiền, Lương Minh Hiền, Cao Hồng Vân, Nguyễn Hồng Nga, Đặng Kim Giao, Phạm Thị Thành, Ngô Phương Liên, Nguyễn Văn Chất... Các thầy cô Đàm Hiếu Chiến, Đinh Hạnh Mai... đang triển khai sử dụng phần mềm vi tính vào thiết kế bài giảng.

Hết lòng vì học sinh thân yêu với phong cách "Trách nhiệm - Vững vàng - Đàng hoàng - Tự trọng", đổi mới phương pháp dạy học để giúp học sinh vươn lên những đỉnh cao mới, tập thể giáo viên của trường tiếp tục phấn đấu đáp ứng lòng tin yêu của học sinh và cha mẹ học sinh, xứng đáng với 16 chữ vàng

Sáng ngời truyền thống
Đồng Khánh - Trưng Vương
Rạng rỡ tên trường
Dạy hay - học giỏi.

ISSN : 0866-8035 Chế bản tại Tòa soạn
Chỉ số : 12884 In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ **Giá : 3000đ**
Mã số : 8BT07M2 In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2002 **Ba nghìn đồng**