VŨ HỮU BÌNH (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN BÌNH - ĐÀM HIẾU CHIẾN

BỒI DƯỠNG TOÁN 7

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

PHÂN CÔNG BIÊN SOẠN

Vũ Hữu Bình (Chủ biên)

Đàm Hiếu Chiến : *Phần Đại Số*

Nguyễn Xuân Bình : *Phần Hình Học*

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đem đến cho học sinh một cuốn sách Toán chất lượng về nội dung và đẹp về hình thức, các tác giả đã biên soạn bộ sách Bồi dưỡng Toán 7 gồm hai tập.

Đây là bộ sách được biên soạn theo định hướng phát triển năng lực, giúp củng cố, nâng cao kiến thức và bồi dưỡng học sinh vươn lên khá và giỏi, khơi gợi niềm yêu thích môn Toán và giúp học sinh biết thêm nhiều ứng dụng của Toán học trong cuộc sống.

Nội dung bộ sách bám sát Chương trình và Sách giáo khoa Toán hiện hành, mỗi chương gồm nhiều chủ đề, mỗi chủ đề gồm nhiều mục :

Mục Kiến thức cần nhớ hệ thống các kiến thức dưới dạng sơ đồ, vừa giúp dễ nhớ kiến thức một cách trực quan, vừa giúp các em nắm chắc hệ thống các kiến thức cơ bản.

Mục Hỏi đáp nhanh gồm những câu hỏi ngắn gọn yêu cầu học sinh trả lời nhanh để củng cố các kiến thức cơ bản và tránh những sai lầm dễ mắc. Trong các bài tập trắc nghiệm có nhiều phương án A, B, C, D, nếu không có chỉ thị gì, ta quy ước chọn phương án đúng.

Mục Học giải Toán gồm các ví dụ điển hình từ cơ bản đến nâng cao nhằm hình thành phương pháp giải toán cho học sinh. Bên cạnh tuyến chính là các lời giải được trình bày mẫu mực như một bài làm hoàn chỉnh, còn có tuyến phụ gồm các gợi ý, nhận xét, lưu ý, lời bình, các ghi nhớ, kết luận và mở rộng kiến thức với sự tham gia của một số nhân vật hoạt hình nhằm tăng tính hấp dẫn cho cuốn sách.

Mục Bài tập cũng gồm hai loại cơ bản và nâng cao, các bài tập được chọn lọc giúp học sinh nâng cao dần kĩ năng giải toán và năng lực tư duy để vươn lên khá, giỏi trong môn Toán, mặt khác còn giúp học sinh thấy được nhiều ứng dụng thực tế của Toán học.

Mục Em có biết? mang đến cho học sinh nhiều thú vị, gồm những bài toán vui, những câu đố, những thông tin về các nhà toán học có liên quan đến chủ đề đang học, những ứng dụng hoặc thể hiện của Toán học trong đời sống.

Mục Đi xa hơn cung cấp thêm những kiến thức nâng cao để có thể hiểu sâu hơn vấn đề đang học.

Cuối sách là mục **Hướng dẫn giải – Đáp số** giúp học sinh kiểm tra lại bài giải của mình để rút ra những kinh nghiệm trong giải toán.

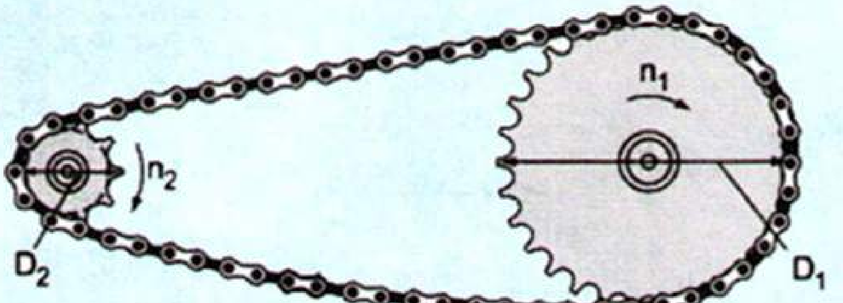
Với những đổi mới cả về nội dung lẫn hình thức, đáp ứng yêu cầu về tính khoa học, tính sư phạm, tính thực tiễn, tính hấp dẫn, các tác giả hi vọng rằng cuốn sách sẽ là một ấn phẩm thiết thực và bổ ích không chỉ cho các em học sinh, mà còn cho các thầy cô giáo, các bậc cha mẹ học sinh, các nhà quản lí giáo dục và tất cả những ai quan tâm đến sự nghiệp đổi mới giáo dục.

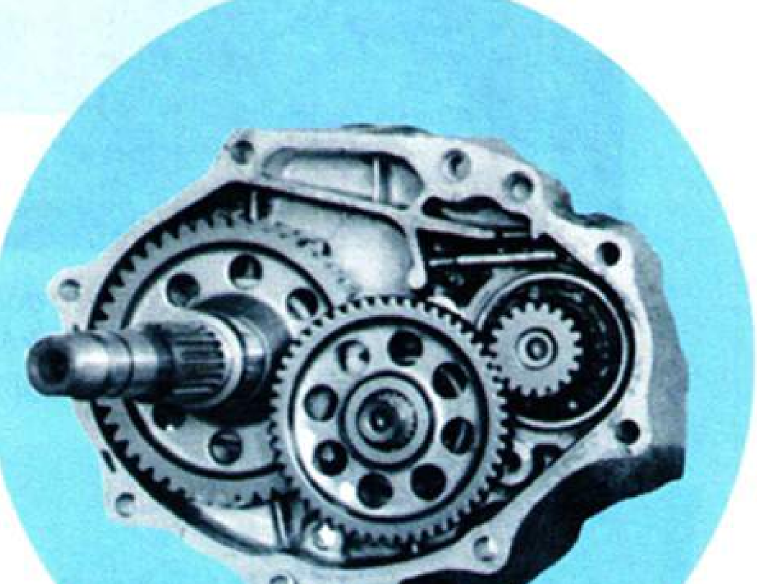
Các tác giả chân thành cảm ơn bạn đọc đã sử dụng cuốn sách này và mong nhận được những góp ý của bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Mọi ý kiến góp ý xin gửi về : Ban biên tập sách Toán – Tin, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 187B – Giảng Võ – Đống Đa – Hà Nội.

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN
ĐẠI SỐ

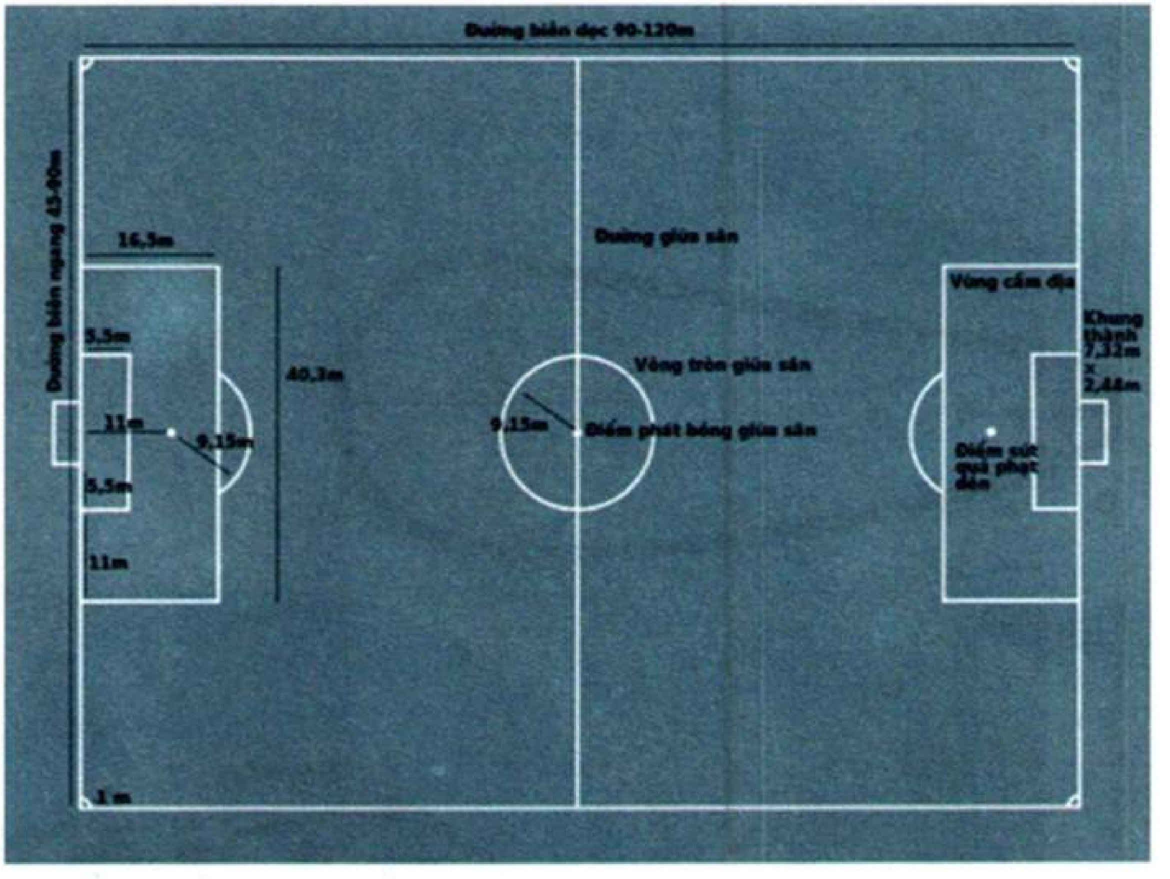




CHƯƠNG

I

SỐ HỮU TỈ. SỐ THỰC



Sân bóng có chiều dài từ 100m đến 120m,
chiều rộng từ 64m đến 75m.
Khung thành có chiều dài 7,3m và chiều cao 2,44m.

- Số hữu tỉ
- Các phép tính về số hữu tỉ
- Luỹ thừa của một số hữu tỉ
- Tỉ lệ thức. Dãy tỉ số bằng nhau
- Số vô tỉ. Số thực

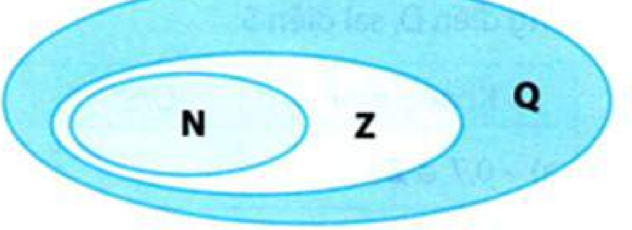
CHỦ ĐỀ 1

SỐ HỮU TỈ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Số hữu tỉ
Số hữu tỉ là số có thể viết dưới dạng một phân số.



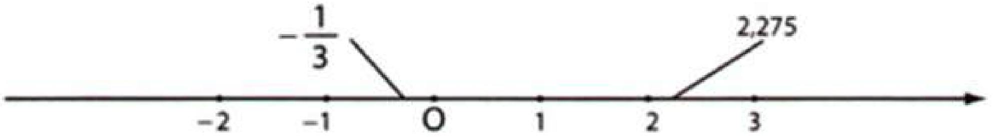
$\frac{a}{b}$ là một **phân số** khi:
$a, b \in \mathbf{Z}$ và $b \neq 0$.

Tập hợp số hữu tỉ được kí hiệu là **Q**.

$x \in \mathbf{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbf{Z}$; $b \neq 0$.

Một số không thể viết được dưới dạng một phân số thì không là số hữu tỉ.

2. BIỂU DIỄN TRÊN TRỤC SỐ



Mọi số hữu tỉ đều biểu diễn bởi một điểm trên trục số.

Trên trục số, điểm biểu diễn số hữu tỉ x được gọi là điểm x.

Nếu $x, y \in$ ***Q thì*** $x \geq y$, hoặc $x < y$.

3. SO SÁNH HAI SỐ HỮU TỈ

Bước 1. Viết các số hữu tỉ x và y dưới dạng một phân số có mẫu số dương.
Bước 2. Quy đồng mẫu số các phân số.
Bước 3. So sánh các tử số (so sánh các số nguyên).

$x \in \mathbf{Q}$	$x > 0$	x là số hữu tỉ dương.	Tập hợp **Q**	*Số hữu tỉ dương*
	$x = 0$	x không là số hữu tỉ dương và cũng không là số hữu tỉ âm.		*Số 0*
	$x < 0$	x là số hữu tỉ âm.		*Số hữu tỉ âm*

HỎI ĐÁP NHANH

1. Đúng điền Đ, sai điền S:

Khẳng định	Đ/S
a) $-0,7 \in \mathbf{Z}$	
b) $-0,7 \in \mathbf{Q}$	
c) $-\dfrac{2}{7} \notin \mathbf{Z}$	
d) $-\dfrac{2}{7} \notin \mathbf{Q}$	
e) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$	
f) $\mathbf{Z} \in \mathbf{Q}$	

2. Điền số thích hợp vào chỗ chấm (...) :

a) $\dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{...}$

b) $-\dfrac{2}{-3} = \dfrac{2}{...}$

c) $-\dfrac{5}{7} = -\dfrac{...}{-7}$

d) $\dfrac{-7}{11} = -\dfrac{7}{...}$

e) $\dfrac{3}{5} = -\dfrac{-3}{...}$

f) $-11 = \dfrac{-11}{.....}$

3. Kết luận đúng là:

(A) $\dfrac{-10}{15} > \dfrac{7}{-14}$

(B) $\dfrac{9}{-27} < \dfrac{-11}{33}$

(C) $\dfrac{-34}{51} > -\dfrac{19}{57}$

(D) $\dfrac{-46}{69} < \dfrac{-27}{54}$

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

So sánh hai số hữu tỉ sau:

$$x = -0,8 \text{ và } y = \frac{8}{-9}.$$

Cách 1:
So sánh theo ba bước.

Cách 2:
Xét tổng của mỗi số với 1.

Giải

Cách 1

Bước 1. Viết các số hữu tỉ thành phân số có mẫu số dương.

$$x = -0,8 = \frac{-4}{5} \text{ và } y = \frac{8}{-9} = \frac{-8}{9}.$$

Bước 2. Quy đồng mẫu số các phân số.

$$x = \frac{-4}{5} = \frac{-36}{45} \text{ và } y = \frac{-8}{9} = \frac{-40}{45}.$$

Bước 3. So sánh các tử số.

$-36 > -40$, nên $\dfrac{-36}{45} > \dfrac{-40}{45}$, suy ra $x > y$.

Cách 2 $x=-0,8=\frac{-4}{5}\Rightarrow x+1=\frac{-4}{5}+1=\frac{1}{5}$; $y=\frac{8}{-9}=\frac{-8}{9}\Rightarrow y+1=\frac{-8}{9}+1=\frac{1}{9}$.

Vì $\frac{1}{5}>\frac{1}{9}$, nên $x + 1 > y + 1 \Rightarrow x > y$.

Ví dụ 2

Lời giải đúng hay sai ?

Bạn BEE so sánh hai số

$x=\frac{-13}{15}$ và $y=\frac{11}{-13}$ như sau:

Bước 1: $x=\frac{-13}{15}$ và $y=\frac{11}{-13}=\frac{-11}{13}$.

Bước 2: $\frac{-13}{15}<\frac{-11}{15}<\frac{-11}{13}$ (vì $-13<-11$ và $15 > 13$).

Suy ra: $\frac{-13}{15}<\frac{11}{-13}$.

Giải

Lời giải đã cho sai.

Có $\frac{11}{15}<\frac{11}{13}$, nên $\frac{-11}{15}>\frac{-11}{13}$.

Do đó không kết luận được $x < y$.

Sửa lại. Có $x+1=\frac{-13}{15}+1=\frac{2}{15}$ và

$y+1=\frac{11}{-13}+1=\frac{-11}{13}+1=\frac{2}{13}$.

Mà $\frac{2}{15}<\frac{2}{13}\Rightarrow x+1<y+1\Rightarrow x<y$

$\Rightarrow \frac{-13}{15}<\frac{11}{-13}$.

Ví dụ 3

Hãy chỉ ra một số hữu tỉ nằm giữa hai số $\frac{1}{3}$ và 0,5.

$o<a<b$

$\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

Giải

Có $\frac{1}{3}<\frac{1}{2,5}<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{\frac{5}{2}}<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$.

Suy ra số hữu tỉ phải tìm là $\frac{2}{5}$.

Có vô số số hữu tỉ nằm giữa hai số $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{2}$. Vì $2 < 2,5 < 3$ nên $\frac{2}{5}$ là một số cần tìm. Nhưng giữa 2 và 3 còn vô vàn số hữu tỉ nữa, chẳng hạn với số 2,4, ta có :

$2<2,4<3\Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{2,4}<\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{\frac{12}{5}}<\frac{1}{2}$, do đó $\frac{5}{12}$ cũng là số hữu tỉ cần tìm.

Ví dụ 4

Tỉ số giữa số đo chiều cao và số đo vòng eo của một người đàn ông (cùng một đơn vị đo) cho biết sức khoẻ của người đó. Nếu người đàn ông có tỉ số đó nhỏ hơn 2 là sức khoẻ có vấn đề.

Ông A cao 1,72m, vòng eo 88cm ; ông B cao 1,56m, vòng eo 72cm.

Theo bạn thì sức khoẻ của ai kém hơn ?

Giải

Đặt $\varphi(C)$ là tỉ số giữa số đo chiều cao và số đo vòng eo của ông C.

Ta có : $\varphi(A) = \dfrac{172}{88} = 1\dfrac{21}{22} < 2;$

$\varphi(B) = \dfrac{156}{72} = 2\dfrac{1}{6} > 2.$

Vậy sức khoẻ của ông A kém hơn.

Với nam giới trưởng thành, vòng eo càng lớn thì sức khoẻ càng kém.

Ví dụ 5

Hình vuông kích thước 3×3 (có 9 ô) được gọi là HÌNH VUÔNG ĐƯỢC SẮP khi các ô được điền các số hữu tỉ tăng dần theo hàng từ trái sang phải, tăng dần theo cột từ trên xuống dưới. Hình sau cho ta một ví dụ về ***hình vuông được sắp***.

1	3	4
2	6	7
5	8	9

Cho $B = \left\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{4}; \dfrac{4}{5}; -1; -\dfrac{1}{6}; -\dfrac{5}{7}\right\}$

Điền các số hữu tỉ thuộc tập B vào các ô vuông còn khuyết của hình vuông B để được "hình vuông được sắp" :

		0
– 0,3		

Hình vuông **B**

Giải

Sắp xếp:

B : $-1 < -\dfrac{5}{7} < -\dfrac{1}{3} < -\dfrac{1}{4} < -\dfrac{1}{6} < \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}.$

Ta có kết quả như sau:

-1	$-\dfrac{1}{3}$	**0**
$-\dfrac{5}{7}$	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$
– 0,3	$-\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{4}{5}$

Hình vuông **B**

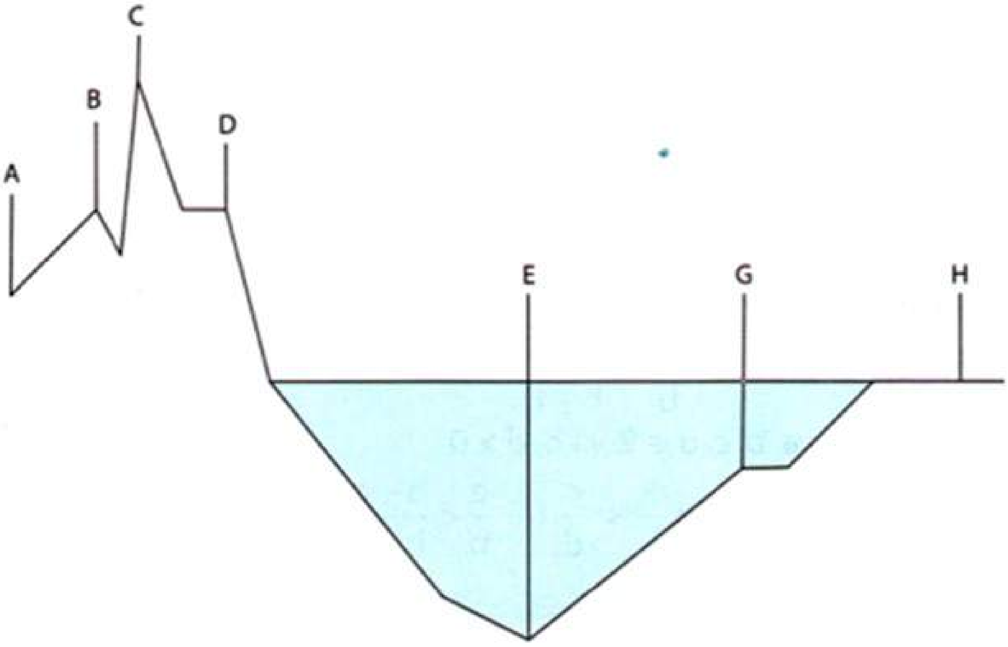
Sắp xếp các số đã cho từ nhỏ đến lớn, sau đó điền số vào các ô vuông.

Ví dụ 6*

Sơ đồ sau biểu diễn độ cao của các vị trí so với mực nước biển. Hãy điền các số đo là các số hữu tỉ (đơn vị là ki-lô-mét) vào các điểm tương ứng:

$$\frac{82}{91};\frac{226}{-339};\frac{124}{23};\frac{28}{19};\frac{-145}{174};0;\frac{132}{21}.$$

Mực nước biển là điểm H ứng với số 0. Các điểm E và G là các điểm dưới mực nước biển và ứng với các số âm.



Giải

So sánh các số hữu tỉ âm:

$$\frac{-145}{174}=\frac{-5}{6}<\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}=\frac{-226}{339}=\frac{226}{-339}\Rightarrow\frac{-145}{174}<\frac{226}{-339}<0.$$

So sánh các số hữu tỉ dương: $\frac{82}{91}<1<\frac{28}{19}<\frac{38}{19}=2=\frac{124}{62}<\frac{124}{23}<\frac{132}{23}<\frac{132}{21}.$

Suy ra:

$$\frac{-145}{174}<\frac{226}{-339}<0<\frac{82}{91}<\frac{28}{19}<\frac{124}{23}<\frac{132}{21}$$

Vậy:

H → 0 (km)			
A	$\frac{82}{91}$ km	**D**	$\frac{124}{23}$ km
B	$\frac{28}{19}$ km	**E**	$\frac{-145}{174}$ km
C	$\frac{132}{21}$ km	**G**	$\frac{226}{-339}$ km

Trước hết hãy sắp xếp các số hữu tỉ đã cho theo thứ tự nhỏ đến lớn.

Ví dụ 7*

So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $\frac{12}{17}$ và $\frac{13}{18}$; b) $\frac{84}{-83}$ và $\frac{-337}{331}$.

Giải

a) Có: $\frac{12}{17}<1$, nên $\frac{12}{17}<\frac{12+1}{17+1}=\frac{13}{18}$.

b) Có: $\frac{-337}{331}<1$,

nên $\frac{-337}{331}<\frac{-337+1}{331+1}=\frac{-336}{332}=\frac{-84}{83}$

hay $\frac{84}{-83}>\frac{-337}{331}$.

Trường hợp: $a, b \in \mathbf{Z}$ và $b > 0$

Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ và nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$.

Trường hợp: $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ và $b, d > 0$

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

1.1. Đúng điền Đ, sai điền S :

Khẳng định	Đ/S	Khẳng định	Đ/S
a) $-0,25 \in \mathbf{Q}$		d) $226 \in \mathbf{N}$	
b) $-0,25 \subset \mathbf{Q}$		e) $226 \notin \mathbf{Z}$	
c) $\{-0,25\} \subset \mathbf{Q}$		f) $226 \notin \mathbf{Q}$	

1.2. Khẳng định nào sai?

(A) $\frac{-22}{9} > \frac{33}{-7}$; (B) $\frac{36}{-48} < \frac{-28}{35}$;

(C) $\frac{-8}{24} < \frac{-4}{28} < \frac{6}{-30}$; (D) $\frac{-20}{35} < \frac{-36}{63}$.

1.3. Mẹ mua bánh nướng nhân dịp Tết Trung thu. Bố cắt một chiếc làm 4 phần bằng nhau và ăn 3 phần. Mẹ cắt một chiếc làm 8 phần bằng nhau và ăn 7 phần. Hỏi nếu con cắt một chiếc làm 6 phần bằng nhau thì con cần ăn mấy phần để phần còn lại của con trong khoảng hai phần còn lại của bố và mẹ?

1.4. Điền các số hữu tỉ thích hợp vào chỗ chấm (...) :

$$-\frac{1}{5}<...<...<...<...<-\frac{1}{8}.$$

NÂNG CAO

1.5. Tìm số nguyên tố a, biết:

$$\frac{8}{17} < \frac{10}{a} < \frac{8}{11}.$$

1.6. Người ta viết các số hữu tỉ:

$$-\frac{1}{12}; -\frac{1}{11}; -\frac{1}{10}; ...; -\frac{1}{1}$$

trên một vòng tròn theo chiều kim đồng hồ. Sau đó theo chiều kim đồng hồ, đầu tiên xoá số (–1), rồi bỏ qua một số xoá số tiếp theo. Cứ làm lần lượt như thế đến khi chỉ còn lại một số. Hỏi số còn lại là số nào ?

1.7. Tìm số hữu tỉ có dạng $\frac{7}{a}$ biết giá trị của nó lớn hơn $-\frac{8}{11}$ và nhỏ hơn $-\frac{8}{13}$.

1.8. Có bao nhiêu số hữu tỉ viết dưới dạng một phân số có tử số bằng 9 mà giá trị của số hữu tỉ đó lớn hơn $\frac{-3}{5}$ và nhỏ hơn $\frac{-4}{9}$?

1.9. Tìm số nguyên a, sao cho:

a) $\frac{3}{2a-5}$ là số nguyên.

b) $\frac{3}{7-3a}$ là số tự nhiên.

EM CÓ BIẾT ?

$$\frac{a}{b}$$

Trong toán học, số hữu tỉ là thương của một phép chia hay là một số được viết dưới dạng một phân số $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên (b khác 0). Mỗi số nguyên đều là một số hữu tỉ với b = 1.

Tập hợp số hữu tỉ được kí hiệu là **Q** (hay $\mathbb{Q}$), trong đó Q chữ cái đầu của từ **quoziente** (tiếng Ý, nghĩa là thương).

CHỦ ĐỀ 2

CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ HỮU TỈ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

Giá trị tuyệt đối của x được kí hiệu là $|x|$.

$-x$ là số đối của x.

$|x|$ là khoảng cách từ điểm x tới điểm 0.

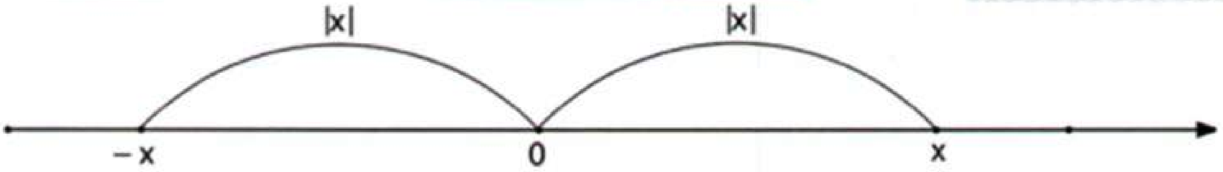
$\forall x \in \mathbf{Q}$:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

$|x| \geq 0$

$|x| = |-x|$

$|x| \geq x$



2. PHÉP TÍNH CỘNG, TRỪ, NHÂN VÀ CHIA CÁC SỐ HỮU TỈ

Nếu $x, y \in \mathbf{Q}$ thì $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{d}$ với $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ và $b, d \neq 0$.

Số hữu tỉ x, y

Cộng: $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Nhân: $x.y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Trừ: $x - y = x + (-y)$

Chia: $x : y = x.\frac{1}{y}$ (với $y \neq 0$)

3. QUY TẮC CHUYỂN VẾ

Phép cộng và phép nhân số hữu tỉ có các tính chất của phép cộng, phép nhân phân số.

chuyển vế đổi dấu

$x + y = z \qquad x = z - y$

HỎI ĐÁP NHANH

1. Đúng điền Đ, sai điền S:

Khẳng định	Đ/S
a) $x<0 \Rightarrow \|x\|<x$	
b) $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x}<x$	
c) $-x$ là số âm	
d) $x<0 \Rightarrow \|x\|=-x$	

2. Cho $a = -x + y - z$.
Với $x = 1$, $y = 2$ và $z = 3$ thì $|a|$ bằng

(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Điền số thích hợp vào ô trống:

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...	...

- Chìa khoá: Từ ô thứ ba, số cần điền là tổng của các số thuộc hai ô liền trước.
- Ví dụ: Số ở ô thứ ba là tổng của hai số ở ô thứ nhất và ô thứ hai $\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}=0$.

Giải

Số ở ô thứ ba: $\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}=0$.

Số ở ô thứ tư: $\frac{-1}{2}+0=-\frac{1}{2}=-0,5$.

Cứ tiếp tục như vậy ta có:

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	−0,5	−0,5	−1	−1,5	−2,5	−4	−6,5

Ví dụ 2

Thực hiện phép tính:

a) $A=\frac{-90}{189}+\frac{45}{84}-\frac{75}{126}$

b) $B=11\frac{7}{21}+8\frac{16}{24}-10\frac{21}{35}$

c) $C=\frac{37}{43}.\frac{17}{29}-\frac{21}{41}.\frac{1}{2}+\frac{9}{58}:1\frac{6}{37}-\frac{6}{29}:1\frac{20}{21}$

Khi thực hiện các phép tính với số hữu tỉ, lưu ý:
- Rút gọn để quy đồng mẫu số dễ hơn.
- Tách hỗn số thành phần nguyên và phân số (nhỏ hơn đơn vị).
- Nhóm các số hạng một cách thích hợp.
- Sử dụng tính chất phân phối giữa phép nhân và phép cộng.

Giải

a) $A = \frac{-10}{21} + \frac{15}{28} - \frac{25}{42} = \frac{-40+45-50}{84}$

$= \frac{-45}{84} = -\frac{15}{28}$.

b) $B = 11\frac{1}{3} + 8\frac{2}{3} - 10\frac{3}{5}$

$= (11+8-10) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)$

$= 9 + \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 9 + \frac{2}{5} = 9\frac{2}{5}$.

c) $C = \frac{37}{43}.\frac{17}{29} - \frac{21}{41}.\frac{1}{2} + \frac{9}{58}.\frac{37}{43} - \frac{6}{29}.\frac{21}{41}$

$= \left(\frac{37}{43}.\frac{17}{29} + \frac{9}{58}.\frac{37}{43}\right) + \left(-\frac{21}{41}.\frac{1}{2} - \frac{6}{29}.\frac{21}{41}\right)$

$= \frac{37}{43}.\left(\frac{17}{29} + \frac{9}{58}\right) - \frac{21}{41}.\left(\frac{1}{2} + \frac{6}{29}\right)$

$= \frac{37}{43}.\frac{43}{58} - \frac{21}{41}.\frac{41}{58} = \frac{37}{58} - \frac{21}{58} = \frac{16}{58} = \frac{8}{29}$.

Ví dụ 3

Điền tiếp vào các ô còn trống của hai hình KIM TỰ THÁP, biết chìa khoá ở hàng cuối.

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

100			
10			
$-0,1$			
0,01			

x+y	
x	y

x.y	
x	y

Giải

$-\frac{1}{3}$			
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		
0	$-\frac{1}{6}$	0	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

100			
10	10		
$-0,1$	-100	$-0,1$	
0,01	-10	10	$-0,01$

Ví dụ 4

Cho $A = |x| + x$.

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A biết $x \in \left\{\frac{-1}{2}; \frac{-1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

d) Tìm x biết giá trị của A bằng –0,4; 0; $\frac{1}{3}$.

Giải

a) Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1:

$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow A = x + x = 2x$.

Trường hợp 2:

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow A = -x + x = 0$.

Vậy: $A = 2x$, nếu $x \geq 0$ và $A = 0$, nếu $x < 0$.

b) *Cách 1*: Lập bảng

x	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\lvert x\rvert$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$A=\lvert x\rvert+x$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	1

- Với $x<0$ thì chỉ thay $|x|=-x$.
- Không được thay các số x không nằm trong dấu giá trị tuyệt đối bằng $-x$.

Cách 2:

(Dựa vào kết quả câu a)

- $x\in\left\{\frac{-1}{3};\frac{-1}{2};0\right\}\Rightarrow x\le 0\Rightarrow A=0$
- $x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow x>0\Rightarrow A=2x$

Vậy: nếu $x\le 0$ thì $A=0$, nếu $x=\frac{1}{3}$ thì $A=\frac{2}{3}$ và nếu $x=\frac{1}{2}$ thì $A=1$.

c) Theo câu a) nếu $x\ge 0$ thì $A=2x\ge 0$ và nếu $x<0$ thì $A=0\Rightarrow \min A=0\Leftrightarrow x\le 0$.

Nếu $A\ge 0$ và $A=0$ tại $x=x_0$ thì $\min A=0$ khi $x=x_0$.

d) • Trường hợp $A=-0,4$. Theo câu c) thì $\min A=0\Rightarrow$ giá trị $A=-0,4$ không tồn tại.

Vậy nếu $A=-0,4$ thì $x\in\varnothing$.

• Trường hợp $A=0$. Theo câu c) thì $x\le 0$.

• Trường hợp $A=\frac{1}{3}$ thì $2x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$.

Ví dụ 5

Tìm giá trị lớn nhất của $B=0,5-|x-4,5|$.

Giải

Vì $|x-4,5|\ge 0$ nên $0,5-|x-4,5|\le 0,5$.

Ta có: $B\le 0,5$ và $B=0,5$

$\Leftrightarrow x=4,5$.

Vậy $\max B=0,5$ tại $x=4,5$.

Nếu $A\le m$ (hằng số); $A=m\Leftrightarrow x=x_0$ thì $\max A=m\Leftrightarrow x=x_0$.

Ví dụ 6*

So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $\frac{-13}{15}$ và $\frac{11}{-13}$;   b) $\frac{84}{-83}$ và $\frac{-337}{331}$.

> So sánh số hữu tỉ âm qua việc so sánh giá trị tuyệt đối: số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì nhỏ hơn.

Giải

a) Đặt $x=\left|\frac{-13}{15}\right|=\frac{13}{15}$ và $y=\left|\frac{11}{-13}\right|=\frac{11}{13}$.

Có $x=\frac{13}{15}=\frac{169}{195}$ và $y=\frac{11}{13}=\frac{165}{195}$ mà

$\frac{169}{195}>\frac{165}{195}\Rightarrow x>y\Rightarrow\frac{-13}{15}<\frac{11}{-13}$.

b) Đặt $x=\left|\frac{84}{-83}\right|=\frac{84}{83}$ và $y=\left|\frac{-337}{331}\right|=\frac{337}{331}$.

Có $x=\frac{84}{83}=1\frac{1}{83}=1\frac{6}{498}$ và

$y=\frac{337}{331}=1\frac{6}{331}$ mà $1\frac{6}{498}<1\frac{6}{331}$

$\Rightarrow x<y\Rightarrow\frac{84}{-83}>\frac{-337}{331}$.

Ví dụ 7*

Tìm x, biết:

a) $|2x+1|+|x+8|=4x$;

b) $|x^2-2x|=x$;

c) $|x|=-x-5$

> Chú ý phát hiện $x\geq 0$ ở các câu a và b.

Giải

a) Có $|2x+1|\geq 0$ và $|x+8|\geq 0$ nên

$|2x+1|+|x+8|\geq 0$ suy ra $4x\geq 0\Rightarrow x\geq 0$.

Với $x\geq 0$ thì $|2x+1|=2x+1; |x+8|=x+8$.

Vậy $|2x+1|+|x+8|=4x$

$\Rightarrow(2x+1)+(x+8)=4x$

$\Rightarrow x=9$.

Vậy $x=9>0$ (thoả mãn).

b) Ta có: $|x^2-2x|\geq 0\Rightarrow x\geq 0$.

Suy ra: $|x^2-2x|=|x.(x-2)|=x|x-2|$

Vậy

$x|x-2|=x\Leftrightarrow x(|x-2|-1)=0\Leftrightarrow x\in\{0;1;3\}$.

c) Ta có: $|x|\geq 0$, mà $|x|=-x-5$

nên $-x-5\geq 0\Rightarrow x\leq -5\Rightarrow |x|=-x$.

Vậy $|x|=-x-5\Leftrightarrow -x=-x-5\Rightarrow -5=0$!

Vô lí, vậy $x\in\varnothing$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

2.1. Điền số thích hợp vào ô trống

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	...	...	...	...	...	...	...	...

• Chìa khoá: Từ ô thứ ba, mỗi số là hiệu của hai số thuộc hai ô liền trước.

• Ví dụ: Số ở ô thứ ba là hiệu của hai số ở ô thứ nhất và ô thứ hai $\frac{1}{2}-\frac{-1}{2}=1$.

2.2. Tính

$$A=\left(1+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)-\left(1+\frac{5}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}-2\right);$$

$$B=\left(5-\frac{3}{2}-\frac{1}{8}\right):\left(2-\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\right);$$

$$C=3-\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}.$$

2.3. Tính giá trị

a) $A=|x+y+z|$ với $x=-1$, $y=2$ và $z=4$;

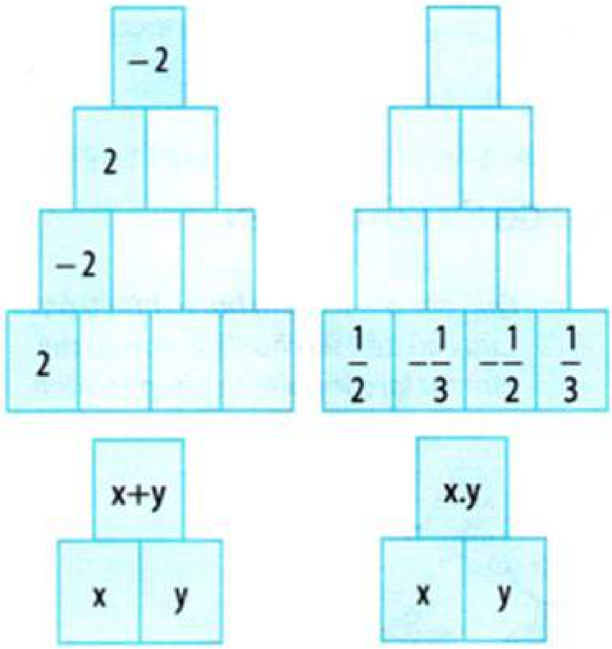
b) $B=|x|+|x-1|+|2-x|$ với $x=-\frac{1}{3}$;

c) $C=4x^2-3x-2$ với $|x|=1$.

2.4. *Kim tự tháp*

Các công trình có hình kim tự tháp được xây dựng ở nhiều nền văn minh khác nhau. Các kim tự tháp nổi tiếng nhất là các kim tự tháp Ai Cập – chúng được xây dựng bằng gạch hay đá. Ngành khảo cổ học cho rằng chúng được xây lên để làm lăng mộ cho các pharaon (tiếng Ả Rập chỉ tước hiệu của các nhà vua Ai Cập cổ đại).

Điền số thích hợp vào ô trống của hai kim tự tháp, biết chìa khoá ở dưới.



NÂNG CAO

2.5. Thực hiện các phép tính sau

$$A=\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}-1}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}-2};$$

$$B=\frac{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}};\qquad C=1-\frac{2}{3-\frac{4}{5-\frac{6}{7}}};$$

$$D=\frac{\frac{5}{7}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}{\frac{3}{7}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}:\frac{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}};$$

$$E=\frac{15}{11\cdot14}+\frac{15}{14\cdot17}+\frac{15}{17\cdot20}+......+\frac{15}{68\cdot71}.$$

2.6. Bạn BEE loay hoay với bài toán, mà không làm được. Bạn hãy giúp bạn BEE nhé.

"Nếu cho biết $3x+2=2014\frac{1}{2}$. Hỏi có tính được $6x+5$ không ?".

2.7. Cho x và y $\in \mathbb{Q}$.

Chứng minh: $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$

và $\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

2.8. Cho dãy số viết theo quy luật:

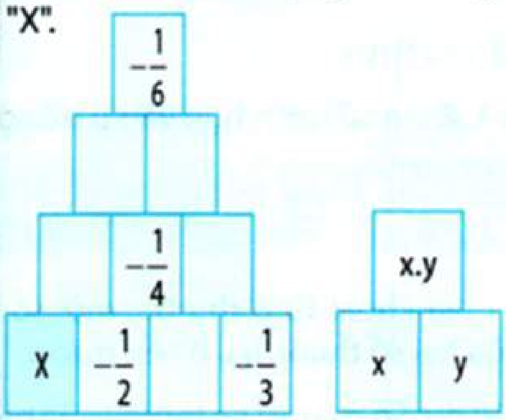
$-1; -2; -\frac{1}{2}; -3; -1; -\frac{1}{3}; -4; -1\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}; -5; \ldots$

a) Tìm quy luật của dãy số.

b) Số hạng thứ 124 của dãy là số nào ?

2.9. *Tìm kho báu trong Kim tự tháp*

Mật mã mở cửa hầm được giấu trong ô có dấu "X".

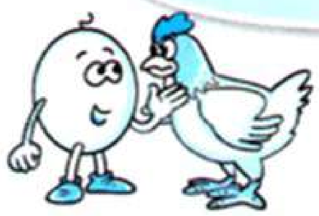


EM CÓ BIẾT ?

SO SÁNH CÁC SỐ HỮU TỈ ÂM NHƯ THẾ NÀO?

Bạn EGG hỏi bạn CHICKEN

Qua các bài so sánh hai số hữu tỉ âm của chủ đề 1 và chủ đề 2, bạn có thể tóm tắt lại các phương pháp so sánh các số hữu tỉ âm được không ?



Đưa việc so sánh hai số hữu tỉ âm về so sánh hai số hữu tỉ dương bằng cách so sánh các giá trị tuyệt đối của chúng. Trong hai số hữu tỉ âm, số nào có giá trị tuyệt đối lớn hơn thì số đó nhỏ hơn.

Ý kiến của bạn CHICKEN

Một số phương pháp so sánh các số hữu tỉ dương (so sánh các phân số tối giản)

1. Phương pháp quy đồng mẫu số hoặc tử số.
2. Phương pháp nhân chéo.
3. Phương pháp chọn phân số trung gian (phân số trung gian là phân số có tử của phân số này và mẫu số của phân số kia).
4. Phương pháp so sánh phần hơn hoặc phần bù với 1.
5. Phương pháp cùng cộng tử và mẫu với một số:

Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ và ngược lại

nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$.

6. Phương pháp tạo ra một phân số mới nằm giữa hai phân số:

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

ĐỐ VUI

Có một sợi dây dài 100m, cần cắt thành 100 đoạn, mỗi đoạn 1m. Hỏi nếu thời gian để cắt 1 đoạn là 5 giây, thì cắt liên tục 100 đoạn cần bao nhiêu thời gian ?

CHỦ ĐỀ 3

LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

LUỸ THỪA

• Luỹ thừa bậc n của số hữu tỉ x.
• x luỹ thừa bậc n (x mũ n).

$x \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}^*$

số mũ

$$x^n = \underbrace{x.x\ldots x}_{n \text{ thừa số } x}$$

cơ số

$x^0 = 1, x \neq 0$

CÁC PHÉP TÍNH VỀ LUỸ THỪA

Phép tính	x và y $\in \mathbf{Q}$, m và n $\in \mathbf{N}^*$, m $\geq$ n	Điều kiện
Tích hai luỹ thừa cùng cơ số	$x^m . x^n = x^{m+n}$	
Thương hai luỹ thừa cùng cơ số	$x^m : x^n = \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$x \neq 0$
Luỹ thừa của một tích	$(x.y)^n = x^n.y^n$	
Luỹ thừa của một thương	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$	$y \neq 0$
Luỹ thừa của một luỹ thừa	$(x^m)^n = x^{m.n}$	
Luỹ thừa với số mũ nguyên âm	$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$x \neq 0$

HỎI ĐÁP NHANH

1. Đúng điền Đ, sai điền S

Khẳng định	Đ / S
a) $x.(-x) < 0$	
b) Một nửa của 2^{98} là 1^{49}	
c) $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 4^8$	
d) $(-1)^{2n-1} > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}^*$	

2. Ghép mỗi phép tính ở dòng I với một số hữu tỉ ở dòng II để được một khẳng định đúng:

	A	B	C
Dòng I	$\left(-\frac{1}{2}\right)^3$	-2^3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Dòng II	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	2^{-3}	$-0,125$	$(-2)^3$
	1	2	3	4	5

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho $x \in \left\{-2; -0,5; -\frac{1}{3}; 0; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.

Tính: $x^{-3}, x^{-1}, x^0, x^2, x^3$.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \ (x \neq 0) \text{ và}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0).$$

Luỹ thừa bậc lẻ của một số âm là một số âm.
Luỹ thừa bậc chẵn của một số âm là một số dương.

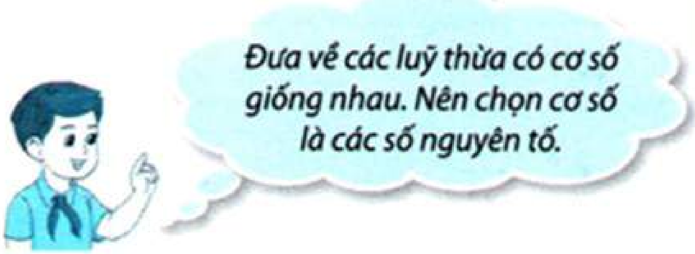
Giải

x	-2	$-0,5$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
x^{-3}	$-\frac{1}{8}$	-8	-27	Không xác định	1	8	27
x^{-1}	$-\frac{1}{2}$	-2	-3	Không xác định	1	2	3
x^0	1	1	1	Không xác định	1	1	1
x^2	4	0,25	$\frac{1}{9}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
x^3	-8	$-0,125$	$-\frac{1}{27}$	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$

Ví dụ 2

Tính:

a) $A = \dfrac{2^3.3^5.5^7}{2^5.3^7.5^5}$; b) $B = \dfrac{2^3.(-5)^3.(-7)^2}{(-14)^2.10^2}$.



Giải

a) $A = \dfrac{2^3.3^5.5^7}{2^5.3^7.5^5} = \dfrac{5^2}{2^2.3^2} = \dfrac{25}{36}$.

b) $B = \dfrac{2^3.(-5)^3.(-7)^2}{(-14)^2.10^2} = \dfrac{-2^3.5^3.7^2}{(-2.7)^2.(2.5)^2}$

$= \dfrac{-2^3.5^3.7^2}{2^2.7^2.2^2.5^2} = \dfrac{-2^3.5^3.7^2}{2^4.5^2.7^2} = \dfrac{-5}{2} = -2,5.$

Ví dụ 3

Tìm x:

a) $(0,2-x)^2 = 0$; b) $(1-2x)^3 = -125$;

c) $(0,7)^3.x = (0,49)^2$; d) $x : (-0,3)^3 = (0,3)^2$.

Đưa các luỹ thừa về cùng cơ số hoặc cùng số mũ.

$a^n = 0 \Rightarrow a = 0\ (\forall n \in \mathbf{N}^*)$.

Giải

a) $(0,2-x)^2 = 0 \Leftrightarrow 0,2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0,2$.

b) $(1-2x)^3 = -125 \Leftrightarrow (1-2x)^3 = (-5)^3$
$\Leftrightarrow 1 - 2x = -5 \Leftrightarrow x = 3$.

c) $(0,7)^3.x = (0,49)^2 \Leftrightarrow (0,7)^3.x = (0,7)^4$
$\Leftrightarrow x = (0,7)^4 : (0,7)^3 = 0,7$.

d) $x : (-0,3)^3 = (0,3)^2 \Leftrightarrow x = -(0,3)^3 . (0,3)^2$
$\Leftrightarrow x = -(0,3)^5 = -0,00243 = -2,43.10^{-3}$.

Ví dụ 4

Số nào lớn hơn?

a) 2^8 và 4^4; b) 3^{20} và 2^{30};

c) 81^3 và 64^4; d) $(-77)^{77}$ và $(-88)^{66}$.

Nếu a, b và $n \in \mathbf{N}^*$

$a^n \geq b^n \Leftrightarrow a \geq b$.

Cách khác: $2^8 = 2^{2.4} = (2^2)^4 = 4^4$.

Giải

a) $2^8 = 256$ và $4^4 = 256 \Rightarrow 2^8 = 4^4$.

b) $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$ và $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$
$\Rightarrow 9^{10} > 8^{10} \Rightarrow 3^{20} > 2^{30}$.

c) $81^3 = 3^{12} < 4^{12} = (4^3)^4 = 64^4$.

d) $(-77)^{77} < 0$ và $(-88)^{66} > 0$
$\Rightarrow (-77)^{77} < (-88)^{66}$

Ví dụ 5

Đúng hay sai ?

Bạn BEE đưa ra cách tìm số tự nhiên n biết $a^{3n} = a^9$, như sau:

$a^{3n} = a^9 \Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow n = 3$?

Lời giải trên chỉ đúng khi $a \notin \{-1; 0; 1\}$.

Như vậy cách giải của bạn BEE chưa đúng.

Giải

Xét các trường hợp của cơ số a:

- Nếu $a = 0$, thì $a^{3n} = 0^{3n} = 0\ (\forall n \in \mathbf{N}^*)$ và $0^9 = 0 \Rightarrow$ n là số tự nhiên khác 0.
- Nếu $a = -1$, thì $a^{3n} = (-1)^{3n} = (-1)^n$ mà $a^9 = (-1)^9 = -1 \Rightarrow$ n là số tự nhiên lẻ.
- Nếu $a = 1$, thì $a^{3n} = 1^{3n} = 1\ (\forall n \in \mathbf{N})$ và $a^9 = 1^9 = 1 \Rightarrow$ n là số tự nhiên tuỳ ý.
- Nếu $a \notin \{-1; 0; 1\}$, thì $a^{3n} = a^9 \Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow n = 3$.

Vậy: $a = -1$ thì n là số tự nhiên lẻ, $a \in \{0; 1\}$ thì n là số tự nhiên bất kì,
$a \notin \{-1; 0; 1\}$ thì $n = 3$.

Ví dụ 6*

HÌNH VUÔNG LUỸ THỪA

Viết các luỹ thừa cùng cơ số vào một hình vuông kích thước 3×3 (gồm 9 ô vuông nhỏ) sao cho tích các luỹ thừa trong mỗi hàng, trong mỗi cột và trong mỗi đường chéo đều bằng nhau. Hình vuông đó được gọi là HÌNH VUÔNG LUỸ THỪA. Hình vẽ bên cho ta một ví dụ về hình vuông luỹ thừa.

2^1	2^8	2^3
2^6	2^4	2^2
2^5	2^0	2^7

Bạn BEE đố các bạn

Điền các luỹ thừa của 2 vào các ô vuông còn khuyết để được một *"Hình vuông luỹ thừa"* trong các hình vuông ở hình bên.

2^3		
	2^4	
	2^6	2^5

Hình A

	2^9	
	2^5	
2^6	2^1	

Hình B

Hình A có tích các luỹ thừa ở đường chéo: $2^3.2^4.2^5 = 2^{12}$.

2^3	2^2	2^7
2^8	2^4	2^0
2^1	2^6	2^5

Hình vuông A

Hình B có tích các luỹ thừa ở cột thứ hai: $2^9.2^5.2^1 = 2^{15}$.

Giải

Kí hiệu các luỹ thừa còn thiếu trong các ô của hình A là x, y, z, u và v; của hình B là a, b, c, d, và g.

2^3	x	y
z	2^4	u
v	2^6	2^5

a	2^9	b
c	2^5	d
2^6	2^1	g

Với hình vuông A

Tích các luỹ thừa ở đường chéo $2^3.2^4.2^5 = 2^{12}$.

Ta có:

$x = 2^{12} : (2^4.2^6) = 2^2$, $y = 2^{12} : (2^3.2^2) = 2^7$;

$v = 2^{12} : (2^7.2^4) = 2^1$, $z = 2^{12} : (2^1.2^3) = 2^8$;

$u = 2^{12} : (2^7.2^5) = 2^0$.

Kết quả sau khi điền số như hình bên.

Với hình vuông B

Tích các luỹ thừa ở cột thứ hai $2^9.2^5.2^1 = 2^{15}$.

Tương tự, ta có:

$b = 2^4$, $a = 2^2$, $c = 2^7$, $d = 2^3$, $g = 2^8$.

Kết quả sau khi điền số như hình dưới.

2^2	2^9	2^4
2^7	2^5	2^3
2^6	2^1	2^8

Hình vuông B

Ví dụ 7*

Số hạng thứ năm của dãy sau là số nào?

$$\frac{1}{a^2}; -\frac{2}{a^3}; \frac{6}{a^4}; -\frac{24}{a^5}; ...$$

$(-1)^n$ mang dấu "–" nếu n lẻ; mang dấu "+" nếu n chẵn.

Giải

Ta có:

Số hạng thứ hai :

$$-\frac{2}{a^3} = (-1)^{2-1} \cdot \frac{1 \cdot 2}{a^3} = (-1)^1 \cdot \frac{2!}{a^3};$$

Số hạng thứ ba:

$$\frac{6}{a^4} = (-1)^{3-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{a^4} = (-1)^2 \cdot \frac{3!}{a^4};$$

Số hạng thứ tư:

$$-\frac{24}{a^5} = (-1)^{4-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{a^5} = (-1)^3 \cdot \frac{4!}{a^5};$$

Vậy, số hạng thứ năm là:

$$(-1)^{5-1} \cdot \frac{5!}{a^{5+1}} = \frac{120}{a^6}.$$

Tương tự, suy ra số hạng thứ n:

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n}{a^{n+1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

BÀI TẬP

CƠ BẢN

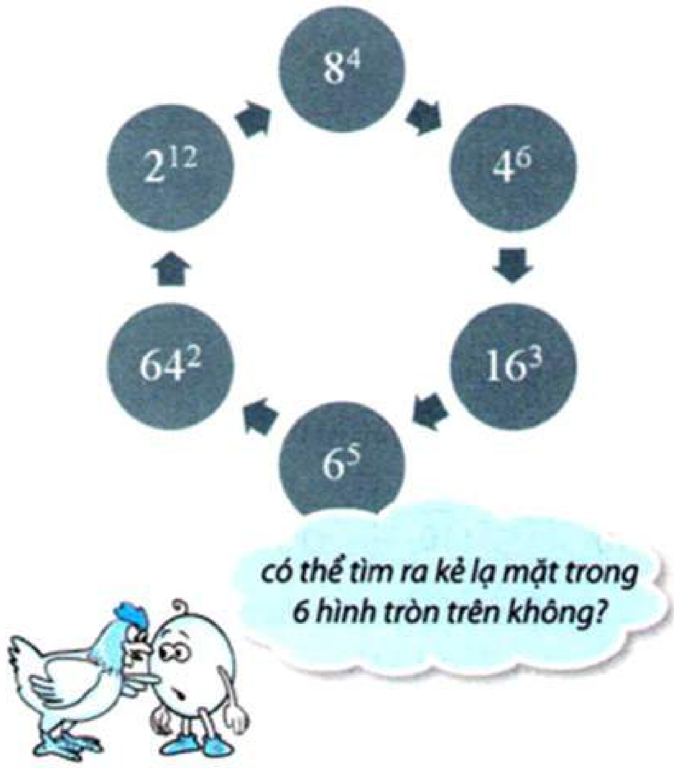
3.1. Điền số thích hợp vào ô trống:

2^0	2^1	...	...	...	...	...	...	...	...

• Chìa khoá: Từ ô thứ ba, số cần điền là tích của hai số thuộc hai ô liền trước.

Ví dụ: Số ở ô thứ ba là tích của hai số ở ô thứ nhất và ô thứ hai $2^0 . 2^1 = 2^{0+1} = 2^1$.

3.2. *Tìm kẻ lạ mặt:* Bạn CHICKEN hỏi bạn EGG là



3.3. Tính:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3; \left(-\frac{5}{3}\right)^2; \left(-\frac{3}{5}\right)^3; \left(\frac{2}{5}\right)^4; \left(-\frac{6}{11}\right)^3$$

3.4. Viết các số hữu tỉ sau thành một luỹ thừa của 10:

$\frac{10^5}{10^4};\frac{10^4}{10^5};\frac{10^{-1}}{10^2};\frac{10^2}{10^{-1}};\frac{10^3}{10^{-3}};\frac{10^{-3}}{10^3};\frac{10^{-2}}{10^{-4}};\frac{10^{-4}}{10^{-2}}$.

3.5. Không sử dụng các loại máy tính, bạn hãy tính:

a) 2^{12} biết $2^{10} = 1024$;

b) $(-5)^5$ biết $5^4 = 625$;

c) $\frac{1}{3^6}$ biết $3^{-4} = \frac{1}{81}$.

3.6. Kết quả của mỗi phép tính sau là số dương hay số âm?

$A = \frac{-13}{(-3)^4.(-2)^7}$; $B = \frac{-(1,24)^2}{(-22,6)^2.(-1)^{19}}$;

$C = \frac{(-1)^3.(-2)^4.(-3)^5}{(-4)^6.(-5)^7}$;

$D = (-1)^2.(-1)^3.(-1)^4.(-1)^5.(1024 - 2^{10})^2$.

3.7. Rút gọn các phép tính sau:

a) $A = \frac{4^5.9^4 - 2.6^9}{2^{10}.3^8 + 6^8.20}$;

b) $B = \frac{2.8^4.27^2 + 4.6^9}{2^7.6^7 + 2^7.40.9^4}$;

c) $C = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(-\frac{3}{4}\right)^2.(-1)^5}{\left(\frac{2}{5}\right)^2.\left(-\frac{5}{12}\right)^3}$.

3.8. Sử dụng các phép tính của luỹ thừa để tìm x.

a) $\left(\frac{1}{3} - x\right)^2 = 0$; b) $(1 - 3x)^3 = -8$;

c) $x^5 : 9 = 27$; d) $4.x^8 = 1024$;

e) $x.(0,9)^3 = (0,81)^2$; g) $(0,03)^3 : x = -(0,03)^2$.

3.9. Số nào lớn hơn trong mỗi cặp số sau?

a) 243^3 và 125^5; b) $(-3)^2$ và $(-2)^3$;

c) $(-2)^1$ và $(-1)^2$;

d) $((-0,1)^2)^3$ và $((-0,1)^3)^2$.

NÂNG CAO

3.10. Rút gọn các phép tính sau và đưa về thành một luỹ thừa của 10:

a) $(0,01)^3$; b) $\left(\frac{1}{0,0001}\right)^2$;

c) $\left(\frac{1}{0,1}\right)^4 : \left(\frac{1}{100}\right)^2$.

3.11. Số nào khác loại?

$\frac{1}{10^n}; 10^{-n}; \left(\frac{1}{10^{-1}}\right)^n; \frac{1^n}{10^n}; (10^n)^{-1}; (10^{-1})^n$

3.12. Tìm số nguyên dương x, biết $2.2^2.2^3 \ldots 2^x = 1024$.

3.13. Tìm x, biết:

a) $x : (0,03)^3 = -(0,03)^2$;

b) $(0,000027)^5 : x = (-0,03)^{12}$.

3.14. Hai bạn EGG và CHICKEN loay hoay tìm cách điền các luỹ thừa cơ số 2 vào các ô trống của một hình vuông bên để được một "hình vuông luỹ thừa", nhưng mãi không điền được. Bạn có giúp được các bạn đó không?

	2^0	
2^{12}		2^4

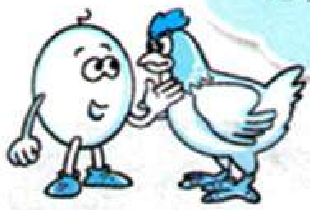
EM CÓ BIẾT?

SUY NGẪM Bạn hiểu gì về số
9,460800000000**e** + 15 ?
GIẢI THÍCH *Cách viết các số cực lớn*

1. TỪ SỐ CỰC LỚN ...

Bạn EGG đố bạn CHICKEN

Tính được quãng đường ánh sáng đi trong 1 giờ, 1 ngày đêm, 1 năm và 1000 năm, biết vận tốc ánh sáng gần bằng 300000 km/s.



LỜI GIẢI CỦA BẠN CHICKEN

Sử dụng máy tính cầm tay, ta tính được:

Thời gian	Thực hiện	Kết quả phép tính (km)
1 giờ	300000×3600	$1\,080\,000\,000 = 1,08.10^{9}$
1 ngày đêm	1080000000×24	$25\,920\,000\,000 = 2,592.10^{10}$
1 năm	25920000000×365	$9\,460\,800\,000\,000 = 9,460\,8.10^{12}$
1000 năm	$9\,460\,800\,000\,000 \times 1000$	**$9,4608.10^{15}$ = 9,460 800 000 000e + 15**

2. ... ĐẾN SỐ CỰC NHỎ

Bạn CHICKEN hỏi bạn EGG:

Biết một tế bào máu (hồng cầu, hay hồng huyết cầu) có chức năng hô hấp chuyên chở ô xi từ phổi đến các mô. Dưới kính hiển vi điện tử, hồng cầu được thấy như có hình đĩa lõm hai mặt. Nếu coi một hồng cầu như một hình trụ dẹt thì đáy sẽ là hình tròn có bán kính 0,000007 m và chiều cao vào khoảng 0,000003m. Thể tích của một hồng cầu máu là bao nhiêu ?

LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

Thể tích của một hồng cầu máu như sau:
$3,14 \times 0,000007 \times 0,000007 \times 0,000003 = 0,000\,000\,000\,000\,000\,461\,58(m^3)$.
Sử dụng máy tính cầm tay, ta có kết quả là

4,6158000000000e −16.

SUY NGẪM: Phải chăng đây là cách viết số cực nhỏ: **4,6158000000000e −16** ?

GIẢI THÍCH

Đúng vậy: 4,6158000000000e −16 = 0,000 000 000 000 000 461 58

$= 4,6158.\ 10^{-16}$

Tương tự cách viết số cực lớn, ta có cách viết các số cực nhỏ.

Hai cách biểu thị chỉ khác nhau giữa dấu " + " và dấu " − " đằng sau "chữ cái e".

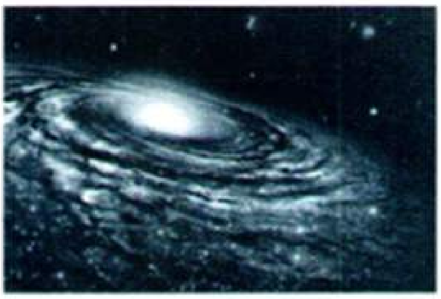
Thể tích của một hồng cầu máu:

4,6158000000000**e** −16 = $4,6158.\ 10^{-16}$ (m^3).

Quãng đường ánh sáng đi được trong 1000 năm:

9,460800000000**e** + 15 = $9,4608\ .10^{15}$ (km).

3. ... LUỸ THỪA CỦA 10



Hình ảnh Ngân Hà

$$\underbrace{1000....0}_{n} = 10^{n} \text{ và } 0,\underbrace{000...0}_{n-1}1 = \frac{1}{\underbrace{1000...0}_{n}} = \frac{1}{10^{n}} = 10^{-n}.$$

10^{18} m	Đường kính của Ngân Hà	10^{0} m	
10^{17} m	Bề dày của Ngân Hà	10^{-1} m	deci: 1dm = 10^{-1} m
10^{12} m	tera: 1 Tm = 10^{12} m	10^{-2} m	centi: 1cm = 10^{-2} m
10^{9} m	giga: 1 Gm = 10^{9} m	10^{-3} m	milli: 1mm = 10^{-3} m
10^{8} m	Gần bằng 1 đơn vị vũ trụ (1 UA)	10^{-5} m	Đường kính của một sợi tóc
10^{6} m	mega: 1 Mm = 10^{6} m	10^{-6} m	micro: 1µm = 10^{-6} m
10^{3} m	kilo: 1 km = 10^{3} m	10^{-7} m	Kích thước phân tử ADN
10^{2} m	hecto: 1 hm = 10^{2} m		
10^{1} m	deca: 1 dam = 10^{1} m	10^{-9} m	nano: 1nm = 10^{-9} m

ĐỐ VUI

1. LẠ KHÔNG ?

$\mathbf{69^2 + 72^2 = 96^2 + 27^2}$

Bạn có tìm được vài số có tính chất như vậy không ?

2. Với 8 chiếc đũa bằng nhau, không được bẻ gãy ta xếp được nhiều nhất bao nhiêu hình vuông ?

3. Bạn có thể đổi vị trí **chỉ** một chữ số để phép tính **62 − 63 = 1** thành đúng được không?

CHỦ ĐỀ 4 TỈ LỆ THỨC. DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

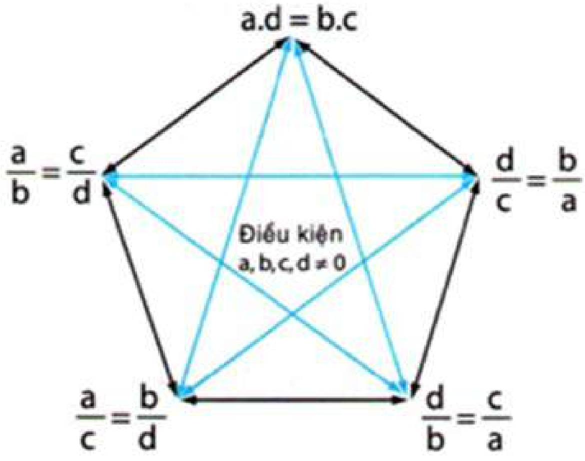
TỈ LỆ THỨC

Thương trong phép chia số a cho số b ($b \neq 0$) gọi là tỉ số của a và b.

Tỉ lệ thức là đẳng thức giữa hai tỉ số

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a:b=c:d$$

a và d được gọi là ngoại tỉ, b và c được gọi là trung tỉ.



Các số hạng của tỉ số là các số hữu tỉ.

DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z} \Leftrightarrow a:b:c=x:y:z$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{a-b+c}{x-y+z}$$

a, b, c tỉ lệ với x, y, z

HỎI ĐÁP NHANH

1. Đúng điền Đ, sai điền S

Khẳng định	Đ/S
a) $\frac{0,3}{1,5}=\frac{1}{5}$ là một đẳng thức giữa hai phân số.	
b) $0,3:1,5=1:5$ là một tỉ lệ thức.	

Khẳng định	Đ/S
c) $\frac{5}{0,3}=\frac{1}{1,5}$ là một tỉ lệ thức.	
d) $\frac{0,3}{1,5}=\frac{1}{5}=\frac{1\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}}$ là một dãy tỉ số bằng nhau.	

2. Điền số thích hợp vào chỗ chấm (...)

a) $\dfrac{\cdots}{3}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{5}{\cdots}$; b) $\dfrac{0,1}{\cdots}=\dfrac{\cdots}{14}=\dfrac{0,3}{6}$.

3. Chọn phương án đúng.

Số không thể thêm vào tập hợp $M=\{3;6;9\}$ để tạo ra một tỉ lệ thức:

(A) 2; (B) 4,5; (C) 12; (D) 18.

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Thay tỉ số giữa hai số 2,25 và $2\dfrac{5}{8}$ bằng tỉ số giữa các số nguyên.

Giải

Cách 1	$2,25:2\dfrac{5}{8}=2\dfrac{1}{4}:2\dfrac{5}{8}=\dfrac{9}{4}:\dfrac{21}{8}=\dfrac{9}{4}.\dfrac{8}{21}=\dfrac{6}{7}=6:7$	Đổi ra phân số, rồi thay phép chia thành phép nhân với số nghịch đảo.
Cách 2	$2,25:2\dfrac{5}{8}=\dfrac{9}{4}:\dfrac{21}{8}=\left(\dfrac{9}{4}.\dfrac{8}{3}\right):\left(\dfrac{21}{8}.\dfrac{8}{3}\right)=6:7$	$x:y=\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\left(\dfrac{a}{b}.\dfrac{m}{n}\right):\left(\dfrac{c}{d}.\dfrac{m}{n}\right)$ $m=BCNN(b,d)$ và $n=UCLN(a,c)$.
Cách 3	$2,25:2\dfrac{5}{8}=2,25:2,625=2250:2625=6:7$	Đổi ra số thập phân nếu có thể.

Ví dụ 2

Bạn BEE đưa ra cách kiểm tra bốn số

$$-0,2; 0,1; 0,2; -0,1$$

có tạo thành một tỉ lệ thức như sau:

Bước 1. Xếp bốn số đã cho theo trình tự từ nhỏ đến lớn:

$$-0,2<-0,1<0,1<0,2.$$

Bước 2. So sánh tích hai số nhỏ nhất và lớn nhất với tích hai số ở giữa:

$(-0,2).0,2\neq(-0,1).0,1$ [vì $-0,04\neq-0,01$].

Bước 3. Vậy kết luận bốn số trên không lập thành một tỉ lệ thức.

Bạn BEE làm có đúng không ?

Giải

Chỗ sai: Từ $(-0,2).0,2\neq(-0,1).0,1$ đã kết luận ngay bốn số trên không lập thành một tỉ lệ thức.

Sửa: $(-0,2).0,1=(-0,1).0,2$ $(=-0,02)$.

Do đó bốn số $-0,2$; $0,1$; $0,2$; $-0,1$ có lập thành một tỉ lệ thức.

Để khẳng định bốn số a, b, c và d không lập được một tỉ lệ thức, phải chỉ ra hết tất cả ba trường hợp: $ab\neq cd$; $ac\neq db$ và $ad\neq bc$.

Ví dụ 3

Tìm x, biết:

a) $7{,}5 : x = 2{,}25 : 4\frac{1}{6}$;

b) $(49x) : 10{,}5 = 3\frac{3}{4} : 3\frac{1}{8}$;

c) $0{,}06 : x = x : 24$.

Cách tìm số hạng chưa biết của tỉ lệ thức:

- *Nếu số hạng đó là ngoại tỉ, lấy tích các trung tỉ chia cho ngoại tỉ đã biết.*
- *Nếu số hạng đó là trung tỉ, lấy tích các ngoại tỉ chia cho trung tỉ đã biết.*

Giải

a) $x = \dfrac{7{,}5.4\frac{1}{6}}{2{,}25} = \dfrac{15}{2}.\dfrac{25}{6}.\dfrac{4}{9} = \dfrac{125}{9} = 13\dfrac{8}{9}$.

Lập tích hai số hạng ngoại tỉ, rồi chia cho số hạng trung tỉ đã biết.

b) $(49x) = \dfrac{10{,}5.3\frac{3}{4}}{3\frac{1}{8}} = \dfrac{21}{2}.\dfrac{15}{4}.\dfrac{8}{25} = \dfrac{63}{5}$

$\Rightarrow x = \dfrac{63}{5} : 49 = \dfrac{9}{35}$.

Lập tích hai số hạng trung tỉ, rồi chia cho số hạng ngoại tỉ đã biết.

c) $x . x = 0{,}06 . 24 \Rightarrow x^2 = 1{,}44$

$\Rightarrow |x| = 1{,}2 \Rightarrow x = \pm 1{,}2$.

$x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$.

Ví dụ 4

Tìm x, y, biết:

a) $x : y = 20 : 9$ và $x - y = -22$.

b) $3x = 4y$ và $x + 2y = 35$.

c) $x : 2 = 2y : 3$ và $xy = 27$.

Dãy tỉ số bằng nhau không có tính chất nhân.

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \neq \frac{a.b}{x.y}.$$

Giải

Áp dụng tính chất tỉ lệ thức, ta có :

a) $\dfrac{x}{20} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{x-y}{20-9} = \dfrac{-22}{11} = -2$. Suy ra $x = (-2).20 = -40$; $y = (-2).9 = -18$.

b) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+2y}{4+2.3} = \dfrac{35}{10} = 3{,}5$. Suy ra $x = 3{,}5.4 = 14$; $y = 3{,}5.3 = 10{,}5$.

c) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{2y}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2y}{3}\right)^2$

$= \left(\dfrac{x}{2}\right).\left(\dfrac{2y}{3}\right) = \dfrac{xy}{3} = \dfrac{27}{3} = 9$.

Suy ra $\left|\dfrac{x}{2}\right| = 3 \Rightarrow x \in \{-6; 6\}$.

Vậy $x = -6$; $y = -4{,}5$ và $x = 6$; $y = 4{,}5$.

Ví dụ 5

Tìm số hạng thứ tư để lập thành một tỉ lệ thức với bộ ba số sau:

a) 4; 8 và 16; b) – 3; – 6 và 9;

c) 2^2; 2^4 và 2^6.

Điều kiện để bốn số a, b, c và d lập thành một tỉ lệ thức: Tích hai số này bằng tích hai số kia. Do đó phải xét ba trường hợp xảy ra.

Giải

a) Với $x = \dfrac{4.8}{16} = 2$ ta có $4 : 16 = 2 : 8$;

Với $x = \dfrac{8.16}{4} = 32$ ta có $8 : 4 = 32 : 16$;

Với $x = \dfrac{16.4}{8} = 8$ ta có $16 : 8 = 8 : 4$

Vậy, $x \in \{2; 8; 32\}$.

b) Với $x = \dfrac{(-3).(-6)}{9} = 2$ ta có $(-3) : 9 = 2 : (-6)$

Với $x = \dfrac{(-6).9}{(-3)} = 18$ ta có $(-6) : (-3) = 18 : 9$

Với $x = \dfrac{9.(-3)}{(-6)} = 4{,}5$ ta có $9 : (-6) = 4{,}5 : (-3)$

Vậy, $x \in \{2; 4{,}5; 18\}$.

c) Tương tự ta tìm được

$$x \in \{2^0; 2^4; 2^8\}.$$

Ví dụ 6*

Cho tỉ lệ thức $a : b = c : d$.

Chứng minh tỉ lệ thức $a : (a - b) = c : (c - d)$.

(Giả thiết các tỉ lệ thức đều có nghĩa).

Chứng minh bằng cách sử dụng
- *Định nghĩa,*
- *Tính chất của tỉ lệ thức,*
- *Tính chất dãy tỉ số bằng nhau.*

Có thể có các cách khác.

Giải

Cách 1. Phương pháp nhân chéo

Xét tích: $a(c - d) = ac - ad$ và $(a - b)c = ac - bc$.

Có $ad = bc$ do $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, nên

$a(c - d) = (a - b)c \Rightarrow \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{c}{c-d}$ (đpcm).

Cách 2. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

Hoán vị trung tỉ: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, được $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{a-b}{c-d}$.

Lại hoán vị trung tỉ: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a-b}{c-d}$,

ta được $\dfrac{a}{a-b} = \dfrac{c}{c-d}$ (đpcm).

Cách 3. Phương pháp dùng định nghĩa tỉ lệ thức

Đặt tỉ lệ thức $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$, suy ra $a = bk$ và $c = dk$.

Có $\dfrac{a}{a-b} = \dfrac{bk}{bk-b} = \dfrac{k}{k-1}$, tương tự $\dfrac{c}{c-d} = \dfrac{k}{k-1}$.

Suy ra $\dfrac{a}{a-b} = \dfrac{c}{c-d}\left(= \dfrac{k}{k-1}\right)$ (đpcm).

Cách 4. Phương pháp khác

Hoán vị cả ngoại tỉ và trung tỉ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, được $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$.

Lấy 1 trừ cả hai vế của đẳng thức trên $1-\frac{d}{c} = 1-\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{c-d}{c} = \frac{a-b}{a}$.

Lại hoán vị cả ngoại tỉ và trung tỉ $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (đpcm).

Ví dụ 7*

Bạn BEE loay hoay cùng thêm một số hữu tỉ nào đó vào cả tử và mẫu số của phân số $\frac{13}{29}$ để được một phân số mới bằng $\frac{1}{3}$. Các bạn giúp bạn BEE được không ?

Giải

Gọi số hữu tỉ thêm vào là x, ta có $\frac{13+x}{29+x} = \frac{1}{3}$.

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$\frac{13+x}{29+x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{13+x}{1} = \frac{29+x}{3} = \frac{(29+x)-(13+x)}{3-1} = \frac{16}{2} = 8.$

Suy ra: $13 + x = 8$ nên $x = -5$. Thật vậy $\frac{13+(-5)}{29+(-5)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

4.1. Thay các tỉ số sau bằng tỉ số giữa các số nguyên:

a) $3,5 : 5,04$; b) $1\frac{19}{21} : 4\frac{2}{7}$; c) $1\frac{21}{25} : 0,23$.

4.2. Có thể lập được một tỉ lệ thức từ từng nhóm bốn số sau không ?

a) $-1;\ -3;\ -9;\ 27$;

b) $-1;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{6}$;

c) $0,4;\ 0,04;\ 0,004;\ 0,0004$;

d) $3^{-3};\ 3^{-5};\ 3^{-7};\ 3^{-11}$.

4.3. Tìm số hữu tỉ x trong các tỉ lệ thức sau:

a) $6 : x = 6,5 : (-29,25)$;

b) $14\frac{2}{3} : \left(-80\frac{2}{3}\right) = (0,5.x) : 35\frac{3}{4}$;

c) $4 : x = x : 0,16$;

d) $(1-x)^3 : (-0,5625) = 0,525 : 0,7$.

4.4. Tìm a, b và c trong mỗi trường hợp hợp sau:

a) $5a - 3b - 3c = -536$ và $\frac{a}{4} = \frac{b}{6}, \frac{b}{5} = \frac{c}{8}$.

b) $3a - 5b + 7c = 86$ và $\frac{a+3}{5} = \frac{b-2}{3} = \frac{c-1}{7}$.

c) $5a = 8b = 3c$ và $a - 2b + c = 34$.

d) $3a = 7b$ và $a^2 - b^2 = 160$.

e) $15a = 10b = 6c$ và $abc = -1920$.

f) $a^2 + 3b^2 - 2c^2 = -16$ và $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$.

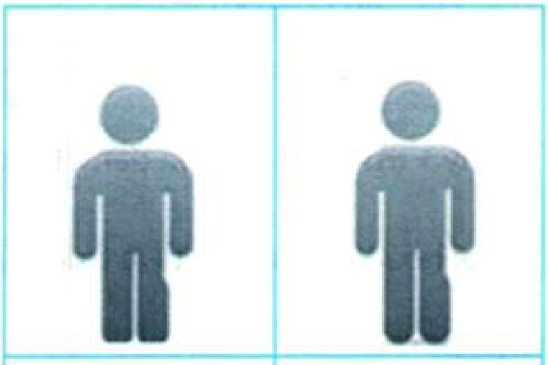
g) $a^3 + b^3 + c^3 = 792$ và $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$.

NÂNG CAO

4.5. Có hai người nghề nghiệp khác nhau và được mã số như ở bảng dưới.

Người thứ nhất được mã số bằng số a và số x. Người thứ hai được mã số bằng số b và số y.

Bạn BEE đố các bạn đoán được nghề nghiệp của họ qua các số a và b chỉ ngày và các số x và y chỉ tháng (đó là ngày kỉ niệm của những người làm nghề gì ?)



Người thứ nhất MÃ SỐ: a / x	Người thứ hai MÃ SỐ: b / y

Người thứ nhất	Bớt số x ở tử số và thêm số x ở mẫu số của phân số $\frac{23}{41}$ được phân số bằng $\frac{3}{13}$.
	Thêm số a vào ở tử số và bớt số a ở mẫu số của phân số $\frac{23}{41}$ được phân số bằng $\frac{43}{21}$.
Người thứ hai	Cùng thêm số b vào cả tử số và mẫu số của phân số $\frac{43}{61}$ được phân số bằng $\frac{35}{44}$.
	Cùng bớt số y ở cả tử số và mẫu số của phân số $\frac{43}{61}$ được phân số bằng $\frac{41}{59}$.

4.6. Cho tỉ lệ thức $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$, chứng minh

$$\frac{\overline{a\underbrace{bbb.......b}_{n-1}}}{\overline{\underbrace{bbb.......b}_{n-1}c}} = \frac{a}{c} \text{ với } n \in \mathbf{N}^*.$$

4.7. Cho $abcd \neq 0$, $b^2 = ca$ và $c^2 = bd$. Chứng minh tỉ lệ thức $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

4.8. Cho $\frac{2x + 1}{5} = \frac{3y - 2}{7} = \frac{2x + 3y - 1}{6x}$.

Tìm x và y.

4.9. Chứng minh rằng bốn số a, b, c, d lập thành một tỉ lệ thức, nếu có:

$(a + b + c + d)(a - b - c + d)$

$= (a - b + c - d)(a + b - c - d)$.

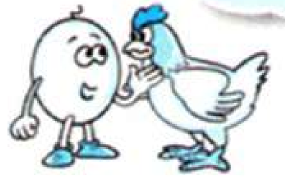
EM CÓ BIẾT?

1. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT TỈ LỆ THỨC

1. Bạn EGG đố:

Tính giá trị của k, biết:

$$k = \frac{\overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bca}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cab}}$$



LỜI GIẢI CỦA BẠN CHICKEN

Do $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ và $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}$ là các số có hai và ba chữ số, nên a, b, c > 0

$\Rightarrow a + b + c \neq 0$.

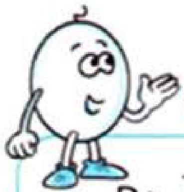
Vì $a + b + c \neq 0$, nên áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$k = \frac{\overline{ab}}{\overline{abc}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{bca}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cab}} = \frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}} = \frac{11(a+b+c)}{111(a+b+c)} = \frac{11}{111}$$

2. Bạn CHICKEN đố:

Tính giá trị của k, biết:

$$k = \frac{\overline{abc}}{\overline{ab} + c} = \frac{\overline{bca}}{\overline{bc} + a} = \frac{\overline{cab}}{\overline{ca} + b}$$



LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

Do $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$ và $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}$ là các số có hai và ba chữ số, nên a, b và c > 0

$\Rightarrow a + b + c \neq 0$.

Vì $a + b + c \neq 0$, nên áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta cũng có:

$$k = \frac{\overline{abc}}{\overline{ab} + c} = \frac{\overline{bca}}{\overline{bc} + a} = \frac{\overline{cab}}{\overline{ca} + b} = \frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{\overline{ab} + c + \overline{bc} + a + \overline{ca} + b}$$

$$= \frac{111(a+b+c)}{12(a+b+c)} = \frac{111}{12} = \frac{37}{4}.$$

2. CHỨNG MINH TỈ LỆ THỨC TỪ MỘT TỈ LỆ THỨC CHO TRƯỚC

Bạn EGG đố:

Với giả thiết $c \neq 0$: Từ tỉ lệ thức $\dfrac{\overline{ab}}{a+b} = \dfrac{\overline{bc}}{b+c}$, *chứng minh* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$.

LỜI GIẢI CỦA BẠN CHICKEN

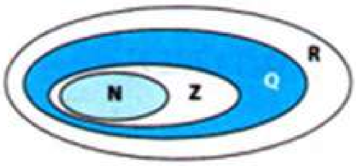
Từ giả thiết $c \neq 0$ và $\overline{ab}, \overline{bc}$ là các số có hai chữ số nên $a, b, c > 0$. Hoán vị các trung tỉ, rồi áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

Từ $\dfrac{\overline{ab}}{a+b} = \dfrac{\overline{bc}}{b+c} \Rightarrow \dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{\overline{ab}-(a+b)}{\overline{bc}-(b+c)} = \dfrac{9a}{9b} = \dfrac{a}{b}$.

Lại từ $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow \dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{(a+b)-a}{(b+c)-b} = \dfrac{b}{c}$, suy ra $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$ (đpcm).

CHỦ ĐỀ 5 SỐ VÔ TỈ. SỐ THỰC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi chung là số thực

R
Số thực

- **Q** Số hữu tỉ
  - Số thập phân hữu hạn
    $\frac{1}{4}=0,25$
    (mẫu số chỉ có các ước nguyên tố 2, 5)
  - Số thập phân vô hạn tuần hoàn
    $\frac{1}{3}=0,66...=0,(6)$
    (mẫu số có ước nguyên tố khác 2, 5)
- **I** Số vô tỉ
  - Số thập phân vô hạn **không** tuần hoàn
    $\pi = 3,14159...$
    $\sqrt{2} = 1,4142...$

LÀM TRÒN SỐ

QUY ƯỚC		SỐ THẬP PHÂN	SỐ NGUYÊN
1	Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi nhỏ hơn 5	Giữ nguyên bộ phận còn lại. $1,2436 \approx 1,24$	Thay các chữ số bỏ đi bằng các chữ số 0. $12436 \approx 12400$
2	Nếu chữ số đầu tiên trong các chữ số bị bỏ đi lớn hơn hoặc bằng 5	Cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại. $1,2436 \approx 1,244$	Cộng thêm 1 vào chữ số cuối cùng của bộ phận còn lại và thay các chữ số bỏ đi bằng các chữ số 0. $12436 \approx 12440$

CĂN BẬC HAI

$$\sqrt{a} = x \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

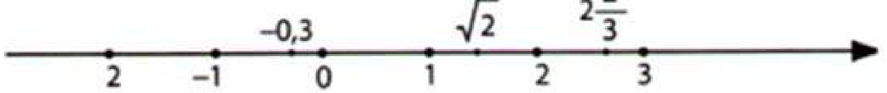
Căn bậc hai của số a không âm là số x, sao cho $x^2 = a$

- Số 4 có hai căn bậc hai là:
  $2 = \sqrt{4}$ và $-2 = -\sqrt{4}$
- Số 0 có một căn bậc hai là 0.

$\sqrt{a}$ và căn bậc hai của a không là một.
Không viết: $\sqrt{4} = \pm 2$

TRỤC SỐ THỰC

- Mỗi số thực được biểu diễn bởi một điểm trên trục số.
- Ngược lại, mỗi điểm trên trục số đều biểu diễn một số thực.



Các phép toán trên tập số thực cũng tương tự như các phép toán trên tập số hữu tỉ.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Điền số/chữ thích hợp vào chỗ chấm (...)

$-\frac{1}{40}$ là số thập phân	$\sqrt{2}$ là số	$\frac{72}{75}=0,.....$
0,222... là số thập phân	$\frac{2}{9}=0,(.....)$	$0,(142857)=\frac{1}{.....}$

2. Đúng điền Đ, sai điền S

Khẳng định	Đ/S
a) Một số không âm có đúng hai căn bậc hai.	
b) $-\sqrt{a}\le 0$ với $a\ge 0$.	

Khẳng định	Đ/S
c) Các điểm biểu diễn số hữu tỉ không lấp đầy trục số thực	
d) Số 7 không có "căn bậc hai âm".	
e) Nếu a là số thực thì a là số vô tỉ.	

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Viết các phân số dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc một số thập phân vô hạn tuần hoàn và giải thích vì sao chúng viết được như vậy.

$$-\frac{9}{40};\frac{5}{11};\frac{28}{175};\frac{11}{24}$$

Giải

Giả thiết	Kết luận	Giải thích
$-\frac{9}{40}=-0,225$	Số thập phân hữu hạn	Phân số $-\frac{9}{40}$ là phân số tối giản, mẫu số $(40=2^3.5)$ chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 và 5.
$\frac{5}{11}=0,(45)$	Số thập phân vô hạn tuần hoàn	Phân số $\frac{5}{11}$ là phân số tối giản, mẫu số 11 là số nguyên tố khác 2 và 5.
$\frac{28}{175}=0,16$	Số thập phân hữu hạn	Phân số $\frac{28}{175}$ rút gọn thành $\frac{4}{25}$ là phân số tối giản, mẫu số $(25=5^2)$ chỉ chứa thừa số nguyên tố 5.
$\frac{11}{24}=0,458(3)$	Số thập phân vô hạn tuần hoàn	Phân số $\frac{11}{24}$ là phân số tối giản, mẫu số $(24=2^3.3)$ chứa thừa số nguyên tố 3 khác 2 và 5.

Ví dụ 2

Tính diện tích của các hình chữ nhật có số đo hai cạnh lần lượt là a và b (đơn vị cm), biết a là tử số và b là mẫu số của một phân số tối giản viết từ các số thập phân sau:

0,26; 0,454545…; 0,1377….

Giải

Viết số thập phân ra phân số	Diện tích hình chữ nhật ABCD
$0,26 = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$	$S(ABCD) = 13.50 = 650\ (cm^2)$
$0,454545\ldots = 0,(45) = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$	$S(ABCD) = 5.11 = 55\ (cm^2)$
$0,13777\ldots = 0,13(7) = \frac{137-13}{900} = \frac{124}{900} = \frac{31}{225}$	$S(ABCD) = 31.225 = 6975\ (cm^2)$

Ví dụ 3

Làm tròn các số sau đến hàng đơn vị, đến chữ số thập phân thứ nhất, thứ hai và thứ ba sau dấu phẩy:

12,064; 9,272727…; 3,14159…..

Giải

	Làm tròn đến hàng đơn vị	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba
12,064	≈ 12	$\approx 12,1$	$\approx 12,06$	$\approx 12,064$
9,272727…	≈ 9	$\approx 9,3$	$\approx 9,27$	$\approx 9,273$
3,14159…	≈ 3	$\approx 3,1$	$\approx 3,14$	$\approx 3,142$

Ví dụ 4

Tại SEA Games 27 (Myanmar - 2013), vận động viên Nguyễn Thị Ánh Viên đã về Nhất nội dung 200m bơi ngửa với thời gian 2 phút 14 giây 80, giành Huy chương Vàng và trở thành vận động viên đầu tiên phá kỉ lục của SEA Games 27. Về thứ Nhì là Yosaputra Venesia (Indonesia) với thời gian 2 phút 20 giây 35 và thứ Ba là Lim Shen Meagan (Singapore) với thời gian 2 phút 21 giây 19.

Nguyễn Thị Ánh Viên
vận động viên số 1 trong 10 vận động viên tiêu biểu toàn quốc năm 2013 của Việt Nam.

Hỏi thời gian gần đúng đến hàng đơn vị giây của mỗi vận động viên là bao nhiêu?

Giải

Vận động viên	Đổi đơn vị	Làm tròn hàng đơn vị giây
Nguyễn Thị Ánh Viên (Việt Nam)	2 phút 14 giây 80 = 134,8 giây	≈ 135 (giây)
Yosaputra Venesia (Indonesia)	2 phút 20 giây 35 = 140,35 giây	≈ 140 (giây)
Lim Shen Meagan (Singapore)	2 phút 21 giây 19 = 141,19 giây	≈ 141 (giây)

27th SEA GAMES MYANMAR 2013 NAY PYI TAW

SEA Games (Đại hội thể thao Đông Nam Á) là giải đấu lớn nhất khu vực với sự tham gia của tất cả các quốc gia thành viên. Sea Games 27 được tổ chức tại thủ đô Naypyidaw của Myanmar, cùng với hai thành phố Yangon và Mandalay (khai mạc ngày 11/12, bế mạc ngày 22/12/2013) gồm 11 quốc gia, 33 môn thể thao và 460 nội dung thi đấu.

Ví dụ 5*

Cho các phân số: $\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{6}{7}$.

a) Các phân số trên đều đổi được ra số thập phân vô hạn tuần hoàn. Tìm chu kì và nhận xét các chữ số trong chu kì của các số thập phân vô hạn tuần hoàn trên.

b) Làm tròn các số thập phân trên đến chữ số thứ hai, thứ tư, thứ sáu sau dấu phẩy.

c) Tìm chữ số thứ 100 sau dấu phẩy của số thập phân viết từ phân số $\frac{5}{7}$.

d) Biết tổng các chữ số 5 đầu trong cách viết số thập phân vô hạn tuần hoàn từ $\frac{3}{7}$ là 2015. Hỏi chữ số 5 cuối cùng trong cách viết trên là chữ số thứ bao nhiêu của số thập phân đó ?

Giải

a) Ta có:

$\frac{1}{7} = 0,(142857)$; $\frac{2}{7} = 0,(285714)$;

$\frac{3}{7} = 0,(428571)$;

$\frac{4}{7} = 0,(571428)$; $\frac{5}{7} = 0,(714285)$;

$\frac{6}{7} = 0,(857142)$.

Chu kì của tất cả 6 số thập phân vô hạn tuần hoàn trên đều có 6 chữ số và là các chữ số khác nhau:1; 2; 4; 5; 7 và 8 không có các chữ số 3,6, 9 và 0 Thứ tự các chữ số trong chu kì của các số thập phân vô hạn tuần hoàn đó đều khác nhau.

b)

	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ sáu
$\frac{1}{7} = 0,(142857)$	$\approx 0,14$	$\approx 0,1429$	$\approx 0,142857$
$\frac{2}{7} = 0,(285714)$	$\approx 0,29$	$\approx 0,2857$	$\approx 0,285714$
$\frac{3}{7} = 0,(428571)$	$\approx 0,43$	$\approx 0,4286$	$\approx 0,428571$
$\frac{4}{7} = 0,(571428)$	$\approx 0,57$	$\approx 0,5714$	$\approx 0,57142\underline{9}$
$\frac{5}{7} = 0,(714285)$	$\approx 0,71$	$\approx 0,7143$	$\approx 0,71428\underline{6}$
$\frac{6}{7} = 0,(857142)$	$\approx 0,86$	$\approx 0,8571$	$\approx 0,85714\underline{3}$

Khi làm tròn chữ số thập phân thứ sáu phải để ý chữ số thập phân thứ bảy (chữ số đầu tiên của chu kì !)

c) Ta có $\frac{5}{7} = 0,714285\ 714285\ 714285 ...$

Chu kì tuần hoàn là 6 mà 100 : 6 được 16 dư 4, suy ra chữ số thứ 100 sau dấu phẩy của số thập phân vô hạn tuần hoàn trên là chữ số 2.

d) Ta có $\frac{3}{7} = 0,428571428571428571....$

Số chữ số 5 đầu tiên trong cách viết số thập phân vô hạn tuần hoàn trên là

$$2015 : 5 = 403.$$

Chu kì là 6, nên từ chữ số 5 thứ nhất đến chữ số thứ 403 có 6.

$(403 - 1) : 1 + 1 = 2413$ (chữ số). Trong chu kì đầu tiên có 5 chữ số đứng trước chữ số 5 nên có tất cả

$$2413 + 5 = 2418 \text{ (chữ số)}.$$

Vậy chữ số 5 cuối cùng trong cách viết trên là chữ số thứ 2418.

Ví dụ 6*

Hãy giúp bạn BEE so sánh các số sau:

a) $x = 7\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ và $y = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}$.

b) $x = \frac{-1}{\sqrt{29+5}}$ và $y = \frac{-1}{\sqrt{29} + \sqrt{5}}$.

Giải

a) Ta có: $x = 7\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

$= \sqrt{147} + \sqrt{20} > \sqrt{144} + \sqrt{16} = 12 + 4 = 16$

$\Rightarrow x > 16$

Tương tự: $y = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}$

$= \sqrt{63} + \sqrt{50} < \sqrt{64} + \sqrt{64} = 8 + 8 = 16$

$\Rightarrow y < 16$

Suy ra: $x > y$ hay $7\sqrt{3} + 2\sqrt{5} > 3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}$.

b) Xét: $|x|=\dfrac{1}{\sqrt{29+5}}$ và $|y|=\dfrac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{5}}$.

Ta có: $\sqrt{29+5}=\sqrt{34}<\sqrt{36}=6$ và $\sqrt{29}+\sqrt{5}>\sqrt{25}+\sqrt{4}=5+2=7$.

Suy ra: $0<\sqrt{29+5}<\sqrt{29}+\sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{29+5}}>\dfrac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{5}}>0.$

Vậy: $\dfrac{-1}{\sqrt{29+5}}<\dfrac{-1}{\sqrt{29}+\sqrt{5}}$.

BÀI TẬP

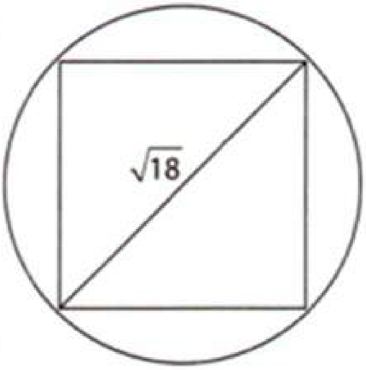
CƠ BẢN

5.1. Viết các phân số sau dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc một số thập phân vô hạn tuần hoàn và giải thích vì sao chúng viết được như vậy:

$$-\frac{11}{35};\ \frac{9}{80};\ \frac{44}{121};\ \frac{-48}{150};\ \frac{55}{75};\ \frac{73}{81}.$$

5.2. Lấy số $\pi \approx \dfrac{22}{7}$, tính diện tích hình tròn biết số đo bán kính (đơn vị cm):

a) $0,(45)$; b) $\dfrac{21}{22}$; c) $\sqrt{\dfrac{7}{11}}$.

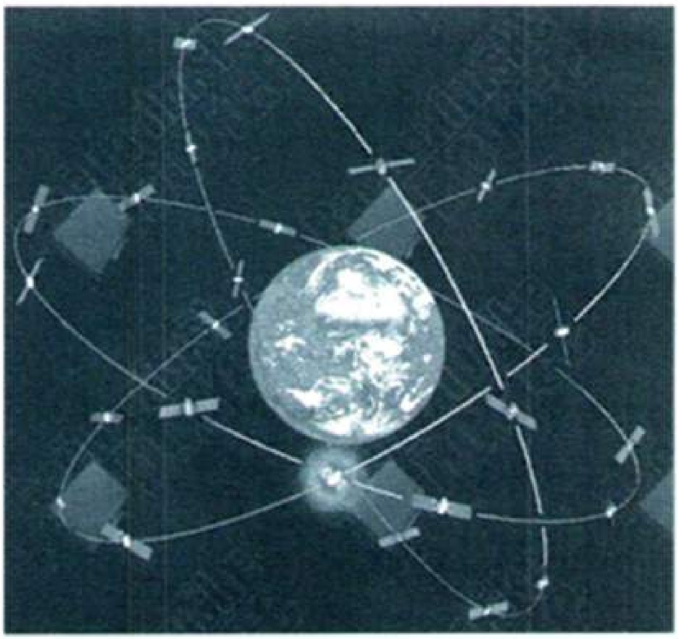


5.3. Tính diện tích hình tròn và chu vi đường tròn. Lấy số $\pi \approx \dfrac{22}{7}$.

a) Một hình vuông nằm bên trong một hình tròn (hình bên). Biết đường chéo hình vuông bằng $\sqrt{18}$ cm. Tính diện tích phần hình tròn không bị hình vuông phủ (chính xác tới chữ số thập phân thứ hai).

b) Một vệ tinh bay trên quỹ đạo vòng tròn quanh Trái Đất. Biết quỹ đạo của vệ tinh có độ dài là 66000 km. Hỏi độ dài quỹ đạo của vệ tinh giảm bao nhiêu ki-lô-mét nếu bán kính của quỹ đạo giảm 70 km ?

*Một **vệ tinh** là bất kì một vật thể nào quay quanh một vật thể khác (được coi là vật thể chính của nó). Mọi vật thể thuộc Hệ Mặt Trời, gồm cả Trái Đất, đều là vệ tinh của Mặt Trời. Mặt Trăng là vệ tinh của Trái Đất và cũng là Vệ tinh của Mặt Trời.*



5.4. So sánh A và B

a) $A = \dfrac{2014}{\sqrt{2015}}$ và $B = \dfrac{2015}{\sqrt{2014}}$.

b) $A = \dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{12321}}{\sqrt{1234321}}$.

5.5. Số nào sau đây là số vô tỉ?

$$\sqrt{\frac{(-5)^2}{36}};\quad \frac{\sqrt{25}+\sqrt{7225}}{\sqrt{81}+\sqrt{23409}};$$

$$\frac{\sqrt{25}-\sqrt{(-85)^2}}{\sqrt{(-11)^2}+\sqrt{165^2}};\quad \sqrt{\frac{5-145}{8-168}}.$$

5.6. Tìm x, biết

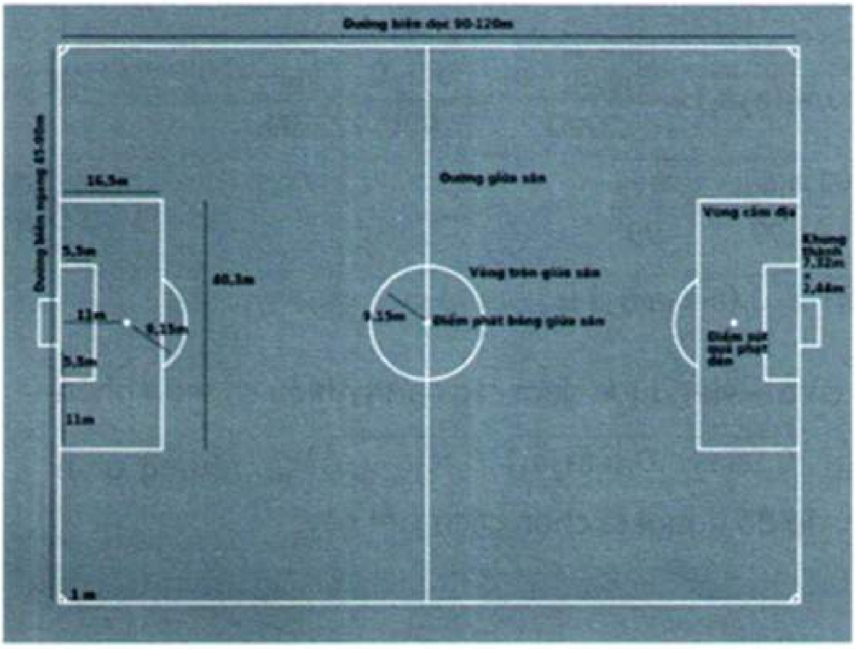
$$\left(2x+3\sqrt{x}\right)\left(3x-2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)=0.$$

NÂNG CAO

5.7. ***Sân bóng đá tiêu chuẩn FIFA***

Tính giá trị gần đúng (đến chữ số thập phân thứ nhất) chiều dài của một sân bóng đá (theo tiêu chuẩn FIFA) sau 5 lần đo là 121,27m; 119,25m; 120,28m; 121,15m và 119,26 m.

__Bóng đá__ là môn thể thao đồng đội được chơi giữa hai đội với nhau, mỗi đội có 11 cầu thủ trên sân. Trò chơi này dùng một quả bóng và thường được chơi trên sân cỏ hình chữ nhật với hai khung thành ở hai đầu sân. Bóng đá được chơi ở đẳng cấp chuyên nghiệp trên thế giới.



Một sân bóng đá tiêu chuẩn cho các trận đấu quốc tế có dạng chữ nhật với chiều dài nằm trong khoảng từ 100 đến 120 mét, chiều rộng từ 64 đến 75 m. Ở chính giữa hai đường biên ngang là khung thành có dạng chữ nhật với chiều dài 7,3 m và chiều cao 2,44 m.

5.8. Sắp xếp các số sau từ nhỏ đến lớn

$$-\frac{1}{1+\sqrt{3}};\ -\frac{1}{1+\sqrt{2}};\ -\frac{1}{1+\sqrt{5}};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}.$$

5.9. Viết mỗi phân số sau dưới dạng số thập phân ta được một số thập phân hữu hạn hay số thập phân vô hạn tuần hoàn (n là số tự nhiên khác 0):

$$\frac{121n+11n^2}{55n};\ \frac{79!+79}{5609n}.$$

5.10. Tìm các số thập phân $\overline{0,abc}$, $\overline{0,(abc)}$ biết:

a) $\dfrac{1}{\overline{0,abc}} = n$; b) $\dfrac{1}{\overline{0,(abc)}} = n$,

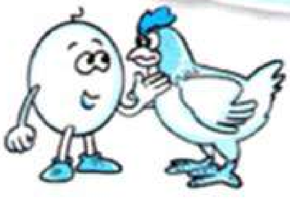
trong đó a, b, c là các chữ số khác nhau và n là số tự nhiên khác 0.

EM CÓ BIẾT?

1. TỪ SỐ THẬP PHÂN VÔ HẠN TUẦN HOÀN ĐẾN PHÂN SỐ

Bạn EGG đố:

Số nào lớn hơn trong hai số 0,(36) và 0,3(63)?



LỜI GIẢI CỦA CHICKEN

$0,(36) = \dfrac{36}{99} = \dfrac{4}{11}$;

Ta có:

$0,3(63) = \dfrac{363-3}{990} = \dfrac{360}{990} = \dfrac{4}{11}$.

Suy ra: 0,(36) = 0,3(63).

SUY NGẪM: Các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau có bằng nhau không?

$\overline{0,(a_1a_2)}$; $\overline{0,(a_1a_2a_1a_2)}$; $\overline{0,a_1(a_2a_1)}$.

GIẢI THÍCH

Ta đã biết: $\overline{0,(a_1a_2)} = \dfrac{\overline{a_1a_2}}{99}$; $\overline{0,a_1(a_2a_1)} = \dfrac{\overline{a_1a_2a_1} - a_1}{990} = \dfrac{\overline{a_1a_2 0}}{990} = \dfrac{\overline{a_1a_2}}{99}$

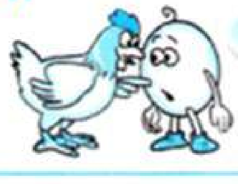
$\overline{0,(a_1a_2a_1a_2)} = \dfrac{\overline{a_1a_2a_1a_2}}{9999} = \dfrac{101.\overline{a_1a_2}}{101.99} = \dfrac{\overline{a_1a_2}}{99}$.

Suy ra: $\overline{0,(a_1a_2)} = \overline{0,a_1(a_2a_1)} = \overline{0,(a_1a_2a_1a_2)} = \ldots$

Như vậy từ phân số $\dfrac{\overline{a_1a_2}}{99}$ ta có thể viết được dưới các dạng nhiều số thập phân vô hạn tuần hoàn khác nhau $\overline{0,(a_1a_2)}, \overline{0,a_1(a_2a_1)}, \overline{0,(a_1a_2a_1a_2)}, \ldots$ nhưng cách viết $\overline{0,(a_1a_2)}$ thuận tiện hơn, do đó người ta chọn cách viết này.

2. CHỨNG MINH MỘT SỐ LÀ SỐ VÔ TỈ

Bạn CHICKEN hỏi:



$\sqrt{2}$ là số vô tỉ hay số hữu tỉ ?

BẠN EGG CHỨNG MINH

Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ, thì $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ (m, n $\in$ **N*** và (m, n) = 1).

Suy ra: $m = \sqrt{2}.n \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2$ (2 là số nguyên tố).

Từ $m \vdots 2 \Rightarrow m = 2k$ ($k \in$ **N***) $\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2$ (2 là số nguyên tố).

Do đó m và n đều chia hết cho 2, trái với (m, n) = 1.

Vậy điều giả sử là sai, hay $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

SUY NGẪM: Các số $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, ...$ là các số vô tỉ;

Các số $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}, \sqrt{25}....$ là các số hữu tỉ.

Như vậy: Với số nguyên dương a nếu a là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số hữu tỉ, còn nếu a không là số chính phương thì $\sqrt{a}$ số vô tỉ.

GIẢI THÍCH

Thật vậy, giả sử a không là số chính phương nhưng $\sqrt{a}$ là một số hữu tỉ:

$\sqrt{a} \in \mathbf{Q} \Rightarrow$ thì $\sqrt{a} = \dfrac{m}{n}$ với m, n $\in \mathbf{N}$ $(n > 1)$ và $(m, n) = 1 \Rightarrow m^2 = an^2$.

Gọi p là một ước nguyên tố của n $(p \neq 1)$,

thì $n \,\vdots\, p \Rightarrow m^2 \,\vdots\, p \Rightarrow m \,\vdots\, p$ (vì p là số nguyên tố) $\Rightarrow (m, n) = p \neq 1$, trái với điều giả sử. Vậy $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.

BÀI TOÁN: Bạn hãy tìm hai số hữu tỉ a và b, biết $a + b\sqrt{p} = 0$, trong đó p là số nguyên tố.

3. SỐ PI

Công thức tính chu vi hình tròn:

$C = 2\pi.R$ (R là bán kính đường tròn).

Số π (PI) được định nghĩa là tỉ lệ giữa chu vi và đường kính của một hình tròn.

Số π được biểu diễn với 48 chữ số thập phân:

3,141592653589723846264338327950288419716939937510.

Số pi (kí hiệu: π) là một hằng số toán học có giá trị bằng tỉ số giữa chu vi của một hình tròn với đường kính của đường tròn đó. Hằng số này có giá trị xấp xỉ bằng 3,14159. Nó được biểu diễn bằng chữ cái Hi Lạp π từ giữa thế kỉ XIIX. π là một số vô tỉ – một số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Trong hàng nghìn năm, các nhà toán học đã nỗ lực mở rộng hiểu biết của con người về số π, đôi khi bằng việc tính ra giá trị của nó với độ chính xác ngày càng cao. Trong thế kỉ XXI, các nhà toán học và các nhà khoa học máy tính kết hợp với sức mạnh tính toán ngày càng cao, đã mở rộng khả năng biểu diễn thập phân của số π tới 10 nghìn tỉ (10^{13}) chữ số. Các ứng dụng khoa học thông thường yêu cầu không quá 40 chữ số của π, do đó động lực của những tính toán này chủ yếu là tham vọng của con người muốn đạt tới những kỉ lục mới, nhưng những tính toán đó cũng được sử dụng để kiểm tra các siêu máy tính và các thuật toán tính nhân với độ chính xác cao.

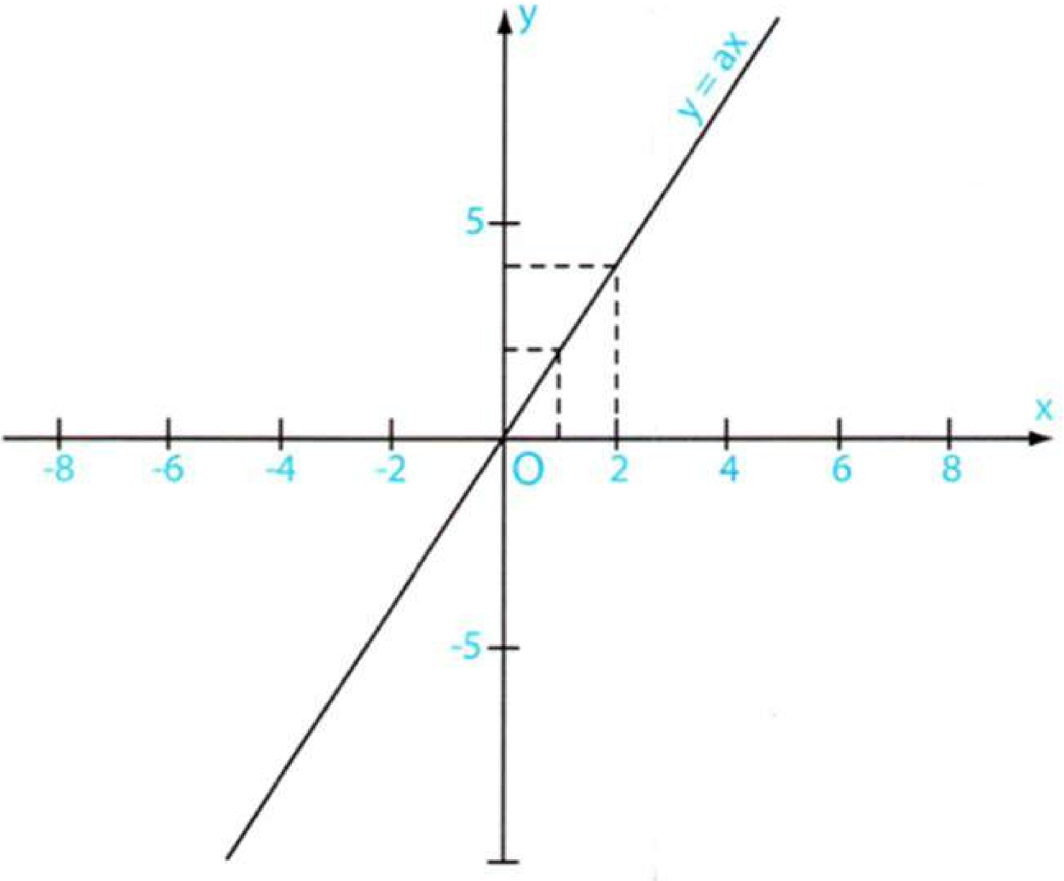
Sự có mặt rộng khắp của số π khiến nó trở thành một trong những hằng số toán học được biết đến nhiều nhất, cả bên trong lẫn bên ngoài giới khoa học. Nhiều sách viết riêng về số π đã được xuất bản, có cả Ngày số π. Báo chí thường đặt những tin về kỉ lục tính toán chữ số mới của π trên trang nhất. Một số người còn cố gắng ghi nhớ giá trị của π với độ chính xác ngày càng tăng, đạt tới kỉ lục trên 67 000 chữ số.

ĐỐ VUI

Với ba chiếc đũa bằng nhau và không bẻ gẫy đũa, bạn có thể xếp được một số lớn hơn 3 và nhỏ hơn 4 không ?

CHƯƠNG II

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ



- **Đại lượng tỉ lệ thuận**
- **Đại lượng tỉ lệ nghịch**
- **Mặt phẳng tọa độ**
- **Đồ thị của hàm số y = ax (a ≠ 0)**

CHỦ ĐỀ 6 ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

y tỉ lệ thuận với x theo hệ số (tỉ lệ) $a \neq 0$

x tỉ lệ thuận với y theo hệ số tỉ lệ $\frac{1}{a}$

$$y = a.x \text{ (hay } \frac{y}{x} = a)$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ... = \frac{y_n}{x_n} (= a)$$

$$\frac{x_n}{x_m} = \frac{y_n}{y_m}$$

Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi

Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia

x, y, z tỉ lệ thuận với a, b, c

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \longleftrightarrow x : y : z = a : b : c$$

HỎI ĐÁP NHANH

1. Điền vào chỗ chấm (...)

a) Chu vi một hình vuông tỉ lệ thuận với cạnh hình vuông, hệ số tỉ lệ là ……

b) Số hàng mua được tỉ lệ thuận với …… nếu giá hàng không thay đổi.

c) Chu vi một hình tròn tỉ lệ thuận với ……. với hệ số tỉ lệ là π.

d) Diện tích một tam giác có đáy là a (hằng số khác 0) tỉ lệ thuận với đường cao theo hệ số tỉ lệ là …….

2. Mệnh đề nào SAI trong các mệnh đề sau?

a) Quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc nếu thời gian không đổi.

b) Nếu vận tốc không đổi thì quãng đường và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

c) Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

d) Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng không tỉ lệ thuận.

3. Đúng điền Đ, sai điền S

Khẳng định	Đ/S
a) Một số hữu tỉ x khác 0 và số đối của nó là hai đại lượng tỉ lệ thuận.	
b) Hai đại lượng x và $\sqrt{x}$ là hai đại lượng tỉ lệ thuận.	
c) Số vòng quay của kim giờ và kim phút trong cùng một thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.	
d) Nếu ta cùng thêm một số vào tất cả các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ thuận ta sẽ được các số mới cũng là các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ thuận.	

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho các giá trị tương ứng của x và y trong bảng dưới:

Bảng I	x	0,65	2,75	0,6	1,34	37
	y	5,2	22	4,8	10,72	296

Bảng II	x	-2^5	-2^3	-2^1	2^2	2^4
	y	128	32	4	-16	-64

a) Trong mỗi bảng, các đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau không ?

b) Nếu các đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau, hãy chỉ ra hệ số tỉ lệ và viết công thức biểu thị sự tương quan đó.

Chỉ cần chỉ ra được hai cặp giá trị tương ứng của x và y có tỉ số không bằng nhau, thì kết luận hai đại lượng đó không tỉ lệ thuận.

Giải

Bảng I:

a) Ta có:

$$\frac{5,2}{0,65} = \frac{22}{2,75} = \frac{4,8}{0,6} = \frac{10,72}{1,34} = \frac{296}{37} = 8.$$

Vậy các đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau.

b) Ta có: $\frac{y}{x} = \frac{5,2}{0,65} = 8 \Rightarrow y = 8x$ và hệ số tỉ lệ là 8.

Nếu tất cả các tỉ số giá trị tương ứng của x và y đều bằng nhau thì hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau.

Bảng II: Ta có: $\frac{4}{-2^1} \neq \frac{128}{-2^5}$ $(-2 \neq -4)$,

và $\frac{128}{-2^5} = \frac{32}{-2^3} = \frac{-16}{2^2} = \frac{-64}{2^4} = -4$.

Vậy các đại lượng y và x không tỉ lệ thuận với nhau.

Ví dụ 2

Biết x và y trong bảng sau là hai đại lượng tỉ lệ thuận, điền số thích hợp vào ô trống:

x	1	2			5
y	$-\frac{2}{3}$		-2	$-2\frac{2}{3}$	

Tìm giá trị tương ứng của y với x, có thể dùng 1 trong 2 tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Giải

Tìm giá trị của y tương ứng với x = 2:

Cách 1: $\frac{-\frac{2}{3}}{1} = \frac{y}{2} \Rightarrow \quad y = 2.\frac{-2}{3} = -\frac{4}{3}$

Cách 2: $\frac{-\frac{2}{3}}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad y = 2.\frac{-2}{3} = -\frac{4}{3}$

Tương tự với các ô trống còn lại, ta có bảng sau:

x	1	2	3	4	5
y	$-\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	-2	$-2\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{3}$

Ví dụ 3

Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Kí hiệu x_1 và x_2 là hai giá trị của đại lượng x mà $x_1 = -1$ và $x_2 = -3$. Gọi y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của đại lượng y mà $y_1 - y_2 = -2$.

a) Tìm các giá trị y_1 và y_2.

b) Đại lượng x và y liên hệ với nhau theo công thức nào ?

Với hai đại lượng tỉ lệ thuận:

Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng không đổi.

Tỉ số hai giá trị của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Giải

a) Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận, suy ra $y = kx$ ($k \neq 0$).

Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận, ta có: $\frac{y_1}{-1} = \frac{y_2}{-3} = \frac{y_1 - y_2}{(-1)-(-3)} = \frac{-2}{2} = -1.$

Suy ra: $y_1 = (-1).(-1) = 1$

và $\quad y_2 = (-1).(-3) = 3.$

b) Vậy hai đại lượng x và y liên hệ với nhau theo công thức: $y = (-1).x = -x$.

Việt Nam có nền kinh tế nông nghiệp từ hàng nghìn năm nay. Nền nông nghiệp của nước ta không chỉ sản xuất ra đủ một lượng lớn lương thực đáp ứng nhu cầu trong nước mà còn xuất khẩu sang nhiều nước trên thế giới. Ngành trồng lúa ở nước ta là một trong những ngành sản xuất lương thực vô cùng quan trọng và đạt được những thành tựu đáng kể, đưa Việt Nam trở thành nước xuất

khẩu gạo lớn thứ hai trên thế giới

Ví dụ 4

Cứ 100 kg thóc cho 65 kg gạo. Chất bột chứa trong gạo là 80%.

a) Hỏi trong 30 kg thóc có bao nhiêu ki-lô-gam chất bột?

b) Từ 1 kg gạo người ta làm ra được 2,2 kg bún tươi. Hỏi để làm ra 14,3 kg bún tươi cần bao nhiêu ki-lô-gam thóc ?

Giải

a) Vì 100 kg thóc được 65 kg gạo, suy ra tương quan giữa hai đại lượng thóc và gạo là tỉ lệ thuận. Ta có:

	Tiêu chuẩn (kg)	Hiện thực (kg)
Khối lượng thóc	100	30
Khối lượng gạo	65	x

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ thuận, ta có: $\frac{30}{x}=\frac{100}{65}\Rightarrow x=\frac{30.65}{100}=19,5$(kg gạo).

Chất bột chứa trong gạo là 80%, suy ra tương quan giữa hai đại lượng gạo và chất bột là tương quan tỉ lệ thuận. Ta có:

	Tiêu chuẩn (kg)	Hiện thực (kg)
Khối lượng gạo	100	19,5
Khối lượng bột	80	y

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ thuận, ta có: $\frac{19,5}{y}=\frac{100}{80}\Rightarrow y=\frac{19,5.80}{100}=15,6$ (kg chất bột).

Vậy trong 30 kg thóc có 15,6 kg chất bột.

b) Từ 1 kg gạo làm được 2,2 kg bún tươi, suy ra tương quan giữa gạo và bún tươi là tỉ lệ thuận.

Gọi khối lượng gạo cần là x, ta có: $\frac{x}{14,3}=\frac{1}{2,2}\Rightarrow x=\frac{14,3.1}{2,2}=6,5$(kg gạo).

Gọi khối lượng thóc phải có là y, ta có: $\frac{y}{6,5}=\frac{100}{65}\Rightarrow y=\frac{100.6,5}{65}=10$ (kg thóc).

Vậy để sản xuất ra 14,3 kg bún tươi cần có 10 kg thóc.

Cách khác: a) Cứ 100kg thóc cho 65 kg gạo suy ra trong thóc có 65% gạo. Chất bột trong gạo là 80%, ta có 80% $(=\frac{4}{5})$ của 65% bằng $\frac{4}{5}.65\%=52\%$. Suy ra, trong thóc có 52% chất bột. Từ 30 kg thóc có 52% của 30 bằng 30.52% = 15,6 (kg chất bột).

Ví dụ 5

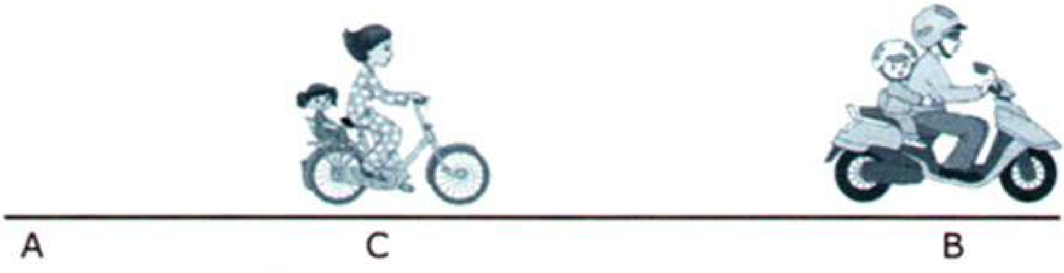
Một xe đạp và một xe máy cùng đi một lúc từ thành phố A đến thành phố B. Vì vận tốc của xe đạp nhỏ hơn vận tốc của xe máy là 18 km/h, nên khi xe máy tới B thì xe đạp mới tới C, cách B một quãng đường bằng 0,6 quãng đường AB. Tìm vận tốc mỗi xe.

Giải

Kí hiệu các quãng đường AC là S_1 và AB là S_2,

ta có $\frac{CB}{AB}=0,6=\frac{3}{5}$,

do đó $\frac{S_1}{S_2}=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{5}$.



Gọi vận tốc và thời gian người đi xe đạp từ A đến C là v_1 và t_1, vận tốc và thời gian đi người xe máy từ A đến B là v_2 và t_2. Theo đề bài ta có: $v_2 - v_1 = 18$ (km/h).

Hai xe đi cùng một lúc từ A, một xe tới C và một xe tới B, vì cùng thời gian nên quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Ta có: $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2}{5}$. Suy ra: $\dfrac{v_1}{2} = \dfrac{v_2}{5} = \dfrac{v_2 - v_1}{5-2} = \dfrac{18}{3} = 6$.

Vậy, vận tốc xe đạp: $v_1 = 6.2 = 12$ (km/h) và vận tốc xe máy: $v_2 = 6.5 = 30$ (km/h).

Cùng thời gian thì QUÃNG ĐƯỜNG và VẬN TỐC
là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
Đã có hiệu (hoặc tổng) của hai đại lượng nào đó hãy
đi tìm tỉ số của chúng.
Ngược lại đã có tỉ số của hai đại lượng nào đó hãy đi
tìm tổng (hoặc hiệu) của chúng.

Ví dụ 6

Chia số 38 thành ba số sao cho số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ theo 0,8 : 0,375, còn số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo 0,25 và 1,75.

Giải

Gọi số thứ nhất, thứ hai và thứ ba theo thứ tự là x, y và z. Theo đề bài ta có: $x + y + z = 38$.

Biết: $x : y = 0{,}8 : 0{,}375 = 32 : 15$ (1)

$y : z = 0{,}25 : 1{,}75 = 1 : 7 = 15 : 105$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{x}{32} = \frac{y}{15} = \frac{z}{105} = \frac{x+y+z}{32+15+105} = \frac{38}{152} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Vậy: Số thứ nhất bằng 8, số thứ hai bằng 3,75 và số thứ ba bằng 26,25.

Ví dụ 7*

Một cửa hàng có ba súc vải cùng khổ và có tổng độ dài là 86,1m. Khi bán 28% súc vải thứ nhất, 40% súc vải thứ hai và 64% súc vải thứ ba thì chiều dài ba súc vải còn lại đều bằng nhau. Hỏi chiều dài mỗi súc vải khi chưa bán ?

Giải

Gọi chiều dài của ba súc vải khi chưa bán là x, y và z (m), với $x, y, z > 0$. Ta có: $x + y + z = 86,1$ (m).

Sau khi bán, chiều dài các súc vải còn lại bằng nhau:

$$72\%.x = 60\%.y = 36\%.z.$$

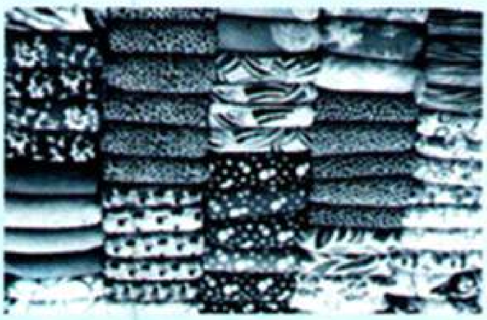
Suy ra: $x : y : z = \frac{1}{72\%} : \frac{1}{60\%} : \frac{1}{36\%} = 5 : 6 : 10.$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{5+6+10} = \frac{86,1}{21} = 4,1.$$

Chiều dài ba súc vải lần lượt là 20,5m; 24,6m; 41m.

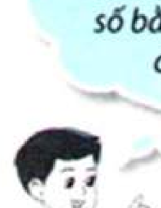
Vải được cuộn lại thành từng súc để gọn và dễ chuyên chở. Các súc vải có chiều rộng gọi là khổ vải (các khổ có quy định kích thước, như khổ 1m; 1,2m,...).



Ví dụ 8*

Một nông trường trồng rừng phòng hộ vào ba lô đất. Biết diện tích lô thứ nhất bằng 40% diện tích của cả ba lô. Còn diện tích lô đất thứ hai và thứ ba tỉ lệ theo 1,5 và 1,(3). Nếu diện tích lô thứ nhất lớn hơn diện tích lô thứ ba là 12ha, thì diện tích của cả ba lô là bao nhiêu hecta ?

Cần biến đổi và kết nối để có được một dãy tỉ số bằng nhau trên cơ sở các tỉ lệ đã cho.



Giải

Gọi diện tích ba lô đất lần lượt là x, y và z (ha). Điều kiện x, y và $z > 0$.

Theo đề bài ta có: $x = 40\%(x + y + z)$;

$y : z = 1,5 : 1,(3) = 9 : 8$ và $x - z = 12$ (ha).

Suy ra:

$$x = \frac{2}{5}\cdot(x+y+z) \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+y+z}{5} = \frac{y+z}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{y+z}{17} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{34} = \frac{y+x}{51} = \frac{y}{27} = \frac{z}{24}$.

Ta có:

$$\frac{x}{34} = \frac{y}{27} = \frac{z}{24} = \frac{x+y+z}{85} = \frac{x-z}{10} = \frac{12}{10} = 1,2.$$

Vậy diện tích của cả ba lô đất bằng

$$x + y + z = 1,2.85 = 102 \text{ (ha)}.$$

Ví dụ 9*

Anh hơn em 3 tuổi. Tìm tuổi anh và tuổi em, biết tuổi anh hiện nay bằng 2 lần tuổi em khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay.

	Hiện nay	Trước đây khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay
Tuổi anh	x	y
Tuổi em	y	y – 3

Giải

Gọi tuổi anh và em hiện nay là x và y.

Điều kiện x, y ∈ **Z** và x > y > 0.

Anh hơn em 3 tuổi, nên ta có $x = y + 3$.

Khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay, thì tuổi anh là y và tuổi em là y – 3.

Ta có bảng so sánh bên.

Biết tuổi anh hiện nay bằng 2 lần tuổi em khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay, ta có tỉ lệ:

$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1}$ mà $x = y + 3 \Rightarrow \frac{y+3}{2} = \frac{y-3}{1}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$\frac{y+3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{6}{1} = 6 \Rightarrow y = 9$ và $x = 12$.

Vậy tuổi anh bằng 12 và tuổi em bằng 9.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

6.1. Mỗi con ruồi có 6 cái chân. Điền số thích hợp vào ô trống:

Số con ruồi	1	4		17	42	
Số chân ruồi			42			438

6.2. Một cửa hàng áo thời trang đã tăng giá các loại áo thêm 7%. Điền số thích hợp vào ô trống của bảng sau:

Giá gốc (đồng)	234000		4270000	
Tăng thêm (đồng)		28000		61600
Giá sau khi tăng (đồng)				

6.3. Biết thời gian di chuyển là 20 phút. Điền số thích hợp vào ô trống của bảng dưới đây:

Vận tốc (km/h)	60	30	24	15	12	6
Quãng đường (km)						

6.4. Trong rừng Amazon, một con thú ăn kiến ăn được 1000 con kiến trong 40 phút. Hỏi con thú đó ăn được bao nhiêu con kiến trong: 30 phút, 1 giờ 30 phút, 2 giờ 10 phút, 3 giờ 50 phút ? (Giả sử đủ kiến và con thú ăn với tốc độ không đổi).

6.5. Biết rằng từ 12 kg lúa mì cho ra 11 kg bột mì, còn từ 10 kg bột mì sẽ làm ra 13 kg bánh mì.

a) Từ 1440 kg lúa mì sẽ làm ra bao nhiêu ki-lô-gam bánh mì ?

b) Cần bao nhiêu ki-lô-gam bột mì để làm ra 260 kg bánh mì ?

6.6. Một quả trứng đà điểu làm món trứng tráng tương đương với 24 quả trứng gà. Với 6 quả trứng gà đủ làm món trứng tráng cho 5 người ăn. Hỏi cần bao nhiêu quả trứng đà điểu làm món trứng tráng cho 100 người ăn ?

Trứng đà điểu có trọng lượng từ 1,2 đến 1,5kg/quả, có thể dùng một quả trứng để chế biến nhiều món ăn. Trứng có vỏ dày và cứng, phải dùng khoan để phá vỏ.

6.7. Để làm ra 10 bát chè nhãn lồng hạt sen, nguyên liệu chính cần có 80 quả nhãn lồng và 300 gam đường. Một cửa hàng chè ngày Thứ Hai bán được 240 bát chè, ngày Thứ Ba bán được 150 bát và ngày Thứ Tư bán được 180 bát.

a) Tính số đường cần dùng cho các ngày Thứ Hai, Thứ Ba và Thứ Tư.

b) Nếu cửa hàng đã mua sẵn 21 kg đường, thì với số đường còn lại sẽ làm được bao nhiêu bát chè và cần sử dụng bao nhiêu quả nhãn lồng ?

6.8. Nem rán là một món đặc sắc mang đậm hương vị dân tộc. Trong mâm cỗ dịp lễ, tết cổ truyền của người Việt Nam không thể thiếu được món nem. Để chuẩn bị món nem rán cho 6 mâm cỗ, bên cạnh các loại rau và gia vị, thì nguyên liệu chính là 2 kg thịt nạc vai và 3 quả trứng gà.

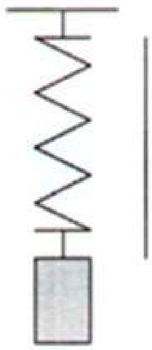
a) Hỏi cần bao nhiêu ki-lô-gam thịt nạc vai và trứng gà để chuẩn bị cho 102 mâm cỗ ?

b) Nếu mua ở siêu thị 12 hộp trứng gà (10 quả/hộp) thì phải mua bao nhiêu ki-lô-gam thịt nạc vai và sẽ làm được bao nhiêu mâm cỗ khi sử dụng hết số trứng gà đó để làm món nem rán ?

6.9. Một chiếc cân lò xo, một đầu gắn vào một thanh ngang cố định, còn đầu kia có móc để móc vật cần cân. Người ta thực hiện cân một số đồ vật và cho kết quả như sau:

Khối lượng cân (g)	0	250	500	1000
Chiều dài lò xo (mm)	33	43	53	73

Ta thấy khối lượng tăng lên thì chiều dài lò xo cũng tăng lên. Vậy hai đại lượng khối lượng đồ vật và chiều dài lò xo là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Điều đó đúng hay sai ?



6.10. Bầu trời đêm dông loé sáng một tia chớp. Bạn BEE nghe thấy tiếng sấm sau đó 21 giây. Hỏi khoảng cách từ chỗ tia chớp đến chỗ bạn BEE đứng là bao nhiêu ki-lô-mét, biết vận tốc của âm thanh là 340 km/s ?

NÂNG CAO

6.11. Giáp TẾT cổ truyền, một cửa hàng, mua 128 kg gồm các nguyên liệu: gạo, thịt và đỗ tỉ lệ theo 5 ; 2 và 1 để làm bánh chưng. Biết với 5 kg gạo, 2 kg thịt, 1 kg đỗ làm ra 10 chiếc bánh chưng loại to. Hỏi với 128 kg các nguyên liệu trên sẽ làm được bao nhiêu chiếc bánh chưng loại to ?

6.12. Lãi suất ngân hàng năm 2014 là 6% năm. Tính số tiền lãi rút ra hàng tháng từ ngân hàng nếu số tiền gửi là 200 triệu đồng Việt Nam ?

6.13. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Biết tổng hai giá trị nào đó của x bằng 1 và tổng hai giá trị tương ứng của y bằng – 2. Viết công thức liên hệ giữa y và x.

6.14. Hai người cùng làm xong một công việc trong 3 giờ. Nếu người A làm sớm hơn 1 giờ và người B làm chậm đi nửa giờ, thì họ hoàn thành công việc đó sớm hơn được 18 phút. Ngược lại, nếu người B làm sớm hơn 1 giờ và người A làm chậm đi nửa giờ, thì người A nhận tiền công ít hơn so với thực tế là 56 000 đồng. Hỏi thực tế, người A nhận được bao nhiêu tiền công ?

EM CÓ BIẾT

CÂU CHUYỆN GIẢM GIÁ

1. Bài toán thứ nhất: Một chiếc áo sơ mi giá 252000 đồng được bán với giá 201600 đồng. Hỏi chiếc áo sơ mi đó được giảm giá bao nhiêu ?

Lời giải của EGG

Chênh lệch giữa giá ban đầu và giá mới:
252000 – 201600 = 50400 (đồng).

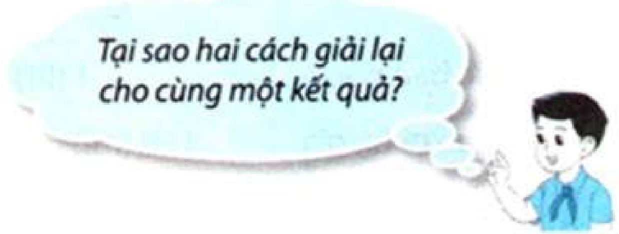
Chiếc áo sơ mi được giảm giá:

50400 : 252000 = 0,2 = 20%

Lời giải của CHICKEN

Tỉ lệ giữa giá mới và giá ban đầu:
201600 : 252000 = 0,8 = 80%.

Chiếc áo sơ mi được giảm giá:
100% – 80% = 20%.



SUY NGẪM:

- Cả hai cách giải bài toán như nhau:
  Một cách là so sánh trực tiếp tỉ số giữa giá giảm và giá gốc.
  Một cách là so sánh sự chênh lệch với giá gốc.
- Số tiền sau khi giảm và số tiền ban đầu là hai đại lượng tỉ lệ thuận:

Số tiền ban đầu	252000 đồng
Số tiền sau khi giảm	201600 đồng

Hệ số tỉ lệ là: $\frac{201600}{252000} = 0,8$ (= 80%).

Phần trăm giảm giá: 20%.

2. Bài toán thứ hai: Tại quầy để các loại nước giải khát ở siêu thị α, khách hàng thấy nhãn một bloc cacao ghi như hình bên. Họ không hiểu. Nếu em hiểu, hãy cho biết:

a) Giá bloc trước và sau khi hạ giá, và được hạ bao nhiêu phần trăm ?

b) Kiểm tra với giá gốc và cho nhận xét.

Nước Cacao		Siêu thị α
(150ml) 1 lít	35000đ	
Bloc 2 hộp	~~12500đ~~	10000đ

Lời giải của bạn EGG và CHICKEN

a) Sau khi suy nghĩ bạn EGG cho biết:

- Giá ban đầu là 12500đ,
- Giá sau khi hạ giá là 10000đ.

Bạn CHICKEN tính toán:

- Số tiền sau khi hạ giá giảm: $12500 - 10000 = 2500$ (đ).
- Hệ số tỉ lệ giữa số tiền sau khi hạ giá với số tiền ban đầu: $\frac{10000}{12500} = 0,8$ (80%).
- Hàng đã được bán với giá hạ so với giá ban đầu: $100\% - 80\% = 20\%$.

b) Nhận xét dung tích hộp và giá tiền là hai đại lượng tỉ lệ thuận:

	Dung tích	Giá bán
Lúc ban đầu	1 (lít)	35000 (đồng)
Sau khi hạ giá	150 (ml) = 0,15 (lít)	x (đồng)

Áp dụng tính chất hai đại lượng tỉ lệ thuận:

$$\frac{0,15}{x} = \frac{1}{35000} \Rightarrow x = (0,15.\,35000):1 = 52500 \text{ (đồng)}.$$

Biết một bloc gồm 2 hộp. Giá một bloc là 5250.2 = 10500 (đồng)
Cửa hàng bán hạ giá là 10000đ vẫn lãi 500 đồng.

ĐỐ VUI

1. Hai bạn, một cao và một thấp, cùng nhau đi từ một nhà đến trường. Bước chân của bạn cao bằng 120% bước chân của bạn thấp nhưng trong cùng một thời gian, bạn thấp bước nhiều hơn bạn cao 20% số bước. Hỏi ai sẽ đến trường trước ?

2. Biết rằng 7 con mèo ăn hết 14 con chuột trong thời gian là 21 phút. Hỏi cần bao nhiêu con mèo để ăn hết 100 con chuột trong một thời gian là 150 phút ?

CHỦ ĐỀ 7

ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số (tỉ lệ) $a \neq 0$

$$x.y = a \left(y = \frac{a}{x} \text{ hoặc } x = \frac{a}{y} \right)$$

$$x_1.y_1 = x_2.y_2 = \ldots = x_n.y_n \ (= a)$$

Tích hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi

$$\frac{y_n}{x_m} = \frac{y_m}{x_n}$$

Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia

x, y, z tỉ lệ nghịch với a, b, c

$$ax = by = cz$$

$$x : y : z = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \longleftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}}$$

HỎI ĐÁP NHANH

1. Điền vào chỗ chấm (…) cho thích hợp:

a) Trên cùng quãng đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng ……

b) Với một số tiền cho trước thì số hàng mua được và …… là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

c) Một số hữu tỉ x ($x \neq 0$) và số nghịch đảo của x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, có hệ số tỉ lệ là …..

d) Trong các tam giác có cùng diện tích, số đo cạnh đáy và số đo ….. là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

2. Tìm mệnh đề ĐÚNG trong các mệnh đề sau:

(A) Nếu vận tốc không đổi thì quãng đường và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

(B) Nếu thời gian không đổi thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

(C) Nếu quãng đường không đổi thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

(D) Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

3. Đúng điền Đ, sai điền S:

Khẳng định	Đ/S
a) Chu vi hình vuông và cạnh là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là 4.	
b) Hai đại lượng x và $\sqrt{x}$ là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.	
c) Chu vi một đường tròn tỉ lệ nghịch với bán kính đường tròn theo hệ số tỉ lệ 2π.	
d) Nếu ta cùng nhân một số (khác 0) vào tất cả các giá trị của hai đại đại lượng tỉ lệ nghịch ta sẽ được các số mới cũng là các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ nghịch.	

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền số thích hợp vào ô trống của bảng sau:

x	1	– 0,25		– 4	
y		8	2,5		– 12

Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau:

- Tích hai giá trị tương ứng luôn không đổi.

- Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.

Giải

Cách 1. Vì (– 0,25) và (– 4) là hai giá trị bất kì của đại lượng x, 8 và y là hai giá trị tương ứng của đại lượng y nên áp dụng tính chất đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{-0,25}{-4} = \frac{y}{8} \Rightarrow y = \frac{(-0,25).8}{-4} = 0,5.$$

Làm tương tự với các số còn lại, ta được bảng sau:

x	1	– 0,25	– 0,8	– 4	$\frac{1}{6}$
y	– 2	8	2,5	0,5	– 12

Cách 2. Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Vì (– 0,25) và (– 4) là hai giá trị bất kì của đại lượng x, 8 và y là hai giá trị tương ứng của đại lượng y nên áp dụng tính chất đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$(-0,25).8 = (-4).y \Rightarrow y = 0,5.$$

Tương tự cũng có bảng như bảng ở trên.

Ví dụ 2

Chia số 330 thành ba số tỉ lệ nghịch với 0,4; 0,6 và 1,2.

Giải

Gọi ba số phải tìm lần lượt là x, y và z, ta có $x + y + z = 330$.

Theo đề bài ta có:

$$x : y : z = \frac{1}{0,4} : \frac{1}{0,6} : \frac{1}{1,2} = 3 : 2 : 1.$$

Suy ra:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x + y + z}{3 + 2 + 1} = \frac{330}{6} = 55.$$

Vậy: $x = 165$, $y = 110$, $z = 55$.

Ví dụ 3

Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là a ($a \neq 0$). Biết y và z cũng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nhưng hệ số tỉ lệ là b ($b \neq 0$). Hỏi giữa hai đại lượng x và z có tương quan tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch không ?

Theo em thì bạn BEE giải như sau đúng hay sai ?

Lời giải của bạn BEE

x và y tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ a ($a \neq 0$)

$\Rightarrow x = \dfrac{y}{a} = y : a.$

y và z tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ b ($b \neq 0$)

$\Rightarrow y = \dfrac{z}{b}.$

Suy ra: $x = \dfrac{z}{b} : a = \dfrac{z}{ab}$ *(ab ≠ 0 vì a và b ≠ 0).*

Vậy x và z tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ ab.

Giải

- Chỗ sai: Viết công thức sai.
  Nếu x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ a, thì $xy = a$ chứ không phải $x = \dfrac{y}{a}$.
- Sửa lại: Viết đúng công thức.
  x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là a thì $x = \dfrac{a}{y}$.
  y và z là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là b thì $y = \dfrac{b}{z}$.
  Suy ra $x = \dfrac{a}{y} = \dfrac{a}{\frac{b}{z}} = \dfrac{a.z}{b} \Rightarrow \dfrac{x}{z} = \dfrac{a}{b}$,
  mà $\dfrac{a}{b}$ là hằng số khác 0, nên x và z là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
- Kết luận: Bạn BEE giải sai vì viết nhầm công thức.

Ví dụ 4

Chia số 4500 thành ba số mà 80% số thứ nhất bằng $53\frac{1}{3}$ % số thứ hai và bằng 40% số thứ ba.

Tìm một tỉ lệ thức giữa ba số.

Giải

Ta có $53\frac{1}{3}\% = \frac{160}{3}\%$

Gọi ba số phải tìm lần lượt là x, y và z, ta có $x + y + z = 4500$.

Theo đề bài ta có: $80\%.x = \frac{160}{3}\%.y = 40\%.z$.

Suy ra: $x : y : z = \frac{1}{80\%} : \frac{1}{\frac{160}{3}\%} : \frac{1}{40\%} = 2 : 3 : 4$.

Giải tương tự ví dụ 2, ta có $x = 1000$, $y = 1500$, $z = 2000$.

Ví dụ 5

Một người vào siêu thị hoa quả và nhẩm tính thấy với số tiền mình mang đi có thể mua được: hoặc 3 kg nho, hoặc 5 kg mận, hoặc 4 kg táo. Hỏi giá tiền mỗi loại quả, biết số tiền mua 3 kg táo nhiều hơn số tiền mua 2 kg mận là 210000 đồng.

Giải

Gọi giá tiền nho, táo và mận là x, y và z (đồng/kg).

Theo đề bài ta có:

$$3y - 2z = 210000.$$

Vì cùng một số tiền có thể mua được 3 kg nho, hoặc 4 kg táo, hoặc 5 kg mận nên giá tiền và khối lượng quả mua được là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có

$$3x = 4y = 5z.$$

Suy ra: $x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{3y - 2z}{45 - 24} = \frac{210000}{21} = 10000.$$

Vậy giá nho, táo và mận lần lượt là 200000, 150000 và 120000 (đồng/kg).

Ví dụ 6*

Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là số dương. Biết x có hai giá trị mà tích bằng 2 và hiệu bình phương hai giá trị đó là 3, còn hiệu bình phương hai giá trị tương ứng của y là – 12. Viết công thức liên hệ giữa x và y.

Giải

Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có $xy = a$ và $a > 0$.

Gọi hai giá trị của x là x_1, x_2, hai giá trị tương ứng của y là y_1, y_2. Theo đề bài ta có:

$x_1.x_2 = 2$; $x_1^2 - x_2^2 = 3$; $y_1^2 - y_2^2 = -12$.

Đặt: $b = \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{y_1^2}{x_2^2} = \frac{y_2^2}{x_1^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{-(x_1^2 - x_2^2)} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

Suy ra: $b = \pm 2$.

- Với $b = 2$, thì $y_1 = 2x_2$ và $y_2 = 2x_1$.

  $x_2.x_1 = 2 \Rightarrow a = y_1.x_1 = (2x_2).x_1 = 2.(x_2.x_1) = 4 > 0$ (chọn). Vậy $y = \dfrac{4}{x}$.
- Với $b = -2$, thì $y_1 = -2x_2$ và $y_2 = -2x_1$

  $x_2.x_1 = 2 \Rightarrow a = y_1.x_1 = (-2x_2).x_1 = -2.(x_2.x_1) = -4 < 0$ (loại).

  Vậy ta có công thức: $y = \dfrac{4}{x}$ (hay có thể viết là: $xy = 4$)

Ví dụ 7*

Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Khi x nhận các giá trị $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$ thì các giá trị tương ứng y_1 và y_2 có hiệu bằng 13. Viết công thức liên hệ giữa x và y.

Giải

Vì x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có $xy = a$ $(a \neq 0)$.

Với hai giá trị của x là $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$, có hai giá trị tương ứng của y là y_1 và y_2 thì $y_1 - y_2 = 13$. Theo tính chất của đại lượng tỉ lệ nghịch ta có:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1}{2} = \frac{y_2}{-3} = \frac{y_1 - y_2}{2-(-3)} = \frac{13}{5}.$$

Suy ra: $y_1 = 5{,}2 \Rightarrow x_1.y_1 = (-3).5{,}2 = -15{,}6$.

Vậy ta có công thức: $y = \dfrac{-15{,}6}{x}$ (hay có thể viết là : $xy = -15{,}6$).

Ví dụ 8*

Cho $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ và c là các đại lượng nào đó. Ta có hai tập hợp:

$P = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$ và $Q = \{c\}$.

Biết tương quan giữa đại lượng c của tập hợp Q với lần lượt các phần tử của tập hợp P là tương quan tỉ lệ nghịch. Khi đó tương quan đôi một giữa các phần tử của tập hợp P với nhau là:

(A) Không có tương quan nào cả.

(B) Một số là tương quan tỉ lệ thuận và số còn lại là tương quan tỉ lệ nghịch.

(C) Tương quan tỉ lệ thuận.

(D) Tương quan tỉ lệ nghịch.

Hãy chọn phương án đúng.

Giải

Biết tương quan giữa c và c_1 là tương quan tỉ lệ nghịch, ta có: $c_1.c = m$ $(m \neq 0)$.

Tương tự, tương quan giữa c và c_2 là tương quan tỉ lệ nghịch, ta có: $c_2.c = n$ $(n \neq 0)$.

Suy ra: $\dfrac{c_1.c}{c_2.c} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{m}{n}$ hay tương quan giữa c_1 và c_2 là tương quan tỉ lệ thuận.

Chứng minh tương tự, ta có tương quan đôi một giữa các phần tử của tập hợp P với nhau là tương quan tỉ lệ thuận.

Chọn phương án C.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

7.1. Với số tiền trước đây mua được 32,9 kg bột mì thì nay mua được 40 kg bột mì. Hỏi bột mì hạ giá bao nhiêu % ?

7.2. Biết 78 người hoàn thành một công việc trong 65 ngày.

a) Nếu năng suất lao động mỗi người như nhau, thì cần thêm bao nhiêu người nữa để hoàn thành công việc đó trong 39 ngày ?

b) Khi cải tiến công cụ lao động thì năng suất tăng thêm 20%. Hỏi cần giảm bao nhiêu người mà vẫn hoàn thành công việc đó trong 65 ngày ?

7.3. Cà phê hạ giá $23\frac{1}{7}\%$. Với số tiền trước đây mua được 5,38 kg cà phê, thì nay sẽ mua thêm được bao nhiêu ki-lô-gam cà phê (hạ giá) ?

7.4. Có hai đội công nhân làm đường. Đội một có 35 người làm trong 16 ngày thì đào được 864 m^3 đất. Hỏi đội hai với 20 người làm trong 14 ngày sẽ đào được bao nhiêu mét khối đất ? (Giả thiết năng suất lao động của mỗi người là như nhau).

7.5. Một học sinh đi bộ từ nhà đến trường cần 50 phút, còn đi xe đạp chỉ cần 0,3 giờ. Tính quãng đường từ nhà đến trường biết vận tốc đi xe đạp lớn hơn vận tốc đi bộ là 8 km/h.

NÂNG CAO

7.6. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi x_1 và x_2 là hai giá trị nào đó của x, còn y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y. Biết $x_1 = -3$; $y_2 = 5$ và $5x_2 - 3y_1 = -60$.

a) Tìm x_2 và y_1.

b) Viết công thức liên hệ giữa x và y.

7.7. Gọi x, y và z theo thứ tự là số vòng quay của kim giờ, kim phút và kim giây trong cùng một đơn vị thời gian.

a) Điền các số thích hợp vào ô trống của bảng dưới đây.

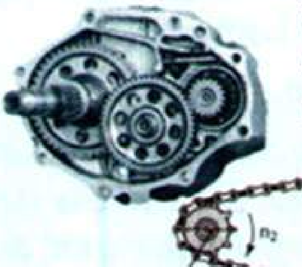
x	1				
y		1			
z			1	0,5	5

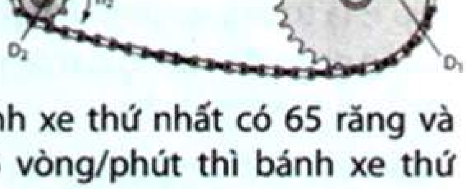
b) Viết công thức biểu diễn z theo x.

7.8. Để thanh lí cửa hàng, ông chủ cửa hàng ôtô quyết định giảm giá mỗi chiếc xe xuống 10%.

Nhưng sau đó, ông ta nhận thấy mình sẽ lỗ nếu bán với giá này, nên ông ta quyết định tăng giá đã giảm lên thêm 5%. Vậy mức giảm giá thực của ông chủ cửa hàng là bao nhiêu phần trăm?

7.9. Để truyền một chuyển động người ta có thể dùng dây xích nối hai bánh xe có răng, hoặc các bánh xe có răng khớp với nhau, hoặc dùng dây cu-roa (hình dưới). Ta xét một bộ máy truyền chuyển động có hai bánh xe khớp răng với nhau:





a) Nếu bánh xe thứ nhất có 65 răng và quay 36 vòng/phút thì bánh xe thứ hai có 45 răng sẽ quay được bao nhiêu vòng/phút ?

b) Để bánh xe thứ hai quay được 78 vòng/phút thì cần thiết kế bánh xe thứ hai có bao nhiêu răng ?

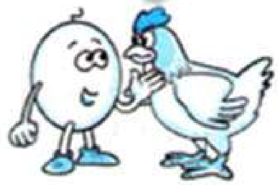
7.10. Khoảng cách giữa hai ga tàu A và B bằng 28 km. Cùng một lúc có hai đoàn tàu, một khởi hành từ ga A, một đi từ ga B. Nếu chuyển động cùng chiều thì sau một thời gian tàu thứ nhất đi từ A sẽ đuổi kịp tàu thứ hai đi từ B. Nếu chuyển động ngược chiều, thì thời gian hai tàu gặp nhau chỉ bằng $\frac{2}{7}$ thời gian tàu thứ nhất đuổi kịp tàu thứ hai. Hỏi hai đoàn tàu gặp nhau tại vị trí nào giữa hai ga A và B ?

EM CÓ BIẾT

TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

1. Bạn EGG đố bạn CHICKEN

Để đi từ A đến B, một xe máy cần 1 giờ 30 phút. Nếu vận tốc xe máy tăng thêm 5 km/h thì thời gian rút ngắn được 15 phút. Tìm quãng đường AB.



Giả sử có hai xe máy cùng đi từ A đến B. Gọi vận tốc và thời gian của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là v_1 và t_1, v_2 và t_2.

LỜI GIẢI CỦA CHICKEN

Theo đề bài, ta có: $v_2 - v_1 = 5$ (km/h).

$t_1 = 1h30' = 90'$ và $t_2 = 1h30' - 15' = 75'$.

Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên có

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{v_1}{5} = \frac{v_2}{6}.$$

Suy ra: $\frac{v_1}{5} = \frac{v_2}{6} = \frac{v_2 - v_1}{6-5} = \frac{5}{1} = 5$

$\Rightarrow v_1 = 25$ (km/h)

Ta có: $t_1 = 1h30' = 1{,}5$ giờ.

Vậy quãng đường AB có độ dài bằng

$v_1.t_1 = 25.1{,}5 = 37{,}5$ (km).

2. Bạn CHICKEN đố lại bạn EGG

Đúng lúc 12 giờ, một chiếc thuyền đi từ A đến B với vận tốc 6 km/h. Sau khi đỗ ở B một giờ, thuyền quay về A với vận tốc 9 km/h và tới A lúc 20 giờ 30 phút cùng ngày. Tính quãng đường AB.

Giả sử có hai chiếc thuyền, một đi từ A đến B và một đi từ B về A. Gọi vận tốc và thời gian của chiếc thuyền thứ nhất và thứ hai lần lượt là v_1 và t_1, v_2 và t_2.

LỜI GIẢI CỦA BẠN EGG

Ta có: $v_1 = 6$ (km/h) và $v_2 = 9$ (km/h).

$t_1 + t_2 = 20h30' - (12h00 + 1h00) = 7h30' = 7{,}5$ giờ.

(do thuyền đi từ A lúc 12h00 đến B rồi về A lúc 20h30, sau khi đỗ ở B 1 giờ).

Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên có:

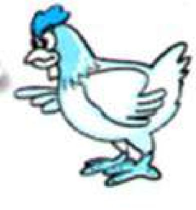
$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{3} = \frac{t_2}{2} = \frac{t_1 + t_2}{3+2} = \frac{7{,}5}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow t_2 = 3 \text{ giờ}.$$

Vậy quãng đường AB là $9.3 = 27$ (km).

3. Hai bạn CHICKEN và EGG cùng trao đổi bài toán sau

Lúc 8 giờ sáng, một người đi từ nhà đến sân bay. Nếu đi với vận tốc 40 km/h thì đến chậm 30 phút để làm thủ tục bay, nhưng nếu đi với vận tốc 50 km/h thì lại đến sớm 2 giờ để làm thủ tục bay. Tìm khoảng cách từ nhà đến sân bay và thời gian làm thủ tục bay là lúc mấy giờ ?



LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có:
$v_1 = 40$ (km/h) và $v_2 = 50$ (km/h),
$t_1 = t + 30' = t + 0{,}5$(giờ) và $t_2 = t - 2$(giờ)
$\Rightarrow t_1 - t_2 = (t + 0{,}5) - (t - 2) = 2{,}5$ (giờ).

Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên có:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{t_1}{5} = \frac{t_2}{4}.$$

Suy ra: $\frac{t_1}{5} = \frac{t_2}{4} = \frac{t_1 - t_2}{5-4} = \frac{2{,}5}{1} = 2{,}5$

hay $t_2 = 2{,}5 \,.\, 4 = 10$ (giờ).
Khoảng cách từ nhà đến sân bay:

$$v_2 \,.\, t_2 = 50.10 = 500 \text{ (km)}.$$

Thời gian để làm thủ tục bay:
$8 + t = 8 + (t_2 + 2) = 20$ (giờ) hay 8 giờ tối.

Gọi vận tốc và thời gian người đó đi từ nhà đến sân bay, nếu đi với vận tốc 40 km/h là v_1 và t_1, còn lại đi với vận tốc 50 km/h là v_2 và t_2. Gọi t là thời gian người đó đi từ nhà đến sân bay đúng giờ làm thủ tục bay.

Với **bài toán chuyển động** nhớ câu "***thần chú***":

Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Từ tỉ số giữa các vận tốc hoặc giữa các thời gian đi tìm tổng hoặc hiệu các vận tốc hoặc thời gian đó. Sau đó áp dụng tính chất của hai đại lượng tỉ lệ nghịch để giải bài toán.

TOÁN LỖ LÃI

1. Hai bạn CHICKEN và EGG mang một số tiền vừa đủ để mua 20 quyển vở. Nhân dịp năm học mới cửa hàng hạ giá 20%. Bạn EGG cho là sẽ mua được 24 quyển vở. Bạn CHICKEN lại nói sẽ mua được 25 quyển vở. Theo bạn, ai đúng và ai sai?

LỜI GIẢI

Số tiền không đổi, suy ra tương quan giữa SỐ HÀNG và GIÁ HÀNG là tỉ lệ nghịch. Ta lập bảng sau:

	Giá hàng	Số hàng
Chưa hạ giá	100%	100%
Sau hạ giá	80%	x

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có:

$$\frac{100\%}{x} = \frac{80\%}{100\%} \Rightarrow \frac{100\%}{x} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{100\%.5}{4} = 125\%.$$

Vậy, sau khi hạ giá 20% thì số vở mua được bằng 125% số quyển vở mua được khi chưa hạ giá.

Suy ra số vở mua được là 125% của 20, tức là bằng $\frac{20.125}{100} = 25$ (quyển vở).

Như vậy bạn EGG nói sai, còn bạn CHICKEN nói đúng.

2. Hãy cùng nhau giải bài toán sau để xem thắc mắc của bạn EGG có đúng không:

Nhân dịp Noel, một cửa hàng sách giảm giá 10% giá bìa. Tuy vậy, cửa hàng vẫn có lãi 12,5% so với giá mua. Hỏi ngày thường cửa hàng đó lãi bao nhiêu % so với giá mua ?

LỜI GIẢI CỦA HAI BẠN CHICKEN VÀ EGG

Giá bán sau khi đã giảm 10% là 90%. Giá bán sau khi giảm vẫn lãi so với giá mua là 12,5%. Biết giá mua ban đầu không đổi, thì giá bán và số tiền lãi là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Ta lập bảng:

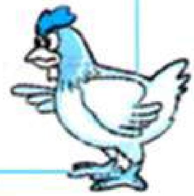
	Giá bán (%)	Giá bán so với giá mua (%)
Chưa hạ giá	100%	x
Sau hạ giá	90%	112,5%

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ thuận, ta có:

$$\frac{x}{112,5\%} = \frac{100\%}{90\%} \Rightarrow \frac{x}{112,5\%} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{112,5\%.10}{9} = 125\%.$$

Vậy, bình thường cửa hàng đã lãi 25% so với giá mua.



Các bài toán lỗ lãi thường đưa về dạng toán tỉ lệ thuận hoặc tỉ lệ nghịch. Khi một cửa hàng quyết định hạ giá, thì có thể xảy ra một trong các tình huống sau:

- Cửa hàng vẫn có lãi sau khi hạ giá.
- Số hàng bán trước đã đủ số tiền lãi rồi.
- Cửa hàng bán chấp nhận lỗ để thu hồi vốn.

ĐỐ VUI

Hai bạn CHICKEN và EGG cùng đi từ A và B đến gặp nhau. Cùng lúc đó chú chó KEY nhà bạn CHICKEN cũng xuất phát cùng với chủ của nó, chạy với tốc độ 12 km/h. Khi gặp EGG, chó KEY tinh khôn lại quay trở lại ngay về với chủ. Gặp chủ ngay lập tức KEY quay lại chạy đến tìm EGG. Cứ vậy cho tới khi CHICKEN và EGG gặp nhau. Hỏi chó KEY đã chạy được một quãng đường là bao nhiêu, biết vận tốc của hai bạn bằng 3 km/h và khoảng cách AB bằng 2,7 km ?

CHỦ ĐỀ 8 HÀM SỐ. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số

y là hàm số của x
x là biến số của y

cho bởi bảng

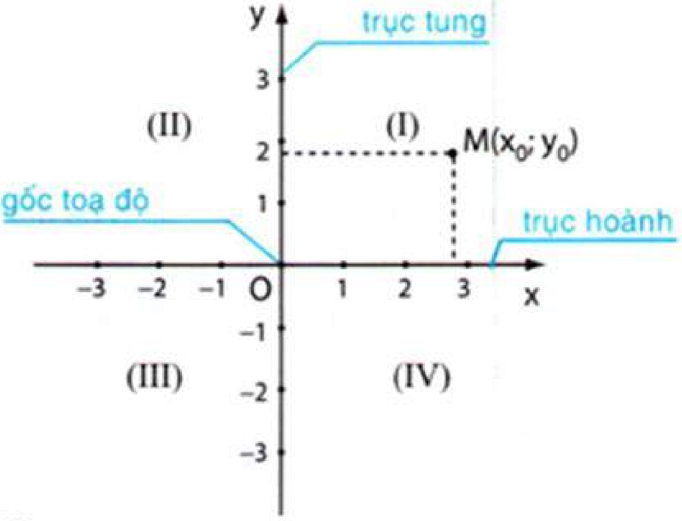
x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–6	–4	–2	0	2	4	6	8

cho bởi công thức

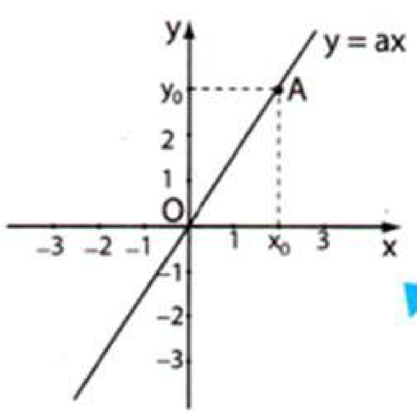
$y = f(x)$; $y = 2.x$

Với mỗi giá trị của x luôn xác định được ***chỉ một*** *giá trị tương ứng của y*

Mặt phẳng toạ độ



Đồ thị hàm số y = ax



Đồ thị hàm số $y = ax$ ($a \neq 0$) là đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị $(x; y)$ tương ứng trên mặt phẳng toạ độ.

Cách vẽ

– Xác định một điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (khác điểm O).

– Vẽ đường thẳng đi qua O và A.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Dòng I là toạ độ các điểm, dòng II là các hàm số. Hãy ghép một ô của dòng I với một ô của dòng II để chỉ ra toạ độ của điểm thuộc đồ thị của hàm số:

Dòng I	A A(5;1)	B B(– 2;1)	C C(1;5)	D D(5;– 10)	E E(– 0,1; – 0,2)
Dòng II	$y = 2.x$ 1	$y = -2.x$ 2	$y = 0{,}2.x$ 3	$y = \dfrac{1}{0{,}2}.x$ 4	$y = -\dfrac{1}{2}.x$ 5

2. Điền vào chỗ chấm (…) cho thích hợp

a) Khi nói đến hàm số, là ta nói đến sự tương quan giữa hai đại lượng biến thiên mà nhận các giá trị bằng ……

b) Mỗi giá trị của đại lượng x không thể có …… một giá trị tương ứng của đại lượng y.

c) Mỗi giá trị tương ứng của đại lượng y có thể nhận ….. giá trị tương ứng của đại lượng x.

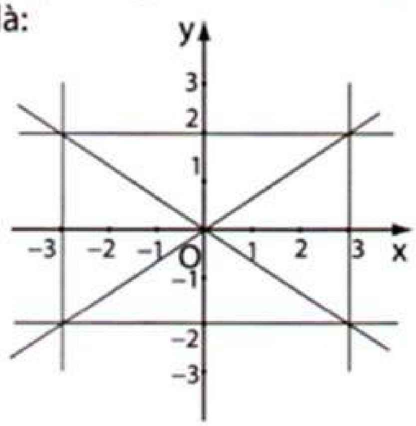
3. Cho 6 đường thẳng chứa các cạnh và đường chéo của một hình chữ nhật có tâm trùng với gốc toạ độ như hình vẽ sau. Số đường thẳng là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là:

(A) 6

(B) 4

(C) 2

(D) 0

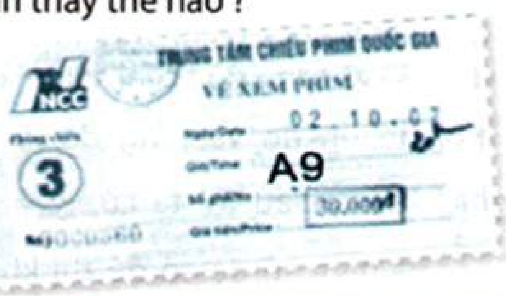


HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Bạn **BEE** có một chiếc vé xem phim. Bạn BEE khoe với các bạn là mình có thể rủ thêm một người bạn nữa đi xem phim cùng, mình ngồi ở hàng A cột 9, còn bạn mình ngồi ở hàng 9 cột A.

Các bạn thấy thế nào ?



*Mỗi cặp số xác định **duy nhất** một điểm trên mặt phẳng toạ độ. Hoành độ viết trước tung độ.*

Giải

Có thể hình dung:

Chỗ ngồi trong rạp phim như là các điểm (ghế ngồi) trong một mặt phẳng toạ độ (rạp phim).

Kí hiệu A9 là dãy A (chỉ hàng) và số ghế 9 (chỉ cột) là toạ độ của một điểm (chỗ ngồi).

Với chiếc vé này bạn BEE có một vị trí chỗ ngồi cố định.

Bạn BEE không thể mời thêm một người bạn đi cùng.

Bạn BEE ngồi ở hàng A cột 9, chứ không thể ngồi ở hàng 9 cột A.

Khi đi xem phim, xem ca nhạc hay xem đá bóng,… phải ngồi đúng chỗ.

Ví dụ 2

Cho các cặp số : (– 2; 1), (– 1; 0,5), (1; – 0,5), (2; – 1), (2,5; – 1,25).

a) Chứng tỏ rằng các cặp số trên xác định một hàm số.

b) Lập bảng giá trị của hàm số nói trên.

c) Biểu diễn hàm số đó trên một mặt phẳng toạ độ Oxy.

d) Hàm số trên được cho bởi công thức nào ?

Giải

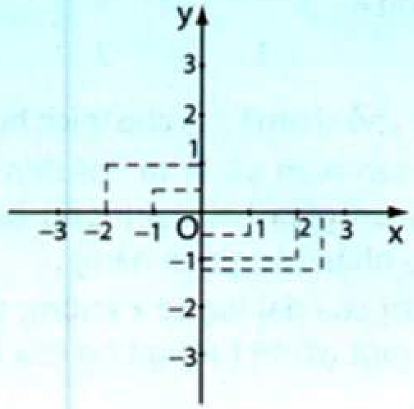
a) Các cặp số : (– 2; 1), (– 1; 0,5), (1; – 0,5), (2; – 1), (2,5; – 1,25) xác định một hàm số.
Vì mỗi giá trị của x ta xác định được chỉ một giá trị của y.

b)

x	– 2	– 1	1	2	2,5
y	1	0,5	– 0,5	– 1	– 1,25

Khi lập bảng các giá trị tương ứng của hàm số, ta viết các giá trị của x từ nhỏ đến lớn.

c)



Hàm số được xác định bởi 5 cặp số, nên đồ thị của hàm số chỉ có 5 điểm.

d) Hàm số cho bởi công thức y = – 0,5.x
Với công thức y = – 0,5.x đồ thị của hàm số là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ (và đi qua 5 điểm trên).

Ví dụ 3

Bạn BEE cho rằng trên cùng một hệ trục toạ độ Oxy tồn tại một đường thẳng mà các điểm của nó có một trong các tính chất sau:

a) Hoành độ và tung độ bằng nhau.

b) Hoành độ và tung độ là hai số đối nhau.

c) Hoành độ và tung độ là hai số nghịch đảo của nhau.

Bạn BEE nói có đúng không ?

Giải

a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số y = x có hoành độ và tung độ bằng nhau.

b) Các điểm thuộc đồ thị hàm số y = – x có hoành độ và tung độ là hai số đối nhau.

c) Khi hoành độ và tung độ là hai số nghịch đảo nhau thì ta có xy = 1, hay $y=\dfrac{1}{x}$ và hàm số đó có đồ thị không là đường thẳng.

Bạn BEE chỉ nói đúng câu a) và b) vì đồ thị của hai hàm số y = x và y = – x đều là đường thẳng.

Ví dụ 4*

Hàm số y = f(x) được xác định như sau:

Với mỗi số tự nhiên x có ba chữ số thì hàm số y = f(x) tương ứng với tổng các chữ số của x.

a) Tính f(124), f(279), f(304).

b) Có bao nhiêu số nguyên tố $x = \overline{abc}$, biết f(x) = 4?

Số nguyên tố chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.

Giải

a) Ta có : $\overline{abc} = 124 \Rightarrow f(124) = 1 + 2 + 4 = 7$

$\overline{abc} = 279 \Rightarrow f(279) = 2 + 7 + 9 = 18$

$\overline{abc} = 304 \Rightarrow f(304) = 3 + 0 + 4 = 7.$

b) Ta có : $x = \overline{abc} \Rightarrow f(x) = a + b + c = 4$ và $a \neq 0$.

Ta có bảng sau :

a	1				2			3		4
b	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
c	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0
$x = \overline{abc}$	103	112	121	130	202	211	220	301	310	400

Vì x là số nguyên tố nên $x \in \{103; 211\}$.

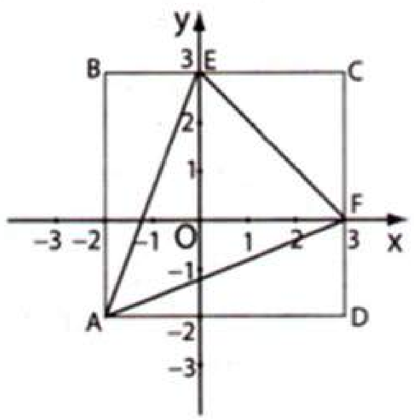
Ví dụ 5*

Cho ba điểm B(– 2; 3); C(3; 3) và D(3; – 2).

a) Xác định toạ độ điểm A, biết bốn điểm A, B, C và D tạo thành một hình vuông.

b) Tính chu vi và diện tích của hình vuông ABCD.

c) Bạn BEE cho rằng ba điểm O, A và C không thẳng hàng và tam giác tạo bởi ba điểm A,E,F là một tam giác đều (với BC cắt trục tung tại E, CD cắt trục hoành tại F). Các bạn thấy thế nào ?



Giải

a) Vì tứ giác ABCD là một hình vuông và BC vuông góc với trục tung và CD vuông góc với trục hoành, nên :

- Hoành độ điểm A bằng hoành độ điểm B;
- Tung độ điểm A bằng tung độ điểm D.

Vậy toạ độ của điểm A là (– 2; – 2).

b) Ta có cạnh hình vuông BC = 5 (đơn vị dài).

Chu vi (hình vuông ABCD) là 5.4 = 20 (đơn vị độ dài).

Diện tích (hình vuông ABCD) là 5.5 = 25 (đơn vị diện tích).

c) Ta có : Điểm C(3; 3) thuộc đường phân giác của góc phần tư (I) và (III), điểm A(– 2; – 2) cũng thuộc đường phân giác của góc phần tư (I) và (III).

Suy ra các điểm A, O và C thẳng hàng. Bạn BEE nói sai.

Ta có : E(0; 3) và F(3; 0) ⇒ OE = OF = 3 (đơn vị độ dài).

Suy ra $EF^2 = OE^2 + OF^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.

Tương tự cũng có : $AE^2 = 5^2 + 2^2 = 29$.

Vì $18 \neq 29 \Rightarrow AE^2 \neq EF^2 \Rightarrow AE \neq EF$ (độ dài các đoạn thẳng là số dương). Vậy tam giác AEF không là tam giác đều. Bạn BEE lại nói sai.

- Với tam giác vuông ABC tại A ta có hệ thức:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Tam giác đều có ba cạnh bằng nhau.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

8.1. Các cặp số sau có xác định một hàm số không ? Nếu có hãy lập bảng giá trị của hàm số và biểu diễn các cặp số đó trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

a) $(1; \frac{1}{2})$, $(4; 2)$, $(2; 6)$, $(1; \frac{1}{3})$, $(7; 9)$ và $(3; 4)$.

b) $(3; 1)$, $(2; 1)$, $(4; 1)$ và $(5; 1)$.

c) $(1; 1)$, $(4; 2)$, $(2; 4)$ và $(5; 4)$.

d) $(1; 3)$, $(1; 2)$, $(1; 4)$ và $(1; 5)$.

8.2. Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức $f(x) = \frac{12}{x}$.

a) Điền các giá trị còn thiếu vào ô trống:

y	− 6	− 3	− 1	2	4	12
f(x)						

b) Tính: $f(-12)$, $f(-4)$, $f(3)$, $f(6)$.

8.3. Cho hàm số $y = -7x$.

a) Tìm các giá trị của x, biết $y \in \{21; 12; -1; -2\}$.

b) Tìm các giá trị của x sao cho y chỉ nhận các giá trị dương.

8.4. Đồ thị (F) của hàm số $f(x) = ax$ đi qua điểm $A(-3; -1)$.

a) (F) là đồ thị của một hàm số có công thức như thế nào?

b) Các điểm $B\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$ và $C\left(6; \frac{1}{2}\right)$ có thuộc đồ thị (F) không ?

c) Nếu điểm D thuộc đồ thị (F) và có hoành độ bằng $-\frac{1}{3}$ thì tung độ bằng bao nhiêu ?

d) Nếu điểm E thuộc đồ thị (F) có tung độ bằng $-\frac{1}{3}$ thì hoành độ bằng bao nhiêu ?

NÂNG CAO

8.5. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho 4 điểm A, B, C và D có toạ độ như sau:

	Điểm A và B	Điểm B và C	Điểm C và D	Điểm D và A
Hoành độ	là hai số đối nhau	là hai số bằng nhau	là hai số đối nhau	là hai số bằng nhau
Tung độ	là hai số bằng nhau	là hai số đối nhau	là hai số bằng nhau	là hai số đối nhau

a) Bạn EGG đố bạn CHICKEN bốn điểm A, B, C và D là đỉnh của một hình chữ nhật hay một hình vuông.

b) Bạn CHICKEN đố bạn bạn EGG so sánh được hoành độ và tung độ của các điểm A và C, cũng như của các điểm B và D.

8.6. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 5$.

a) Tính $f(-0,5)$, $f(-0,4)$, $f(1)$, $f(4)$.

b) Tìm x sao cho $f(x) = -2$, $f(x) = 3$.

c) Chứng tỏ rằng với mọi số thực x ta có $f(x) = f(-x)$.

> $\forall x \in \mathbf{R}$ mà $f(x) = f(-x)$, thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn.

8.7. Cho một hệ trục toạ độ Oxy.

a) Vẽ đường thẳng (d_1) song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $A(2; 0)$.

b) Vẽ đường thẳng (d_2) vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm $B(0; 3)$.

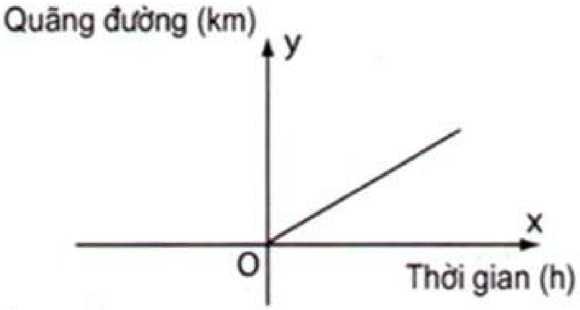
c) Tìm toạ độ của điểm C là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

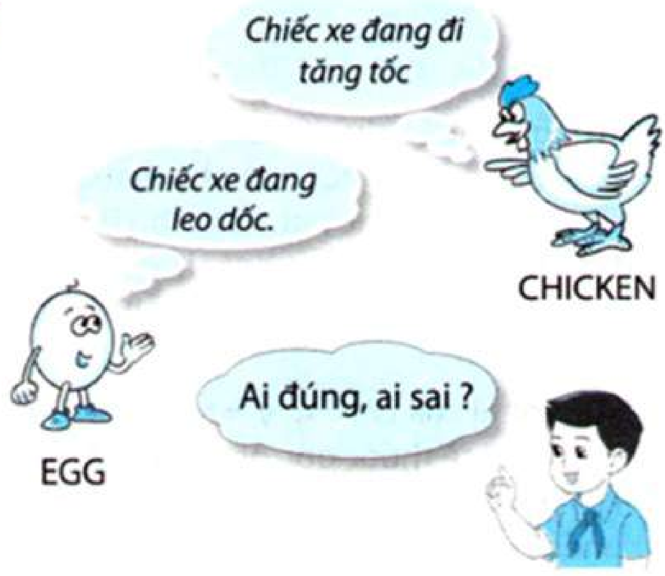
d) Tính diện tích của tứ giác OACB theo đơn vị độ dài của hệ trục toạ độ đã cho.

e) Xác định vị trí điểm $D(5; 3)$. Nối điểm D với các điểm A và O. So sánh diện tích tam giác OAD với tứ giác OACB.

EM CÓ BIẾT

1. Đồ thị dưới trình bày tương quan giữa quãng đường và thời gian mà một chiếc xe đã đi được.



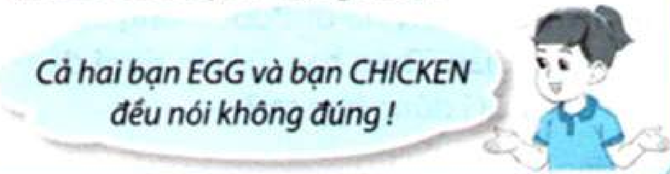


LỜI GIẢI

Đồ thị trên là đồ thị của hàm số $y = ax$ (a là hằng số khác 0) vì đó là một đường thẳng đi qua gốc toạ độ.

Theo chỉ dẫn trên đồ thị ta có y là quãng đường xe đi, x là thời gian chuyển động của xe nên a sẽ là vận tốc của xe.

Vì a là hằng số khác 0, nên vận tốc không đổi. Vậy chiếc xe đang đi với vận tốc không đổi (chiếc xe chuyển động đều).

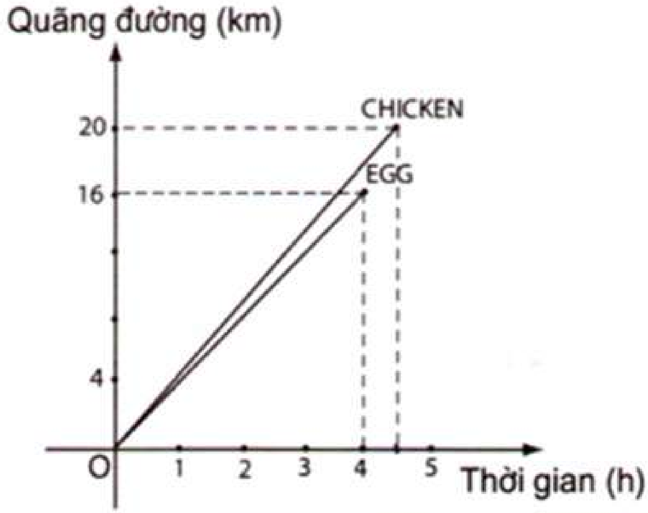


2. Hai bạn EGG và CHICKEN thi chạy (chạy cho đến hết sức thì dừng). Đồ thị bên mô tả diễn biến cuộc chạy. Bạn cho biết:

a) Quãng đường ai chạy được xa hơn ?

b) Ai chạy ít thời gian hơn ?

c) Cả hai bạn EGG và CHICKEN đều cho là vận tốc của mình cao hơn bạn. Ai đúng và ai sai ?



LỜI GIẢI

a) Bạn CHICKEN chạy được 20 km và bạn EGG chạy được 16 km. CHICKEN chạy xa hơn.

b) Bạn CHICKEN chạy hết 4 giờ 30 phút, còn bạn EGG hết 4 giờ. Thời gian chạy của bạn EGG ít hơn của bạn CHICKEN.

c) Sau 4 giờ 30 phút bạn CHICKEN chạy được 20km, vận tốc của bạn CHICKEN:

$$20 : 4,5 = 4,(4) \text{ (km/h)}.$$

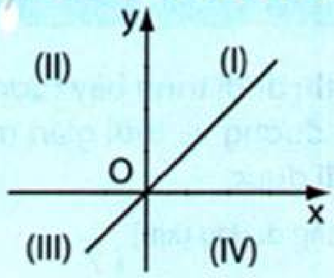
Bạn EGG chạy được 16 km sau 4h, vận tốc của bạn EGG là 4 km/h. Vậy vận tốc của bạn CHICKEN lớn hơn.

SUY NGẪM:

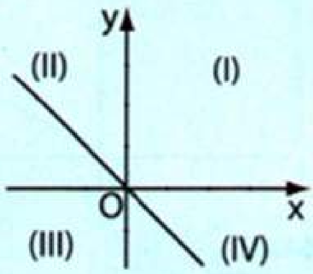
Trong bài toán chuyển động, hai đồ thị nằm trong cùng một mặt phẳng toạ độ Oxy (đều thuộc góc phần tư thứ I), góc tạo bởi đồ thị và trục hoành, góc nào lớn hơn thì vận tốc của chuyển động đó lớn hơn.

Với đồ thị của hàm số y = ax, khi a > 0 thì đồ thị sẽ thuộc góc phần tư thứ I và III, ngược nếu a < 0 thì đồ thị thuộc góc phần tư thứ II và IV.

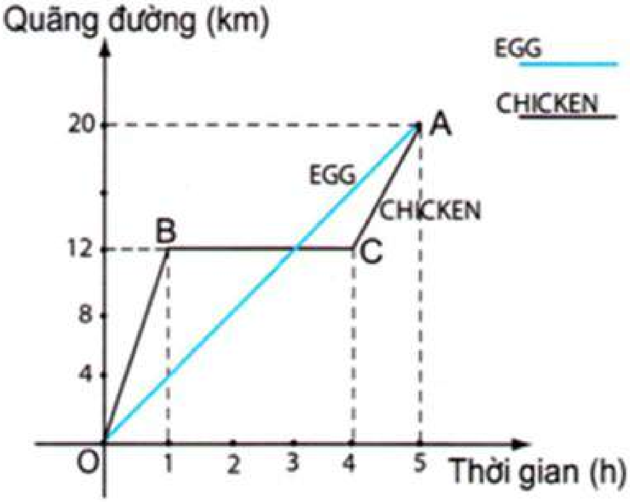
(a > 0)



(a < 0)



3. Đồ thị dưới cho biết tương quan giữa quãng đường và thời gian mà hai bạn EGG và CHICKEN đã đi được trong cùng một thời gian. Theo bạn, ý kiến dưới đây của bạn EGG đúng hay sai?



LỜI GIẢI

Vận tốc của bạn EGG : 20 : 5 = 4 (km/h).

Vận tốc của bạn CHICKEN từng chặng:

Chặng OB, vận tốc là 12 (km/h).

Chặng BC, từ 1 giờ đến 4 giờ bạn CHICKEN nghỉ không đi tiếp.

Chặng CA, vận tốc là 8 (km/h).

Vận tốc trung bình của bạn CHICKEN là:

$$(12 + 8) : (1 + 1) = 10 \text{ (km/h)}.$$

Vậy, vận tốc trung bình của bạn CHICKEN lớn hơn vận tốc trung bình của bạn EGG.

Ý kiến của bạn EGG sai.

Vận tốc trung bình $= \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n}{t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n}$

$S_1, \ldots, S_n$ là độ dài từng chặng đường,

$t_1, \ldots, t_n$ là thời gian đi tương ứng của từng chặng.

ĐỐ VUI

Anh đi từ nhà đến trường hết 1 giờ, em đi hết 1 giờ 30 phút. Nếu em đi trước anh 25 phút thì anh sẽ đuổi kịp em tại đâu trên quãng đường từ nhà đến trường ?

PHẦN

HÌNH HỌC

CHƯƠNG I

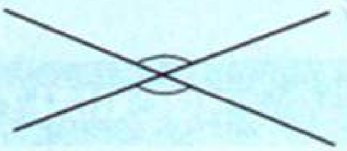
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

- HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH
  HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
- HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG
- TIÊN ĐỀ Ơ-CLÍT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG
  TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG
- ĐỊNH LÍ

CHỦ ĐỀ 1 HAI GÓC ĐỐI ĐỈNH. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hai góc đối đỉnh là hai góc mà mỗi cạnh của góc này là tia đối của một cạnh của góc kia.



Hai góc đối đỉnh

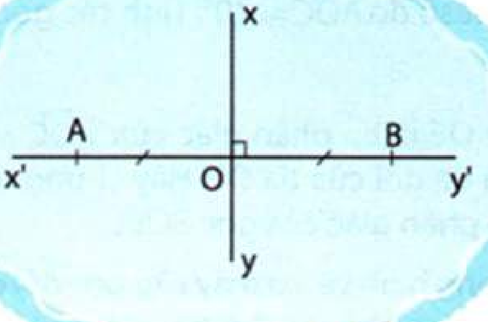
Định nghĩa

Tính chất

Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau

xy là trung trực của AB $\Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ xy \perp AB \end{cases}$

A và B đối xứng nhau qua xy



Có một và chỉ một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng.

xy $\perp$ x'y' tại O $\Leftrightarrow \widehat{xOx'} = 90^\circ$

Hai góc có cạnh tương ứng vuông góc là hai góc có đường thẳng chứa mỗi cạnh của góc này tương ứng vuông góc với đường thẳng chứa một cạnh của góc kia.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Cho hai góc bằng nhau, có chung đỉnh và một cặp cạnh là hai tia đối nhau. Hỏi cặp cạnh còn lại có là hai tia đối nhau không ? Vẽ hình minh hoạ.
2. Một đoạn thẳng có mấy đường trung trực ?
3. Cho đoạn thẳng CD nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB, C và D nằm ở hai phía của đường thẳng AB. Hỏi đường thẳng AB có là đường trung trực của đoạn thẳng CD không ?

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

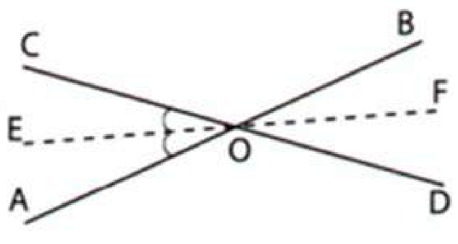
Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O.

a) Kể tên các cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt).

b) Biết số đo $\widehat{AOC} = 40^c$. Tính các góc còn lại.

c) Kẻ OE là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ và kẻ OF là tia đối của tia OE. Hãy chứng tỏ OF là tia phân giác của góc BOD.

d) Trong hình vẽ có mấy cặp góc đối đỉnh, là những góc nào ? (không kể góc bẹt). Tính số đo của các góc đó.



Hình 1

Giải (h.1)

a) Các cặp góc đối đỉnh là :

$\widehat{AOC}$ đối đỉnh với $\widehat{BOD}$;

$\widehat{COB}$ đối đỉnh với $\widehat{AOD}$.

b) $\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù nhau

nên : $\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180°$.

Mà $\widehat{AOC} = 40°$, vậy ta có :

$\widehat{COB} = \widehat{AOD} = 140°$.

$\widehat{DOB} = \widehat{AOC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{DOB} = 40°$.

c) Ta có : OE và OF là hai tia đối nhau (theo giả thiết) ;

OA và OB là hai tia đối nhau (AB là đường thẳng).

Vậy $\widehat{AOE}$ và $\widehat{BOF}$ là hai góc đối đỉnh (theo định nghĩa).

Suy ra : $\widehat{AOE} = \widehat{BOF} = \dfrac{40°}{2} = 20°$.

$\widehat{BOF} = 20°$ mà OF nằm giữa hai tia OB và OD nên $\widehat{BOF} = 20° = \dfrac{1}{2}\widehat{BOD}$.

Vậy OF là tia phân giác của góc BOD.

d) Có 6 cặp góc đối đỉnh :

$\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 40^\circ$ (câu b).

$\widehat{COB} = \widehat{AOD} = 140^\circ$ (câu b).

$\widehat{COE} = \widehat{FOD} = 20^\circ$ (câu c).

$\widehat{AOE} = \widehat{BOF} = 20^\circ$ (câu c).

$\widehat{EOB} = \widehat{AOF} = 20^\circ + 140^\circ = 160^\circ$.

$\widehat{EOD} = \widehat{COF} = 160^\circ$.

Ví dụ 2

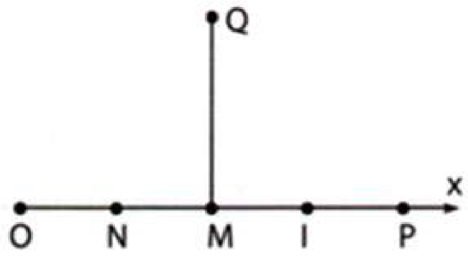
Trên tia Ox đặt các điểm M, N, I và P sao cho OP = 2OM ; $ON = \frac{1}{4}OP$;

OI = 3ON. Biết OP = 10cm.

a) Tìm độ dài các đoạn OI ; OM ; ON.

b) Xác định vị trí các điểm M, N, I, P trên tia Ox.

c) Lấy Q thuộc nửa mặt phẳng bờ có chứa tia Ox sao cho QM ⊥ Ox. QM là đường trung trực của các đoạn thẳng nào ? Tại sao ?



Hình 2

Giải (h.2)

a) OP = 10cm ; OP = 2OM.

Vậy OM = 5cm ; $ON = \frac{1}{4}OP$.

Vậy ON = 2,5cm ; OI = 3ON.

Vậy OI = 7,5(cm).

b) Các tia ON ; OM ; OI và OP có chung gốc O mà :

ON < OM < OI < OP

(2,5cm < 5cm < 7,5cm < 10cm).

Vậy các điểm nằm trên tia Ox theo thứ tự : N ; M ; I và P.

c) OM < OP (5cm < 10cm) nên điểm M nằm giữa hai điểm O và P.

Ta có : OM + MP = OP hay 5 + MP = 10

⇒ MP = 5. Vậy OM = MP = 5cm.

M là trung điểm của OP và MQ ⊥ OP.

Vậy MQ là đường trung trực của đoạn thẳng OP. Tương tự, MQ là đường trung trực của đoạn thẳng NI.

Ví dụ 3*

Cho $\widehat{mOn} = 80^\circ$, Ot là tia phân giác của góc mOn. Vẽ tia Oh sao cho Oh ⊥ Ot. Tính số đo góc mOh.

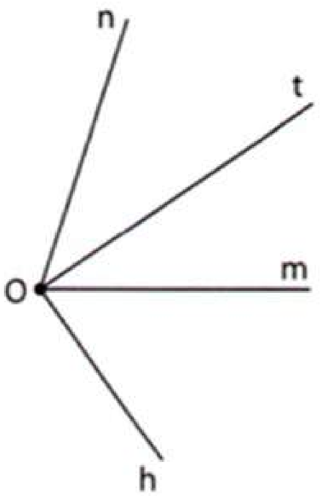
Giải

Xảy ra hai trường hợp:

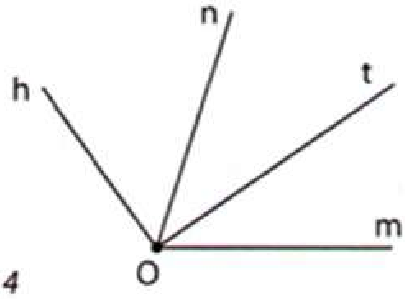
a) Tia Oh nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ot có chứa Om (h.3).

Ta có Ot ⊥ Oh

$\Rightarrow \widehat{tOh} = 90^\circ$.



Hình 3



Hình 4

Sai lầm thường gặp khi giải bài toán này là không xét đủ hai trường hợp.

Theo đầu bài, tia Ot là tia phân giác của góc mOn

$\Rightarrow \widehat{tOm} = \frac{1}{2}\widehat{mOn} = \frac{1}{2}.80^\circ = 40^\circ.$

Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ot có chứa tia Om, do $\widehat{tOm} < \widehat{tOh}$ nên tia Om nằm giữa hai tia Ot, Oh, ta có

$$\widehat{tOm} + \widehat{mOh} = \widehat{tOh}$$

$\Rightarrow 40^\circ + \widehat{mOh} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{mOh} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$

b) Tia Oh nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ot không chứa tia Om (h.4).

Ta có $Ot \perp Oh$

$\Rightarrow \widehat{tOh} = 90^\circ.$

Mà Ot là tia phân giác của góc mOn nên

$$\widehat{tOm} = \frac{1}{2}\widehat{mOn} = \frac{1}{2}.80^\circ = 40^\circ$$

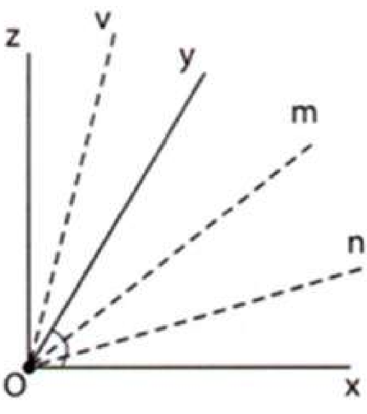
Tia Ot nằm giữa hai tia Om và Oh nên

$$\widehat{mOh} = \widehat{tOh} + \widehat{tOm}.$$

Vậy $\widehat{mOh} = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ.$

Ví dụ 4*

Trên tờ giấy có vẽ góc xOy bằng 54°. Hãy dùng thước kẻ và kéo để cắt góc xOy thành ba góc bằng nhau có chung đỉnh O.



Hình 5

Giải (h.5)

Từ O dựng tia Oz sao cho góc xOz vuông, ta được góc $\widehat{yOz} = 36^\circ$. Gấp tờ giấy sao cho tia Oy trùng với tia Oz, vết gấp Ov chính là tia phân giác của góc yOz, do đó ta có $\widehat{zOv} = 18^\circ$. Bây giờ ta dùng kéo cắt rời góc zOv ra rồi đặt vào trong góc xOy sao cho một cạnh của chúng trùng nhau, cạnh kia là tia Om. Làm tương tự ta được tia On. Dùng kéo cắt theo các tia Om, On ta được ba góc xOn, nOm, mOy bằng nhau (mỗi góc bằng 18°).

BÀI TẬP

CƠ BẢN

1.1. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Biết rằng $\widehat{BMC} = 3\widehat{CMA}$. Tính số đo của 4 góc $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$, $\widehat{BMD}$ và $\widehat{DMA}$ (tính bằng hai cách).

1.2. Cho hai đường thẳng EF và MN cắt nhau tại O tạo thành 4 góc (không kể góc bẹt). Biết tổng 3 góc trong 4 góc đó bằng $250°46'$. Tính số đo của 4 góc đã cho (bằng hai cách).

1.3. Cho hai góc $\widehat{MON}$ và $\widehat{NOP}$ là hai góc kề bù nhau. OE là tia phân giác của góc $\widehat{MON}$. Kẻ tia OF $\perp$ OE (OF nằm trong góc $\widehat{NOP}$). Chứng tỏ OF là tia phân giác của góc $\widehat{NOP}$.

1.4. Cho $\widehat{AOB}$ tù. Về phía ngoài góc kẻ các tia OC và OD theo thứ tự vuông góc với các tia OA và OB. Kẻ tia Ox là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$. Tia Ox' là tia đối của tia Ox. Hãy chứng tỏ tia Ox' là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.

1.5. Qua điểm O cho trước kẻ 4 đường thẳng phân biệt : a_1 ; a_2 ; a_3 và a_4 sao cho $a_1 \perp a_2$; $a_3 \perp a_4$.

a) Trong hình vẽ có bao nhiêu góc được tạo thành?

b) Trong tổng số các góc đó có bao nhiêu góc vuông ? Bao nhiêu góc nhọn ? Bao nhiêu góc tù ? Bao nhiêu góc bẹt ?

1.6. Cho $\widehat{xOy} = 90°$ và tia Oz nằm trong góc $\widehat{xOy}$. Trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox (không chứa tia Oz) vẽ góc $\widehat{mOx} = \widehat{zOy}$ và trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Oy (không chứa tia Oz) vẽ góc $\widehat{yOn} = \widehat{xOz}$. Trên tia Om đặt điểm M ; trên tia On đặt điểm N sao cho OM = ON.

a) Chứng tỏ hai tia Om và On là hai tia đối nhau.

b) Chứng tỏ Oz là đường trung trực của đoạn MN.

1.7. Cho góc $\widehat{AOB} = \alpha°$ ($90° < \alpha° < 180°$). Trong góc đó vẽ tia OM $\perp$ OB và ON $\perp$ OA.

a) Chứng tỏ $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$.

b) Tia Ox và Oy theo thứ tự là tia phân giác của góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BON}$. Hãy chứng tỏ Ox $\perp$ Oy.

1.8. Cho $\widehat{xOy} = \alpha°$ ($90° < \alpha° < 180°$). Trong nửa mặt phẳng bờ Oy có chứa tia Ox kẻ Oz $\perp$ Ox ; Gọi OE là tia phân giác của $\widehat{zOy}$. Biết $\widehat{zOE} = 20°$, tính góc $\widehat{xOy}$.

NÂNG CAO

1.9. Qua điểm O vẽ 20 đường thẳng đôi một phân biệt. Hỏi có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt ?

1.10. Qua điểm M vẽ n đường thẳng đôi một phân biệt ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$).

a) Hãy cho biết trên hình vẽ có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt ?

b) Cho biết trên hình vẽ có 930 cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt. Tính n.

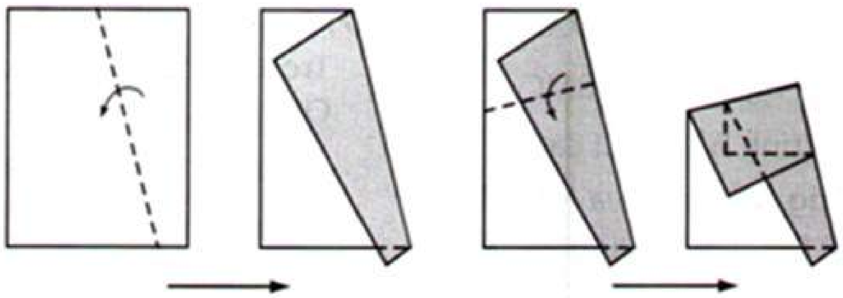
1.11. Qua điểm O vẽ 10 đường thẳng đôi một phân biệt. Xét các góc không có điểm trong chung. Chứng tỏ rằng tồn tại hai góc lớn hơn hoặc bằng 18°, tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 18°.

1.12. Ở phía ngoài góc tù xOy vẽ các tia Oz, Ot sao cho Oz $\perp$ Ox, Ot $\perp$ Oy. Gọi Om, On lần lượt là các tia phân giác của các góc xOy, zOt. Chứng tỏ rằng Om, On là hai tia đối nhau.

1.13. Cho đường thẳng d và các điểm A, B, C, D, E. Biết rằng AB $\perp$ d, BC $\perp$ d, CD $\perp$ d, DE $\perp$ d. Chứng tỏ rằng A, B, C, D, E thẳng hàng.

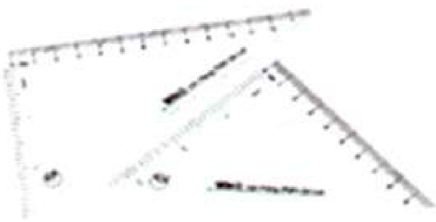
EM CÓ BIẾT ?

1. Em hãy dùng một tờ bìa gấp theo các bước sau đây (h.6), sẽ được một góc vuông :



Hình 6

2. Trên một tờ giấy vẽ đường thẳng xy và điểm O trên xy. Em có thể dùng cách gấp giấy để vẽ một đường thẳng đi qua O và vuông góc với xy không ?
3. Để vẽ góc vuông trên giấy, các em thường dùng chiếc ê ke nhựa (h.7).
   Công nhân xây dựng thường dùng chiếc thước vuông bằng gỗ có kích thước hai cạnh khoảng 40 - 50cm (h.8).



Hình 7

Hình 8

ĐI XA HƠN

ĐƯỜNG ĐI CỦA MŨI TÊN

Các em hãy quan sát một chiếc cung (nỏ) để đi săn thú thời cổ xưa. Cánh cung, dây cung và mũi tên được đặt nằm trên một mặt phẳng. Khi thả lẩy, mũi tên lao về phía đích. Người thợ săn phải ngắm sao cho điểm đích nằm trên đường trung trực của đoạn AB, chắc chắn mũi tên sẽ trúng đích, vì chính mũi tên sẽ bay theo đường trung trực của đoạn thẳng AB.

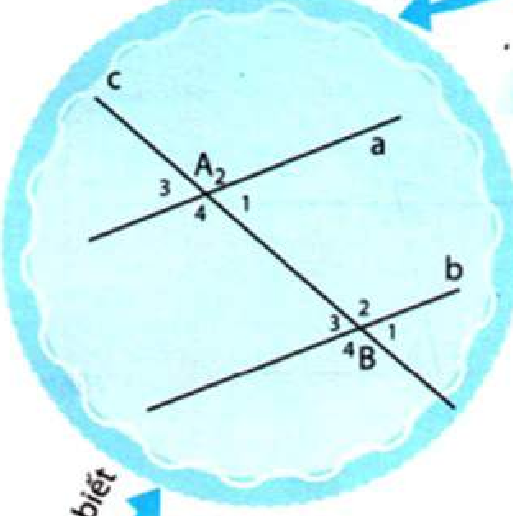
Đường trung trực có một tính chất khá thú vị : Tất cả các điểm nằm trên đường trung trực của một đoạn thẳng thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng ấy. Điểm tì của mũi tên vào dây cung cách đều hai đầu của cánh cung.

CHỦ ĐỀ 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a // b ⇔ a và b không có điểm chung

Định nghĩa



Tính chất

- Các góc đồng vị bằng nhau:
$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1};\ \widehat{A_2} = \widehat{B_2};\ \widehat{A_3} = \widehat{B_3};\ \widehat{A_4} = \widehat{B_4}$$
- Các góc so le trong bằng nhau:
$$\widehat{A_1} = \widehat{B_3};\ \widehat{A_4} = \widehat{B_2}$$
- Các góc so le ngoài bằng nhau:
$$\widehat{A_2} = \widehat{B_4};\ \widehat{A_3} = \widehat{B_1}$$
- Các góc trong cùng phía bù nhau:
$$\widehat{A_1} + \widehat{B_2} = \widehat{A_4} + \widehat{B_3} = 180^\circ$$

Dấu hiệu nhận biết

Nếu có ***một cặp góc*** *so le trong* (hoặc đồng vị) ***bằng nhau*** hoặc trong cùng phía **bù nhau** thì a song song với b.

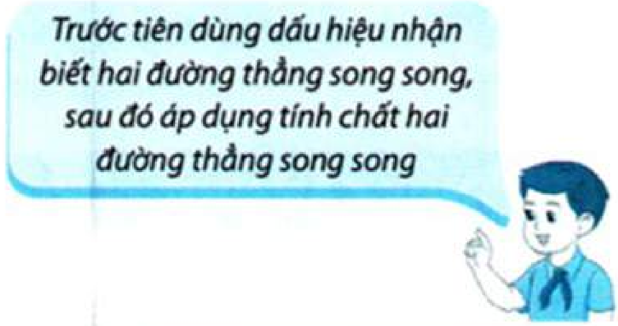
Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau

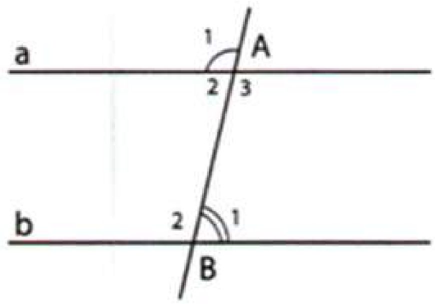
Hai góc có cạnh tương ứng song song là hai góc có đường thẳng chứa mỗi cạnh của góc này tương ứng song song với đường thẳng chứa một cạnh của góc kia.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b. Nếu có một cặp góc *so le trong* bằng nhau thì ta có thể kết luận được các cặp góc so le còn lại bằng nhau và các cặp góc đồng vị cũng bằng nhau hay không ? Vì sao ?
2. Cho hai đường thẳng song song a và b, đường thẳng c cắt a và b tương ứng tại A và B. Biết rằng hai góc trong cùng phía bằng nhau, hỏi có thể tính được các góc còn lại với đỉnh A và B hay không ?
3. Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b (h.9). Biết rằng hai góc trong cùng phía bằng nhau, a và b có song song với nhau không ? Để a và b song song thì hai góc trong cùng phía phải cùng bằng bao nhiêu độ ?

$$\widehat{A_2} = \widehat{B_2} \overset{?}{\Rightarrow} a \,//\, b$$





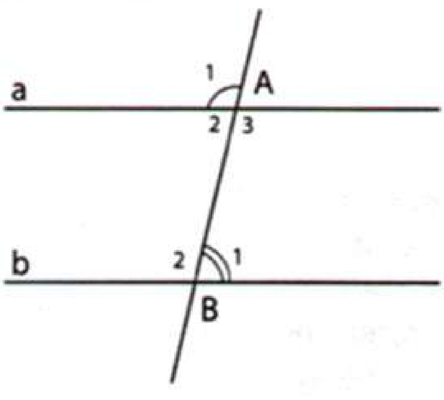
Hình 9

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho hình 10, biết $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^\circ$

Chứng tỏ rằng m // n.



Hình 10

Giải

Cách 1

Ta có $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 180^\circ$ (kề bù).

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^\circ$ (gt), do đó

$\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$. Vì $\widehat{A_2}$ và $\widehat{B_1}$ là hai góc so le trong nên m // n.

Để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau, ta có thể chứng minh một trong các khẳng định sau:
- Hai góc so le trong bằng nhau
- Hai góc đồng vị bằng nhau
- Hai góc trong cùng phía bù nhau.

Cách 2: Ta có $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^o$ (kề bù).

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^o$ (gt), do đó $\hat{B}_2 = \widehat{A}_1$.

Vì $\hat{B}_2$ và $\widehat{A}_1$ là hai góc đồng vị nên: m // n.

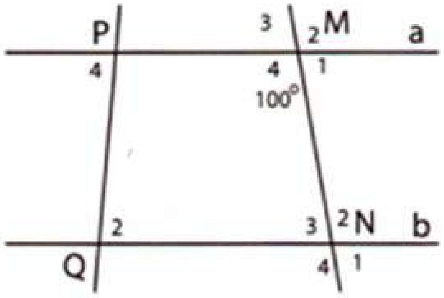
Cách 3: Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$ (đối đỉnh).

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} = 180^o$ (gt), do đó

$\widehat{A}_3 + \hat{B}_1 = 180^o$. Vì $\widehat{A}_3$ và $\hat{B}_1$ là hai góc trong cùng phía nên m // n.

Ví dụ 2

Trong hình 11 cho biết $\widehat{P_4} = \widehat{Q_2} = \alpha$ và $\widehat{M_4} = 100^\circ$. Tính các góc còn lại tại đỉnh M và N.



Hình 11

Giải

Theo đầu bài $\widehat{P_4} = \widehat{Q_2} = \alpha$ mà $\widehat{P_4}$ và $\widehat{Q_2}$ ở vị trí so le trong, vậy a // b.

Từ a // b ta có thể tính được các góc còn lại tại đỉnh M và N:

- Tại M: $\widehat{M_2} = \widehat{M_4} = 100^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Mà $\widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 180^\circ$ (hai góc kề bù nhau);

$\widehat{M_2} = 100^\circ$ nên

$100^\circ + \widehat{M_3} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M_3} = 80^\circ$;

$\widehat{M_1} = \widehat{M_3} = 80^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

- Tại N: $\widehat{N_2} = \widehat{M_4} = 100^\circ$ (hai góc so le trong)

suy ra $\widehat{N_4} = \widehat{N_2} = 100^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

Mà $\widehat{N_2} + \widehat{N_3} = 180^\circ$ (hai góc kề bù nhau)

$\Rightarrow \widehat{N_3} = 80^\circ$

Vậy $\widehat{N_3} = \widehat{N_1} = 80^\circ$ (hai góc đối đỉnh).

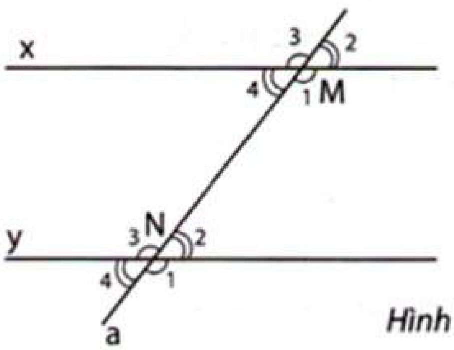
BÀI TẬP

CƠ BẢN

2.1. (h.12) Trong các câu sau, câu nào đúng? Đường thẳng a cắt hai đường thẳng x // y tại M và N, có:

a) $\widehat{M_4} = \widehat{N_1}$; b) $\widehat{M_2} = \widehat{N_2}$.

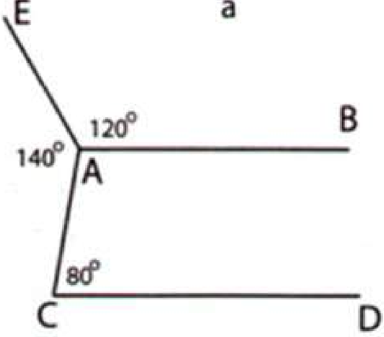
c) $\widehat{M_3} = \widehat{N_2}$; d) $\widehat{M_1} = \widehat{N_3}$.



Hình 12

2.2. Cho hình 13.

Chứng tỏ rằng AB // CD.



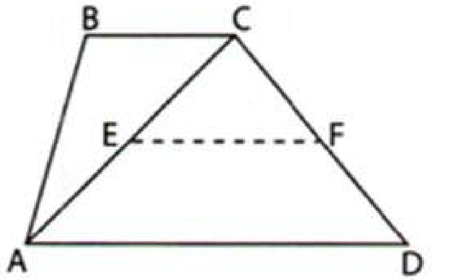
Hình 13

2.3. Trong hình 14 có AD//BC, EF//AD hãy cho biết :

a) $\widehat{CAD}$ so le trong với góc nào ?

b) $\widehat{ADC}$ đồng vị với góc nào ?

c) Tìm góc trong cùng phía với $\widehat{ABC}$, với $\widehat{EFD}$.



Hình 14

2.4. Cho ΔABC có tia AM là tia đối của tia AB. Tia AN là tia phân giác của góc $\widehat{MAC}$. Trên cạnh AC lấy điểm F tuỳ ý. Từ F kẻ FP // AB (P thuộc BC) và kẻ FE // AN (E thuộc cạnh AB). Hãy chứng tỏ FE là tia phân giác của góc $\widehat{AFP}$.

NÂNG CAO

2.5. Ba đường thẳng phân biệt trên mặt phẳng có thể chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền ?

2.6. Cho hai đường thẳng AB và CD. Đường thẳng MN cắt AB tại P và cắt CD tại Q.

Biết rằng: $\widehat{APM}+\widehat{MPB}+\widehat{PQD}=210^\circ$

và $\widehat{APM}=5\,\widehat{MPB}$.

Hãy chứng tỏ rằng AB//CD.

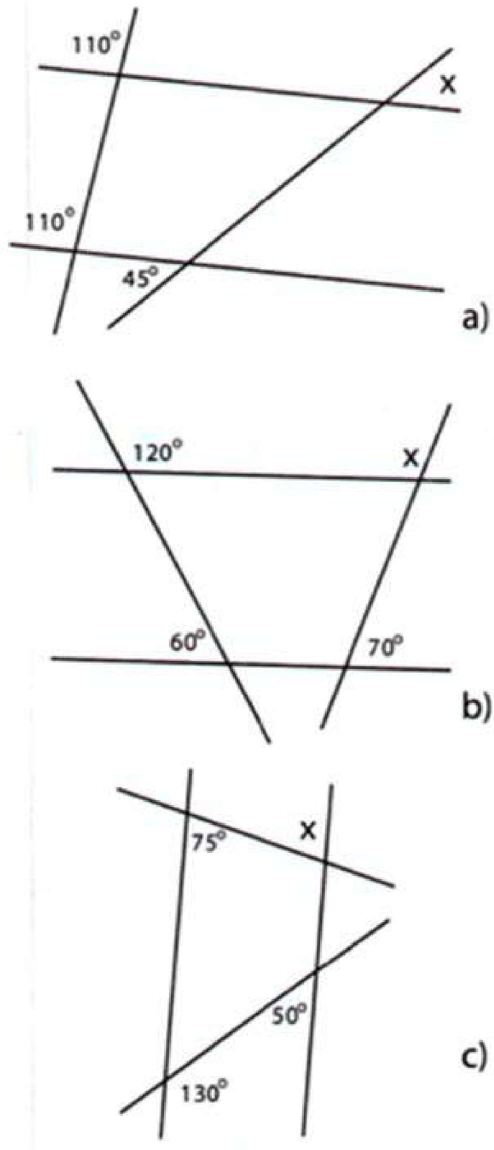
2.7. Tìm góc x trong hình 15 (a, b, c).

2.8. Trên đường thẳng aa' lấy hai điểm M và N (N thuộc tia Ma'). Trên hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là aa', ta dựng hai tia Mp và Nq sao cho $\widehat{aMp}=120^\circ$ và $\widehat{aNq}=60^\circ$. Chứng minh rằng :

a) Mp song song với Nq.

b) Các đường thẳng chứa tia phân giác của các góc $\widehat{pMa'}$ và $\widehat{aNq}$ song song với nhau.

2.9. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O ở ngoài phạm vi tờ giấy. Hãy nêu cách đo góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng đã cho.



Hình 15

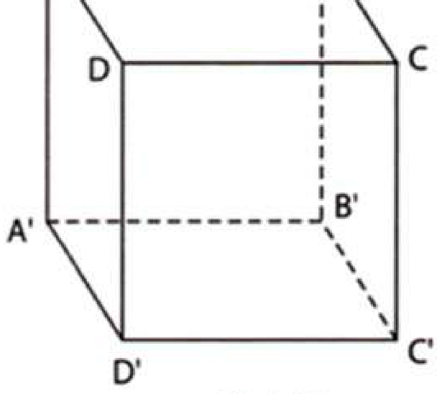
EM CÓ BIẾT ?

Hai đường thẳng song song là một khái niệm, mà ta chỉ dùng những gì tương tự nó để hình dung ra, lấy hình ảnh thực tế để minh họa cho khái niệm này. Môn Hình học chúng ta đang nghiên cứu là Hình học Ơ-clít, khái niệm hai đường thẳng song song xét ở đây là trong phạm vi một mặt phẳng. Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung chưa chắc đã song song với nhau.

Theo quan điểm tuyệt đối, hai đường thẳng song song thì không thể gặp nhau. Theo thuyết tương đối thì hai đường thẳng song song lại gặp nhau ở vô cùng. Chúng ta quan sát hai dây dọi để sát nhau, có vẻ như chúng song song với nhau. Thật ra chúng không song song mà chúng cắt nhau ở tâm trái đất, nhưng vì góc lệch của chúng quá bé nên chúng ta lầm tưởng chúng song song. Tàu hoả chạy trên hai đường ray song song chứ không phải hai đường thẳng song song.

ĐI XA HƠN

Trong không gian, hai đường thẳng song song trước tiên phải cùng nằm trong một mặt phẳng. Thêm điều kiện nữa là chúng không có điểm chung. Thiếu một trong hai điều kiện này không đảm bảo để hai đường thẳng song song (trong không gian). Ví dụ trong hình lập phương (h.16), AB và DD′ không có điểm chung nhưng chúng không song song (đây là hai đường thẳng chéo nhau).

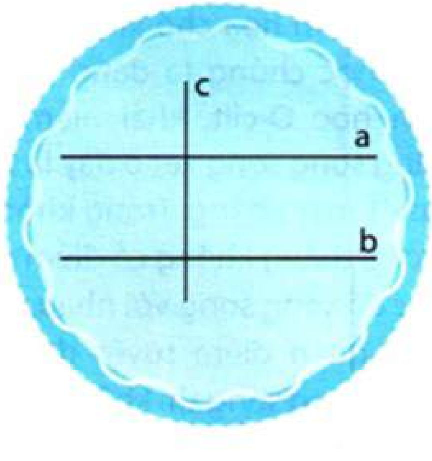


Hình 16

CHỦ ĐỀ 3 — TIÊN ĐỀ Ơ-CLÍT VỀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG. TỪ VUÔNG GÓC ĐẾN SONG SONG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song
Qua **một điểm** ở ngoài đường thẳng **chỉ có một** đường thẳng song song với đường thẳng đó.



Chứng minh a //b

$\left.\begin{matrix} a \perp c \\ b \perp c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // b$ Chứng minh a và b cùng vuông góc với c	$\left.\begin{matrix} a // c \\ b // c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a // b$ Chứng minh a và b cùng song song với c	Chứng minh hai góc so le trong bằng nhau hoặc hai góc đồng vị bằng nhau, hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau.

Chứng minh b⊥c

$\left.\begin{matrix} a // b \\ c \perp a \end{matrix}\right\} \Rightarrow c \perp b$

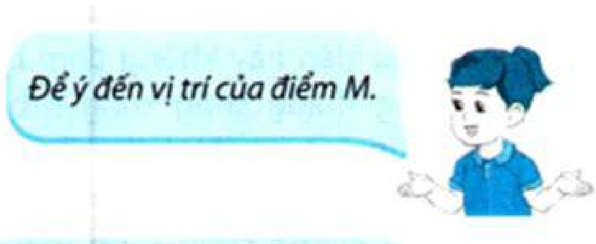
Chứng minh c vuông góc với a, mà a song song với b.

HỎI ĐÁP NHANH

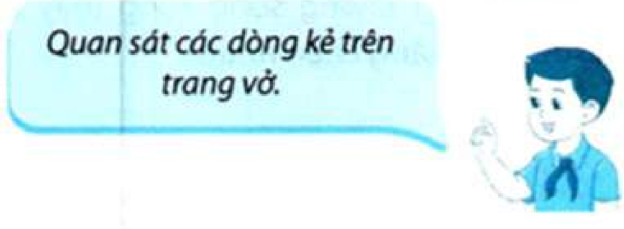
1. Các phát biểu sau có diễn đạt đúng nội dung của tiên đề Ơ-clít hay không ?

a) Qua một điểm M tùy ý có duy nhất một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

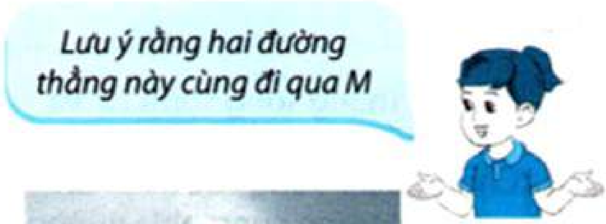
b) Có duy nhất một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.



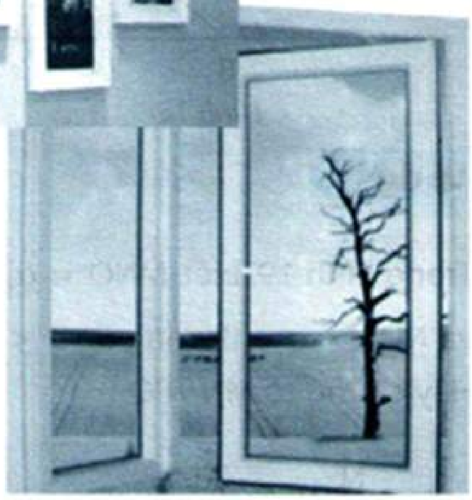
2. Cho hai đường thẳng song song với nhau a và b. Nếu đường thẳng d cắt một trong hai đường thẳng đã cho thì d có cắt đường thẳng còn lại hay không ? Vì sao ?



3. Cho hai đường thẳng song song với nhau a và b, điểm M nằm ngoài hai đường thẳng ấy. Qua M vẽ đường thẳng x vuông góc với a, vẽ đường thẳng y vuông góc với b. Hỏi vị trí giữa hai đường thẳng x và y như thế nào ?



4. Quan sát chiếc bàn học, cánh cửa sổ, ti vi, khung ảnh,... Có nhận xét gì về hai cạnh (mép) đối diện của các đồ dùng trên ? Nhận xét gì về vị trí của mỗi cạnh và hai cạnh kề với nó ?



HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

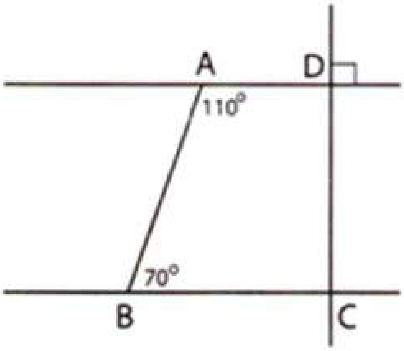
Qua điểm A ở ngoài đường thẳng d vẽ 2014 đường thẳng đôi một phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất 2013 đường thẳng cắt đường thẳng d.

Giải

Giả sử trong 2014 đường thẳng đã vẽ qua A, có ít hơn 2013 đường thẳng cắt d.
Khi đó còn ít nhất hai đường thẳng không cắt đường thẳng d. Nghĩa là, có hai đường thẳng phân biệt qua A và song song với d. Điều này trái với tiên đề Ơ-clít.
Như vậy điều giả sử trên là sai.
Và ta có ít nhất 2013 đường thẳng cắt đường thẳng d.

Ví dụ 2

Cho hình 17. Chứng tỏ rằng DC $\perp$ BC.



Hình 17

Giải

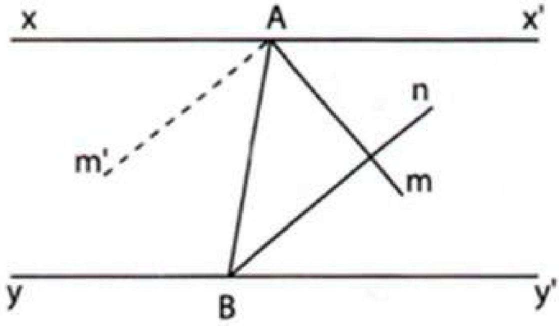
Ta có $\widehat{A}+\widehat{B}=110^\circ+70^\circ=180^\circ$.

Mà $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc trong cùng phía, do đó AD // BC.

Ta có AD // BC, DC $\perp$ AD $\Rightarrow$ DC $\perp$ BC.

Ví dụ 3

Cho hai đường thẳng song song xx' và yy', một cát tuyến cắt xx' và yy' thứ tự tại A và B. Chứng minh rằng các tia phân giác của hai góc trong cùng phía vuông góc với nhau.



Hình 18

Giải (h.18)

Gọi Am là tia phân giác của góc x'AB, Bn là tia phân giác của góc ABy'.
Kẻ tia phân giác Am' của góc xAB.
Vì xAB và x'AB là hai góc kề bù nên :

$Am' \perp Am.$ (1)

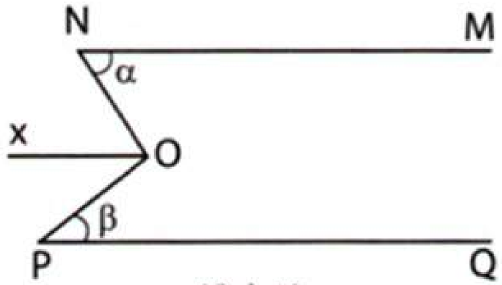
xAB và ABy' là hai góc so le trong tạo bởi hai đường thẳng song song xx', yy' và đường thẳng AB nên ta có :

$Am' // Bn.$ (2).

Từ (1), (2) và căn cứ vào định lí về hai đường thẳng song song, ta có $Am \perp Bn$.

Ví dụ 4*

Trong hình 19, biết $\widehat{MNO} = \alpha$, $\widehat{OPQ} = \beta$ và $\widehat{NOP} = \alpha + \beta$ trong đó $0° < \alpha ; \beta < 90°$. Hãy chứng tỏ MN//PQ.



Hình 19

Giải

(h.19) Kẻ qua O tia Ox nằm trong góc NOP và song song với MN, ta có $\widehat{NOx} = \widehat{MON} = \alpha$ (so le trong). Suy ra $\widehat{POx} = \beta = \widehat{OPQ}$, do đó Ox // PQ. Như vậy MN và PQ cùng song song với Ox nên MN // PQ.

Ví dụ 5*

Cho góc $\widehat{xOy}$. Trên Oy lấy điểm M. Từ M kẻ $MN \perp Ox$ (N thuộc Ox). Từ N kẻ $NP \perp Oy$ (P thuộc Oy). Từ P kẻ $PQ \perp Ox$ (Q thuộc Ox). Từ Q kẻ $QE \perp Oy$ (E thuộc Oy).

a) Trong hình vẽ có những cặp đường thẳng nào song song ? Tại sao ?

b) Biết số đo của góc $\widehat{OQE} = 40°$. Tính số đo các góc nhọn trong hình vẽ.

Giải (h.20)

a) Theo đầu bài $MN \perp Ox$; $PQ \perp Ox$, vậy MN // PQ (cùng vuông góc với Ox).

- Tương tự, $QE \perp Oy$; $NP \perp Oy$ vậy QE // NP (cùng vuông góc với Oy).

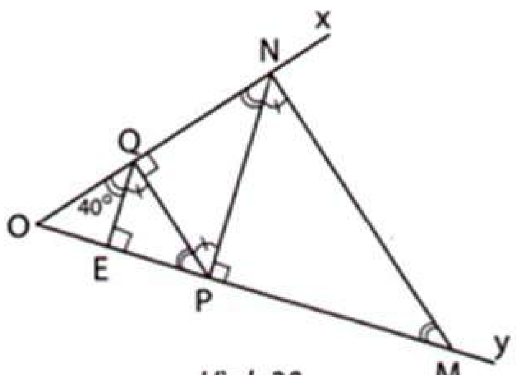
b) $PQ \perp Ox$ (gt) nên ta có :

$\widehat{OQE} + \widehat{EQP} = 90^o$ mà $\widehat{OQE} = 40^o$, suy ra :

$40^o + \widehat{EQP} = 90^o \Rightarrow \widehat{EQP} = 50^o$;

$\widehat{QPN} = \widehat{EQP} = 50^o$ (so le trong).

$\widehat{PNM} = \widehat{QPN} = 50^o$ (so le trong).



Hình 20

- NP $\perp$ Oy nên ta có : $\widehat{NPQ}+\widehat{QPE}=90^{o}$;

Mà $\widehat{QPN}=50^{o}$ (câu a) nên $\widehat{QPE}=40^{o}$.

Từ đó

$\widehat{ONP}=\widehat{OQE}=40^{o}$ (hai góc đồng vị).

$\widehat{OMN}=\widehat{EPQ}=40^{o}$ (hai góc đồng vị).

BÀI TẬP

CƠ BẢN

3.1. Cho ΔABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ax sao cho $\widehat{xAC}=\widehat{ACB}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Ay sao cho $\widehat{yAB}=\widehat{ABC}$.

a) Hãy chứng tỏ hai tia Ax và Ay thuộc cùng một đường thẳng.

b) Qua C kẻ đường thẳng d $\perp$ BC. Đường thẳng d có vuông góc với xy không ? Vì sao ?

3.2. Trên cạnh AB của ΔABC lấy điểm E và M. Từ E kẻ EF//BC (F thuộc AC); Từ M kẻ MN//BC (N thuộc AC).

a) Hãy chứng tỏ EF//MN.

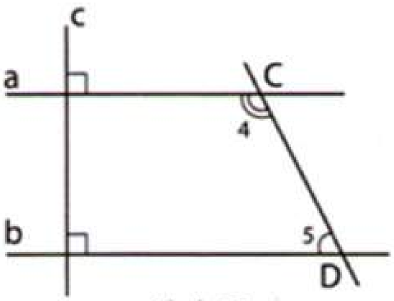
b) Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B dựng góc $\widehat{CAx}=\widehat{ACB}$. Hãy chứng tỏ Ax//MN.

3.3. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Từ điểm I trong góc đó kẻ các tia Im//Ox và In//Oy.

a) Hãy chứng tỏ $\widehat{xOy}=\widehat{mIn}$.

b) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa các cạnh của hai góc ấy?

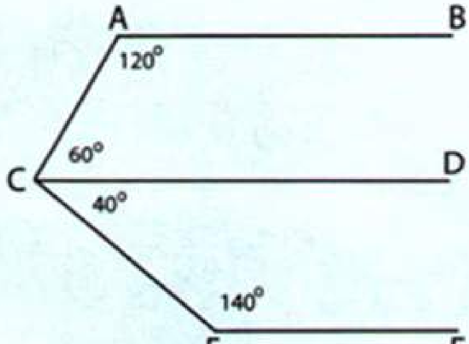
3.4. Cho hình 21, biết a $\perp$ c và b $\perp$ c và $2\widehat{C_4}=3\widehat{D_5}$. Tìm số đo của bốn góc có đỉnh là C và bốn góc có đỉnh là D trong hình vẽ.



Hình 21

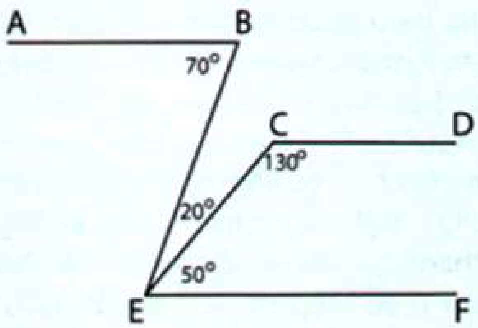
NÂNG CAO

3.5. Cho hình 22. Chứng tỏ rằng AB // EF.



Hình 22

3.6. Cho hình 23. Chứng tỏ rằng AB // CD.



Hình 23

3.7. Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề bù nhau. OF là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$. Trên OF lấy điểm H. Tại H kẻ đường thẳng vuông góc với OF, đường thẳng này cắt Oy tại M và Oz tại N. Chứng tỏ rằng

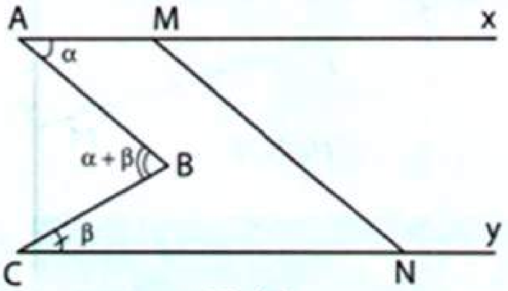
$$\widehat{OMN} = \widehat{MNO}.$$

3.8. Cho hình 24, biết $\widehat{BAx} = \alpha$; $\widehat{BCy} = \beta$; $\widehat{ABC} = \alpha + \beta$; Vẽ MN // AB.

Chứng tỏ rằng :

a) Ax // Cy ;   b) $\widehat{MNC} = \alpha$.

3.9. Cho đường thẳng d và điểm M, chân đường vuông góc hạ từ M xuống d nằm ngoài phạm vi tờ giấy. Em hãy tìm cách kẻ đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d.



Hình 24

EM CÓ BIẾT ?

1. Để kiểm tra xem chiếc tủ kê trong phòng đã ngay ngắn chưa, bức tranh treo trên tường có bị nghiêng lệch hay không,... người ta thường dùng dây dọi để soi.

Nếu mép bên của chiếc tủ (hoặc mép bên của bức tranh) song song với sợi dây dọi thì chứng tỏ chiếc tủ đã kê ngay ngắn, bức tranh treo không bị lệch. Chúng ta biết sợi dây dọi luôn vuông góc với phương nằm ngang. Nếu mép bên của chiếc tủ song song với dây dọi thì chứng tỏ mép bên của tủ cũng vuông góc với phương nằm ngang, tức là tủ được kê thẳng đứng. Cũng giống thế, hai mép bên của bức tranh là dọc theo phương thẳng đứng thì hai mép trên và dưới của bức tranh sẽ nằm ngang.

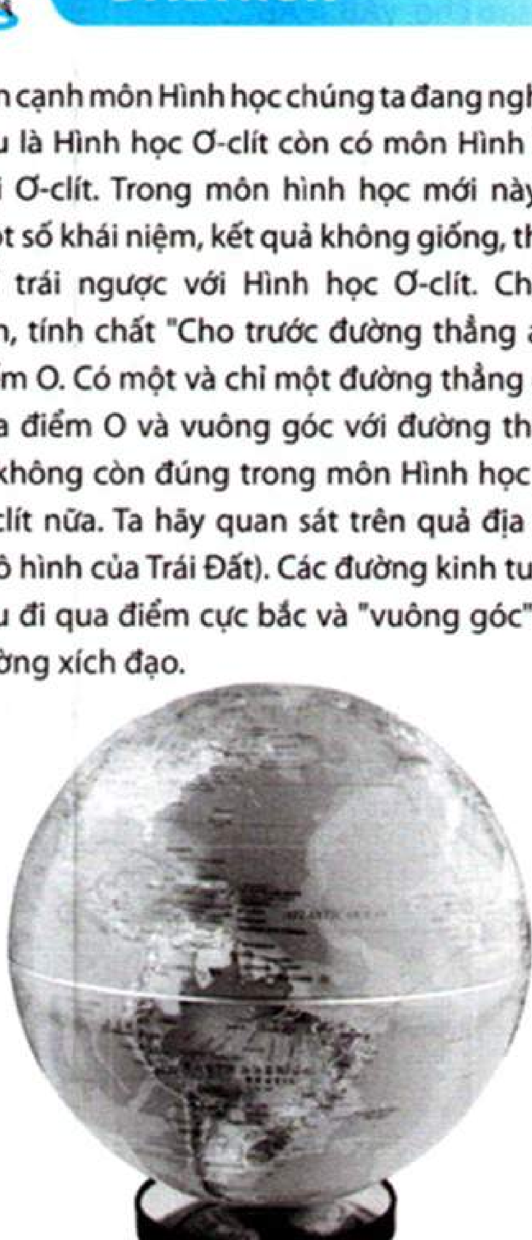
2. Bạn Nam nhanh trí.

Một hôm bác thợ xây cần gác một thanh xà gỗ qua hai bức tường và muốn kiểm tra xem thanh gỗ có thực sự nằm ngang hay không. Hôm đó bác thợ xây bỏ quên mất thước Ni-vô (dụng cụ kiểm tra theo phương nằm ngang) ở nhà, chỉ mang theo thước vuông. Bác thợ xây đang lúng túng thì bạn Nam đã đề xuất sáng kiến với bác. Các em có biết bạn Nam làm cách nào để kiểm tra xem thanh gỗ có nằm ngang hay không ?

Giải đáp : Đặt một cạnh thước vuông dọc theo thanh gỗ. Dùng dây dọi (có sẵn hoặc tự làm) soi theo mép kia của thước. Nếu mép này thẳng đứng thì mép kia của thước nằm ngang, tức là thanh gỗ nằm ngang.

ĐI XA HƠN

Bên cạnh môn Hình học chúng ta đang nghiên cứu là Hình học Ơ-clít còn có môn Hình học phi Ơ-clít. Trong môn hình học mới này có một số khái niệm, kết quả không giống, thậm chí trái ngược với Hình học Ơ-clít. Chẳng hạn, tính chất "Cho trước đường thẳng a và điểm O. Có một và chỉ một đường thẳng d đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a" không còn đúng trong môn Hình học phi Ơ-clít nữa. Ta hãy quan sát trên quả địa cầu (mô hình của Trái Đất). Các đường kinh tuyến đều đi qua điểm cực bắc và "vuông góc" với đường xích đạo.



CHỦ ĐỀ 4

ĐỊNH LÍ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Một tính chất, một khẳng định được suy ra từ những khẳng định đúng bằng suy luận gọi là **định lí**.

Định lí luôn là một khẳng định đúng.

Định lí được phát biểu dưới dạng "Nếu (A)... thì (B).."

Định lí gồm: giả thiết (A) và kết luận (B).

Chứng minh một định lí là dùng lập luận và những kết quả đã biết để từ giả thiết suy ra kết luận.

Giả thiết (điều đã biết) → **Suy luận** có căn cứ, hợp lôgic → **Kết luận** (điều được (phải) suy ra)

HỎI ĐÁP NHANH

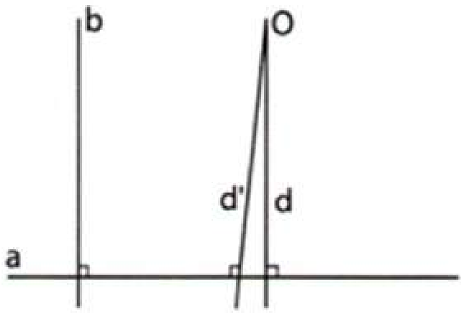
1. Khẳng định :" Nếu hai góc bằng nhau thì chúng đối đỉnh" có phải là một định lí không ?

2. Cho một định lí. Nếu ta thay thế nội dung của giả thiết và kết luận cho nhau thì có được một định lí không ? Lấy ví dụ minh hoạ cho hai khả năng xảy ra.

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Dựa vào tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song để chứng minh tính chất " Cho trước đường thẳng a và điểm O. Có một và chỉ một đường thẳng d đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a".



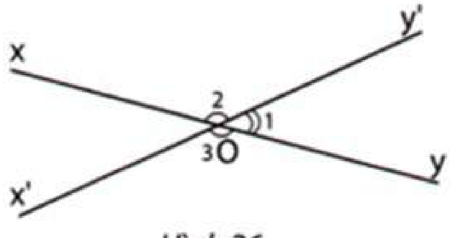
Hình 25

Giải (h.25)

Vẽ một đường thẳng b vuông góc với a và không đi qua O. Giả sử có hai đường thẳng phân biệt d và d' đi qua O và cùng vuông góc với a. Khi đó d // b, d' // b vì cùng vuông góc với a. Như vậy qua O có hai đường thẳng song song với b, trái với tiên đề Ơ-clít. Vậy có duy nhất một đường thẳng d đi qua O và vuông góc với a.

Ví dụ 2

Viết giả thiết, kết luận rồi chứng minh định lí : "Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau".



Hình 26

Dùng quy tắc bắc cầu

Giải (h.26)

Giả thiết : $\widehat{O_2}$ là góc đối đỉnh với góc $\widehat{O_3}$.

Kết luận : $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$.

Chứng minh :

- Theo giả thiết $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_3}$ đối đỉnh.

Theo định nghĩa hai góc đối đỉnh thì Ox và Oy cùng thuộc đường thẳng nên

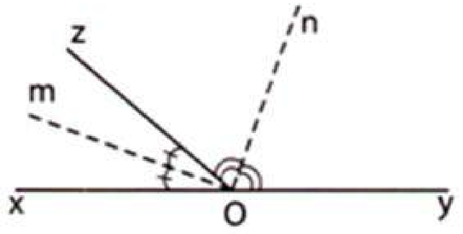
$\widehat{O_2} + \widehat{O_1} = 180^\circ$ (1)

Tương tự, Ox' và Oy' cùng thuộc đường thẳng nên : $\widehat{O_3} + \widehat{O_1} = 180^\circ$ (2)

- So sánh (1) và (2) suy ra : $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$ (cùng bù với $\widehat{O_1}$).

Ví dụ 3*

Chứng minh định lí : "Góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù nhau là một góc vuông".



Hình 27

Giải (h.27)

Giả thiết :

- $\widehat{xOz}$ và $\widehat{zOy}$ kề bù ;

- Om là phân giác của $\widehat{xOz}$;

- On là phân giác của $\widehat{zOy}$.

Kết luận : $\widehat{mOn} = 90^\circ$.

Chứng minh :

Ta có : $\widehat{zOm} = \frac{1}{2}\widehat{zOx}$ (Om là tia phân giác của $\widehat{xOz}$) (1)

và $\widehat{zOn} = \frac{1}{2}\widehat{zOy}$ (On là tia phân giác của $\widehat{zOy}$). (2)

Cộng từng vế (1) với (2) được

$$\widehat{zOm} + \widehat{zOn} = \frac{1}{2}\left(\widehat{zOx} + \widehat{zOy}\right). \quad (3)$$

Vì $\widehat{xOz}$ và $\widehat{zOy}$ là hai góc kề bù nhau nên tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy (tính chất) và có $\widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 180^\circ$.

Suy ra

$$\frac{1}{2}\left(\widehat{zOx} + \widehat{zOy}\right) = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ \quad (4)$$

Oz lại nằm giữa hai tia Om và On nên ta có : $\widehat{mOz} + \widehat{zOn} = \widehat{mOn}$. (5)

Từ (3) ; (4) ; (5) suy ra : $\widehat{mOn} = 90^\circ$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

4.1. a) Phát biểu và chứng minh tính chất của hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh.

b) Phát biểu tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù nhau.

c) Phát biểu định lí về dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.

d) Phát biểu tính chất hai đường thẳng song song và một cát tuyến.

4.2. Ghi giả thiết và kết luận của hai mệnh đề c và d (bài 4.1). Cho biết mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận của hai mệnh đề đó.

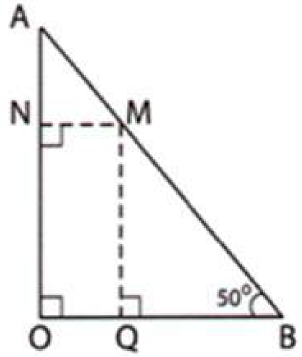
4.3. Chứng minh tính chất của hai góc có cạnh tương ứng song song : "Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì :
a) Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.
b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn góc kia tù".

4.4. Cho định lí về hai góc có cạnh tương ứng vuông góc. "Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì :
a) Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.
b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia tù".
Vẽ hình, ghi giả thiết, kết luận của định lí đó.

4.5. Trên hình 28, biết
$\hat{N} = \hat{O} = \hat{Q} = 90^\circ; \hat{B} = 50^\circ$.

a) Hãy chứng tỏ $\widehat{NMQ} = 90^\circ$.

b) Tính số đo các góc : $\widehat{NAM}$ và $\widehat{QMB}$.



Hình 28

NÂNG CAO

4.6. Cho hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{CID}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song, có OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$; IN là tia phân giác của $\widehat{CID}$. Chứng minh :

a) Nếu hai góc đó cùng nhọn hoặc cùng tù thì OM // IN.

b) Nếu một góc là nhọn, góc kia là tù thì OM $\perp$ IN.

4.7. Trên mặt phẳng cho 4 đường thẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng ta có thể tìm được 2 đường thẳng (trong số 4 đường thẳng đã cho) tạo với nhau một góc không quá 45°.

4.8. Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC. Vẽ ME song song với AB sao cho E thuộc AC, MF song song với AC sao cho F thuộc AB. Xác định vị trí của điểm M để MA là tia phân giác của góc EMF.

EM CÓ BIẾT?

1. TIÊN ĐỀ VÀ ĐỊNH LÍ

✓ Một tiên đề trong toán học là một đề xuất hay một khẳng định được coi như luôn đúng mà không thể và không cần chứng minh.

Một hệ thống tiên đề hay gọn hơn, một hệ tiên đề là một tập hữu hạn các tiên đề thoả mãn điều kiện là các suy diễn lôgic trên hệ thống tiên đề này không thể xảy ra mâu thuẫn.

Tiên đề là điều kiện cần thiết để xây dựng bất cứ một lí thuyết nào. Bất cứ một khẳng định (hay đề xuất) nào đưa ra đều cần được giải thích hay xác minh bằng một khẳng định khác. Nếu một khẳng định được giải thích hay xác minh bằng chính nó thì khẳng định đó sẽ không có giá trị, như vậy sẽ phải có một số vô hạn các khẳng định để giải thích bất kì một khẳng định nào. Vì thế cần phải có một (hay một số) khẳng định được công nhận là đúng để làm chỗ bắt đầu và đưa quá trình suy diễn từ vô hạn về hữu hạn. Những khẳng định được công nhận là đúng đó chính là các tiên đề.

Ơ-clít đã nêu ra 10 tiên đề, áp dụng chung cho toán học. Riêng đối với môn Hình học, sau nhiều thế kỉ tranh luận, sửa đổi, người ta lấy 5 tiên đề, được giới thiệu trong những sách giáo khoa hình học như sau:

1. Qua hai điểm có thể xác định được một đường thẳng và chỉ một mà thôi.

2. Qua ba điểm không thẳng hàng có thể xác định được một mặt phẳng và chỉ một mà thôi.

3. Nếu đường thẳng có hai điểm nằm trong mặt phẳng thì đường thẳng đó hoàn toàn nằm trong mặt phẳng này.

4. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng sẽ có thêm một điểm chung thứ hai nữa.

5. Tiên đề thứ năm là tiên đề về đường thẳng song song mà ta đã biết trong mục ở trên :

Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Ngoài ra có thể phát biểu tiên đề 5 dưới các dạng sau:

- Nếu qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có hai đường thẳng song song với a thì chúng trùng nhau.
- Cho điểm M ở ngoài đường thẳng a. Đường thẳng đi qua M và song song với a là duy nhất.

✓ Định lí thường được dùng trong toán học. Một định lí toán học là một mệnh đề toán học đã được, hoặc cần được chứng minh dựa trên một số hữu hạn các tiên đề và quá trình suy luận. Chứng minh các định lí là hoạt động chủ yếu trong ngành toán học.

2. ĐỊNH LÍ THUẬN, ĐỊNH LÍ ĐẢO

Trong một định lí, nếu đổi kết luận thành giả thiết và giả thiết thành kết luận thì ta được một mệnh đề mới, gọi là *mệnh đề đảo* của định lí đó. Trong trường hợp mà mệnh đề đảo này đúng thì mệnh đề đảo được gọi là *định lí đảo* của định lí đã cho và định lí đã cho gọi là định lí thuận. Nói chung, mệnh đề đảo của một định lí không phải luôn đúng. Khi mệnh đề đảo cũng đúng, ta nói hai mệnh đề là tương đương. Hai mệnh đề tương đương kí hiệu bởi $\Leftrightarrow$, đọc là khi và chỉ khi.

ĐI XA HƠN

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

Phương pháp chứng minh phản chứng thuộc loại chứng minh gián tiếp. Để chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng, ta tìm cách chứng tỏ phủ định kết luận là sai.

Cần tiến hành qua ba bước :

Bước 1: (Phủ định kết luận) Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.

Bước 2: (Rút ra điều vô lí) Từ điều giả sử trên, lập luận dẫn đến điều vô lí (điều vô lí có thể là trái với giả thiết hoặc trái với các kiến thức đúng đã biết).

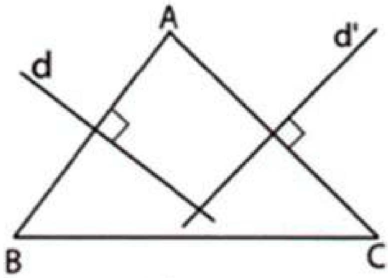
Bước 3: (Khẳng định kết luận) Vậy điều giả sử là sai, điều cần chứng minh là đúng.

Thường dùng ba hình thức chứng minh phản chứng sau đây :

1. Phủ định kết luận rồi suy ra điều trái với giả thiết.
2. Phủ định kết luận rồi suy ra điều trái với một điều đúng nào đó.
3. Phủ định kết luận rồi suy ra hai điều mâu thuẫn nhau.

Trong các mục ở trên ta đã sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng để giải quyết một số bài toán (các ví dụ và bài tập). Sau đây ta xét thêm một số bài toán mà phương pháp chứng minh phản chứng thể hiện rõ tính ưu việt của nó.

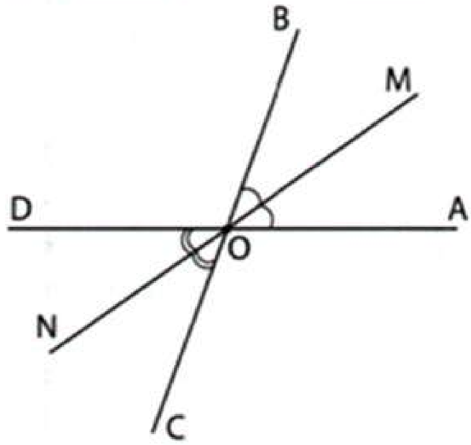
Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng hai đường trung trực của hai cạnh một tam giác luôn cắt nhau.



Hình 29

Giải (h.29) Giả sử hai đường trung trực d, d' của các cạnh AB, AC của tam giác ABC song song với nhau. Khi đó AB vuông góc với d' (vì AB ⊥ d và d // d'). Như vậy AB và AC cùng vuông góc với d', suy ra AB và AC trùng nhau (vì qua A chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với d'). Điều này là vô lí vì AB, AC là hai cạnh của một tam giác. Vậy d và d' phải cắt nhau.

Ví dụ 2. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau.



Hình 30

Giải

Xét hai góc đối đỉnh AOB, COD và OM, ON lần lượt là tia phân giác của hai góc AOB, COD (h.30).

Giả sử hai tia OM, ON không đối nhau

$\Rightarrow \widehat{MON} \neq 180^\circ$,

do đó $\widehat{MOC} + \widehat{NOC} \neq 180^\circ$.

Mà $\widehat{MOC} + \widehat{MOB} = 180^\circ$ (kề bù)

nên $\widehat{NOC} \neq \widehat{MOB}$. (1)

Mặt khác, $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (đối đỉnh),

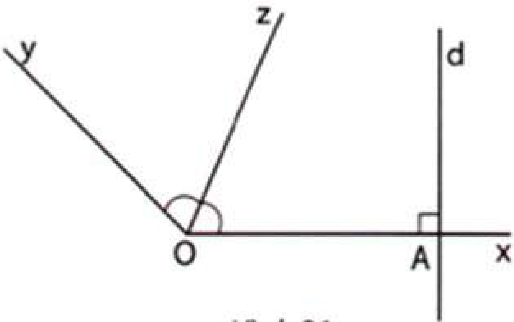
$\widehat{NOC} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$ (ON là tia phân giác của góc COD),

$\widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (OM là tia phân giác của góc AOB), nên $\widehat{NOC} = \widehat{MOB}$. (2)

(1) và (2) mâu thuẫn, như vậy điều giả sử trên là sai.

Vậy OM, ON là hai tia đối nhau.

Ví dụ 3. Cho góc xOy khác góc bẹt, vẽ Oz là tia phân giác của góc xOy. Gọi A là điểm trên tia Ox (A khác O). Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với tia Ox. Chứng minh rằng hai đường thẳng Oz và d cắt nhau.



Hình 31

Giải (h.31)

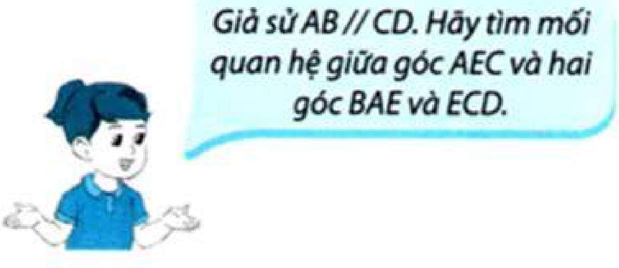
Giả sử Oz và d không cắt nhau, suy ra Oz // d.

Ta có $d \perp Ox$ (giả thiết) và Oz // d

$\Rightarrow Oz \perp Ox$

$\Rightarrow \widehat{xOz} = 90^\circ$.

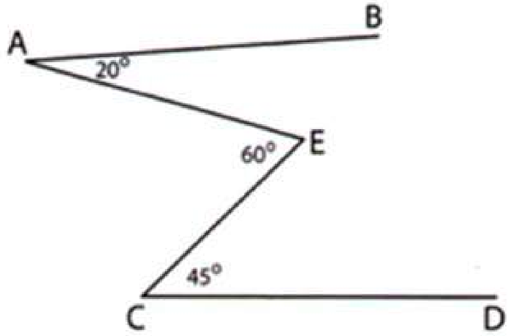
Do vậy $\widehat{xOy} = 180^\circ$, mâu thuẫn với giả thiết là $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Vậy điều giả sử trên là sai. Do đó Oz và d cắt nhau.



Ví dụ 4. Cho hình 32, biết

$$\widehat{BAE} = 20^\circ, \widehat{AEC} = 60^\circ, \widehat{ECD} = 45^\circ.$$

Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD cắt nhau.



Hình 32

Giải

Giả sử AB // CD. Kẻ EF // AB (h.33).

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{AEF}$ (so le trong)

nên $\widehat{AEF} = \widehat{BAE} = 20^\circ$.

Vì EF // AB, AB // CD $\Rightarrow$ EF // CD

$\Rightarrow \widehat{CEF} = \widehat{ECD}$ (so le trong)

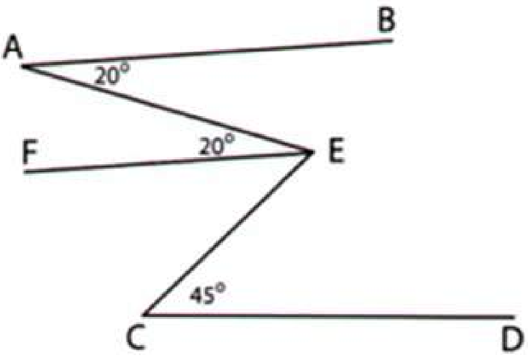
$\Rightarrow \widehat{CEF} = 45^\circ$.

Suy ra

$\widehat{AEC} = \widehat{AEF} + \widehat{CEF} = 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$, trái với giả thiết.

Vậy điều giả sử trên là sai.

Do đó hai đường thẳng AB, CD cắt nhau.



Hình 33

CHƯƠNG

II

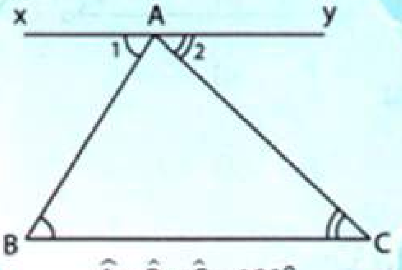
TAM GIÁC

- TỔNG BA GÓC CỦA TAM GIÁC
- CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC
- TAM GIÁC CÂN , TAM GIÁC ĐỀU
- ĐỊNH LÍ PY-TA-GO
- CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

CHỦ ĐỀ 5

TỔNG BA GÓC CỦA TAM GIÁC

KIẾN THỨC CẦN NHỚ



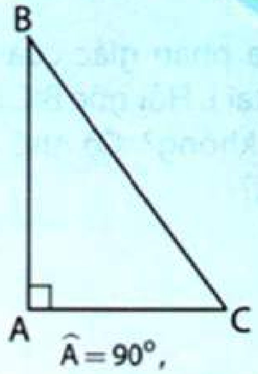
$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ$

$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ nhọn $\Rightarrow \Delta ABC$ nhọn

$\widehat{A}=90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ vuông

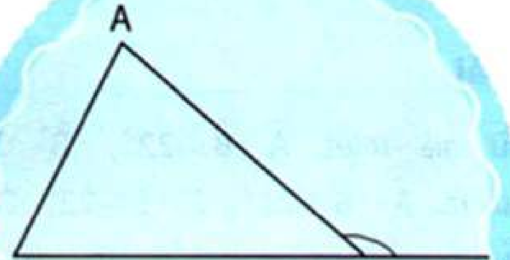
$\widehat{A}>90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ tù

Trong tam giác vuông, hai góc nhọn phụ nhau.



$\widehat{A}=90^\circ$,

$\widehat{B}+\widehat{C}=90^\circ$



$\widehat{ACx}=\widehat{A}+\widehat{B}$

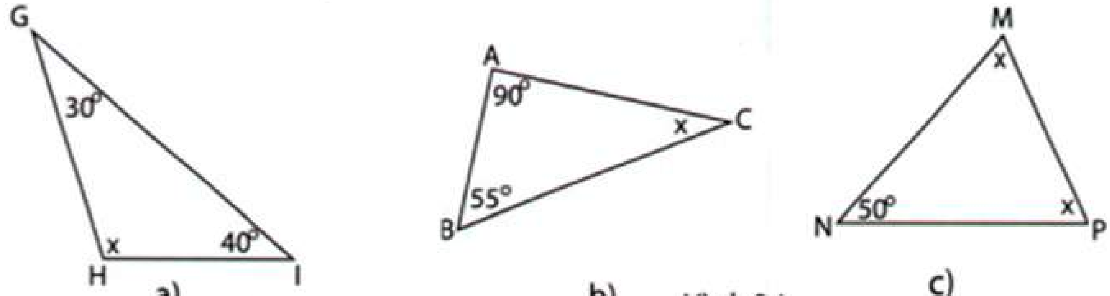
Mỗi góc ngoài của tam giác lớn hơn góc trong không kề với nó.

HỎI ĐÁP NHANH

1. Có tồn tại tam giác có hai góc vuông không? Tại sao?

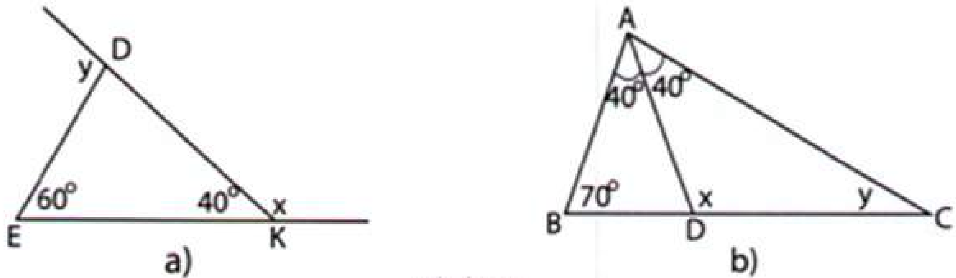
> Tìm một số hạng khi biết tổng và các số hạng khác như thế nào?

2. Tính số đo góc x trong hình 34:



Hình 34

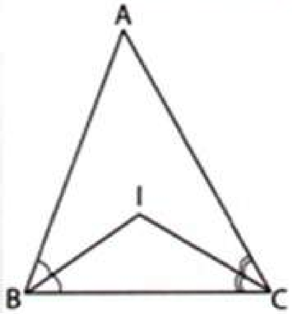
3. Tính số đo các góc x, y trong hình 35:



Hình 35

4. Các tia phân giác của các góc B và C cắt nhau tại I. Hỏi góc BIC có thể là góc vuông được không? Có thể là góc nhọn được không?

> Hãy xét tổng (h.36)
> $\widehat{BIC} + \frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C}$



Hình 36

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Tính các góc của tam giác ABC biết $\hat{A} - \hat{B} = 22^\circ$ và $\hat{B} - \hat{C} = 22^\circ$.

> Hãy biểu thị $\hat{A}$ và $\hat{C}$ qua $\hat{B}$ rồi tính $\hat{B}$.

Giải

Từ giả thiết $\hat{A} - \hat{B} = 22^\circ$, $\hat{B} - \hat{C} = 22^\circ$ suy ra: $\hat{A} = \hat{B} + 22^\circ$, $\hat{C} = \hat{B} - 22^\circ$. Do đó:

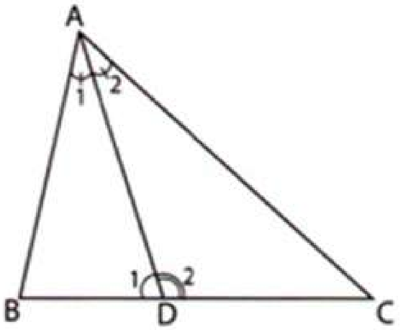
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = (\hat{B} + 22^\circ) + \hat{B} + (\hat{B} - 22^\circ)$

$= 180^\circ$ hay $3\hat{B} = 180^\circ$.

Từ đó suy ra: $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{A} = 82^\circ$, $\hat{C} = 38^\circ$.

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $\hat{B} - \hat{C} = 20^o$. Đường phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại D. Tính số đo của các góc $\widehat{ADB}$ và $\widehat{ADC}$.



Hình 37

Giải (h.37)

Xét ΔABD có góc $\widehat{D_2}$ là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác nên:

$\widehat{D_2} = \widehat{A_1} + \hat{B}$ (tính chất). (1)

Tương tự với ΔACD có góc $\widehat{D_1}$ là góc ngoài nên $\widehat{D_1} = \widehat{A_2} + \hat{C}$ (tính chất). (2)

Từ (1) và (2) có:

$\widehat{D_2} - \widehat{D_1} = \widehat{A_1} - \widehat{A_2} + \hat{B} - \hat{C}$

$= (\widehat{A_1} - \widehat{A_2}) + (\hat{B} - \hat{C})$.

Vì AD là tia phân giác của góc A nên

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{A_1} - \widehat{A_2} = 0$ và $\hat{B} - \hat{C} = 20^o$ (giả thiết). Vậy: $\widehat{D_2} - \widehat{D_1} = 20^o$. (3)

Mặt khác, vì $\widehat{D_2}$ và $\widehat{D_1}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{D_2} + \widehat{D_1} = 180^o$. (4)

Cộng từng vế (3) với (4) ta có: $2\widehat{D_2} = 200^o$

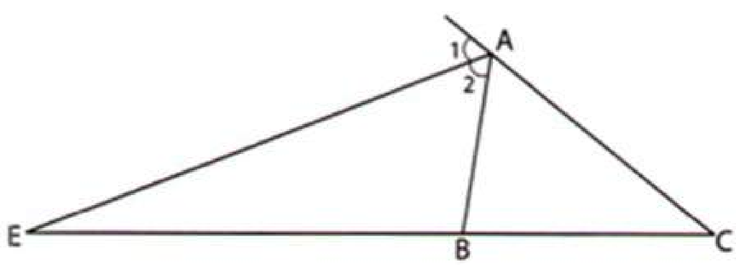
$\Rightarrow \widehat{D_2} = 100^o \Rightarrow \widehat{D_1} = 80^o$.

Ví dụ 3

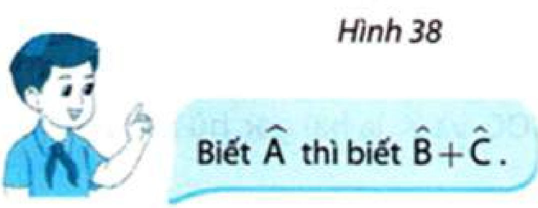
Cho tam giác ABC có $\hat{B} > \hat{C}$. Đường phân giác của góc ngoài ở đỉnh A cắt đường thẳng BC ở E.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AEB} = \dfrac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$.

b) Tính số đo của góc B và góc C, biết rằng $\widehat{A} = 60^o$ và $\widehat{AEB} = 15^o$.



Hình 38



Giải (h.38)

a) Một mặt, ta có: $\widehat{ABC} = \hat{E} + \widehat{A_2}$,

nên $\hat{E} = \widehat{ABC} - \widehat{A_2}$ ($\widehat{ABC}$ là góc ngoài ở đỉnh B của tam giác AEB). (1)

Mặt khác ta lại có:

$\hat{E} = \widehat{A_1} - \hat{C}$ ($\widehat{A_1}$ là góc ngoài ở đỉnh A của tam giác AEC). (2)

Cộng từng vế (1) và (2) với chú ý rằng $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, ta suy ra:

$$\widehat{AEB} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}.$$

b) Từ giả thiết và từ a) suy ra $\hat{B} - \hat{C} = 30^o$, kết hợp với $\hat{B} + \hat{C} = 120^o$ (do $\widehat{A} = 60^o$) tìm được $\hat{B} = 75^o, \hat{C} = 45^o$.

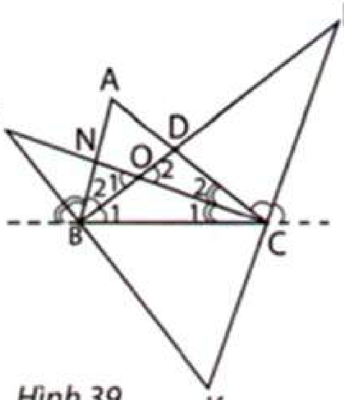
Ví dụ 4*

Cho ΔABC có góc $\widehat{A} = \alpha\ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$, các đường phân giác BD và CN cắt nhau tại O. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh B cắt tia CN tại E. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh C cắt BD tại F.

a) Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

b) Chứng minh: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = \dfrac{\alpha}{2}$.

c) Tia EB và FC cắt nhau tại K. Chứng minh $\widehat{BOC}$ và $\widehat{K}$ là hai góc bù nhau.



Hình 39

Tia phân giác trong và ngoài của một góc trong tam giác vuông góc với nhau

Giải (h.39)

a) Xét ΔABC có BD và CN là tia phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nên $\widehat{B_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$; $\widehat{C_1} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$ (tính chất).

Vậy $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2} = \dfrac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C})$. (1)

Mà: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tổng các góc trong tam giác)

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - \alpha$. (2)

Xét ΔBOC có: $\widehat{BOC} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ (tính chất) $\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - (\widehat{B_1} + \widehat{C_1})$. (3)

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$

Thay vào (3) ta có:

$\widehat{BOC} = 180^\circ - \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$

Vậy $\widehat{BOC} = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.

b) Xét ΔBOE có $EB \perp BO$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

Xét ΔCOF có $FC \perp CO$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù).

Vậy ΔBOE và ΔCOF là hai tam giác vuông tại B và tại C.

Vì trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau, suy ra: $\widehat{E} + \widehat{O_1} = \widehat{F} + \widehat{O_2} = 90^\circ$. (4)

Vì $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{E} = \widehat{F}$.

Mà $\widehat{BOC} = \widehat{E} + \widehat{EBO}$ (góc ngoài của ΔBEO). Trong đó: $\widehat{BOC} = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$;

$\widehat{EBO} = 90^\circ$ (chứng minh trên), suy ra

$90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} = \widehat{E} + 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} = \dfrac{\alpha}{2} = \widehat{F}$.

Tổng hai góc trong của một tam giác bằng góc ngoài tại đỉnh còn lại.

c) Xét ΔBKF có $\widehat{FBK} = 90^\circ$ (chứng minh trên). Vậy ΔBKF vuông tại B

$\Rightarrow \widehat{K} + \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{K} = 90^\circ - \widehat{F}$.

Từ đó: $\widehat{BOC} + \widehat{K} = \left(90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right) + (90^\circ - \widehat{F})$

$= 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{BOC}$ và $\widehat{K}$ là hai góc bù nhau.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

5.1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Tia phân giác của góc BAH cắt BH ở D. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$; b) $\widehat{ADC} = \widehat{DAC}$.

5.2. Cho ΔABC có $AB > AC$, $\widehat{A} = 90°$. Từ A hạ $AH \perp BC$. Kẻ tia AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Biết $\widehat{HAM} = 15°$. Tìm số đo của các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.

5.3. Cho ΔABC có $\widehat{B} = 110°$, $\widehat{C} = 30°$. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A cắt đường thẳng BC tại E. Tính số đo $\widehat{AEB}$. Nhận xét gì về ΔAEB?

5.4. Cho góc $\widehat{xOy} = 90°$. Từ A trên Ox và B trên Oy vẽ các tia Am và Bn về phía trong góc vuông sao cho $\widehat{xAm} = \widehat{OAB}$ và $\widehat{yBn} = \widehat{OBA}$.

Chứng minh rằng: Am//Bn.

5.5. Tính các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

a) Tam giác có 3 góc bằng nhau.

b) Tam giác có 2 góc bằng nhau, còn góc kia bằng 40°.

c) Ba góc $\widehat{A}$; $\widehat{B}$; $\widehat{C}$ có số đo tỉ lệ với 1; 3; 4.

5.6. Cho ΔABC. Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I.

a) Chứng minh rằng góc $\widehat{BIC}$ là góc tù.

b) Chứng minh rằng nếu góc $\widehat{BIC} = 135°$ thì tam giác đó là tam giác vuông.

5.7. a) Chứng minh rằng tổng ba góc ngoài ở ba đỉnh của một tam giác bằng 360°.

b) Các đường phân giác của các góc ngoài ở đỉnh B và C của tam giác ABC cắt nhau ở O. Chứng minh rằng góc BOC bằng nửa góc ngoài ở đỉnh A.

NÂNG CAO

5.8. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Các tia phân giác của các góc $\widehat{ACD}$ và $\widehat{ABD}$ cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = \frac{1}{2}(\widehat{CAE} + \widehat{BDE})$.

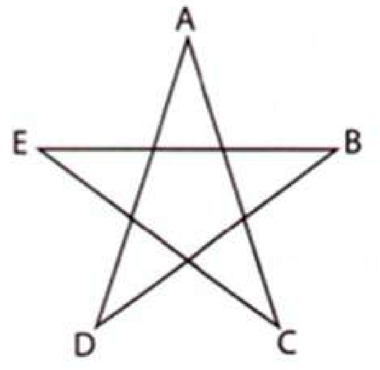
5.9. Cho ΔABC và điểm M nằm trong tam giác.

a) Chứng minh: $\widehat{BMC} = \widehat{A} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$.

b) Biết rằng: $\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 90° - \frac{\widehat{A}}{2}$ và tia BM là tia phân giác của góc $\widehat{B}$. Chứng minh tia CM là tia phân giác của $\widehat{C}$.

5.10. Tính tổng số đo các góc ở đỉnh A, B, C, D, E của hình sao 5 cánh (h.40).

(Đề thi HSG Toán lớp 7, Quận 6, TP. Hồ Chí Minh, 1999 – 2000)



Hình 40

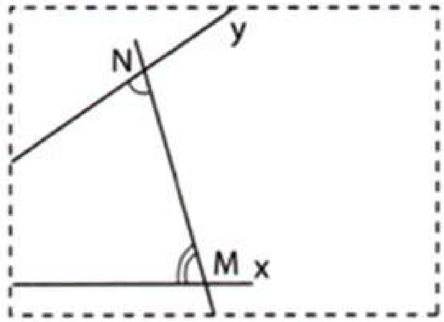
5.11. Đố vui: Ai là người thắng cuộc?

- Hai người chơi trò chơi bằng cách: vẽ một tam giác rồi lấy bên trong 10 điểm, sao cho trong 13 điểm (3 điểm là 3 đỉnh của tam giác và 10 điểm bên trong tam giác) không có 3 điểm nào thẳng hàng.
- Cách chơi: Lần lượt người nọ đến người kia, mỗi người nối hai điểm để được một đoạn thẳng (đoạn thẳng vẽ sau không được cắt đoạn thẳng vẽ trước). Ai vẽ được một tam giác thì được vẽ tiếp. Cuối cùng ai vẽ được nhiều hình tam giác là người thắng cuộc.
- Cuối cuộc chơi người thứ nhất vẽ được 12 tam giác. Hỏi người thứ nhất có thắng cuộc không?

EM CÓ BIẾT

Góc xAy trên hình 41 có đỉnh A ở ngoài tờ giấy. Bằng các kiến thức về đường thẳng song song ta đã biết cách xác định số đo của góc xAy. Bây giờ, chỉ bằng thước kẻ và thước đo độ, em hãy nêu cách xác định số đo góc xAy.

Hướng dẫn: Kẻ một đường thẳng cắt x và y thứ tự tại M và N. Dùng thước đo độ xác định các góc M và N, từ đó suy ra số đo góc xAy. Em có biết vì sao?

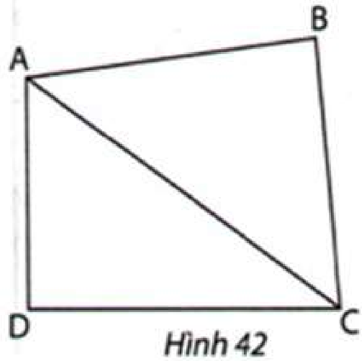


Hình 41

ĐI XA HƠN

Nhờ tính chất tổng các góc trong tam giác ta có thể tính tổng các góc trong của đa giác. Chẳng hạn, xét tứ giác ABCD (h.42). Chia tứ giác này thành hai tam giác ABC và ADC. Tổng các góc trong mỗi tam giác này bằng 180°, suy ra tổng các góc trong của tứ giác ABCD bằng 360°. Tiếp nữa, với đa giác có số cạnh nhiều hơn 4, ta cũng chia đa giác thành các tam giác không có điểm trong chung bởi các đường chéo xuất phát từ cùng một đỉnh. Nếu đa giác có n đỉnh (n cạnh) thì số tam giác là $n - 2$. Do đó tổng các góc trong của đa giác n cạnh là $(n - 2).\,180^\circ$.

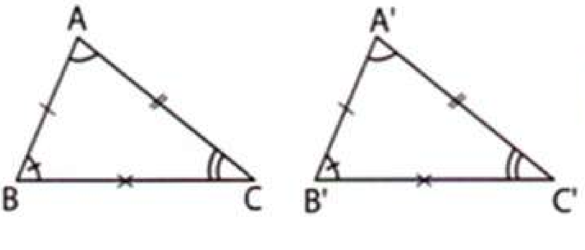
Một điều thú vị là dù đa giác có số cạnh bao nhiêu thì tổng các góc ngoài của đa giác n cạnh luôn bằng 360°. Kí hiệu tổng đó là T, ta có $(n - 2).\,180^\circ + T = n.\,180^\circ$, suy ra $T = 360^\circ$.



Hình 42

CHỦ ĐỀ 6 CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC

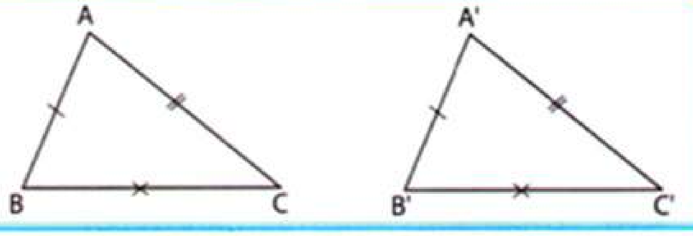
KIẾN THỨC CẦN NHỚ



Hai tam giác bằng nhau là hai tam giác có các cạnh tương ứng bằng nhau và các góc tương ứng bằng nhau.

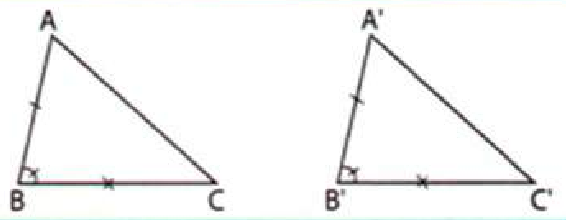
Trường hợp 1 (c.c.c)

- Ba cặp cạnh bằng nhau



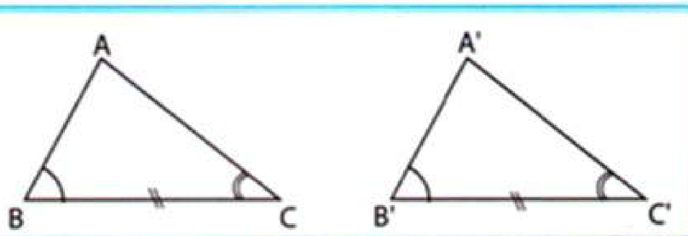
Trường hợp 2 (c.g.c)

- Hai cạnh và góc xen giữa bằng nhau



Trường hợp 3 (g.c.g)

- Một cạnh và hai góc kề bằng nhau



HỎI ĐÁP NHANH

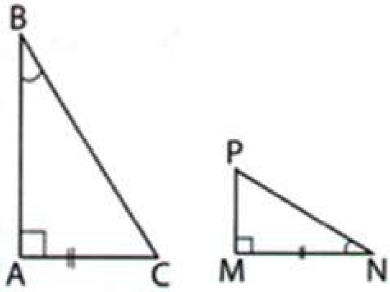
Xét tam giác ABC mà $AB \neq AC$

1. Tam giác ABC có bằng tam giác ACB không?
2. Cho $\Delta ABC = \Delta EGH$. Hãy viết các cạnh và các góc tương ứng bằng nhau (điền vào chỗ chấm):

   $\Delta ACB =$........, $AC =$........,

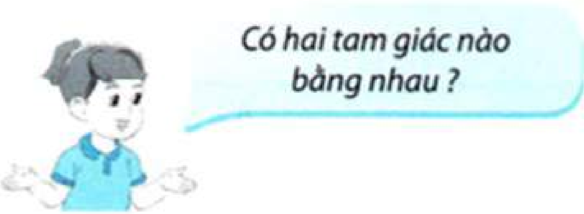
   $GH =$........, $\hat{B} =$......., $\hat{H} =$..........

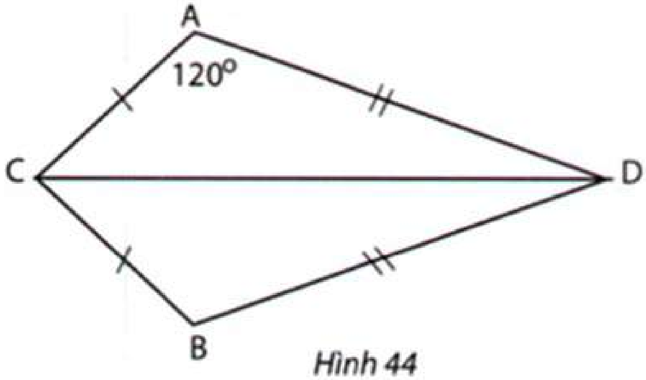
3. Hai tam giác vuông ABC và MNP có một cạnh góc vuông bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau (h.43). Hỏi hai tam giác này có bằng nhau không?



Hình 43

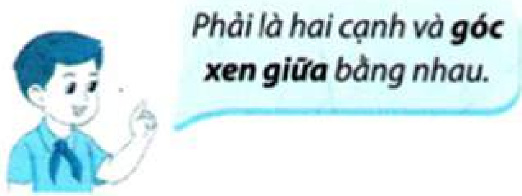
4. Trong hình 44, CD có là tia phân giác của góc ACB không? Số đo của góc B bằng bao nhiêu?

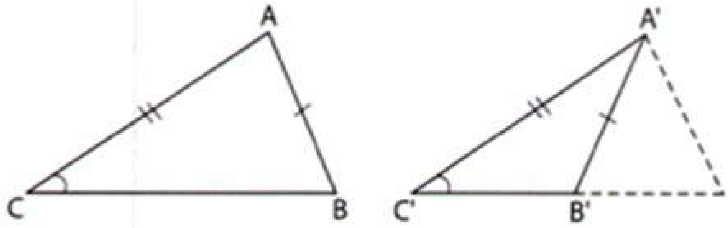




Hình 44

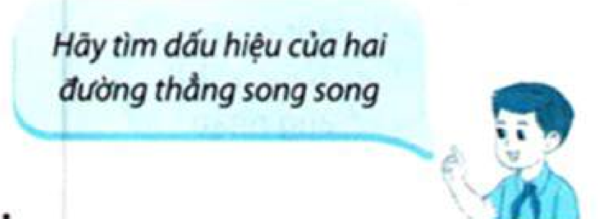
5. Trong hình 45, hai tam giác ABC và A'B'C' có hai cạnh và một góc bằng nhau ($AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$). Hai tam giác này có bằng nhau không? Tại sao?





Hình 45

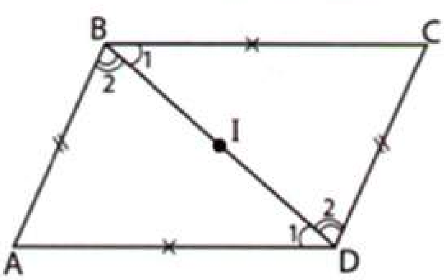
HỌC GIẢI TOÁN



Trường hợp 1 (c.c.c)

Ví dụ 1

Trong hình 46, biết $AD = BC$; $AB = CD$. Chứng minh $AD // BC$ và $AB // CD$.



Hình 46

Giải

Nối B với D. Xét ΔABD và ΔCDB có: $AD = BC$; $AB = CD$ và cạnh BD chung.

Vậy $\Delta ABD = \Delta CDB$ (c.c.c).

Suy ra các góc tương ứng bằng nhau:

$\widehat{D_1} = \widehat{B_1}$; $\widehat{B_2} = \widehat{D_2}$

$\Rightarrow AD // BC$, $AB // CD$ (hai góc so le trong bằng nhau).

Để làm quen với việc tìm đỉnh tương ứng; cạnh tương ứng cần luyện tập trí tưởng tượng nếu chuyển một tam giác thứ hai đến chồng lên tam giác thứ nhất (cố định) thì đỉnh này của tam giác trùng lên đỉnh tương ứng nào của tam giác thứ hai để chúng chồng khít lên nhau.

- Chẳng hạn, trong ví dụ trên ta lấy I là trung điểm của BD. Ta cho I cố định còn xoay ΔABD quanh I một góc 180^o sẽ có $D \equiv B$; $A \equiv C$ và $B \equiv D$.
- *Cách khác:* Lấy tờ bìa cắt một tam giác bằng ΔABD rồi đặt tam giác bằng bìa đó chồng lên ΔCDB trong hình vẽ.

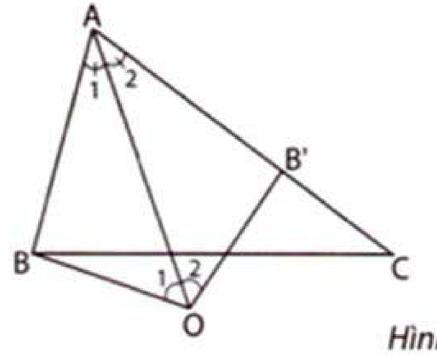
Ví dụ 2

Cho ΔABC $(AB < AC)$. Một học sinh vẽ tia phân giác của góc $\widehat{A}$ theo thứ tự các bước sau (h.47):

Bước 1: Lấy A làm tâm quay một cung bán kính AB. Cung này cắt cạnh AC tại B'.

Bước 2: Lấy B và B' làm tâm quay hai cung tròn (B; r) và (B'; r). Chúng cắt nhau tại O.

Bước 3: Nối AO. Em đó kết luận "AO là tia phân giác của góc $\widehat{A}$", đúng hay sai? Tại sao?



Hình 47

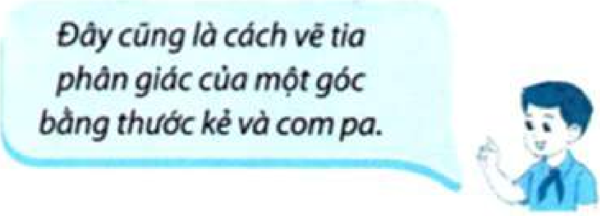
Giải

Muốn kết luận AO là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ ta phải chứng minh $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Thật vậy, xét ΔABO và $\Delta AB'O$ có: cạnh AO chung, $AB = AB'$ (theo cách vẽ bước 1) $BO = B'O = r$ (theo cách vẽ bước 2).

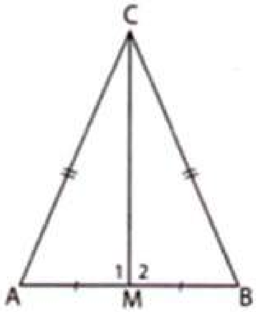
Vậy $\Delta ABO = \Delta AB'O$ (c.c.c). Suy ra các góc tương ứng bằng nhau $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.

Vậy tia AO là tia phân giác của góc A.



Ví dụ 3

Cho đoạn thẳng AB. Vẽ hai cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C nằm ngoài đoạn thẳng AB. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $CM \perp AB$.



Hình 48

Giải (h.48)

Theo cách vẽ ta có

$AC = BC$, $MA = MB$ (giả thiết), MC chung, suy ra $\Delta AMC = \Delta BMC$ (c.c.c), suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Nhưng $\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 180^o$ nên

$$\widehat{M}_1 = \widehat{M_2} = 90^o.$$

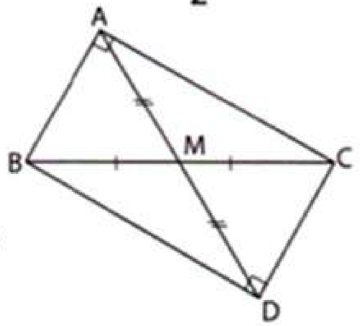
Do đó $CM \perp AB$.

Trường hợp 2 (c.g.c)

Ví dụ 4

Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm cạnh BC.

Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}BC$.



Hình 49

1. Để chứng minh $AM = \frac{1}{2}BC$ hay $BC = 2AM$, ta tạo ra đoạn thẳng bằng hai lần đoạn thẳng AM rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.

2. Đây là kết quả quan trọng được sử dụng để chứng minh nhiều bài toán sau này: "Trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền".

Giải (h.49)

Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Xét ΔMAB và ΔMDC có

$MA = MD$, $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (đối đỉnh),

$MB = MC$ (giả thiết),

do đó $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c).

Suy ra $AB = CD$, $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$.

Ta có $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$, $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MDC}$ là hai góc so le trong, do đó AB // CD.

Ta có AB // CD, $AB \perp AC \Rightarrow CD \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$.

Xét ΔABC và ΔCDA có

$AB = CD$ (chứng minh trên),

AC là cạnh chung, $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ $(= 90^\circ)$.

Do đó $\Delta ABC = \Delta CDA$ (c.g.c)

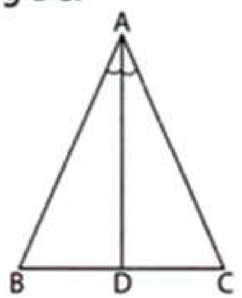
$\Rightarrow BC = AD$ (cặp cạnh tương ứng).

Mà $AM = \frac{1}{2}AD$ (vì $AM = MD$),

vậy $AM = \frac{1}{2}BC$.

Ví dụ 5

Cho tam giác ABC có AB = AC. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở D. Chứng minh rằng AD là đường trung trực của đoạn thẳng BC.



Hình 50

Giải (h.50)

Xét ΔABD và ΔACD có: $AB = AC$ (giả thiết),

AD là cạnh chung, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (AD là tia phân giác của góc BAC).

Do đó $\Delta ABD = \Delta ACD$ (c.g.c).

Suy ra $BD = DC$, $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$.

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (kề bù)

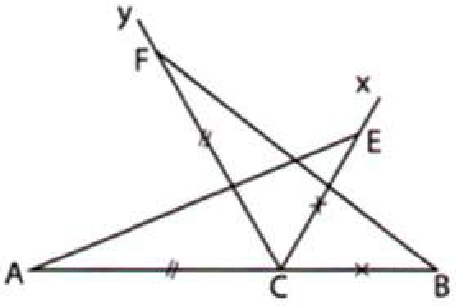
nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$.

Ta có $AD \perp BC$ ($\widehat{ADB} = 90^\circ$) và $BD = DC$.

Vậy AD là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

Ví dụ 6

Cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn AB, vẽ các tia Cx và Cy sao cho các góc $\widehat{BCx} = 60^o$ và $\widehat{BCy} = 120^o$. Lấy E trên Cx và F trên Cy sao cho CE = CB; CF = CA. Chứng minh: AE = BF.



Hình 51

Giải (h.51)

Xem AE và BF là hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau nào?

Xét ΔACE và ΔFCB có: C nằm giữa hai điểm A và B (giả thiết).

Vậy: $\widehat{ACE} + \widehat{ECB} = 180^o$,

mà $\widehat{ECB} = 60^o$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ACE} = 120^o$.

Do đó $\widehat{ACE} = \widehat{BCF} = 120^o$

và CB = CE (giả thiết), CF = CA (giả thiết).

Suy ra $\Delta ACE = \Delta FCB$ (c. g. c).

Vậy: AE = BF.

Ví dụ 7*

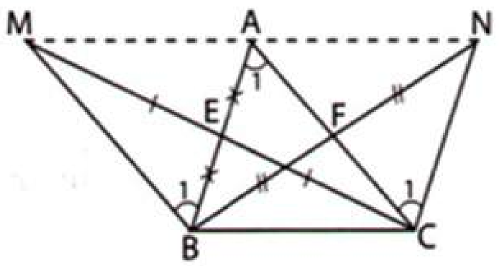
Cho ΔABC, các điểm E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia FB lấy điểm N sao cho FN = FB. Trên tia đối của tia EC lấy đểm M sao cho EM = EC. Chứng minh:

a) AB//NC; AC//MB.

b) $\Delta AEM = \Delta BEC$; $\Delta AFN = \Delta CFB$.

c) Ba điểm M, A, N thẳng hàng.

d) AM = AN.



Hình 52

Giải (h.52)

Hãy lưu ý các góc đối đỉnh.

a) Xét ΔAFB và ΔCFN có:

AF = FC (giả thiết);

$\widehat{AFB} = \widehat{CFN}$ (đối đỉnh);

FB = FN (giả thiết).

Vậy $\Delta AFB = \Delta CFN$ (c.g.c). Suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

$\Rightarrow$ AB//CN (góc so le trong bằng nhau).

Tương tự ta có $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

$\Rightarrow$ AC//BM (góc so le trong bằng nhau).

b) Chứng minh tương tự a, suy ra $\Delta AEM = \Delta BEC$, $\Delta AFN = \Delta CFB$.

c) Từ b) ta có AM//BC, AN//BC.

Suy ra M, A, N thẳng hàng (vì qua A chỉ kẻ được một đường thẳng song song với BC).

d) Suy trực tiếp từ các câu trên.

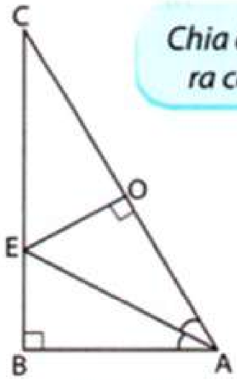
Trường hợp 3 (g.c.g)

Ví dụ 8

Cho tam giác ABC vuông tại B; AC = 2AB. Kẻ phân giác AE (E thuộc BC).

a) Chứng minh: AE = CE.

b) Tính các góc A, C của tam giác ABC.



Hình 53

Chia đôi cạnh AC để tạo ra các đoạn bằng AB

Trong một tam giác vuông, nếu một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30° (Mệnh đề đảo cũng đúng, xem ví dụ 4 chủ đề 7).

Giải (h.53)

a) Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với AC, cắt AC ở O.

Xét ΔAEB và ΔAEO có:

AE là cạnh chung, $\widehat{EAB} = \widehat{EAO}$ (giả thiết)

$\widehat{EBA} = \widehat{EOA} = 90^\circ$ (theo cách vẽ)

$\Rightarrow \Delta AEB = \Delta AEO$ (g.c.g)

Suy ra AB = AO.

Vì AC = 2AB nên OC = AB = OA, suy ra hai tam giác vuông EOA và EOC bằng nhau (c.g.c), do đó AE = CE.

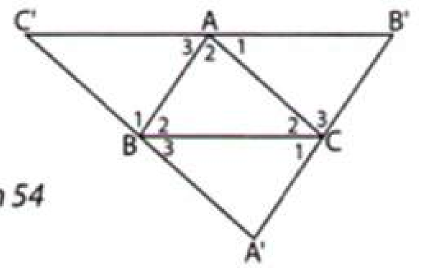
b) Theo trên ta có $\widehat{ECA} = \widehat{EAC} = \widehat{EAB}$.

Mà $\widehat{ACB} + \widehat{CAB} = 90^\circ$ nên $3\widehat{ACB} = 90^\circ$

suy ra $\widehat{ACB} = 30^\circ$, từ đó $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Ví dụ 9*

Cho ΔABC có AB = 2cm; AC = 2,5cm; BC = 3cm. Từ A kẻ C′B′//CB. Từ B kẻ A′C′//AC. Từ C kẻ A′B′//AB. Tính chu vi của ΔA′B′C′.



Hình 54

- Vậy chu vi ΔA′B′C′ bằng hai lần chu vi ΔABC.

- Với cách vẽ đó ta được ΔA′B′C′, trong đó ΔA′B′C′ được chia thành 4 tam giác bằng nhau và bằng ΔABC.

Giải (h.54)

Xét ΔABC và ΔCB′A có AC chung

$\widehat{A_2} = \widehat{C_3}$ (so le, AB // A′B′)

$\widehat{C_2} = \widehat{A_1}$ (so le, BC // B′C′).

Vậy: ΔABC = ΔCB′A (g.c.g).

Suy ra: AB′ = BC, (1)

CB′ = AB. (2)

- Tương tự có ΔABC = ΔBAC′ (g.c.g)

Suy ra: AC′ = BC (3) và BC′ = AC (4).

- Ta cũng có ΔABC = ΔA′CB (g.c.g).

Suy ra: A′B = AC (5) và CA′ = AB (6).

- Cộng vế với vế (1), (2), (3), (4), (5), (6), ta có:

$AB' + CB' + AC' + BC' + A'B + CA'$

$= BC + AB + BC + AC + AC + AB$

$\Leftrightarrow (AB' + AC') + (CB' + CA') + (BC' + A'B)$

$= 2(AB + AC + BC)$

$\Leftrightarrow A'C' + A'B' + A'C' = 2(2 + 2,5 + 3) = 15$(cm).

Vậy chu vi ΔA′B′C′ bằng 15cm.

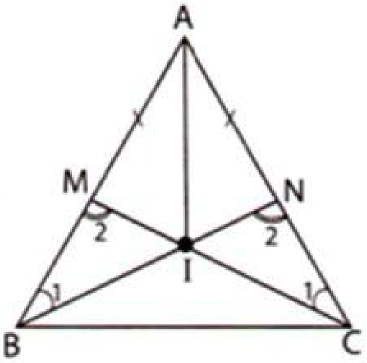
Ví dụ 10*

Cho ΔABC $(AB = AC)$. Trên AB lấy điểm M; trên AC lấy điểm N sao cho $AM = AN$. Nối BN và CM, chúng cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:

a) $BN = CM$.

b) $\Delta BMC = \Delta CNB$ và $\Delta BIM = \Delta CIN$.

c) AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.



Hình 55

Giải (h.55)

a) Xét ΔABN và ΔACM có:
$AB = AC$ (giả thiết); góc $\widehat{A}$ chung;
$AM = AN$ (giả thiết).
Vậy $\Delta ABN = \Delta ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = CM$.

b) Xét ΔBMC và ΔCNB có: cạnh BC chung; $BN = CM$ (chứng minh a) và $BM = CN$
(do $AB = AC$ (giả thiết), $AM = AN$ (giả thiết) $\Rightarrow AB - AM = AC - AN$).
Vậy $\Delta BMC = \Delta CNB$ (c.c.c)
- Xét ΔBIM và ΔCIN có:
$BN = CM$ (chứng minh a)
$\Delta ABN = \Delta ACM$ (chứng minh a) suy ra: $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$,
$\Delta BMC = \Delta CNB$ (chứng minh b) suy ra: $\widehat{M_2} = \widehat{N_2}$.
Vậy $\Delta BIM = \Delta CIN$ (g.c.g).

c) Xét ΔABI và ΔACI có: AI chung; $AB = AC$ (giả thiết); $BI = IC$ ($\Delta BIM = \Delta CIN$).
Vậy $\Delta ABI = \Delta ACI$ (c.c.c).
Suy ra hai góc tương ứng bằng nhau: $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$.
Vậy AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

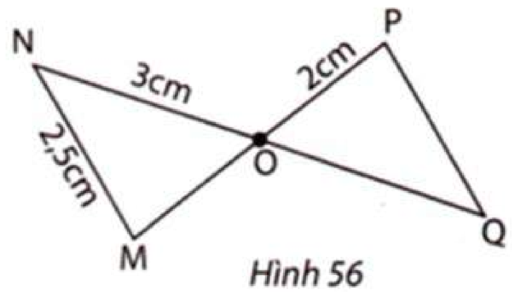
HAI TAM GIÁC BẰNG NHAU

6.1. Cho $\Delta ABC = \Delta MNP$. Biết số đo của các cạnh $AB = 3cm$; $BC = 4cm$; $MP = 5cm$. Tính chu vi của ΔMNP.

6.2. Cho hai tam giác bằng nhau: tam giác ABC độ dài 3 cạnh khác nhau, bằng tam giác có đỉnh là K, E, F. Biết $AB = EF$ và $\widehat{B} = \widehat{F}$. Từ ΔABC đã biết hãy viết tam giác có 3 đỉnh là K, E, F sao cho các cạnh tương ứng, góc tương ứng cùng vị trí.

Trường hợp 1(c.c.c)

6.3. Trên hình 56: Cho $\Delta NOM = \Delta QOP$ và các cạnh có số đo ghi trên hình vẽ. Tính các cạnh còn lại của hai tam giác. Chứng minh: MN//PQ.



Hình 56

6.4. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên Ox và Oy lấy hai điểm A và B sao cho $OA = OB$. Vẽ hai đường tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính (bán kính nhỏ hơn OA), chúng cắt nhau tại E và F. Chứng minh rằng:

a) $\Delta OEA = \Delta OEB$; $\Delta OFA = \Delta OFB$.

b) Ba điểm O, E, F thẳng hàng.

c) E, O thuộc tia phân giác của góc AFB.

6.5. Cho ΔABC. Vẽ đường tròn (B; AC). Vẽ đường tròn (C; AB). Hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm E và F thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là BC (E và A thuộc cùng một nửa mặt phẳng). Chứng minh rằng:

a) $\Delta ABC = \Delta ECB = \Delta FCB$.

b) AB//CF ; AC//BF.

c) $\Delta ABE = \Delta ECA$.

d) AE//BC.

6.6. Cho ΔABC có $AB = AC$ và H là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: $AH \perp BC$.

Trường hợp 2 (c. g. c)

6.7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm AC, D là điểm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B sao cho $\widehat{MCD} = 90^\circ$ và $CD = AB$. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BD.

6.8. Chứng minh rằng nếu đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O sao cho O là trung điểm của AB và CD thì ta có:

a) AC//BD và $AC = BD$.

b) CB//AD và $CB = AD$.

6.9. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^\circ$. M là trung điểm của cạnh AB. Nối CM và trên tia đối của tia MC lấy điểm H sao cho $MH = MC$. Chứng minh $HB \perp AB$.

6.10. Cho điểm M trên đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn AB kẻ tia Mx sao cho $\widehat{AMx} = 60^\circ$ và tia My sao cho góc $\widehat{BMy} = 60^\circ$. Trên tia Mx lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Trên tia My lấy điểm D sao cho $MD = MB$.

a) Chứng minh $AD = CB$.

b) Lấy E là trung điểm của AD; F là trung điểm của CB. Chứng minh: $\widehat{EMF} = 60^\circ$.

6.11. Cho điểm C nằm trên đoạn thẳng MN; Ix là đường trung trực của đoạn MC ($I \in MC$); Ky là đường trung trực của đoạn CN ($K \in CN$). Kẻ đường thẳng d qua C cắt Ix tại E và cắt Ky tại F. Chứng minh: ME//NF.

6.12. Cho Δ ABC có M là trung điểm của cạnh AB; N là trung điểm của cạnh AC. Trên tia đối của tia NM lấy điểm P sao cho $NP = MN$. Chứng minh rằng:

a) $\Delta AMN = \Delta CPN$.

b) $CP = BM$; CP//BM.

c) MN//BC.

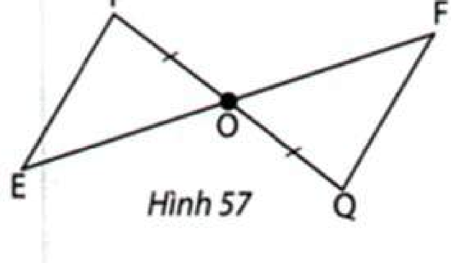
d) Có nhận xét gì về MN so với BC?

6.13. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có $\widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'} = 180^\circ$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$; M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}B'C'$.

6.14. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Ax vuông góc với AB, trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ay vuông góc với AC, trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $AM = \frac{1}{2}DE$.

Trường hợp 3 (g. c. g)

6.15. Trong hình 57 biết $PO = OQ$ và PE//FQ (P, O, Q thẳng hàng; E, O, F thẳng hàng). Hãy chứng minh $\Delta EOP = \Delta FOQ$.



Hình 57

6.16. Cho ΔMNP có $\widehat{M} = \widehat{N}$, kẻ ME là tia phân giác của $\widehat{M}$ ($E \in NP$), kẻ tia NF là tia phân giác của $\widehat{N}$ ($F \in MP$). Chứng minh $ME = NF$.

6.17. Cho ΔABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$ (góc A nhọn). Từ B hạ $BH \perp AC$. Từ C hạ $CK \perp AB$. Chứng minh rằng $BH = CK$.

6.18. Cho ΔABC, đường phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt đường phân giác của góc $\widehat{B}$ tại O. Từ O hạ $OE \perp AB$ (E thuộc AB), $OF \perp AC$ (F thuộc AC), $OI \perp BC$ (I thuộc BC).
Chứng minh $OE = OF = OI$.

6.19. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox, đường thẳng này cắt Oy tại B. Qua M kẻ đường thẳng song song với Oy, đường thẳng này cắt Ox tại A.
a) Chứng minh: $MA = OB$; $MB = OA$.
b) Trên tia đối của tia AO lấy điểm C sao cho $AC = AO$. Đường thẳng CM cắt Oy tại D. Chứng minh: $CM = MD$.

NÂNG CAO

6.20. Cho ΔABC ($\widehat{A} < 90^o$). Tại A kẻ $Ax \perp AC$. Trên Ax lấy điểm M sao cho $MA = AC$ (M và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC). Tại A kẻ $Ay \perp AB$. Trên Ay lấy điểm N sao cho $AN = AB$ (N và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Chứng minh rằng:
a) $\Delta ABM = \Delta ANC$.
b) $BM = CN$;
c) $BM \perp CN$.

6.21. Đố vui: Góc tù bằng góc nhọn?

Cho ΔABC có góc $\widehat{A}$ tù ($AB < AC$). Lấy A làm tâm vẽ đường tròn bán kính AB cắt BC ở E (khác B).
Một học sinh lập luận: Xét ΔABC và ΔAEC có: $AB = AE$ (cùng bán kính); góc $\widehat{C}$ chung và cạnh AC chung. Vậy $\Delta ABC = \Delta AEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EAC}$.
Mà $\widehat{BAC}$ là góc tù; $\widehat{EAC}$ là góc nhọn. Vậy là góc tù bằng góc nhọn (?). Em hay chỉ ra chỗ sai trong lập luận trên.

6.22. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^o$. Hai tia phân giác AD và CE của các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACB}$ ($D \in BC$, $E \in AB$) cắt nhau ở I. Chứng minh rằng $ID = IE$.

(Đề thi HSG Toán lớp 7, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, 2004 – 2005)

6.23. Cho ΔABC. Từ C kẻ Cx // AB (A và tia Cx nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC). Trên AB lấy điểm M. Trên tia Cx lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Nối MN cắt AC tại O.
a) Chứng minh: $OA = OC$; $OM = ON$.
b) Nối BO, tia BO cắt Cx tại P. Chứng minh $AB = CP$.

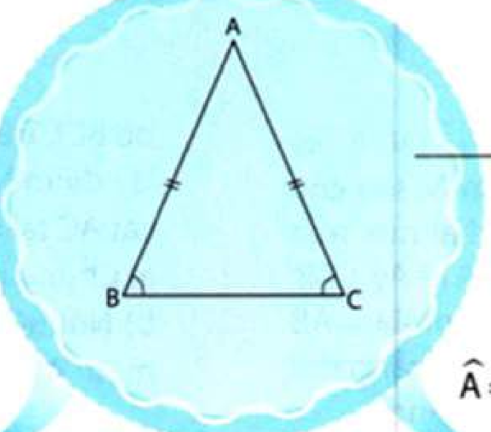
6.24. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên Ox lấy các điểm M, E, P sao cho $OM = ME = EP$. Trên Oy lấy điểm N tuỳ ý. Từ E và P kẻ các đường thẳng song song với MN. Chúng cắt Oy theo thứ tự tại F và Q. Từ N kẻ NI // Ox ($I \in EF$). Từ F kẻ FK // Ox ($K \in PQ$). Chứng minh rằng $ON = NF = FQ$.

6.25. Cho tam giác ABC, D là một điểm trên cạnh BC. Từ D kẻ các tia song song với AB cắt AC ở E, song song với AC cắt AB ở F.
a) Chứng minh rằng các tam giác AED và DFA bằng nhau, các tam giác AEF và DFE bằng nhau.
b) Hãy xác định điểm D trên cạnh BC để $AE = AF$.

6.26. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Vẽ $AE \perp AB$ và $AE = AB$ (E và C khác phía đối với AB). Vẽ $AF \perp AC$ và $AF = AC$ (F và B khác phía đối với AC). Kẻ EM và FN cùng vuông góc với đường thẳng AH ($M, N \in AH$). EF cắt AH ở I. Chứng minh rằng:
a) $EM + BH = HM$, $FN + CH = HN$.
b) I là trung điểm của EF.

CHỦ ĐỀ 7 TAM GIÁC CÂN, TAM GIÁC ĐỀU

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

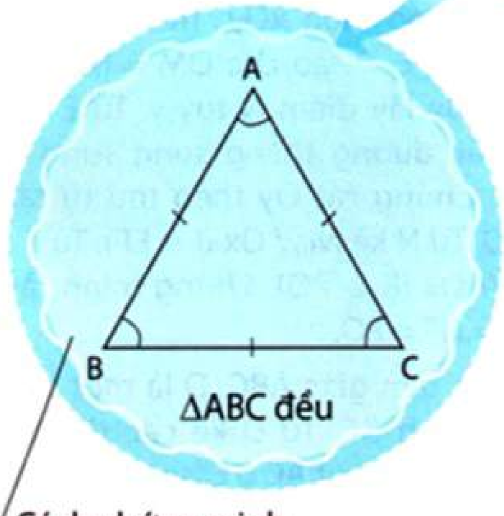


Cách chứng minh

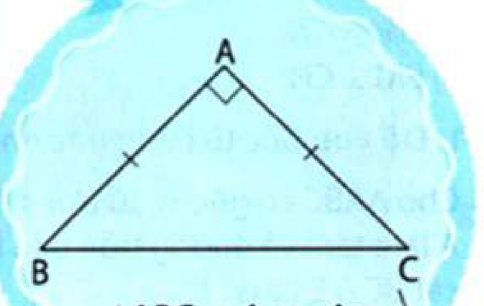
$\left[\begin{array}{l} AB = AC \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right.$

$\widehat{A} = 60^\circ$ hoặc $\hat{B} = 60^\circ$

$\widehat{A} = 90^\circ$



ΔABC đều



ΔABC vuông cân

Cách chứng minh

$\left[\begin{array}{l} AB = AC = BC \\ \widehat{A} = \hat{B} = \hat{C} \\ AB = AC \text{ và } \widehat{A} = 60^\circ \text{ (hoặc } \hat{B} = 60^\circ \text{)} \end{array}\right.$

Cách chứng minh

$\left[\begin{array}{l} \widehat{A} = 90^\circ \text{ và } AB = AC \\ \widehat{A} = 90^\circ \text{ và } \hat{B} = 45^\circ \text{ (hoặc } \hat{C} = 45^\circ \text{).} \end{array}\right.$

HỎI ĐÁP NHANH

1. Tại sao trong tam giác cân, mỗi góc ở đáy đều là góc nhọn?
2. Tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 100° thì mỗi góc ở đáy là bao nhiêu độ?
3. Các góc nhọn của tam giác vuông cân bằng bao nhiêu độ?

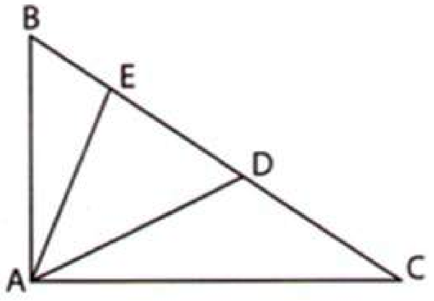
Xét tổng hai góc ở đáy

Hai góc ở đáy bằng nhau

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC, lấy các điểm D và E sao cho BD = BA, CE = CA. Tính góc DAE.



Hình 58

Giải (h.58)

ΔBAD cân tại B, ΔCAE cân tại C. Ta có

$\widehat{BAD}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\hat{B}\right)$, $\widehat{CAE}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\hat{C}\right)$,

mà $\widehat{BAD}+\widehat{CAE}=\widehat{EAD}+90^\circ$

nên $\widehat{EAD}=\widehat{BAD}+\widehat{CAE}-90^\circ$

$$=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\hat{B}\right)+\frac{1}{2}\left(180^\circ-\hat{C}\right)-90^\circ$$

$$=90^\circ-\frac{1}{2}\left(\hat{B}+\hat{C}\right)$$

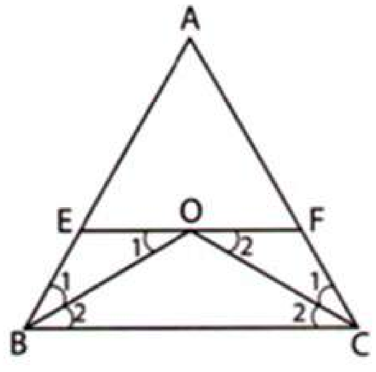
$$=90^\circ-45^\circ=45^\circ.$$

Ví dụ 2

Cho ΔABC cân tại A. Các tia phân giác của góc $\hat{B}$ và góc $\hat{C}$ cắt nhau tại O. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC. Đường thẳng này cắt cạnh AB tại E và cắt cạnh AC tại F.

a) Trong hình vẽ có những tam giác nào là tam giác cân?

b) Trong đó có những tam giác cân nào bằng nhau?



Hình 59

Giải (h.59)

a) Xét ΔABC cân (giả thiết) nên $\hat{B}=\hat{C}$ (tính chất). Suy ra $\frac{1}{2}\hat{B}=\frac{1}{2}\hat{C}$ hay $\widehat{B_2}=\widehat{C_2}$. Vậy ΔBOC cân tại O.

- Xét ΔAEF, do EF // BC nên $\widehat{AEF}=\hat{B}=\hat{C}=\widehat{AFE}$. Vậy ΔAEF cân tại A.

- Xét ΔBEO có: $\widehat{B_2}=\widehat{O_1}$ (so le, EF // BC). Mà $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ (giả thiết) nên $\widehat{O_1}=\widehat{B_1}$ (cùng bằng $\widehat{B_2}$). Vậy ΔBEO cân tại E.

- Tương tự, ΔCFO cân tại F.

b) Xét hai tam giác cân ΔBEO và ΔCFO có:

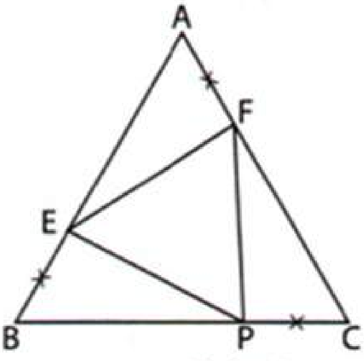
BO = CO (ΔBOC cân).

$\widehat{B_1}=\frac{1}{2}\hat{B}$; $\widehat{C_1}=\frac{1}{2}\hat{C}$, mà $\hat{B}=\hat{C}$ (theo tính chất) nên $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$.

Vậy $\Delta BEO=\Delta CFO$ (g.c.g).

Ví dụ 3

Cho ΔABC đều. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F, trên cạnh BC lấy điểm P sao cho: $BE = AF = CP$. Chứng minh ΔEFP là tam giác đều.



Hình 60

Giải (h.60)

Ta có: $AB = AC = BC$ (ΔABC đều);

$BE = AF = CP$ (giả thiết).

Vậy: $AB - BE = AC - AF = BC - CP$

hay: $AE = CF = BP$.

Xét ΔAEF; ΔBPE và ΔCFP có:

$AE = BP = CF$ (chứng minh trên) và

$AF = BE = CP$ (giả thiết);

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$ (tính chất tam giác đều).

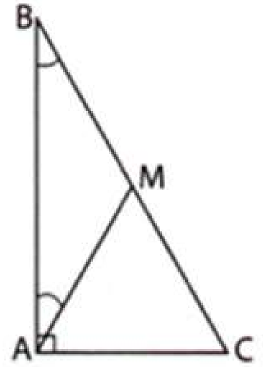
Vậy $\Delta AEF = \Delta BPE = \Delta CFP$ (c.g.c)

Suy ra: $EF = PE = FP$.

Do đó ΔEFP là tam giác đều (3 cạnh bằng nhau).

Ví dụ 4

Chứng minh định lí: Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh đối diện với góc đó bằng nửa cạnh huyền.



Hình 61

Giải (h.61)

Xét ΔABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = 30^\circ$.

ΔAMB có $\widehat{BAM} = \widehat{B}$ $(= 30^\circ)$ nên là tam giác cân, suy ra $MA = MB$. (1)

ΔAMC có $\widehat{MAC} = \widehat{C}$ $(= 60^\circ)$ nên là tam giác đều, suy ra $MA = MC = AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC = \dfrac{1}{2}BC$.

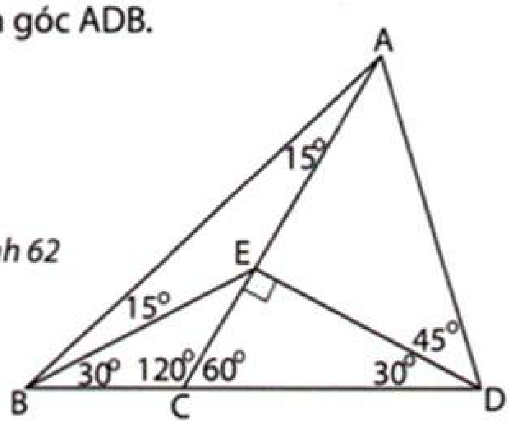
Ví dụ 5

Tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$.

a) Kẻ $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Chứng minh rằng $ED = EB = EA$.

b) Tính góc ADB.

Hình 62



Giải (h.62)

a) Vì $\widehat{ECB} = 120^\circ$ nên $\widehat{ECD} = 60^\circ$.

Vì tam giác DEC vuông tại E nên:

$\widehat{EDC} + \widehat{ECD} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{EDC} = 30^\circ$.

Mà EC là cạnh đối diện với $\widehat{EDC}$ nên

$EC = \dfrac{1}{2}CD$ (xem ví dụ 4) $\Rightarrow EC = CB$.

Vậy tam giác ECB cân tại C.

Mà $\widehat{ECB} = 120^\circ$ nên $\widehat{EBC} = 30^\circ$.

Do đó ΔEBD cân tại E $\Rightarrow EB = ED$.

Lại có: $\widehat{ABE} + \widehat{EBC} = \widehat{ABC} = 45^\circ$,

suy ra $\widehat{ABE} = 15^\circ$.

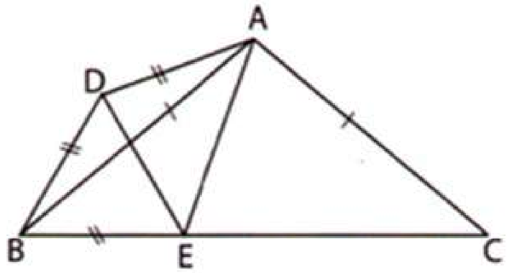
Áp dụng định lí tổng 3 góc trong tam giác ABC ta có $\widehat{EAB} = 15^\circ$ $\Rightarrow$ tam giác EAB cân tại E

$\Rightarrow EA = EB \Rightarrow EA = ED$.

b) Ta có EA = ED, mà EA $\perp$ ED nên tam giác AED vuông cân tại E $\Rightarrow \widehat{ADE} = 45^\circ$.
Khi đó $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$. Vậy $\widehat{ADB} = 75^\circ$.

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$, BC = a, AC = b. Về phía ngoài tam ABC vẽ tam giác ABD cân tại D có $\widehat{ADB} = 140^\circ$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.



Hình 63

Phương pháp vẽ thêm đường phụ, hình phụ rất có hiệu quả trong việc giải nhiều bài toán, đặc biệt là các bài toán về tính góc. Các cách vẽ hay dùng là: Đặt một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã có, dựng một góc bằng góc đã có; dựng thêm tam giác đều để tạo ra những góc mới biết số đo, để tạo ra hai tam giác bằng nhau,....

Giải (h.63)

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = BD.

Ta có $\widehat{DBA} = 20^\circ$, $\widehat{ABE} = 40^\circ$.

Xét ΔBDE cân tại B, có $\widehat{DBE} = 60^\circ$ nên ΔBDE đều, do đó BD = BE = DE = DA;

$\widehat{EDA} = \widehat{BDA} - \widehat{BDE} = 80^\circ$, ΔDAE cân tại D có $\widehat{EDA} = 80^\circ$ nên $\widehat{DEA} = \widehat{DAE} = 50^\circ$.

$\widehat{EAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} - \widehat{DAE}$
$= 20^\circ + 100^\circ - 50^\circ = 70^\circ$.

Ta có $\widehat{AEC} = 180^\circ - \widehat{DEA} - \widehat{DEB}$
$= 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

ΔCAE có $\widehat{EAC} = \widehat{AEC}$ $(= 70^\circ) \Rightarrow \Delta$CAE cân tại C $\Rightarrow$ AC = EC.

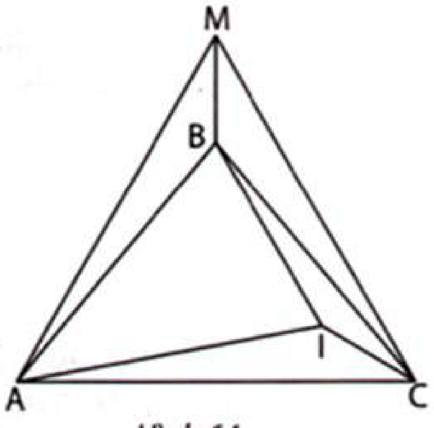
Do đó AD = BD = BE = BC − EC = BC − AC
= a − b và AB = AC = b.

Vậy chu vi ΔABD là AD + BD + AB
= a − b + a − b + b = 2a − b.

Ví dụ 7

Cho tam giác ABC cân tại B, $\widehat{ABC} = 80^\circ$. Lấy I là điểm trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ$, $\widehat{ICA} = 30^\circ$. Hãy tính góc ABI.

(Đề thi HSG Toán lớp 9, TP. Hồ Chí Minh, 2010 – 2011)



Hình 64

Giải (h.64)

Vẽ tam giác ACM đều, M nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B.

Ta có ΔAMB = ΔCMB (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = 30^\circ$.

ΔBMA = ΔICA (AM = AC, $\widehat{BMA} = \widehat{ICA} = 30^\circ$,
$\widehat{MAB} = \widehat{IAC} = 10^\circ$)

$\Rightarrow$ BA = IA $\Rightarrow \Delta$BAI cân tại A,

$\widehat{BAI} = 60^\circ - 10^\circ - 10^\circ = 40^\circ$

Do đó $\widehat{ABI} = (180^\circ - \widehat{BAI}) : 2 = 70^\circ$.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

7.1. Cho tam giác ABC cân, biết $\hat{B} = 50^o$. Tính số đo các góc còn lại của tam giác ABC (lưu ý xét đủ các trường hợp).

7.2. Chứng minh rằng trong tam giác cân, độ dài các đường trung tuyến, đường cao, phân giác xuất phát từ hai đỉnh thuộc đáy thì bằng nhau.

7.3. Cho ΔABC cân tại A, có $\widehat{A} = 36^o$. Tia phân giác của góc $\hat{B}$ cắt AC tại E. So sánh BE với AE và BC?

7.4. Cho ΔABC cân tại A, góc $\hat{B} = 30^o$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho AE = AB.

a) ΔACE là tam giác gì?

b) ΔBCE là tam giác gì?

7.5. Chứng minh rằng nếu một tam giác có trung tuyến thuộc một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

7.6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, D là điểm bất kì trên cạnh AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C vẽ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 135^o$. Đường thẳng vuông góc với DC tại D cắt Bx tại E. Chứng minh tam giác DEC vuông cân.

7.7. Cho ΔABC vuông ($\widehat{ACB} = 90^o$). Từ A, B kẻ hai phân giác góc A, B cắt AC ở E, cắt BC ở D. Từ D, E hạ các đường vuông góc xuống AB cắt AB ở M và N. Tính góc MCN.

NÂNG CAO

7.8. Cho ΔABC có $\widehat{A} = 90^o$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của góc $\widehat{HAC}$ cắt cạnh BC tại D. Tia phân giác của góc $\widehat{HAB}$ cắt cạnh BC tại E. Chứng minh rằng:

a) ΔABD và ΔACE là các tam giác cân.

b) $AC + AB = BC + DE$.

7.9. Cho tam giác ABC có BC = 2AB, M là trung điểm của cạnh BC, D là trung điểm của BM. Chứng minh rằng AC = 2AD.

7.10. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 40^o$. Lấy điểm D khác phía B so với AC thoả mãn $\widehat{CAD} = 60^o$, $\widehat{ACD} = 80^o$. Chứng minh rằng BD vuông góc với AC.

7.11. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 75^o$, $\hat{B} = 35^o$. Phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AD cắt tia BC tại E. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng:

a) ACM là tam giác cân.

b) Chu vi tam giác ABC bằng độ dài đoạn thẳng BE.

(Đề thi lớp 8 chuyên toán quận Đống Đa, 1992-1993)

7.12. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 108^o$, BC = a, AC = b. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD cân tại A có $\widehat{BAD} = 36^o$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.

7.13. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^o$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho AD = BC. Tính góc ACD.

7.14. Cho tam giác ABC cân tại A, $\hat{B} = \hat{C} = 80^o$. Từ B và C vẽ các đường thẳng cắt các cạnh đối diện tương ứng ở D và E sao cho $\widehat{CBD} = 60^o$ và $\widehat{BCE} = 50^o$. Tính $\widehat{BDE}$.

(Đề thi HSG Toán lớp 7, Hoàn Kiếm, Hà Nội, 2003 – 2004)

7.15. Cho tam giác ABC, các đường phân giác BD và CE. Tính số đo của góc A biết rằng BE + CD = BC.

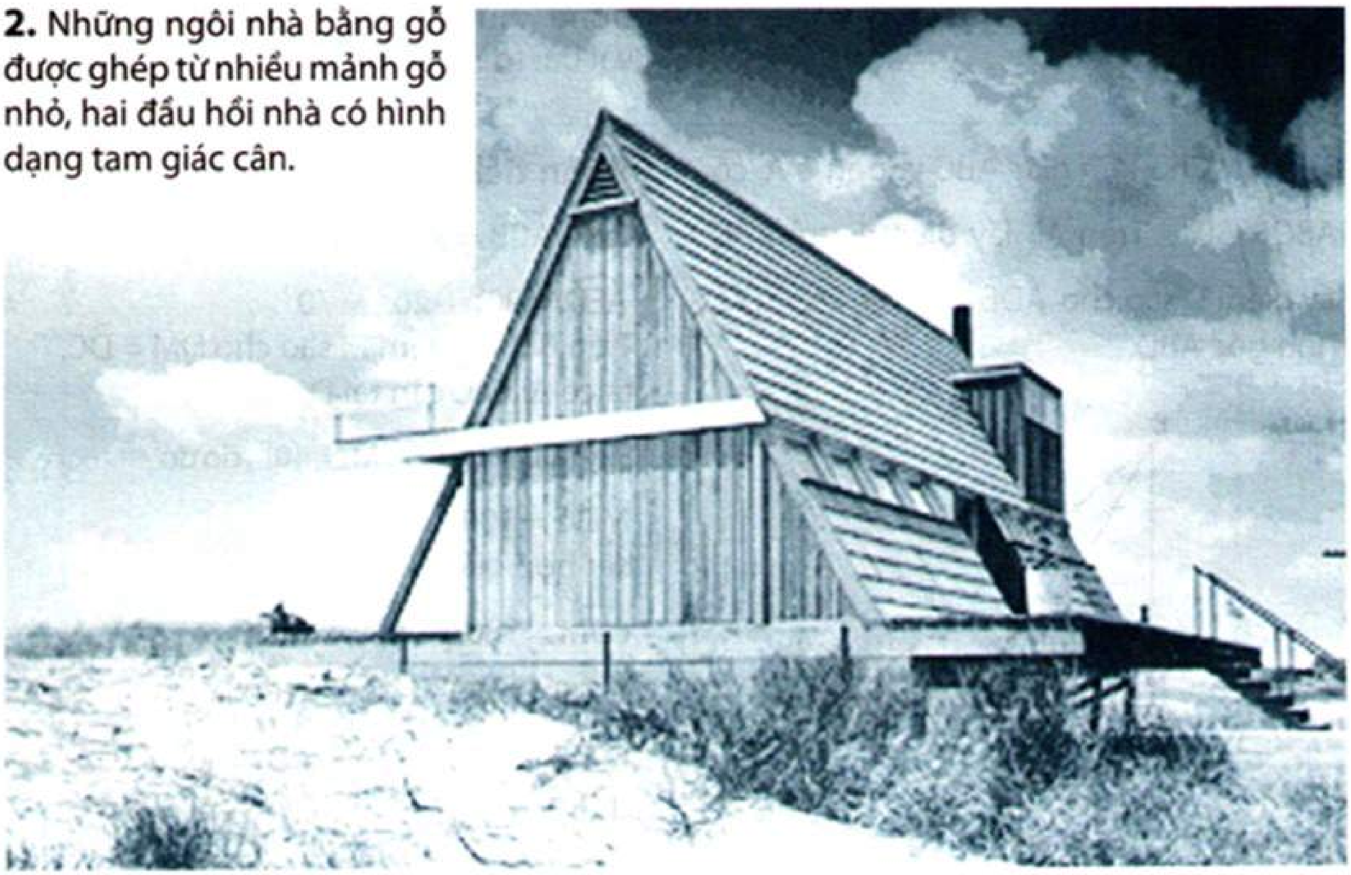
(Đề thi HSG trường Trưng Vương, Hà Nội, 2000-2001)

7.16. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, CB. Chứng minh rằng tam giác MEF đều.

EM CÓ BIẾT

1. Trên các bức tường trong phòng ở của trẻ em thường được trang trí bởi các viên gạch màu hình tam giác cân, xen kẽ nhau. Các chân tường nhà ở cũng được lát ghép bằng những viên gạch màu hình tam giác đều liền sát nhau, tạo thành những dải trang trí trông rất đẹp mắt.

2. Những ngôi nhà bằng gỗ được ghép từ nhiều mảnh gỗ nhỏ, hai đầu hồi nhà có hình dạng tam giác cân.



3. Nhóm biển báo nguy hiểm trên các đường giao thông đều có hình tam giác đều, nó gợi cho người tham gia giao thông một sự cảm nhận đặc biệt cần chú ý, tránh xảy ra các tai nạn giao thông.

Chỗ ngoặt trái nguy hiểm

Chỗ ngoặt phải nguy hiểm

Nhiều chỗ ngoặt nguy hiểm liên tiếp

ĐI XA HƠN

PHƯƠNG PHÁP VẼ THÊM HÌNH PHỤ

Trong khi giải toán hình học, nếu biết vẽ thêm các đường phụ một cách thích hợp, tạo ra sự liên hệ giữa các yếu tố đã cho và các yếu tố cần tìm, ta có thể giải quyết bài toán một cách dễ dàng, thuận lợi. Thậm chí, nhiều bài toán phải vẽ thêm yếu tố phụ mới tìm ra được lời giải.

Các cách vẽ yếu tố phụ thường dùng là:

- Vẽ trung điểm của đoạn thẳng, vẽ tia phân giác của một góc;

- Đặt một đoạn thẳng bằng một đoạn thẳng cho trước;

- Từ một điểm, vẽ đường thẳng song song hay vuông góc với đường thẳng đã cho.

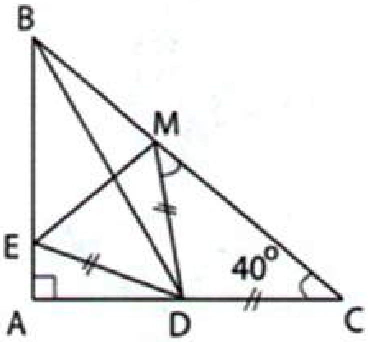
Xa hơn, ta có thể vẽ thêm đường tròn, hình vuông, tam giác đều,…

Tuy nhiên, vẽ thêm các yếu tố phụ như thế nào là một vấn đề khó khăn, phức tạp.

Tuỳ theo từng bài toán mà ta chọn cách vẽ thêm cho phù hợp. Vẽ thêm yếu tố phụ là một sự sáng tạo trong giải toán, nhằm tìm ra lời giải một cách ngắn gọn, không phải vẽ tuỳ tiện, phải tuân thủ các phép dựng hình cơ bản và các bài toán dựng hình cơ bản.

Để minh hoạ cho ưu thế và tính hiệu quả của phương pháp vẽ thêm hình phụ, ngoài một số ví dụ và bài toán đã nêu trong chủ đề trên, ta hãy xét thêm một vài bài toán sau đây:

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông ở A, có $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Trên AB lấy điểm E, trên AC lấy điểm D sao cho $\widehat{ADE} = 20^\circ$ và DE = DC. Tính góc ABD.



Hình 65

Phân tích và giải (h.65)

Ta có $\widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 40^\circ$,

$\widehat{AED} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

Trên BC lấy điểm M sao cho DM = DC, ta có ΔDMC cân tại D.

Suy ra $\widehat{DMC} = \widehat{DCM} = 40^\circ$, do đó

$\widehat{MDC} = 100^\circ$.

Kết hợp giả thiết suy ra

$\widehat{EDM} = 180^\circ - \widehat{ADE} - \widehat{MDC}$

$= 180^\circ - 20^\circ - 100^\circ = 60^\circ$.

Tam giác DEM cân, có $\hat{D} = 60^\circ$

nên là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{DEM} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BEM} = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.

Như vậy $\widehat{BEM} = \widehat{EBM} \left(= 50^\circ\right)$

nên ΔMBE cân tại M $\Rightarrow$ MB = ME = MD

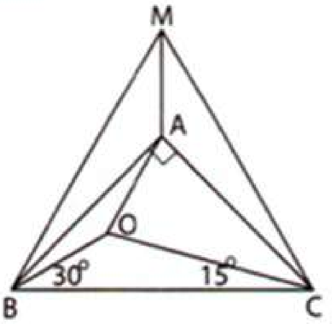
$\Rightarrow \Delta MBD$ cân tại M.

Ta lại có $\widehat{BMD} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

$\Rightarrow \widehat{MBD} = \dfrac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$.

Vậy $\widehat{ABD} = 30^\circ$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm O trong tam giác sao cho $\widehat{OBC}=30^\circ$, $\widehat{OCB}=15^\circ$. Tính các góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$.



Hình 66

Giải (h.66) Vẽ tam giác đều BCM sao cho M và A cùng phía đối với BC.

Ta có $\widehat{MCA}=60^\circ-45^\circ=15^\circ$.

Ta có $\Delta AMB=\Delta AMC$ (c.c.c) nên

$\widehat{AMC}=\widehat{AMB}=30^\circ$.

$\Rightarrow \Delta AMC=\Delta OBC$ (g.c.g) do đó AC = OC.

Vì $\widehat{ACO}=60^\circ-15^\circ-15^\circ=30^\circ$

nên $\widehat{AOC}=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$.

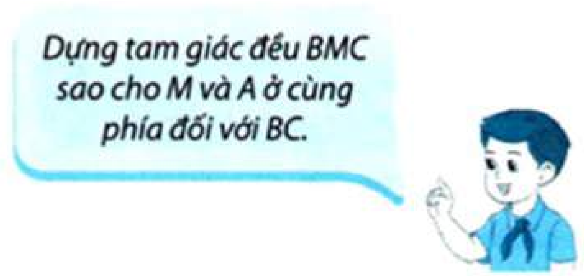
Ta lại có $\widehat{BAO}=90^\circ-75^\circ=15^\circ=\widehat{ABO}$,

suy ra ΔAOB cân và $\widehat{AOB}=150^\circ$.

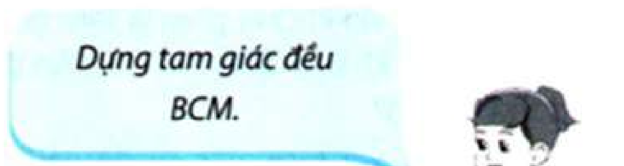
Trong các bài toán dùng phương pháp vẽ thêm tam giác đều, ta có thể vẽ tam giác đều ở những vị trí khác nhau vẫn hỗ trợ tìm ra lời giải của bài toán. Ở ví dụ trên có thể dựng tam giác đều AMB về phía ngoài tam giác ABC.

Để luyện tập với phương pháp này, các em hãy tự giải những bài tập sau

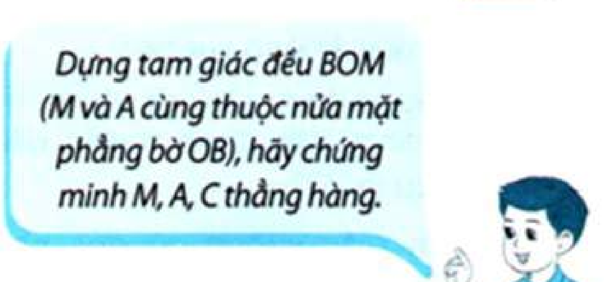
1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C}=15^\circ$. Trên tia BA lấy điểm E sao cho BE = 2AC. Chứng minh rằng ΔBEC cân. Tính góc BEC.



2. Cho ΔABC cân tại A, $\hat{A}=100^\circ$, O là điểm nằm trên phân giác của góc C sao cho $\widehat{CBO}=30^\circ$. Tính góc CAO.

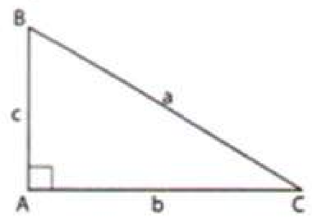


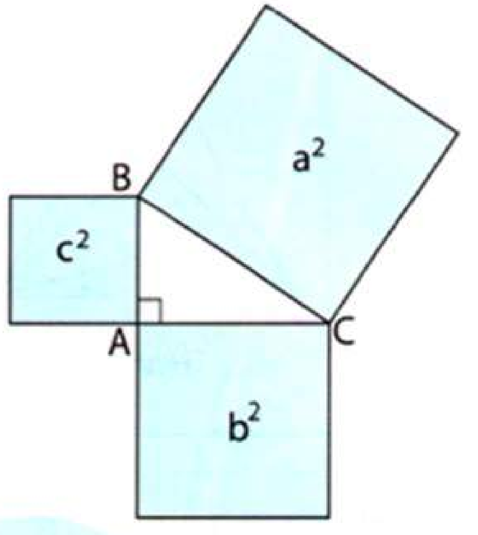
3. Cho ΔABC cân tại A, $\hat{A}=108^\circ$. Gọi O là điểm nằm trên tia phân giác của góc C sao cho $\widehat{CBO}=12^\circ$. Chứng minh ΔAOB cân.



CHỦ ĐỀ 8
ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

KIẾN THỨC CẦN NHỚ





ΔABC vuông tại A
$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích hai hình vuông dựng trên các cạnh góc vuông.

HỎI ĐÁP NHANH

Trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh lớn nhất

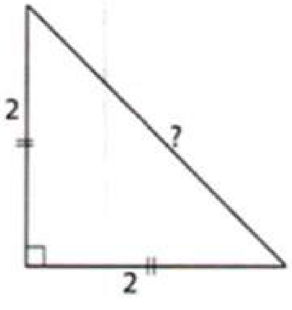
1. Bạn An khẳng định: "Một tam giác có bình phương một cạnh không bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó không phải là tam giác vuông". Hỏi khẳng định của bạn An có đúng không?

   Chẳng hạn, xét tam giác có độ dài ba cạnh là 5, 12, 13. Ta có

   $12^2 = 144, 5^2 + 13^2 = 194, 144 \neq 194$
   nên tam giác không vuông?

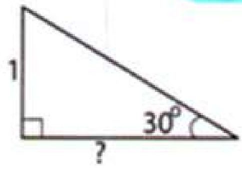
2. Tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 2 thì cạnh huyền bằng bao nhiêu (h. 67)

3. Một tam giác vuông có góc nhọn bằng 30°, cạnh đối diện với góc này có độ dài bằng 1. Hỏi cạnh góc vuông kia là bao nhiêu (h.68)?



Hình 67

Liên quan đến các cạnh của tam giác vuông, phải nhớ ngay định lí Py-ta-go.

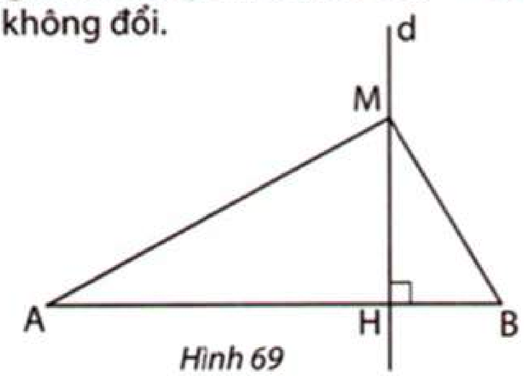


Hình 68

HỌC GIẢI TOÁN

Ví dụ 1

Cho đoạn thẳng AB, đường thẳng d vuông góc với AB, điểm M di động trên d. Chứng minh rằng đại lượng $MA^2 - MB^2$ luôn không đổi.



Hình 69

Giải (h.69)

Giả sử d cắt AB tại H. Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông MAH và MBH ta có

$$MA^2 = MH^2 + HA^2, MB^2 = MH^2 + HB^2.$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên ta được

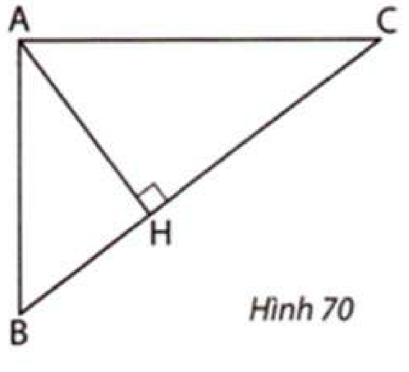
$$MA^2 - MB^2 = HA^2 - HB^2.$$

Vì A, B, H là các điểm cố định nên $HA^2 - HB^2$ không đổi,

do đó $MA^2 - MB^2$ luôn không đổi.

Ví dụ 2

Cho ΔABC ($\hat{B}, \hat{C}$ nhọn). Đường vuông góc hạ từ A xuống BC là AH. Biết AH = 6cm; BH = 4,5cm và HC = 8cm. Hỏi ΔABC là tam giác gì?



Hình 70

Giải (h.70)

Xét ΔAHC là tam giác vuông tại H.

Theo định lí Py-ta-go ta có:

$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 6^2 + 8^2 = 100.$

- Xét ΔAHB có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}.$$

Suy ra $AB^2 + AC^2 = \dfrac{225}{4} + 100 = \dfrac{625}{4}$. (1)

Mà $BC = HB + HC = 4{,}5 + 8 = \dfrac{9}{2} + 8 = \dfrac{25}{2}$,

suy ra $BC^2 = \left(\dfrac{25}{2}\right)^2 = \dfrac{625}{4}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Vậy ΔABC vuông tại A.

Ví dụ 3

Một tam giác có độ dài ba đường cao là 4,8cm, 6cm và 8cm có phải là tam giác vuông không?

Trong tam giác vuông, cạnh huyền là cạnh lớn nhất nên muốn kiểm tra xem một tam giác có là tam giác vuông hay không, ta xét bình phương của cạnh lớn nhất xem có bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia không.

Giải

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ứng với các đường cao theo thứ tự đã cho, S là diện tích tam giác ABC.

Ta có $4,8a = 6b = 8c = 2S$, do đó $a = \frac{2S}{4,8} = \frac{5}{12}S$, $b = \frac{2S}{6} = \frac{1}{3}S, c = \frac{2S}{8} = \frac{1}{4}S$.

Ta có $b^2 + c^2 = \frac{1}{9}S^2 + \frac{1}{16}S^2 = \frac{25}{144}S^2$, $a^2 = \frac{25}{144}S^2$.

Rõ ràng $a^2 = b^2 + c^2$ nên tam giác đã cho là tam giác vuông, đỉnh góc vuông ứng với đường cao có độ dài 4,8cm.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

8.1. Cho tam giác nhọn ABC có $AB = 13$cm, $AC = 15$cm. Kẻ $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Biết rằng $BD = 5$cm. Hãy tính CD.

8.2. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền $AB = \sqrt{88}$ cm, cạnh $BC = 6$cm. Gọi K là trung điểm của AC. Tính độ dài BK.

8.3. Cho ΔABC nhọn. Kẻ $AH \perp BC$. Biết độ dài các cạnh $AC = 15$cm, $AH = 12$cm, $BH = 9$cm. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

8.4. Một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông tỉ lệ với 3; 4. Biết cạnh huyền dài 55cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông ấy.

8.5. Chứng minh rằng độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là số nguyên, luôn luôn là một số vô tỉ.

8.6. Cho ΔABC nhọn, kẻ $AH \perp BC$.

a) Chứng minh rằng:
$AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2$.

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm D tuỳ ý. Nối BD và DC. Chứng minh rằng :
$AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$.

8.7. Cho Δ ABC vuông tại A. Từ trung điểm M của cạnh AC hạ $MN \perp BC$ ($N \in BC$). Chứng minh rằng nếu $AB > AC$ thì ta có: $NB^2 - NC^2 = AB^2$.

8.8. Cho tam giác vuông cân ABC. M là trung điểm BC. Lấy điểm D bất kì trên BC. H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống AD. Đường thẳng AM cắt CI tại N. Chứng minh rằng

a) $BH = AI$.

b) $BH^2 + IC^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên BC.

c) DN vuông góc với AC.

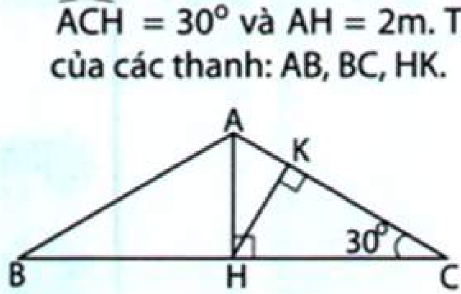
NÂNG CAO

8.9. Cho ΔABC vuông tại A. Hạ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).

a) Chứng minh: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

b) Biết $BC = 10$cm; $AC = 8$cm. Tính độ dài của AH.

8.10. Để làm một vì kèo sắt lợp mái tôn sao cho độ dốc vừa phải, người thợ thiết kế vì kèo hình tam giác cân ABC ($AB = AC$). Thanh AH hàn vuông góc với thanh BC. Thanh HK hàn vuông góc với thanh AC (h.71). Biết góc $\widehat{ACH} = 30^\circ$ và $AH = 2$m. Tính độ dài của các thanh: AB, BC, HK.



Hình 71

8.11. Cho tam giác ABC, M là trung điểm BC. Biết rằng $AB = 6cm$, $AC = 10cm$, $AM = 4cm$. Chứng minh rằng $\widehat{MAB} = 90^o$.

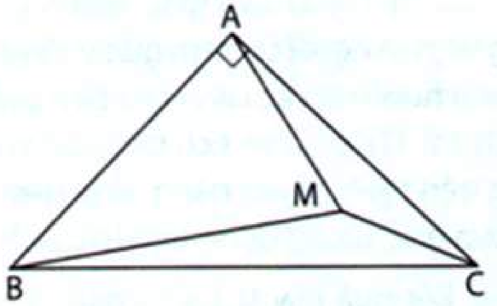
8.12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $AH \perp BC$ tại H. Trên đoạn thẳng AH lấy điểm D. Trên tia đối của tia HA lấy E sao cho $HE = AD$. Đường thẳng vuông góc với AH tại D cắt AC tại F. Chứng minh rằng $\widehat{BEF} = 90^o$.

8.13. Trên hình 72 cho biết tam giác ABC vuông cân tại A, $MA = 2cm$, $MB = 3cm$; $\widehat{AMC} = 135^o$. Tính độ dài đoạn thẳng MC.

8.14. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^o$. Dựng bên ngoài tam giác ABC tam giác đều BCD. Chứng minh rằng
$$AD^2 = AB^2 + AC^2.$$

8.15. Cho Δ ABC có ba góc nhọn và O là điểm bất kì trong tam giác. Từ O hạ $OM \perp AC$ $(M \in AC)$; $OI \perp AB$ $(I \in AB)$; $OH \perp HC$ $(H \in BC)$.

Chứng minh rằng:
$$AI^2 + BH^2 + CM^2 = AM^2 + CH^2 + BI^2.$$



Hình 72

EM CÓ BIẾT

Trong toán học, định lí Py-ta-go (Pythagore) là một liên hệ giữa ba cạnh của một tam giác vuông (trong hình học phẳng). Định lí này được đặt theo tên nhà triết học và nhà toán học Hi Lạp Py-ta-go sống vào thế kỉ VI trước Công nguyên, mặc dù định lí này đã được biết đến bởi các nhà toán học Ấn Độ (trong quyển Sulbasutra của Baudhayana và Katyayana), Hi Lạp, Trung Quốc và Babylon từ nhiều thế kỉ trước.

- Định lí đảo Py-ta-go phát biểu là:

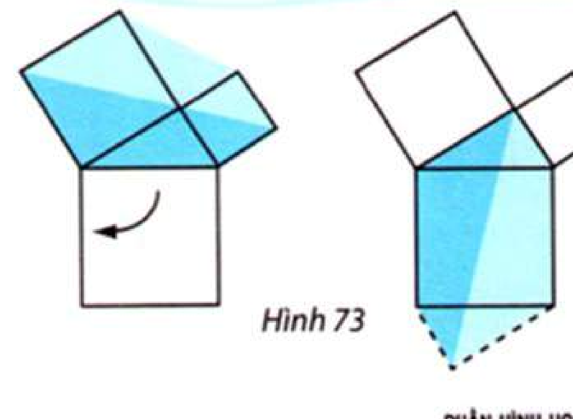
  Cho ba số thực dương a, b, và c thoả mãn $c^2 = a^2 + b^2$, tồn tại một tam giác có các cạnh là a, b và c, và góc giữa a và b là một góc vuông.

  Định lí đảo này cũng xuất hiện trong quyển *Các nguyên lí* và được phát biểu bởi Ơ-clít là:

  Nếu bình phương một cạnh của một tam giác bằng tổng bình phương hai cạnh kia, thì tam giác có góc nằm giữa hai cạnh nhỏ là góc vuông.

Có hàng nghìn cách chứng minh định lí Py-ta-go

Cách chứng minh được thể hiện trong hình bên thuộc về Leonardo da Vinci (h.73).



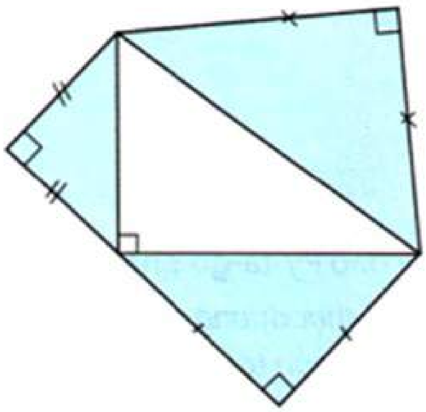
Hình 73

ĐI XA HƠN

Mở rộng định lí Py-ta-go

Từ ý nghĩa hình học của định lí Py-ta-go ta có thể mở rộng được nhiều kết quả thú vị.

Trên các cạnh của tam giác vuông ta hãy dựng về phía ngoài các tam giác vuông cân, có cạnh huyền là các cạnh của tam giác đã cho (h.74). Khi đó diện tích tam giác vuông dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích các tam giác vuông dựng trên hai cạnh góc vuông. Kết quả này là hiển nhiên, vì diện tích mỗi tam giác vuông cân bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình vuông tương ứng.



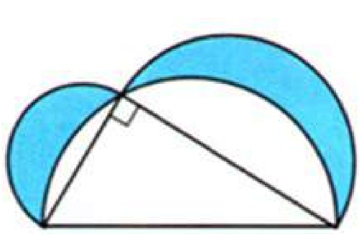
Hình 74

Bây giờ ta hãy dựng trên các cạnh của tam giác vuông những tam giác đồng dạng (có ba góc tương ứng bằng nhau). Ta vẫn có kết quả tương tự: Diện tích tam giác dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích các tam giác dựng trên hai cạnh góc vuông.

Tiếp theo, nếu lấy các cạnh của tam giác vuông làm đường kính, vẽ các đường tròn. Khi đó diện tích hình tròn dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích hai hình tròn dựng trên hai cạnh góc vuông. Thật vậy, diện tích hình tròn dựng trên cạnh huyền là $S_1 = \frac{\pi a^2}{4}$, diện tích hình tròn dựng trên hai cạnh góc vuông lần lượt là $S_2 = \frac{\pi b^2}{4}$ và $S_3 = \frac{\pi c^2}{4}$.

Từ hệ thức $a^2 = b^2 + c^2$ suy ra $S_1 = S_2 + S_3$.

Nếu trên các cạnh góc vuông của tam giác vuông (lấy làm đường kính), vẽ các nửa hình tròn về phía ngoài, lấy cạnh huyền làm đường kính vẽ nửa hình tròn cùng phía với tam giác vuông (h.75). Khi đó diện tích nửa hình tròn dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích hai nửa hình tròn dựng trên hai cạnh góc vuông. Ba nửa hình tròn tạo thành hai hình trăng khuyết. Từ kết quả trên suy ra: ***Diện tích tam giác vuông bằng tổng diện tích hai hình trăng khuyết***. Hai hình trăng khuyết ở trên được gọi là *Mặt trăng Hypocrat*.



Hình 75

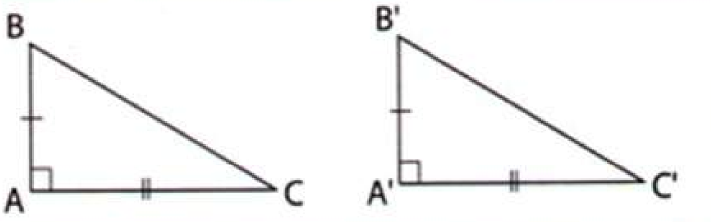
CHỦ ĐỀ 9

CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

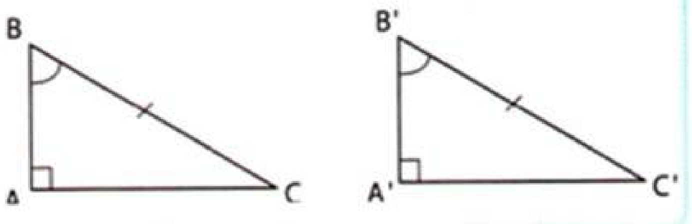
Trường hợp 1

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$
(hai cạnh góc vuông)



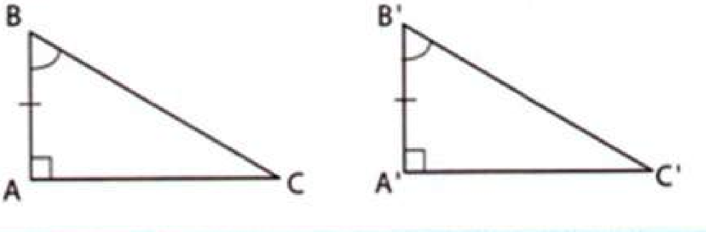
Trường hợp 2

$BC = B'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$
(cạnh huyền, góc nhọn)



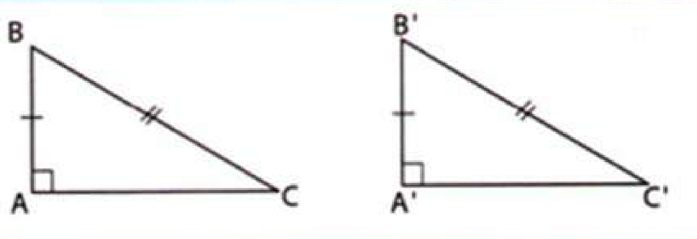
Trường hợp 3

$AB = A'B'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$
(cạnh góc vuông, góc nhọn)



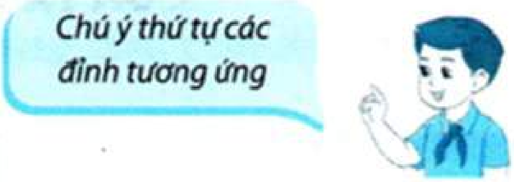
Trường hợp đặc biệt

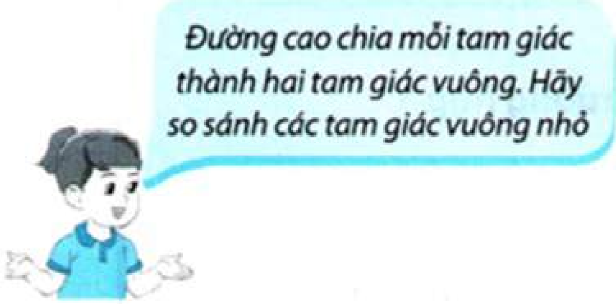
$AB = A'B'$, $BC = B'C'$
(cạnh góc vuông, cạnh huyền)



HỎI ĐÁP NHANH

1. Hai tam giác ABC và A'B'C' cùng vuông ở A và A'. Biết thêm AB = A'C', $\hat{B} = \hat{C}'$. Hỏi hai tam giác này có bằng nhau hay không? Viết đẳng thức thế nào cho đúng?
2. Hai tam giác vuông có các góc nhọn bằng nhau thì có bằng nhau không? Lấy ví dụ minh hoạ.
3. Hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau và đường cao thuộc cạnh huyền bằng nhau thì có bằng nhau không ?





HỌC GIẢI TOÁN

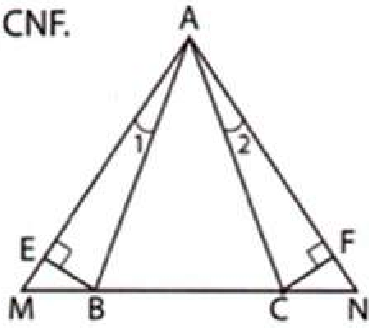
Ví dụ 1

Cho ΔABC cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M; trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho MB = CN. Từ B hạ BE $\perp$ AM (E $\in$ AM). Từ C hạ CF $\perp$ AN (F $\in$ AN). Chứng minh rằng:

a) Δ AMN cân.

b) BE = CF.

c) Δ BME = Δ CNF.



Hình 76

Giải (h.76)

a) Xét ΔABM và ΔACN có:

AB = AC (giả thiết);

$\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (cùng bù với góc $\hat{B} = \hat{C}$);

BM = CN (giả thiết).

Vậy $\Delta ABM = \Delta ACN$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ AM = AN $\Rightarrow$ ΔAMN cân tại A.

b) Xét ΔABE và ΔACF vuông tại E và F có

AB = AC (giả thiết),

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (Δ ABM = Δ ACN).

Vậy $\Delta ABE = \Delta ACF$ (cạnh huyền-góc nhọn).

Suy ra: BE = CF (cạnh tương ứng).

c) Xét ΔMBE và ΔNCF vuông tại E và F có:

BE = CF (chứng minh b),

MB = NC (giả thiết).

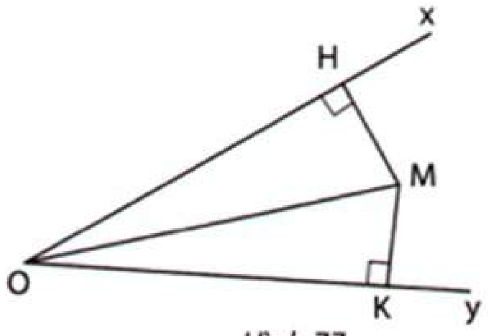
Vậy: $\Delta MBE = \Delta$ NCF (cạnh huyền-cạnh góc vuông).

Ví dụ 2

Cho góc nhọn xOy và điểm M nằm trong góc đó. Chứng minh rằng nếu M cách đều hai cạnh của góc xOy thì M nằm trên tia phân giác của góc này.

Giải (h.77)

Từ M hạ các đường vuông góc MH, MK xuống các cạnh Ox, Oy. Theo giả thiết ta có MH = MK. Hai tam giác vuông MOH và MOK có MO chung, MH = MK, do đó chúng bằng nhau (cạnh huyền - cạnh góc vuông),



Hình 77

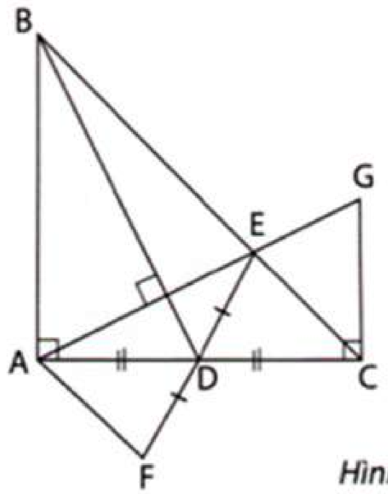
suy ra $\widehat{MOH} = \widehat{MOK}$, chứng tỏ OM là tia phân giác của góc xOy. Vậy M nằm trên tia phân giác của góc này.

Hệ quả. *Tập hợp các điểm nằm trong một góc và cách đều hai cạnh của góc là tia phân giác của góc đó.*

Ví dụ 3

Cho ΔABC vuông cân tại A, D là trung điểm của AC. Từ A kẻ đường vuông góc với BD, cắt BC tại E.

Chứng minh rằng AE = 2DE.



Hình 78

Giải (h.78)

Từ C dựng đường thẳng vuông góc với AC, cắt AE tại G. Kéo dài ED lấy điểm F sao cho DF = DE. Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{CAG}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ADB}$), AB = AC (giả thiết) nên

$\Delta BAD = \Delta ACG$ (g.c.g), suy ra AD = CG hay CD = CG. Từ đó $\Delta CDE = \Delta CGE$ (c.g.c), suy ra $\widehat{CED} = \widehat{CEG}$. (1)

Dễ thấy $\Delta ADF = \Delta CDE$ (c.g.c) nên

$\widehat{AFE} = \widehat{CEF}$ (2)

$\Rightarrow AF \parallel CE \Rightarrow \widehat{CEG} = \widehat{FAE}$ (đồng vị) (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EAF} = \widehat{EFA}$, tam giác EAF cân tại E nên EA = EF hay AE = 2DE.

BÀI TẬP

CƠ BẢN

9.1. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc BAC.

9.2. Cho Δ ABC vuông cân tại A. Qua A kẻ đường thẳng d (d không cắt đoạn thẳng BC). Từ B hạ BE $\perp$ d (E $\in$ d). Từ C hạ CF $\perp$ d (F $\in$ d). So sánh tổng độ dài hai đoạn thẳng BE và CF với độ dài đoạn thẳng EF.

9.3. Cho Δ ABC vuông tại A, đường cao AH. Từ H kẻ HM $\perp$ AC và trên tia HM lấy điểm E sao cho HM = EM. Kẻ HN $\perp$ AB và trên tia HN lấy điểm D sao cho NH = ND. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm: D, A, E thẳng hàng.

b) BD//CE.

c) BC = BD + CE.

NÂNG CAO

9.4. Cho hai tam giác nhọn ABC và A'B'C' có AB = A'B', AC = A'C', $\widehat{B} = \widehat{B'}$.
Chứng minh rằng BC = B'C'.

9.5. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB < AC. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. D là điểm trên cạnh AC sao cho AD = AB. Vẽ DE vuông góc với BC tại E. Chứng minh rằng HA = HE.

9.6. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Tia phân giác góc ABC cắt AC ở D. Vẽ DH vuông góc với BC tại H. Trên tia AC lấy E sao cho AE = AB. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt DH ở M. Tính số đo góc DBM.

9.7. Cho Δ ABC có M là trung điểm của cạnh BC. Từ A hạ AH $\perp$ BC, AH và AM chia góc A thành 3 phần bằng nhau. Chứng minh rằng:

a) Δ ABC vuông tại A.

b) Δ AMC là tam giác cân.

c) Δ ABM là tam giác đều.

9.8. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 90^\circ, \widehat{A} = 30^\circ, AC = 10cm$. Kẻ CD $\perp$ AB (D $\in$ AB), DE $\perp$ AC (E $\in$ AC). Tính độ dài AE.

9.9. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Kẻ AM $\perp$ BC (M $\in$ BC). Gọi E là một điểm nằm giữa M và C. Kẻ BH, CK vuông góc với AE. (H và K thuộc đường thẳng AE). Chứng minh rằng MH = MK.

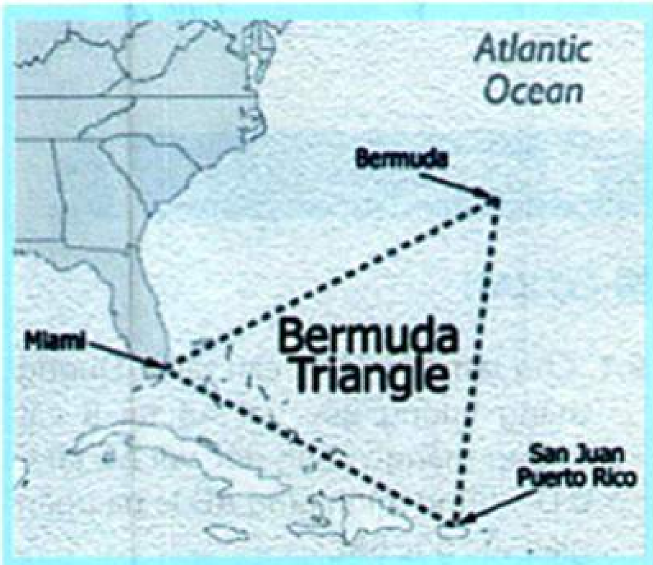
9.10. Cho Δ ABC. Về phía ngoài tam giác, tại đỉnh A kẻ Ax $\perp$ AB và lấy E trên Ax sao cho AE = AB (E và C ở hai phía đối với AB). Kẻ Ay $\perp$ AC và lấy điểm F trên Ay sao cho AF = AC (F và B ở hai phía đối với AC). Lấy M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) $AM = \dfrac{1}{2}EF$.

b) Đường thẳng AM vuông góc với EF.

EM CÓ BIẾT

Tam giác Bec - mu - đa (Bermuda), còn gọi là *Tam giác Quỷ*, là một vùng biển nằm về phía tây Đại Tây Dương và đã trở thành nổi tiếng nhờ vào nhiều vụ việc được coi là bí ẩn mà trong đó tàu thuỷ, máy bay hay thuỷ thủ đoàn được cho là biến mất không có dấu vết.



Vùng biển có hình dáng gần như tam giác đều.

Vị trí của tam giác Bermuda nằm trong vùng phía tây Đại Tây Dương, được xác định gần đúng trong những năm vừa qua bởi các vị trí địa lí (đỉnh) sau đây:

- Quần đảo Bermuda ở khoảng 35° vĩ tuyến Bắc là ranh giới của tam giác về phía bắc.
- Thành phố Miami trong tiểu bang Florida là ranh giới của khu vực này về phía Tây-Nam.
- Ranh giới về phía nam là đảo Puerto Rico.

Vùng biển bao la nằm trong miền tam giác này được cho là một trong những khu vực nổi tiếng nhất thế giới về những hiện tượng không bình thường. Từ hơn một thế kỉ nay, nhiều truyền thuyết và luận đề khác thường đã cố gắng giải thích việc tàu thuỷ và máy bay mất tích một cách bí ẩn. Dường như các biến cố này hay xảy ra trong khu vực gọi là *Tam giác quỷ*. Số phận của "chuyến bay 19" trong tháng 12 năm 1945 chỉ là một trong những biến cố đó, mặc dù là sự kiện nổi tiếng nhất và gây náo động dư luận nhiều nhất. Trong những năm sau đó các vụ mất tích kì lạ tăng rõ rệt, các thông báo về máy bay mất tích được đưa ra gần như liên tục: năm 1947 chiếc máy bay "Superfort" không trở về sân bay xuất phát. v.v...Các câu chuyện từ tam giác Bermuda rất giống nhau: hoặc là tàu thuỷ hay là máy bay biến mất không dấu vết trong điều kiện thời tiết tốt, biển lặng mặc dầu phi công hay thuỷ thủ đoàn giàu kinh nghiệm hay là một chiếc tàu thuỷ hoàn toàn nguyên vẹn được tìm thấy đang trôi dạt trên biển trong khi thuỷ thủ đoàn mất tích.

ĐI XA HƠN

TÌM HIỂU BÀI TOÁN DỰNG HÌNH

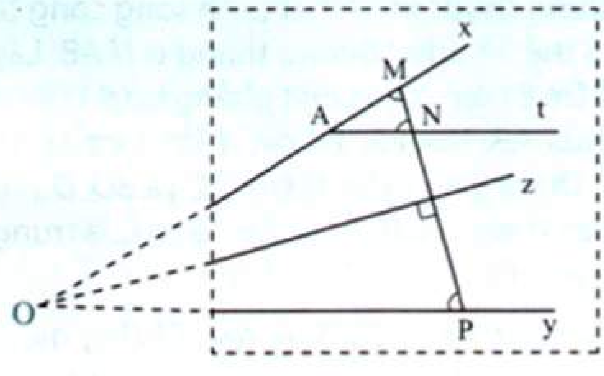
Trong quá trình giải các bài toán Hình học, đặc biệt là khi áp dụng phương pháp vẽ thêm hình phụ, ta phải tiến hành vẽ hoặc dựng các hình thoả mãn một số điều kiện nào đó. Các thao tác này được quy thành các bài toán dựng hình.

Trong toán dựng hình, người ta quy định được dùng hai dụng cụ là thước thẳng và compa. Thước thẳng dùng để vẽ đoạn thẳng, đường thẳng; compa dùng để vẽ đường tròn.

Giải bài toán dựng hình là chỉ ra lần lượt các phép dựng hình cơ bản hoặc các bài toán dựng hình cơ bản để dựng được hình đúng như yêu cầu rồi chứng minh rằng hình dựng được thoả mãn các điều kiện mà bài toán đòi hỏi.

Trong các chủ đề trước ta đã thực hiện (vắn tắt) một số phép dựng hình khi giải toán. Chúng ta hãy xét thêm một số bài toán để minh hoạ.

Ví dụ 1. Dựng đường phân giác của một góc có đỉnh nằm ngoài tờ giấy.



Giải

1. Phân tích

Giả sử đã dựng được đường phân giác Oz của góc xOy có đỉnh O nằm ngoài tờ giấy.

Từ điểm A bất kì trên phần tia Ox nằm trong tờ giấy, ta kẻ tia At song song với cạnh Oy và nằm trong góc xOy. Trên Ax và At ta lấy hai điểm M và N sao cho AM = AN. Thế thì tam giác AMN cân ở A và có $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. Đường thẳng MN cắt Oy ở P. Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{OPM}$ (góc đồng vị), do đó $\widehat{AMN} = \widehat{OPM}$ nên tam giác MOP cân ở O. Do OM = OP nên O thuộc trung trực của đoạn MP, suy ra đường thẳng Oz chính là đường trung trực của đoạn MP. Từ đó, ta có cách dựng sau:

2. Cách dựng

- Lấy điểm A bất kì trên phần tia Ox nằm trong tờ giấy.

- Trong góc xOy vẽ tia At song song với Oy.

- Đặt trên Ax và At hai đoạn bằng nhau AM và AN.

- Kẻ đường thẳng MN, cắt Oy ở P.

- Dựng đường trung trực của MP, đó là đường phân giác của góc xOy mà ta phải dựng.

3. Chứng minh

Theo cách dựng, AM = AN nên tam giác MAN cân ở A do đó $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. Ta lại có $\widehat{ANM} = \widehat{OPM}$ (đồng vị do At // Oy) suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{OPM}$. Tam giác MOP cân tại O nên đường trung trực của MP chứa tia phân giác của góc xOy.

4. Biện luận

Bài toán bao giờ cũng dựng được vì các phép dựng nêu trong phần cách dựng luôn thực hiện được. Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Ví dụ 2. Cho n là số nguyên dương không chia hết cho 3 và 5. Chứng minh rằng ta có thể chia góc n^o cho trước thành n phần bằng nhau (bằng thước kẻ và compa).

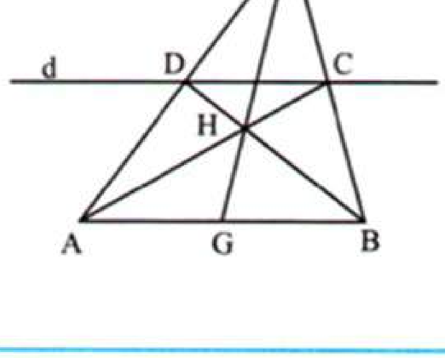
Hướng dẫn

Bằng cách dựng tam giác đều ta dễ dàng dựng được góc 15^o. Xét phép chia n cho 15, ta luôn có $n = 15k \pm r$, $k \in \mathbf{Z}$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Vì n không chia hết cho 3 và 5 nên chỉ xảy ra $r \in \{1, 2, 4, 7\}$.

Vì góc $(15k)^o$ là dựng được nên trong mọi trường hợp ta luôn dựng được góc 1^o, tức là chia được góc n^o thành n phần bằng nhau.

Xin giới thiệu một bài toán "dựng hình" bằng công cụ hạn chế để các em tham khảo :

Ví dụ 3. Cho trước đoạn thẳng AB. Hãy dùng thước kẻ có hai cạnh song song để chia đôi đoạn thẳng AB.



Giải

Dùng thước kẻ có hai cạnh song song ta có thể vẽ được đường thẳng d // AB. Lấy điểm E nằm ở nửa mặt phẳng bờ d không chứa AB. Nối EA, EB cắt d lần lượt tại D, C. Dựng giao điểm H của AC và BD. Dựng giao điểm G của EH và AB. Ta có G là trung điểm của AB hay GA = GB.

(Ta công nhận kết quả này. Chứng minh liên quan đến định lí Ta-lét, sẽ học ở lớp 8)

HƯỚNG DẪN - GIẢI
ĐÁP SỐ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chủ đề 1 SỐ HỮU TỈ. SO SÁNH CÁC SỐ HỮU TỈ

1. b, c, e) Đúng; a, d, g: Sai.

2. a) $\frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$; b) $-\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$;

c) $-\frac{5}{7} = -\frac{-5}{-7}$; d) $\frac{-7}{11} = -\frac{7}{11}$;

e) $\frac{3}{5} = -\frac{-3}{5}$; f) $-11 = \frac{-11}{1}$.

3. Chọn D, ta có $\frac{-46}{69} < \frac{-27}{54} < \frac{29}{-87}$.

1.1. a – Đ; b – S; c – Đ;
d – Đ; e – S; f – S.

1.2. B, C, D sai.

1.3. Con cắt bánh làm 6 phần bằng nhau và ăn 5 phần

1.4. $-\frac{1}{5} < -\frac{1}{6} < -\frac{2}{13} < -\frac{1}{7} < -\frac{2}{15} < -\frac{1}{8}$.

1.5. $\frac{8}{17} < \frac{10}{a} < \frac{8}{11}$

$\Rightarrow \frac{80}{170} < \frac{80}{8a} < \frac{80}{110}$

$\Rightarrow 110 < 8a < 170 \Rightarrow a \in \{17; 19\}$, vì a là số nguyên tố.

1.6. Số còn lại là số $\frac{-1}{12}$.

1.7. Có $a \in \{-11; -10\}$ và các số hữu tỉ dạng $\frac{7}{a}$ là $\frac{7}{-11} = \frac{-7}{11}$ và $\frac{7}{-10} = \frac{7}{-10}$.

Ta có:

$-\frac{8}{11} = \frac{-8}{11} < \frac{-7}{10} < \frac{-7}{11} < \frac{-8}{13} = -\frac{8}{13}$.

1.8. Có 5 số hữu tỉ:

$\frac{-3}{5} < \frac{9}{-16} < \frac{9}{-17} < \frac{9}{-18} <$

$< \frac{9}{-19} < \frac{9}{-20} < \frac{-4}{9}$.

1.9. $a \in \{1; 2; 3; 4\}$. b) $a = 2$.

Chủ đề 2 CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ HỮU TỈ

1. Khẳng định ĐÚNG: d. Khẳng định SAI: a, b và c.

2. Chọn C vì $a = -1 + 2 - 3 = -2 \Rightarrow |a| = 2$.

2.1.

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	-4	$6\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$	17	$-27\frac{1}{2}$

2.2. $A = -\frac{13}{30}$; $B = -27$; $C = 0$.

2.3. $A = 5$; $B = 4$; $C = -1; 5$.

2.4.

-2			
2	-4		
-2	4	-8	
2	-4	8	-16

$\frac{1}{1296}$			
$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{36}$		
$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2.5. $A = 1\frac{3}{217}$; $B = -\frac{2}{5}$;

$C = \frac{1}{59}$; $D = -\frac{5}{21}$; $E = \frac{300}{781}$.

2.6. $6x + 5 = 4030$.

2.7. Giả sử $x \geq y$

$\Rightarrow \max(x, y) = x$ và $\min(x, y) = y$.

2.8. Mọi số của dãy số là số âm, ta bỏ dấu "–", rồi đổi tất cả các hỗn số ra phân số và được dãy số (có quy luật) như sau:

$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{5}{1}; ...$

Ghép nhóm của dãy số trên:

$\left(\frac{1}{1}\right); \left(\frac{2}{1}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right); ...$

Nhóm thứ nhất có 1 số, mà tổng của tử số và mẫu số $T(1) = 2$.

Tương tự có $T(2) = 3, T(3) = 4, T(4) = 5, \ldots, T(n) = n + 1$.

Số số hạng từ nhóm thứ nhất đến nhóm thứ n là $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$.

Chọn $S = 120 \Rightarrow n = 15$. Từ đó suy ra số hạng thứ 124 là số hạng thứ tư của nhóm thứ 16 và bằng $-3\frac{1}{4}$.

2.9.

$-\frac{1}{6}$			
-4	$\frac{1}{24}$		
16	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	
-32	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$

Chủ đề 3 LUỸ THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

1. a – S; b – S; c – S; d – S.

2. A – 2 hoặc A –4; B – 5; C – 1 hoặc C – 3.

3.1.

2^0	2^1	2^1	2^2	2^3	2^5	2^8	2^{13}	2^{21}	2^{34}

3.2. Kẻ lạ mặt là số 6^5.

3.3. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$; $\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$; $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$;

$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$; $\left(-\frac{6}{11}\right)^3 = -\frac{216}{1331}$.

3.4. $\frac{10^5}{10^4} = 10$; $\frac{10^4}{10^5} = 10^{-1}$; $\frac{10^{-1}}{10^2} = 10^{-3}$; $\frac{10^2}{10^{-1}} = 10^3$; $\frac{10^3}{10^{-3}} = 10^6$;

$\frac{10^{-3}}{10^3} = 10^{-6}$; $\frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10^2$; $\frac{10^{-4}}{10^{-2}} = 10^{-2}$.

3.5. 4096; -3125; $\frac{1}{729}$.

3.6. A và B là số dương, C là số âm, D = 0.

3.7. $A = -\frac{1}{3}$; $B = \frac{2}{3}$; $C = 14\frac{2}{5}$.

3.8. a) $x = \frac{1}{3}$; b) $x = 1$; c) $x = 3$; d) $x = \pm 2$;

e) $x = 0{,}9$; g) $x = -0{,}03$.

3.9. a) $243^3 < 125^5$; b) $(-3)^2 > (-2)^3$;

c) $(-2)^1 < (-1)^2$; d) $((-0{,}1)^2)^3 = ((-0{,}1)^3)^2$.

3.10. a) 10^{-6}; b) 10^{-8}; c) 10^8.

3.11. Số khác loại là $\left(\frac{1}{10^{-n}}\right) = 10^n$.

3.12. $x = 4$.

3.13. $x = -2{,}43.10^{-8}$;

$x = 2{,}7.10^{-5}$.

3.14.

2^{10}	2^0	2^{14}
2^{12}	2^8	2^4
2^2	2^{16}	2^6

Chủ đề 4 TỈ LỆ THỨC. DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

1. Khẳng định ĐÚNG: b và d.

   Khẳng định SAI: a và c.

2. a) $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$; b) $\frac{0{,}1}{2} = \frac{0{,}7}{14} = \frac{0{,}3}{6}$.

3. chọn C, vì $3.9 \neq 6.12$; $9.6 \neq 3.12$ và $6.3 \neq 9.12$.

4.1. a) $3{,}5 : 5{,}04 = 25 : 36$;

b) $1\frac{19}{21} : 4\frac{2}{7} = 4 : 9$; c) $1\frac{21}{25} : 0{,}23 = 8 : 1$.

4.2. Trường hợp a và d không lập được.

Trường hợp b và c lập được.

4.3. a) -27; b) -13; c) $\pm 0{,}8$; d) $\frac{7}{4}$.

4.4.

	a	b	c
a	80	120	192
b	7	8	15
c	24	15	40
d	± 14	± 6	
e	− 8	− 12	− 20
f	± 8	± 12	± 16
g	4	6	8

4.5.

	Người thứ nhất		Người thứ hai	
Mã số	a	x	b	y
	20	11	27	2
Ngày kỉ niệm	Ngày Nhà giáo Việt Nam		Ngày Thầy thuốc Việt Nam	
Ngành nghề	Giáo viên		Bác sĩ	

4.6. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

4.7. Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

4.8. $(x, y) \in \left\{\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right), (2;3)\right\}$.

4.9. Đặt ẩn phụ $x = a + b$, $y = c + d$, $z = a - b$ và $t = c - d$. Sau đó có thể dùng tính chất dãy tỉ số bằng nhau hoặc khai triển.

Chủ đề 5 SỐ VÔ TỈ. SỐ THỰC

1. $-\frac{1}{40}$ là số thập phân hữu hạn; $\sqrt{2}$ là số vô tỉ; $\frac{72}{75} = 0{,}96$;

0,222... là số thập phân vô hạn tuần hoàn; $\frac{2}{9} = 0{,}(2)$; $0{,}(142857) = \frac{1}{7}$.

2. Khẳng định ĐÚNG: b, c. Khẳng định SAI: a, e và d.

5.1.

Số thập phân hữu hạn	$\frac{9}{80} = 0{,}1125$	Mẫu số chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 và 5	$\frac{-48}{150} = \frac{-8}{25} = -0{,}32$	Sau khi rút gọn, mẫu số chỉ chứa thừa số nguyên tố 5.
Số thập phân vô hạn tuần hoàn	$-\frac{11}{35} = -0{,}3(142857)$	Mẫu số chứa thừa số nguyên tố 7	$\frac{44}{121} = \frac{4}{11} = 0{,}(36)$	Mẫu số chứa thừa số nguyên tố 11
	$\frac{55}{75} = \frac{11}{15} = 0{,}7(3)$	Mẫu số chứa thừa số nguyên tố 3	$\frac{73}{81} = 0{,}(901234567)$	Mẫu số chứa thừa số nguyên tố 3

5.2. Diện tích hình tròn $S = \pi.R^2 = \frac{22}{7}.R^2$

a) $R = 0{,}(45) = \frac{5}{11} \Rightarrow S = \frac{22}{7}.\left(\frac{5}{11}\right)^2 = \frac{50}{77}$ (cm²).

b) $R = \frac{21}{22} \Rightarrow S = \frac{22}{7}.\left(\frac{21}{22}\right)^2 = \frac{63}{22} = 2\frac{19}{22}$ (cm²).

c) $R = \sqrt{\frac{7}{11}} \Rightarrow S = \frac{22}{7}.\left(\sqrt{\frac{7}{11}}\right)^2 = 2\ (cm^2)$.

5.3. a) S(hình tròn) $= \pi.R^2$

$= \frac{22}{7}.\left(\frac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 = \frac{99}{7} = 14\frac{1}{7}\ (cm^2)$.

S(hình vuông) $= 3.3 = 9\ (cm^2)$.

S (phần hình tròn không bị hình vuông phủ):

$= 14\frac{1}{7} - 9 = 5\frac{1}{7} \approx 5{,}14\ (cm^2)$.

b) Bán kính quỹ đạo lúc đầu:

$R = 66000 : (2\pi) = 10500 (km)$

Bán kính quỹ đạo lúc sau:

$R' = 10500 - 70 = 10430\ (km)$.

Quỹ đạo vệ tinh lúc sau:

$C' = 2\pi R' = 2.\frac{22}{7}.10430 = 65560\ (km)$.

Quỹ đạo giảm so với quỹ đạo ban đầu:

$C - C' = 66000 - 65560 = 440\ (km)$.

5.4. a)

$A = \frac{2014}{\sqrt{2015}} < \frac{2014}{\sqrt{2014}} < \frac{2015}{\sqrt{2014}} = B$.

b)

$A = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}} = \frac{11}{111} = 1 - \frac{100}{111} = 1 - \frac{1000}{1110}$;

$B = \frac{\sqrt{12321}}{\sqrt{1234321}} = \frac{111}{1111}$;

$= 1 - \frac{1000}{1111} > 1 - \frac{1000}{1110}$.

Suy ra A < B.

5.5. Số vô tỉ là số $\sqrt{\frac{5-145}{8-168}} = \sqrt{\frac{140}{160}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$.

5.6. $x \in \{0; \frac{4}{9}\}$.

5.7. Giá trị gần đúng (đến chữ số thập phân thứ nhất) chiều dài của một sân bóng đá (theo tiêu chuẩn FIFA) là $(121{,}27 + 119{,}25 + 120{,}28 + 121{,}15 + 119{,}26) : 5 \approx 120{,}2\ (m)$.

5.8.

$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{1+\sqrt{2}} < -\frac{1}{1+\sqrt{3}} < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{1+\sqrt{5}}$.

5.9. Có $\frac{121n + 11n^2}{55n} = \frac{11+n}{5}$, mẫu số chỉ chứa thừa số nguyên tố 5 nên phân số đã cho viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

Có: $\frac{79! + 79}{5609n} = \frac{78! + 1}{71}$, dễ thấy $78! + 1$ không chia hết cho 71, mà mẫu số chứa thừa số nguyên tố 71 nên phân số đã cho viết thành một số thập phân vô hạn tuần hoàn.

5.10. a) Do $\frac{1}{\overline{0,abc}} = n \Rightarrow$ a có thể bằng 0

$\Rightarrow \overline{0,abc} \in \{0{,}025; 0{,}125; 0{,}250\}$

$\Rightarrow n \in \{40; 8; 4\}$.

b) Do $\frac{1}{\overline{0,(abc)}} = n \Rightarrow$ a có thể bằng 0

$\Rightarrow \overline{0,abc} \in \{0,(027); 0,(037); 0,(999)\}$

$\Rightarrow n \in \{37; 27; 1\}$.

Chủ đề 6 ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ THUẬN

1. a) Chu vi một hình vuông tỉ lệ thuận với cạnh hình vuông, hệ số tỉ lệ là **4**
b) Số hàng mua được tỉ lệ thuận với ***số tiền*** nếu giá hàng không thay đổi.
c) Chu vi một đường tròn tỉ lệ thuận với ***đường kính***, với hệ số tỉ lệ là π.
d) Diện tích một tam giác có đáy là a (hằng số khác 0) tỉ lệ thuận với đường cao theo hệ số tỉ lệ là ***0,5a.***

2. Chọn **C**, trên cùng quãng đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

3. Khẳng định đúng là a và c. Khẳng định sai là b và d.

6.1.

Số con ruồi	1	4	7	17	42	73
Số chân ruồi	6	24	42	102	252	438

6.2.

Giá gốc (đồng)	234000	400000	4270000	880000
Tăng thêm (đồng)	16380	28000	298900	61600
Giá sau khi tăng (đồng)	250380	428000	4568900	941600

6.3.

Vận tốc (km/h)	60	30	24	15	12	6
Quãng đường (km)	20	10	8	5	4	2

6.4.

Thời gian	40′	30′	1h30′	2h10′	3h50′
Số kiến con thú ăn kiến ăn được	1000	750	2250	3250	5750

6.5. a) Từ 1440 kg lúa mì sẽ làm ra 1716 kg bánh mì.
b) Cần 200 kg bột mì để làm ra 260 kg bánh mì.

6.6. Cần 5 quả trứng đà điểu làm món trứng tráng cho 100 người ăn.

6.7. a) 10 bát chè cần 300 (gam đường) = 0,3 (kg đường)

	Số bát chè	Số đường (kg)
Thứ Hai	240	7,2
Thứ Ba	150	4,5
Thứ Tư	180	5,4
		Tổng = 17,1

b) Mua sẵn 21 kg đường, sau 3 ngày còn 3,9 kg đường.

Với số đường đó làm được 130 bát chè và cần đến 1040 quả nhãn lồng.

6.8. a) Để làm 102 mâm cỗ, cần 34 kg thịt và 51 quả trứng gà.
b) Mua 12 hộp trứng gà (10 quả/hộp) thì sẽ làm được 240 mâm cỗ, khi đó cần đến 80 kg thịt nạc vai.

6.9. Không phải tương quan đại lượng tỉ lệ thuận giữa khối lượng cân và chiều dài lò xo. Nhưng lưu ý là người ta vẫn làm được vạch chỉ chính xác khối lượng của vật định cân.

6.10. Khoảng cách từ chỗ tia chớp đến chỗ bạn BEE đứng là 7,14 km.

6.11. Làm được 160 chiếc bánh chưng loại to.

6.12. Mỗi tháng lĩnh được 1 triệu đồng tiền lãi.

6.13. $y = -2x$.

6.14. Thực tế người A lĩnh được 450000 đồng.

Chủ đề 7 ĐẠI LƯỢNG TỈ LỆ NGHỊCH

1. a) Trên cùng quãng đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng ***tỉ lệ nghịch***.

b) Với một số tiền cho trước thì số hàng mua được và ***giá hàng*** là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

c) Một số hữu tỉ x ($\neq 0$) và số nghịch đảo của x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, có hệ số tỉ lệ là ***1***.

d) Trong các tam giác có cùng diện tích, số đo cạnh đáy và số đo ***chiều cao thuộc đáy*** là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

2. Chọn C, trên cùng quãng đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

3. Khẳng định ĐÚNG: d. Khẳng định SAI: a, b và c.

7.1. Bột mì được hạ giá $100\% - \dfrac{32,9}{40}\%$ $= 17,75\%$.

7.2. a) Để hoàn thành công việc trong 39 ngày cần có 130 người và số người cần bổ sung là: 130 – 78 = 52 (người).

b) Khi cải tiến công cụ lao động để năng suất lao động tăng 20%, thì chỉ cần 65 người vẫn hoàn thành công việc và số người cần giảm là 78 – 65 = 13 (người).

7.3. Với số tiền trước đây mua được 5,38 kg cà phê thì nay mua được 7 kg cà phê (hạ giá).

7.4. Với 20 người của đội hai, mỗi người làm trong 14 ngày sẽ đào được 432 m^3 đất.

7.5. Quãng đường từ nhà đến trường dài 3,75 km.

7.6. a) $x_2 = -6$ và $y_1 = 10$. b) $xy = -30$.

7.7. a)

x	**1**	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{1440}$	$\frac{1}{144}$
y	12	**1**	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{12}$
z	720	60	**1**	**0,5**	**5**

b) Công thức biểu diễn z theo x là

$z = 720x$.

7.8. Chọn giá gốc là 100%, giá giảm lần đầu là 90%.

Giá giảm lần thứ hai (tăng giá đã giảm lần đầu lên thêm 5%) là 1,05.90% = 94,5%.

Vậy mức giá giảm sau cùng bằng 5,5%.

7.9. a) Do hai bánh xe có răng khớp vào nhau, nên trong quá trình chuyển động số răng bánh xe và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Bánh xe thứ hai có 45 răng sẽ quay được 52 (vòng/phút).

b) Bánh xe thứ hai cần thiết kế có 30 răng.

7.10. Hai đoàn tàu gặp nhau cách ga A là 18 km.

Chủ đề 8 HÀM SỐ. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1. A – 3; B – 5; C – 4; D – 2; E – 1.

2. a) Khi nói đến hàm số, là ta nói đến sự tương quan giữa hai đại lượng biến thiên nhận các giá trị bằng ***số***.

   b) Mỗi giá trị của đại lượng x không thể có ***nhiều hơn*** một giá trị của đại lượng y.

   c) Mỗi giá trị tương ứng của đại lượng y có thể nhận ***nhiều*** giá trị của đại lượng x.

3. Chọn B, hai đường thẳng chứa hai đường chéo và hai đường thẳng chứa hai cạnh song song với trục hoành.

8.1. Các cặp số trong trường hợp b) và c) xác định một hàm số. Còn các cặp số trong trường hợp a) và d) ***không*** xác định một hàm số.

8.2. a)

y	–6	–3	–1	2	4	12
f(x)	–2	–4	–12	6	3	1

b) $f(-12) = -1; f(-4) = -3; f(3) = 4; f(6) = 2.$

8.3. a)

y	21	12	–1	–2
f(x)	–3	$-\frac{12}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

b) $y > 0 \Leftrightarrow -7x > 0 \Leftrightarrow x < 0.$

8.4. a) $A(-3; -1)$ thuộc đồ thị (F) của hàm số $f(x) = ax$ nên ta có $-1 = -3a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, vậy (F) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x$.

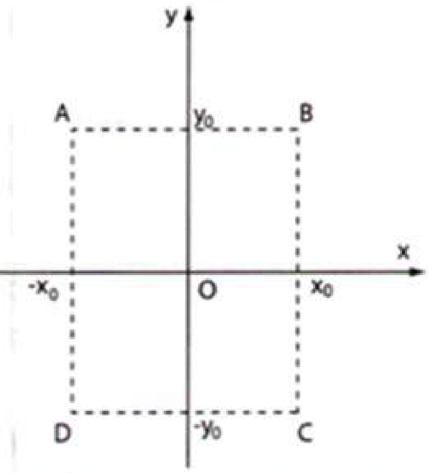
b) Điểm B $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right) \in (F)$.

Điểm C $\left(6; \frac{1}{2}\right) \notin (F)$.

c) Nếu điểm D $\left(-\frac{1}{3}; y_1\right) \in (F)$ thì $y_1 = -\frac{1}{9}$.

d) Nếu điểm E $\left(x_2; -\frac{1}{3}\right) \in (F)$ thì $x_2 = -1$.

8.5. a) Các điểm A, B, C và D là đỉnh của một hình chữ nhật.



Nếu điểm A có giá trị tuyệt đối của hoành độ bằng giá trị tuyệt đối của tung độ, thì các điểm A, B, C và D là đỉnh của một hình vuông (hình vuông là một hình chữ nhật đặc biệt).

b) Hoành độ và tung độ của điểm A là số đối của hoành độ và tung độ tương ứng của điểm C.

Tương tự với các điểm B và D.

8.6. a) $f(-0,5) = -4,5;\ f(-0,4) = -4,68;$

$f(1) = -3; f(4) = 27.$

b) $f(x) = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$f(x) = 3 \Rightarrow x = \pm 2.$

c) Ta có $f(x) = 2x^2 - 5$ và

$f(-x) = 2(-x)^2 - 5 = 2x^2 - 5 \Rightarrow f(x) = f(-x).$

8.7. c) Toạ độ của điểm C: (2; 3).

d) S(OACB) = 6.

e) Toạ độ của điểm D: (5; 3);

S(OAD) = S(OACB).

PHẦN HÌNH HỌC

Chủ đề 1 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Không ; **2.** Một ; **3.** Có.

1.1. $\widehat{AMC} = \widehat{BMD} = 45^\circ$, $\widehat{BMC} = \widehat{AMD} = 135^\circ$.

1.2. $\widehat{MOE} = \widehat{NOF} = 70^\circ 46'$; $\widehat{EON} = \widehat{FOM} = 109^\circ 14'$.

1.3. (h.79) OE là tia phân giác của $\widehat{MON}$ nên

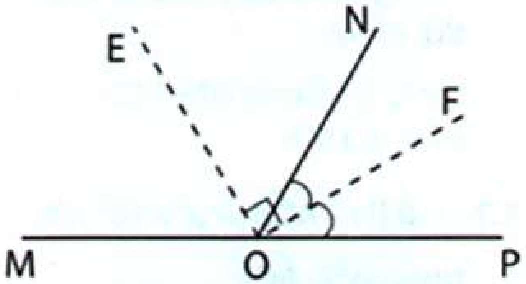
$\widehat{MOE} = \widehat{EON} = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$).

Vậy $\widehat{NOF} = \widehat{EOF} - \widehat{EON} = 90^\circ - \alpha$ (1)

và $\widehat{FOP} = 180^\circ - \widehat{MOE} - \widehat{EOF}$

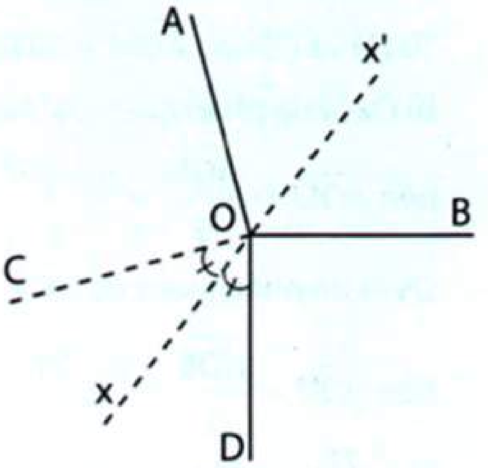
$= 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\widehat{NOF} = \widehat{FOP}$. Vậy OF là tia phân giác của góc $\widehat{NOP}$.



Hình 79

1.4. (h.80) HS tự chứng minh $\widehat{AOx'} = \widehat{BOx'}$. Vậy Ox' là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.



Hình 80

1.5. (h.81) a) Bốn đường thẳng cắt nhau tại O. Chúng bị điểm O chia thành 8 tia chung gốc O.

Xét một tia (chẳng hạn tia OM) sẽ hợp với 8 tia còn lại được 7 góc khác nhau. Vậy có 8 tia tạo thành : 8.7 (góc).

Nhưng mỗi góc được tính hai lần : Vậy tổng số các góc tạo thành là : $\dfrac{7 \times 8}{2} = 28$ (góc).

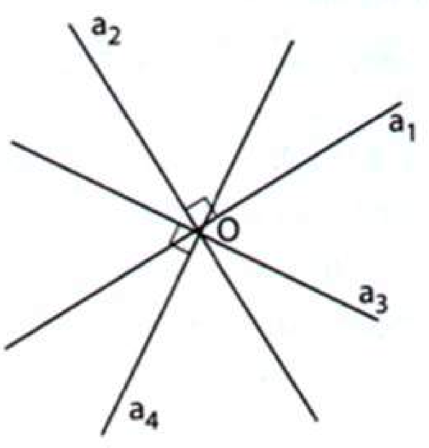
b) Mỗi tia, hợp với 7 tia còn lại tạo thành: 2 góc vuông; 1 góc bẹt ; 2 góc tù ; 2 góc nhọn.

Vậy tất cả các góc vuông trong hình vẽ là :

$\dfrac{2.8}{2} = 8$ (góc).

Số góc bẹt trong hình vẽ là : $\dfrac{1.8}{2} = 4$ (góc).

Tương tự ta có 8 góc tù và 8 góc nhọn.



Hình 81

1.6. (h.82) a) $\widehat{mOx} = \widehat{zOy}$ (gt),

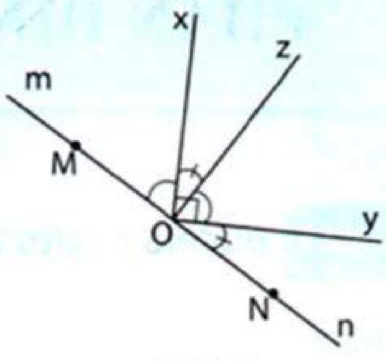
$\widehat{nOy} = \widehat{xOz}$ (gt) $\Rightarrow \widehat{mOx} + \widehat{nOy} = \widehat{zOy} + \widehat{xOz}$.

Mà $\widehat{xOz} + \widehat{yOz} = 90^\circ$ (gt). Vậy $\widehat{mOn} + \widehat{nOy} = 90^\circ$.

Ta có :

$\widehat{mOx} + \widehat{xOz} + \widehat{zOy} + \widehat{yOn} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Suy ra hai tia Om và On nằm trên một đường thẳng có chung gốc O. Vậy Om và On là hai tia đối nhau.



Hình 82

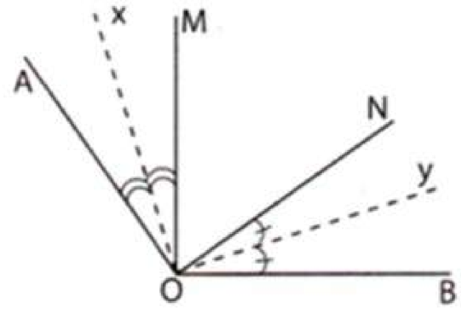
b) $Oz \perp MN$ mà $OM = ON$. Vậy Oz là đường trung trực của MN.

1.7. (h.83) a) $\widehat{AOB} = \alpha > 90^\circ$ nên tia OM và ON nằm trong góc $\widehat{AOB}$.

$ON \perp OA \Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{MON} = 90^\circ$ (1)

$OM \perp OB \Rightarrow \widehat{NOB} + \widehat{NOM} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) có : $\widehat{AOM} = \widehat{NOB} = \alpha - 90^\circ$.



Hình 83

b) Ox là tia phân giác của $\widehat{AOM}$

nên $\widehat{xOM} = \dfrac{\widehat{AOM}}{2} = \dfrac{\alpha - 90^\circ}{2}$ (3)

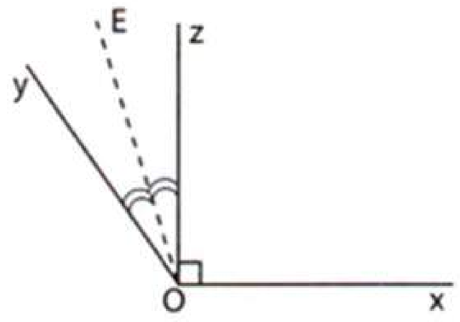
Oy là tia phân giác của $\widehat{NOB}$

nên $\widehat{yON} = \dfrac{\widehat{NOB}}{2} = \dfrac{\alpha - 90^\circ}{2}$ (4)

Mà $\widehat{xOy} = \widehat{xOM} + \widehat{MON} + \widehat{NOy}$.

Thay vào có :

$\widehat{xOy} = \dfrac{\alpha - 90^\circ}{2} + (180^\circ - \alpha) + \dfrac{\alpha - 90^\circ}{2} = 90^\circ$.



Hình 84

1.8. (h.84) $\widehat{zOE} = 20^\circ$ (gt) $\Rightarrow \widehat{yOz} = 40^\circ$

(OE là tia phân giác).

Vậy : $\widehat{xOy} = 40^\circ + 90^\circ = 130^\circ$.

1.9. Qua O vẽ 20 đường thẳng phân biệt nên có :

$2.20 = 40$ (tia).

Có 40 tia gốc O, mỗi tia tạo với một tia trong 39 tia còn lại thành 39 góc nên có $39.40 = 1560$ (góc).

Tuy nhiên mỗi góc đã được tính hai lần.

Số góc thực sự có là : $1560 : 2 = 780$ (góc).

Có 20 đường thẳng nên trên hình có 20 góc bẹt.

Nhận xét : *Sai lầm thường gặp khi giải bài toán này là khi tính được số góc là 1560 góc không nhận ra mỗi góc được tính hai lần. Ta có bài toán tương tự nếu thay số 20 bằng một số tự nhiên tùy ý lớn hơn 1.*

Số các góc nhỏ hơn góc bẹt trong hình có là : $780 - 20 = 760$ (góc).

Mỗi góc trong 760 góc này đều có một góc đối đỉnh với nó, tạo thành một cặp góc đối đỉnh.

Vậy số cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt có là : $760 : 2 = 380$ (cặp góc đối đỉnh).

1.10. a) Qua điểm M vẽ n đường thẳng đôi một phân biệt nên có $2.n = 2n$ (tia).

Có 2n tia gốc M, mỗi tia tạo với $2n - 1$ tia còn lại thành $2n - 1$ góc nên có $2n(2n - 1)$ góc.

Tuy nhiên mỗi góc đã được tính hai lần.

Số góc thực sự có là : $2n(2n - 1) : 2 = n(2n - 1)$ (góc).

Các góc nhỏ hơn góc bẹt có trong hình là : $n(2n - 1) - n = 2n(n - 1)$ (góc).

Mỗi góc trong $2n(n - 1)$ góc này đều có một góc đối đỉnh với nó, tạo thành một cặp góc đối đỉnh.

Vậy số cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt có là :

$2n(n - 1) : 2 = n(n - 1)$ (cặp góc đối đỉnh).

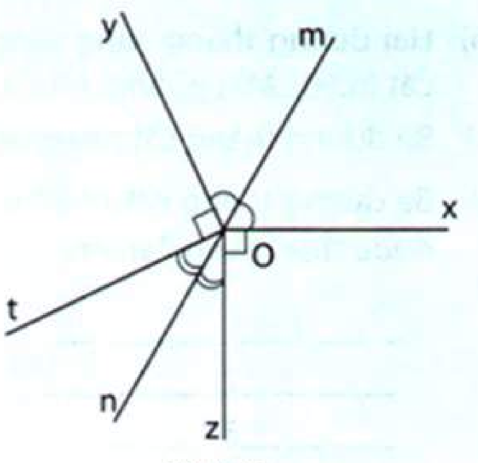
b) Từ câu a) ta có $n(n - 1) = 930$ $\Rightarrow n(n - 1) = 31.30$ $\Rightarrow n = 31$.

1.11. Có 10 đường thẳng đôi một phân biệt đi qua O nên có 20 góc không có điểm trong chung, tổng của 20 góc này bằng $360°$.

Nếu mọi góc đều nhỏ hơn $18°$ thì tổng của chúng nhỏ hơn $360°$, vô lí.

Do vậy tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng $18°$ mỗi góc này có một góc đối đỉnh với nó, mà hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Vậy tồn tại hai góc lớn hơn hoặc bằng $18°$

Lập luận tương tự suy ra cũng tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng $18°$.



Hình 85

1.12. (h.85) *Cách 1.* Chứng minh

$\widehat{xOm} + \widehat{xOz} + \widehat{zOn} = 180°$.

Cách 2. Vẽ tia Om' là tia đối của tia On. Chứng tỏ rằng hai tia Om, Om' trùng nhau.

1.13. (h.86) $AB \perp d$, $BC \perp d$

$\Rightarrow$ hai đường thẳng AB, BC trùng nhau

$\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng. (1)

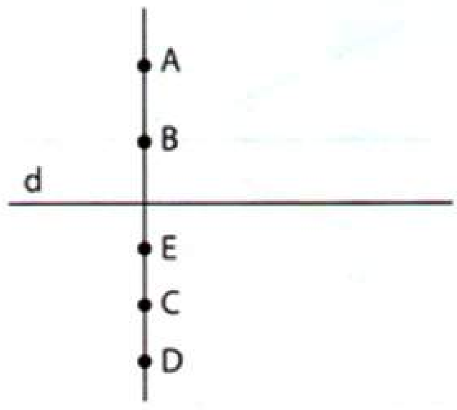
Mặt khác có $CD \perp d$.

Mà $BC \perp d \Rightarrow$ B, C, D thẳng hàng. (2)

Từ (1), (2) suy ra A, B, C, D cùng thuộc đường thẳng AD.

Mà $DE \perp d$ nên E cũng thuộc đường thẳng AD.

Vậy A, B, C, D, E thẳng hàng, chúng nằm trên đường thẳng vuông góc với d.



Hình 86

Chủ đề 2 Hai đường thẳng song song

1. Có vì a // b ; **2.** Có ; **3.** Không. Bằng 90°

2.1. a), c) sai ; b), d) đúng.

2.2. Vẽ tia AM là tia đối của tia AB (h.87).

Ta cố $\widehat{BAE} + \widehat{EAM} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow 120^\circ + \widehat{EAM} = 180^\circ$

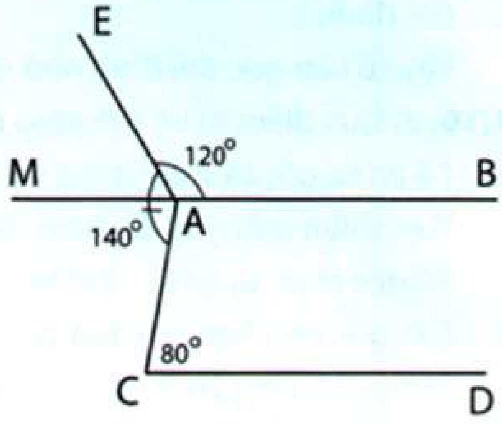
$\Rightarrow \widehat{EAM} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Vì tia AM nằm giữa hai tia AE, AC nên

$\widehat{EAM} + \widehat{MAC} = \widehat{EAC} \Rightarrow 60^\circ + \widehat{MAC} = 140^\circ$

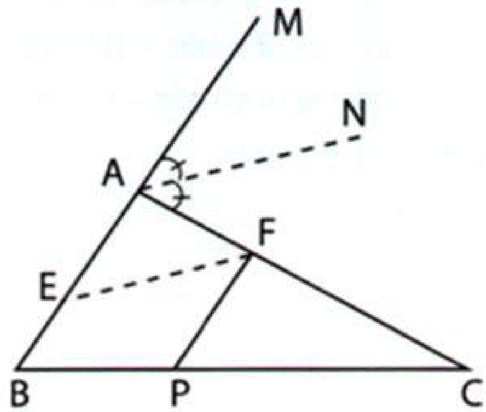
$\Rightarrow \widehat{MAC} = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.

Ta có $\widehat{MAC} = \widehat{ACD}\ (= 80^\circ)$, mà các góc $\widehat{MAC}$ và $\widehat{ACD}$ so le trong. Vậy AB // CD.



Hình 87

2.4. (h.88) HS tự chứng minh.



Hình 88

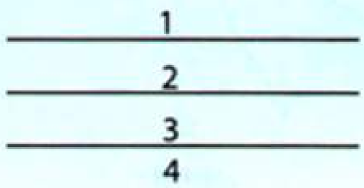
2.5. Xét bốn trường hợp :

a) Ba đường thẳng song song với nhau : mặt phẳng được chia thành 4 miền (h.89).

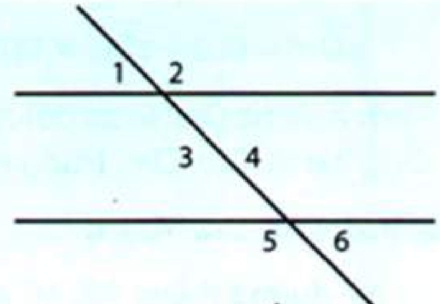
b) Hai đường thẳng song song bị đường thứ ba cắt (h.90): Mặt phẳng được chia thành 6 miền.

c) Ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm (h.91): 6 miền.

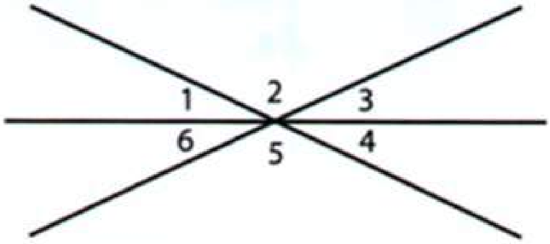
d) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một tại các điểm khác nhau (h.92): Mặt phẳng được chia thành 7 miền.



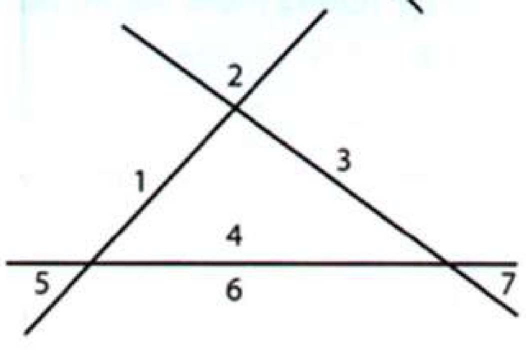
Hình 89



Hình 90



Hình 91



Hình 92

2.6. HS tự chứng minh kết quả : $\widehat{MPB} = \widehat{PQD} = 30^\circ$.

2.7. ĐS : a) $x = 45^\circ$; b) $x = 110^\circ$, c) $x = 75^\circ$.

2.8. (h.93)

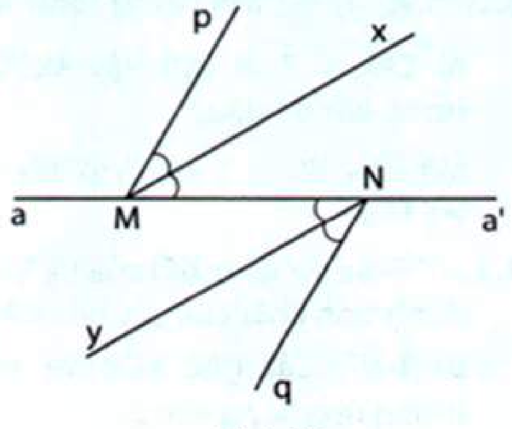
a) Dễ thấy $\widehat{pMa'} = \widehat{aNq} = 60^\circ$ nên theo dấu hiệu hai đường thẳng song song, ta có Mp // Nq.

b) Ta có $\widehat{xMN} = \frac{1}{2}\widehat{pMa'} = \frac{1}{2}.60^\circ = 30^\circ$;

$\widehat{MNy} = \frac{1}{2}\widehat{aNq} = \frac{1}{2}.60^\circ = 30^\circ$.

Do đó $\widehat{xMN} = \widehat{MNy}$.

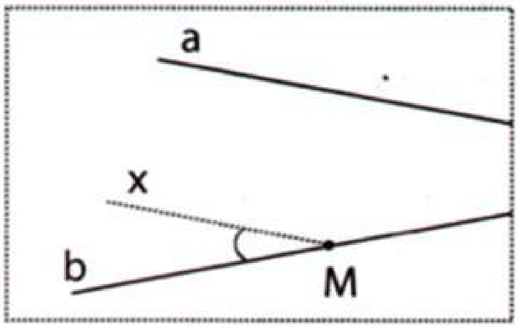
Đường thẳng aa' cắt các đường thẳng chứa các tia Mx và Ny, tạo thành cặp góc so le trong bằng nhau nên Mx // Ny.



Hình 93

Nhận xét :
Một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì các tia phân giác của một cặp góc so le trong song song với nhau. Tương tự, ta cũng chứng minh được :
- Các tia phân giác của một cặp góc so le ngoài song song với nhau.
- Các tia phân giác của một cặp góc đồng vị song song với nhau.

2.9. Lấy M ∈ b. Từ M kẻ Mx//a ta có : góc nhọn $\widehat{xMb} = \widehat{aOb}$. Đo góc $\widehat{xMb}$ sẽ suy ra góc aOb (h.94).



Hình 94

Chủ đề 3 Tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song Từ vuông góc đến song song

1. a) Có nếu M không nằm trên đường thẳng ; b) Sai ; **2.** Có ; **3.** x ≡ y ; **4.** Song song

3.1. (h.95) a) Ta có $\widehat{xAC} = \widehat{ACB} \Rightarrow$ Ax//BC.

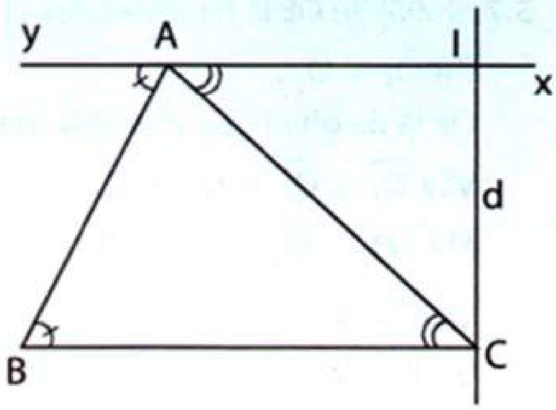
Hai góc $\widehat{yAB}$ và $\widehat{ABC}$ là hai góc so le trong, mà $\widehat{yAB} = \widehat{ABC} \Rightarrow$ Ay//BC.

Qua điểm A ở ngoài đường thẳng BC kẻ được Ax//BC và Ay//BC. Vậy Ax và Ay phải thuộc cùng một đường thẳng (theo tiên đề Ơ-clít, qua A chỉ có thể kẻ được một đường thẳng song song với BC).

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với xy.

Vì xy//BC (câu a) nên $\widehat{xIC} = \widehat{ICB}$ (hai góc so le trong).

Mà $\widehat{ICB} = 90^\circ$ (d ⊥ BC) nên $\widehat{xIC} = 90^\circ$. Chứng tỏ d ⊥ xy.

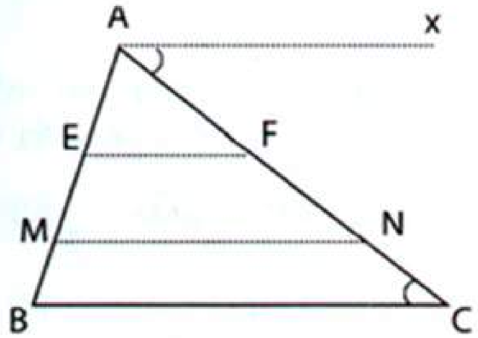


Hình 95

3.2. (h.96) a) EF//MN (cùng song song với BC).

b) $\widehat{CAx} = \widehat{ACB}$ (gt). Vậy Ax//BC (hai góc so le trong bằng nhau).

Mà MN//BC (gt). Vậy Ax//MN (cùng song song với BC).

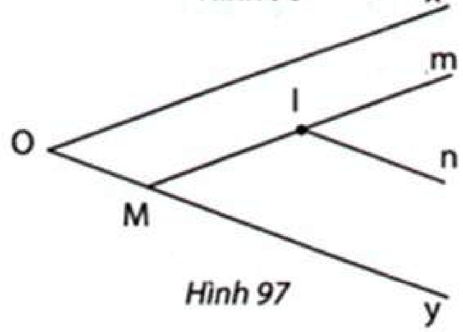


Hình 96

3.3. a) Vẽ tia Im' là tia đối của tia Im, cắt Oy tại M. Sử dụng tính chất của các góc đồng vị.

b) (h.97) Các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{mIn}$ có các cạnh tương ứng song song.

Lưu ý rằng kết quả vẫn đúng khi xOy là góc tù. Từ đó ta có kết quả : Hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau (nếu chúng cùng nhọn hoặc cùng tù) hoặc bù nhau (nếu góc này nhọn còn góc kia tù).



Hình 97

3.4. Từ gt suy ra $\widehat{D_5} = 72^\circ$, $\widehat{C_4} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Các góc còn lại học sinh tự tìm.

3.5. Ta có $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACD}$ là hai góc trong cùng phía

$\Rightarrow$ AB // CD. (1)

Mặt khác, có $\widehat{DCE} + \widehat{CEF} = 40^\circ + 140^\circ = 180^\circ$, $\widehat{DCE}$ và $\widehat{CEF}$ là hai góc trong cùng phía

$\Rightarrow$ CD // EF. (2)

Từ (1) và (2) có AB // EF.

3.6. Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{BEF}$ $(= 70^\circ)$, $\widehat{ABE}$ và $\widehat{BEF}$ so le trong $\Rightarrow$ AB // EF. (1)

Mặt khác $\widehat{DCE} + \widehat{CEF} = 130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$, $\widehat{DCE}$ và $\widehat{CEF}$ là hai góc trong cùng phía

$\Rightarrow$ CD // EF. (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB // CD.

3.7. (h.98) Kẻ OE là tia phân giác của $\widehat{xOy}$

thì $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

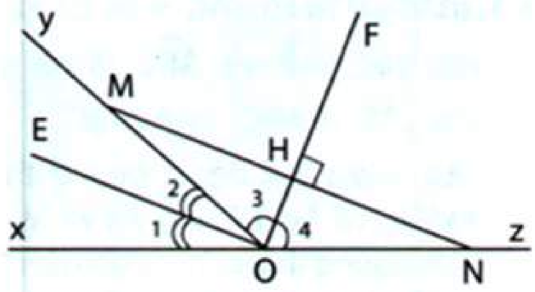
OF là tia phân giác của $\widehat{yOz}$ nên $\widehat{O_4} = \widehat{O_3}$.

Vậy $\widehat{O_1} + \widehat{O_4} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3}$.

Mà : $\widehat{O_1} + \widehat{O_4} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ \Rightarrow OF \perp OE$.

Vì $OF \perp MN$ (đầu bài), nên OE//MN (cùng vuông góc với OF). Suy ra $\widehat{O_2} = \widehat{OMN}$ (so le trong) và $\widehat{O_1} = \widehat{ONM}$ (đồng vị). Mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (OE là phân giác). Vậy $\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$.



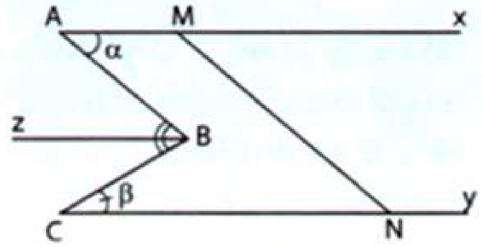
Hình 98

3.8. a) Vẽ tia Bz sao cho $\widehat{ABz} = \alpha$ (h.99).

Ta có $\widehat{BAx} = \widehat{ABz}$ $(= \alpha)$,

$\widehat{BAx}$ và $\widehat{ABz}$ so le trong

$\Rightarrow$ Ax // Bz. (1)



Hình 99

Ta có : $\widehat{ABz} + \widehat{zBC} = \alpha + \beta$ nên $\widehat{zBC} = \beta$

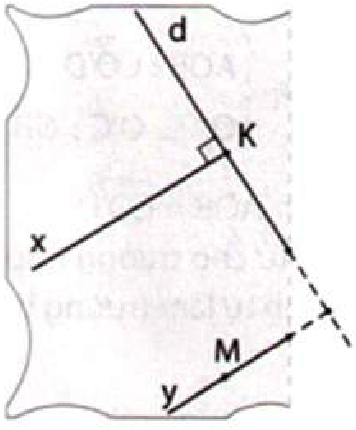
$\Rightarrow \widehat{zBC} = \widehat{BCy}$ $(= \beta)$, $\widehat{zBC}$ và $\widehat{BCy}$ so le trong

$\Rightarrow$ Bz // Cy. (2)

Từ (1) và (2) ta có Ax // Cy.

b) $\widehat{A} = \widehat{xMN}$ (hai góc đồng vị) ; $\widehat{xMN} = \widehat{MNC}$ (hai góc so le trong). Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{A} = \alpha$.

3.9. (h.100). Lấy điểm K thuộc d (phần nằm trong tờ giấy). Qua K kẻ đường thẳng Kx vuông góc với d, qua M kẻ đường thẳng My // Kx, ta có My vuông góc với d.



Hình 100

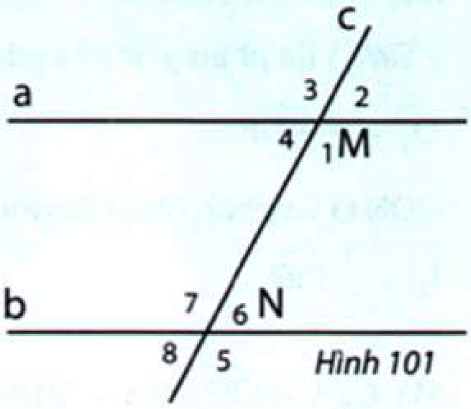
Chủ đề 4 ĐỊNH LÍ

1. Không ; **2.** HS tự lấy ví dụ.

4.1. a) Hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau. (HS tự chứng minh).

b) c) d) HS tự trả lời.

4.2. (h.101). HS tự ghi giả thiết và kết luận.



Hình 101

4.3.

a)

GT	$\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ nhọn ; Ox // O'x'; Oy // O'y'.
KL	$\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$

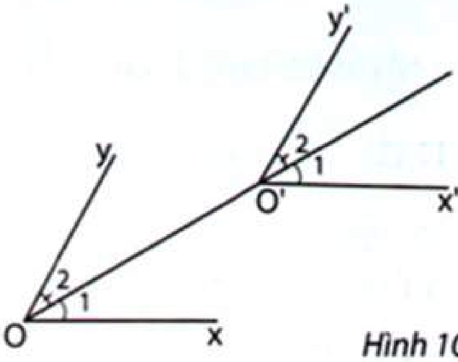
Vẽ tia OO' (h.102), ta có : $\widehat{O}_1 = \widehat{O'}_1$

(vì $\widehat{O}_1$ và $\widehat{O'}_1$ đồng vị, Ox // O'x') ; $\widehat{O}_2 = \widehat{O'}_2$

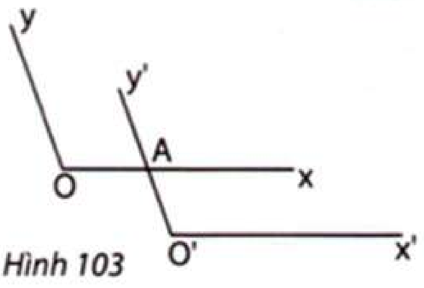
(vì $\widehat{O}_2$ và $\widehat{O'}_2$ đồng vị, Oy // O'y').

Suy ra $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 = \widehat{O'}_1 + \widehat{O'}_2$, do đó $\widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

Hai góc cùng tù chứng minh tương tự (h.103).

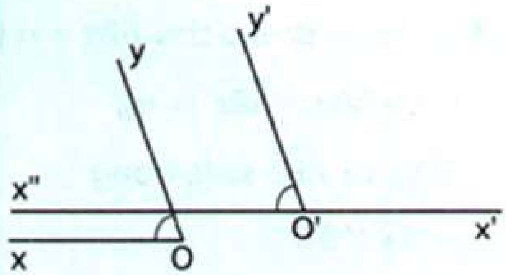


Hình 102



Hình 103

b) Nếu $\widehat{xOy}$ nhọn, $\widehat{x'O'y'}$ tù (h.104): Vẽ tia $O'x''$ là tia đối của $O'x'$, ta có $\widehat{xOy} = \widehat{x''O'y'}$, suy ra $\widehat{xOy}$ và $\widehat{x'O'y'}$ bù nhau.



Hình 104

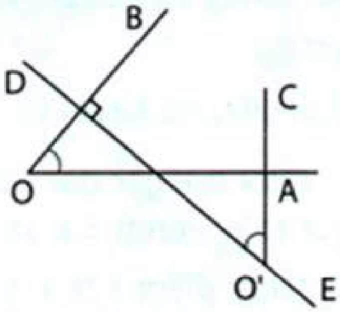
4.4. (h.105)

Giả thiết $\begin{cases} \widehat{AOB}\ ;\ \widehat{CO'D} \text{ cùng nhọn} \\ OA \perp O'C\ ;\ OB \perp O'D \end{cases}$

Kết luận $\widehat{AOB} = \widehat{CO'D}$

Tương tự cho trường hợp hai góc cùng tù.

Học sinh tự làm trường hợp một góc nhọn, một góc tù.



Hình 105

4.5. a) HS tự chứng minh.

b) $\widehat{NAM} = \widehat{QMB} = 40^\circ$.

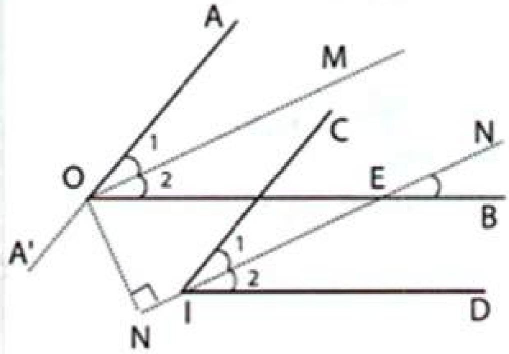
4.6. (h.106) a) Ta chứng minh trường hợp hai góc cùng nhọn (hai góc cùng tù, chứng minh tương tự).

– OM là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$ nên

$\widehat{O_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$. (1)

– ON là tia phân giác của góc $\widehat{CID}$ nên

$\widehat{I_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{CID}$. (2)



Hình 106

Mà $\widehat{AOB} = \widehat{CID}$ (đã chứng minh ở bài 4.3). Vậy $\widehat{O_2} = \widehat{I_2}$ (3)

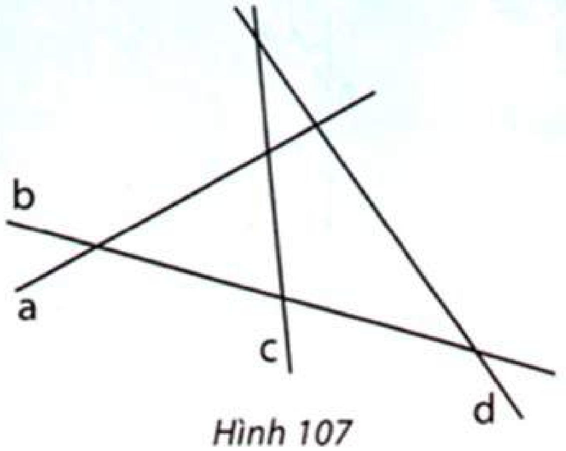
– NI cắt OB tại E. Ta có : $\widehat{NEB} = \widehat{I_2}$ (đồng vị) (4)

Từ (3) và (4) suy ra : $\widehat{NEB} = \widehat{I_2} = \widehat{O_2}$.

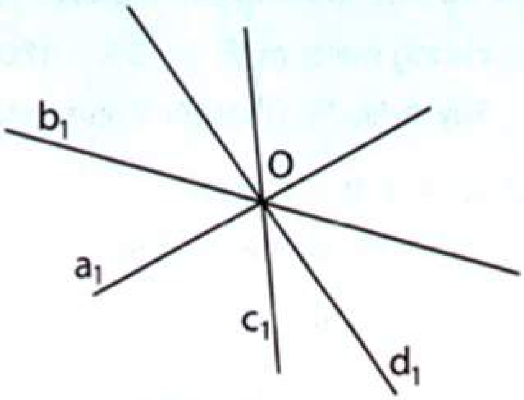
Mà $\widehat{NEB}$ và $\widehat{O_2}$ ở vị trí đồng vị của hai đường thẳng OM và IN cùng cát tuyến OB, chúng bằng nhau nên OM//IN.

b) Sử dụng kết quả a).

4.7. Giả sử 4 đường thẳng đã cho là a, b, c, d không có hai đường nào song song (h.107) ta lấy điểm O tuỳ ý ở trên mặt phẳng đó. Qua O kẻ các đường a_1//a ; b_1//b ; c_1//c ; a_1//d. (h.108). 4 đường thẳng đồng quy chia mặt phẳng thành 8 góc không có điểm trong chung.



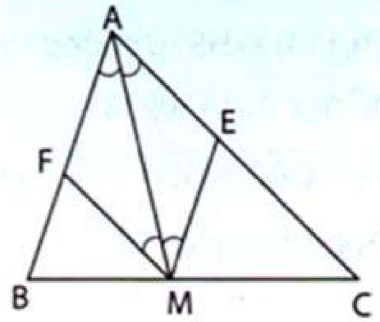
Hình 107



Hình 108

Tổng 8 góc là 360° nên ta tìm được một góc có số đo không quá : $360^\circ : 8 = 45^\circ$ (nếu cả 8 góc lớn hơn 45° thì tổng 8 góc lớn hơn 360°, (vô lí)). Giả sử góc $\widehat{c_1Od_1} \leq 45^\circ$ thì ta có góc hợp bởi hai đường thẳng c và d không quá 45° (2 góc có cạnh tương ứng song song).

4.9. (h.109) M là giao của tia phân giác góc A với cạnh BC.



Hình 109

Chủ đề 5 TỔNG BA GÓC CỦA MỘT TAM GIÁC

1. Không. **2.** a) 110° ; b) 35° ; c) 65°.

3. a) $x = 140^\circ$; $y = 100^\circ$; b) $x = 110^\circ$; $y = 30^\circ$; **4.** Không

5.1. (h.110) a) ΔHAB vuông tại H

$\Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90^\circ$,

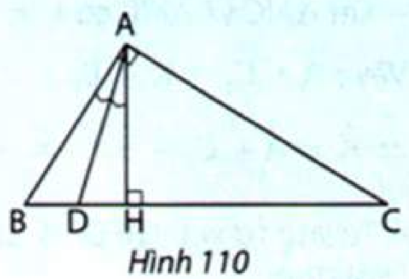
do đó $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$.

b) ΔHAD vuông tại H $\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{DAH} = 90^\circ$.

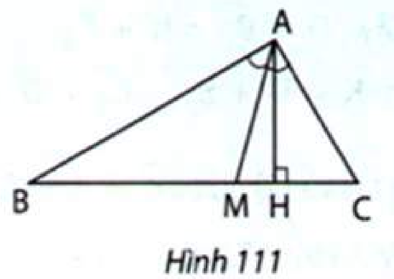
Mà $\widehat{DAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ (= \widehat{BAC})$,

$\widehat{BAD} = \widehat{DAH}$ (AD là tia phân giác của góc BAH).

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{DAC}$.



Hình 110



Hình 111

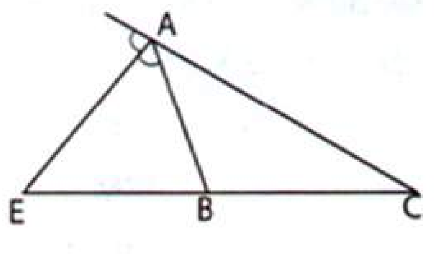
5.2. (h.111) Xét ΔAHM để tính $\widehat{AMH} = 75^\circ$. Xét ΔAMC để tính được $\hat{C} = 60^\circ$, ΔABC có $\hat{B} + 60^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$.

5.3. (h.112) Xét ΔABC tính được $\widehat{BAC} = 40^\circ$.

Tổng $2\widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{EAB} = 70^\circ$.

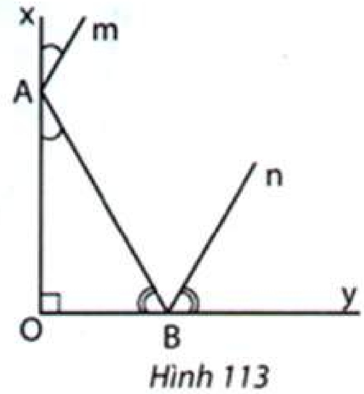
Xét ΔAEB, tính được $\widehat{AEB} = 40^\circ$ và $\widehat{ABE} = 70^\circ$, vậy ΔAEB cân tại E.



Hình 112

5.4. (h.113) Sử dụng kết quả $\widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 90^\circ$ để chứng minh $\widehat{mAB} + \widehat{nBA} = 180^\circ$.

Suy ra Am//Bn (hai góc trong cùng phía bù nhau).



Hình 113

5.5. a) $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

b)Hai góc kia bằng : $(180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

c)Thành lập dãy tỉ số $\dfrac{\widehat{A}}{1} = \dfrac{\widehat{B}}{3} = \dfrac{\widehat{C}}{4}$

$\Rightarrow \widehat{A} = 22^\circ30'$; $\widehat{B} = 67^\circ30'$; $\widehat{C} = 90^\circ$.

5.6. Xem ví dụ 4, Chủ đề 1.

5.7. (h.114) a) HS tự chứng minh.

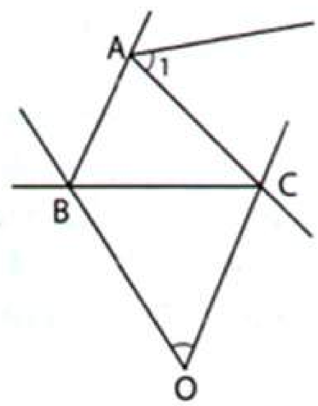
b)Theo a), ta suy ra :

$\widehat{A_1} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \dfrac{1}{2}.360^\circ = 180^\circ$.

Trong tam giác BOC ta có :

$\widehat{BOC} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180^\circ$.

Do đó $\widehat{BOC} = \widehat{A_1}$, tức là $\widehat{BOC}$ bằng nửa góc ngoài ở đỉnh A.



Hình 114

5.8. (h.115) CK cắt AB tại I. BK cắt CD tại F.

– Xét ΔAIC và ΔKIB có $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (đối đỉnh)

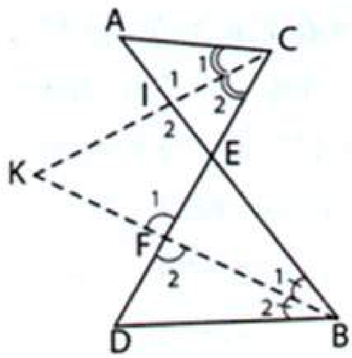
Vậy : $\widehat{A} + \widehat{C_1} = \widehat{K} + \widehat{B_1}$

$\Rightarrow \widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{C_1} - \widehat{B_1} = \widehat{A} + \dfrac{\widehat{C}}{2} - \dfrac{\widehat{B}}{2}$. (1)

– Tương tự xét ΔBFD và ΔKFC có : $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ (đối đỉnh).

Vậy : $\widehat{D} + \widehat{B_2} = \widehat{K} + \widehat{C_2}$

$\Rightarrow \widehat{K} = \widehat{D} + \widehat{B_2} - \widehat{C_2} = \widehat{D} + \dfrac{\widehat{B}}{2} - \dfrac{\widehat{C}}{2}$. (2)



Hình 115

Cộng (1) và (2) có : $2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D} \Rightarrow \widehat{K} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2}$.

5.9. (h.116) a) Tia CM cắt AB tại I.

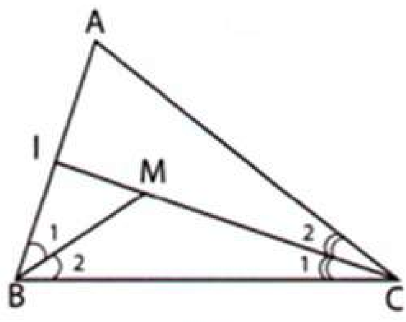
Xét ΔBIM có : $\widehat{BMC} = \widehat{B_1} + \widehat{BIM}$. (1)

Xét ΔAIC có $\widehat{BIM} = \widehat{A} + \widehat{C_2}$. (2)

Thay (2) vào (1) có : $\widehat{BMC} = \widehat{B_1} + \widehat{A} + \widehat{C_2}$

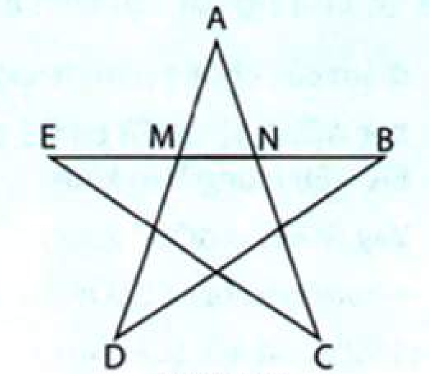
Vậy $\widehat{BMC} = \widehat{A} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$. (3)

b) Sử dụng (3) và giả thiết chứng minh được $\widehat{C_2} = \dfrac{1}{2}\widehat{C}$.



Hình 116

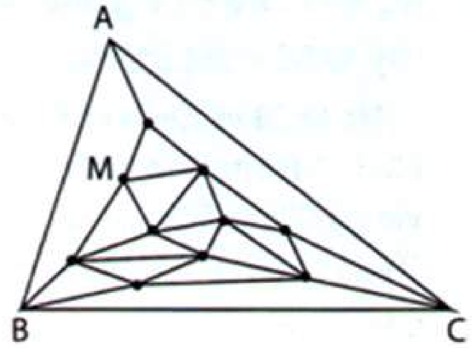
5.10. (h.117) Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác ta có $\widehat{AMN} = \widehat{MBD} + \widehat{MDB}$ ($\widehat{AMN}$ là góc ngoài của tam giác MBD) và $\widehat{ANM} = \widehat{NEC} + \widehat{NCE}$ ($\widehat{ANM}$ là góc ngoài của tam giác NEC). Do đó $\widehat{A} + \left(\widehat{B} + \widehat{D}\right) + \left(\widehat{C} + \widehat{E}\right) = \widehat{A} + \widehat{AMN} + \widehat{ANM} = 180^\circ$.



Hình 117

5.11. (h.118) Gọi tam giác đã cho là ABC và trong tam giác lấy 10 điểm. Vậy tất cả có 13 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng.

Khi trò chơi kết thúc thì các tam giác xếp kề sát nhau và phủ kín ΔABC. Vì không có đoạn thẳng nào cắt nhau nên các tam giác nhỏ không chồng lên nhau.



Hình 118

Ta xét một điểm (trong số 10 điểm) chẳng hạn điểm M. Từ M nối với các điểm khác. M là đỉnh của nhiều tam giác xếp kề nhau (không chồng lên nhau). Không cần biết bao nhiêu góc nhỏ tại M nhưng tổng các góc đó bằng 360°. Vậy tại 10 điểm trong tam giác ABC có tổng các góc nhỏ là $360^\circ.10$, thêm tổng 3 góc của ΔABC là 180°, suy ra tổng các góc của tất cả các tam giác là : $360^\circ.10 + 180^\circ$.

Mà mỗi tam giác có tổng các góc trong là 180°.

Vậy số tam giác vẽ được là : $\dfrac{360^\circ.10 + 180^\circ}{180^\circ} = 21$ (tam giác)

Tổng số tam giác cả hai người vẽ được là 21. Mà người thứ nhất đã vẽ được 12 tam giác. Vậy người thứ nhất thắng.

Chủ đề 6 CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC

1. Không. **3.** Không. **4.** Có ; $\widehat{B} = 120^\circ$. **5.** Không.

6.1. $\Delta MNP = \Delta ABC$ nên $MN = AB = 3cm$;

$NP = BC = 4cm$; $MP = 5cm$. Vậy chu vi ΔMNP là $3 + 4 + 5 = 12(cm)$.

6.2. ΔABC có $AB = EF$ và $\widehat{B} = \widehat{F}$. Vậy tam giác tương ứng là ΔEFK.

6.3. $\Delta NOM = \Delta QOP$ nên :

$OM = OP = 2cm$; $OQ = ON = 3cm$; $PQ = MN = 2{,}5cm$.

Suy ra : $\widehat{MNO} = \widehat{PQO}$ (góc tương ứng).

Vậy MN//PQ (có hai góc so le trong bằng nhau).

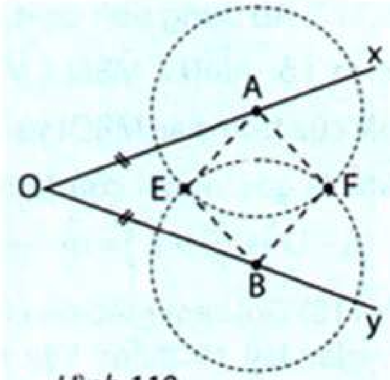
6.4. (h.119) Độ dài bán kính nhỏ hơn OA nên giao điểm của chúng nằm trong góc $\widehat{xOy}$.

a) Xét ΔOEA và ΔOEB có OE chung, $OA = OB$ (gt), $EA = EB$ (cùng bán kính).

Vậy $\Delta OEA = \Delta OEB$ (c.c.c).

– Tương tự ta có : $\Delta OFA = \Delta OFB$ (c.c.c).

b), c) Sử dụng kết quả câu a).



Hình 119

6.5. (h.120) a) ΔABC và ΔECB có BC chung, $AC = BE$; $AB = CE$ (cùng bán kính).

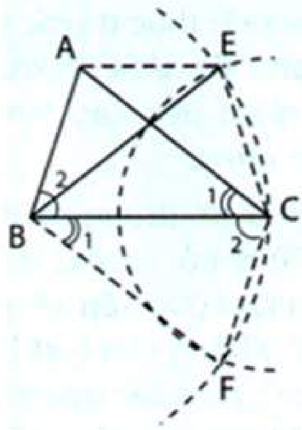
Vậy $\Delta ABC = \Delta ECB$ (c.c.c) . (1)

– Xét ΔECB và ΔFCB có CB chung, $CE = CF$; $EB = FB$ (cùng bán kính).

Vậy $\Delta ECB = \Delta FCB$ (c.c.c) (2)

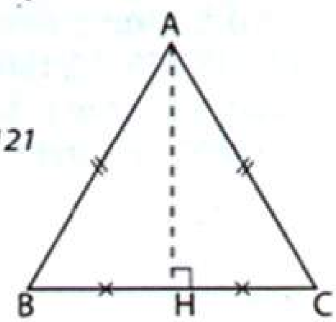
Từ (1) và (2) có : $\Delta ABC = \Delta ECB = \Delta FCB$.

Các câu b), c), d) chứng minh tương tự.



Hình 120

6.6. (h.121) HD: Chứng minh $\Delta BAH = \Delta CAH$ (c.c.c).



Hình 121

6.7. (h.122) Xét ΔABM và ΔCDM có : $AM = CM$ (M là trung điểm của AC), $AB = CD$ (giả thiết), $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$ $(= 90^\circ)$.

Do đó $\Delta ABM = \Delta CDM$ (c.g.c)

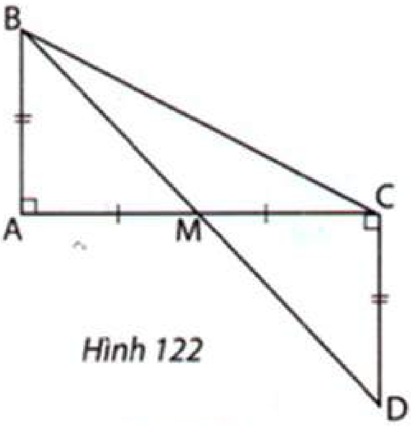
$\Rightarrow MB = MD$ (cặp cạnh tương ứng) (1)

và $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (cặp góc tương ứng).

Ta có $\widehat{BMC} + \widehat{CMD} = \widehat{BMC} + \widehat{AMB} = 180^\circ$.

Do đó ba điểm B, M, D thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) ta có M là trung điểm của đoạn thẳng BD.



Hình 122

6.8. HS tự chứng minh.

6.9. Chứng minh $\Delta ACM = \Delta BHM$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$. Vậy $HB \perp BM$.

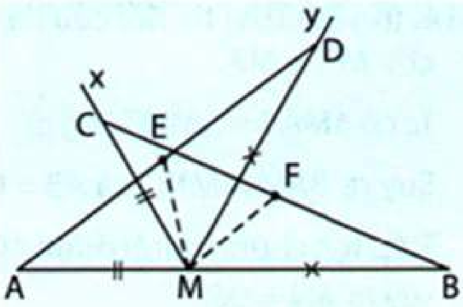
Sai lầm thường mắc phải khi giải bài 6.7 là không chứng minh ba điểm B, M, D thẳng hàng.

6.10. (h.123) a) HD.

$\Delta AMD = \Delta CMB$ (c.g.c).

Suy ra : $AD = CB$.

b) HS tự chứng minh



Hình 123

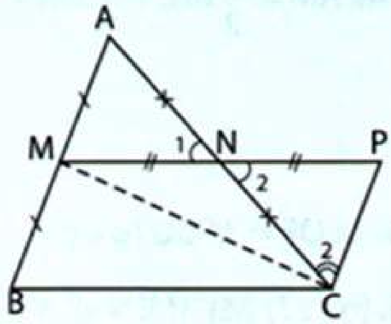
6.11. Chứng minh $\widehat{CME} = \widehat{CNF} \Rightarrow ME // NF$.

6.12. (h.124) a), b) HS tự chứng minh.

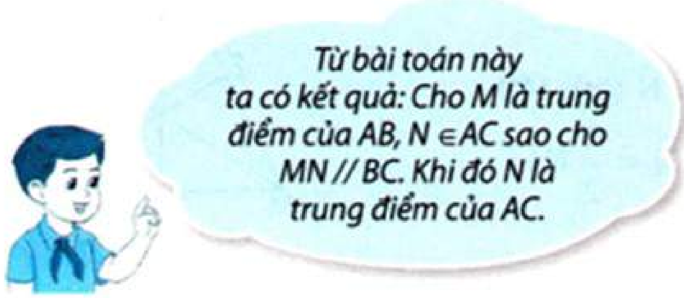
c) $\Delta BMC = \Delta PCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{PMC}$

$\Rightarrow MN // BC$.

d) Kết luận : $MN = \dfrac{1}{2}BC$ và $MN // BC$.



Hình 124



6.13. (h.125) Trên tia đối của tia MA, lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

Xét ΔMAB và ΔMDC có :

$MA = MD$ (cách dựng), $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh), $MB = MC$ (giả thiết).

Do đó $\Delta MAB = \Delta MDC$ (c.g.c).

Suy ra $AB = DC$, $\widehat{ABM} = \widehat{DCM}$.

Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{DCM}$, $\widehat{ABM}$ và $\widehat{DCM}$ so le trong, suy ra $AB // CD$.

Mà $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACD}$ là hai góc trong cùng phía nên $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} = 180^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'} = 180^\circ$ (giả thiết).

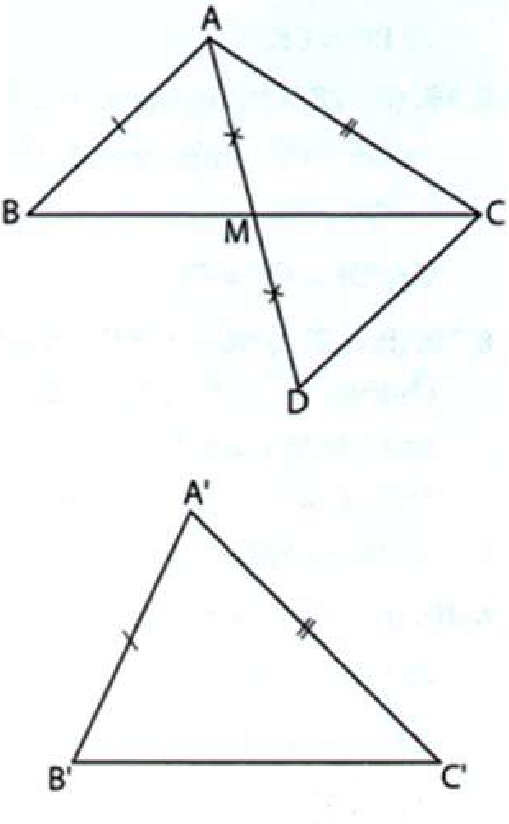
Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{B'A'C'}$.

Xét $\Delta A'B'C'$ và ΔCDA có : $A'B' = DC$ ($= AB$), $\widehat{B'A'C'} = \widehat{ACD}$, $A'C' = AC$ (giả thiết)

Do đó $\Delta A'B'C' = \Delta CDA$ (c.g.c).

Suy ra $B'C' = AD$.

Mà $AM = \dfrac{1}{2}AD$, suy ra $AM = \dfrac{1}{2}B'C'$.



Hình 125

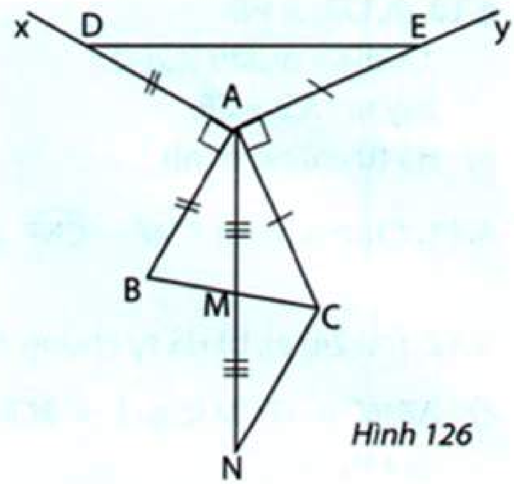
6.14. (h.126) Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho MN = MA.

Ta có $\Delta MAB = \Delta MNC$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{MNC}$ và AB = CN.

Tiếp tục chứng minh được $\Delta CAN = \Delta AED$ (c.g.c), suy ra AN = DE.

Mà $AM = \frac{1}{2}AN$, vậy $AM = \frac{1}{2}DE$.

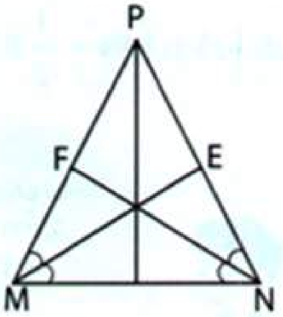


Hình 126

6.15. $\Delta EOP = \Delta FOQ$ (g.c.g).

6.16. (h.127) Xét ΔMEN và ΔNFM có $\widehat{M} = \widehat{N}$ (gt) ; MN chung ; $\widehat{EMN} = \widehat{FNM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}\widehat{M} = \frac{1}{2}\widehat{N}$) ;

$\Delta MEN = \Delta NFM$ (g.c.g) $\Rightarrow$ ME = NF.



Hình 127

6.17. Chứng minh $\Delta BHC = \Delta CKB$ (g.c.g)

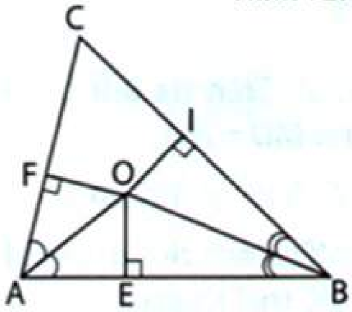
$\Rightarrow$ BH = CK.

6.18. (h.128) Chứng minh $\Delta EOA = \Delta FOA$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ OE = OF. Chứng minh $\Delta EOB = \Delta IOB$ (g.c.g)

$\Rightarrow$ OE = OI.

Vậy OE = OF = OI.



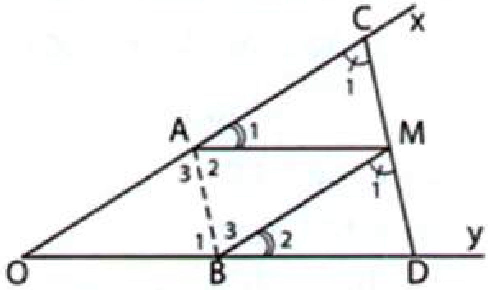
Hình 128

6.19. (h.129) a) Nối A với B, xét ΔAOB và ΔBMA có AB chung ; $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$; $\widehat{A_3} = \widehat{B_3}$ (so le trong).

Vậy $\Delta AOB = \Delta BMA$ (g.c.g).

Suy ra : OA = MB ; OB = MA.

b) $\Delta AMC = \Delta BDM$ (g.c.g) $\Rightarrow$ CM = MD.



Hình 129

6.20. (h.130) a) Xét ΔABM và ΔANC có :

AM = AC ; AB = AN (gt)

$\widehat{BAM} = 90^\circ + \widehat{A}$; $\widehat{NAC} = 90^\circ + \widehat{A}$,

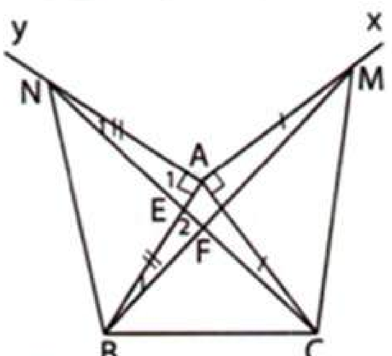
nên $\widehat{BAM} = \widehat{NAC}$.

Suy ra $\Delta ABM = \Delta ANC$ (c.g.c).

b) Từ a) suy ra BM = CN (cạnh tương ứng).

c) CN cắt AB tại E và cắt BM tại F.

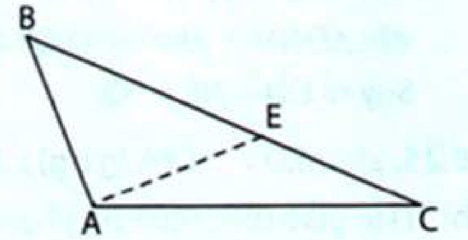
Xét ΔAEN và ΔFEB có : $\widehat{N_1} = \widehat{B_1}$ ($\Delta ABM = \Delta ANC$), $\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (đối đỉnh).



Hình 130

Hai tam giác có hai cặp góc bằng nhau, vậy còn lại cặp thứ ba cũng phải bằng nhau, do đó $\widehat{NAE} = \widehat{EFB}$; mà $\widehat{NAE} = 90^\circ$ (gt). Vậy $\widehat{EFB} = 90^\circ$ hay $BM \perp CN$.

6.21. (h.131) Kết luận $\Delta ABC = \Delta AEC$ là sai vì góc $\hat{C}$ không phải là góc xen giữa hai cạnh tương ứng bằng nhau.



Hình 131

6.22. (h.132) ΔABC có $\widehat{ABC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Ta có $\widehat{IAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$, $\widehat{ICA} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \dfrac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 60^\circ$.

ΔAIC có $\widehat{AIC} = 180^\circ - (\widehat{IAC} + \widehat{ICA}) = 120^\circ$,

do đó $\widehat{AIE} = \widehat{DIC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

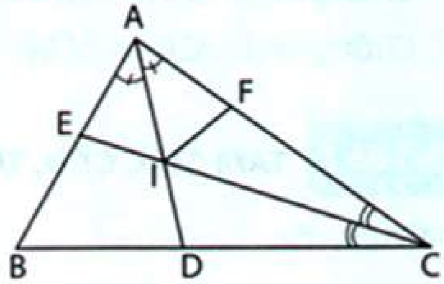
Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho AF = AE.

$\Delta IAE = \Delta IAF$ (c.g.c) $\Rightarrow IE = IF$; $\widehat{AIE} = \widehat{AIF} = 60^\circ$.

Ta có $\widehat{FIC} = \widehat{AIC} - \widehat{AIF} = 60^\circ$.

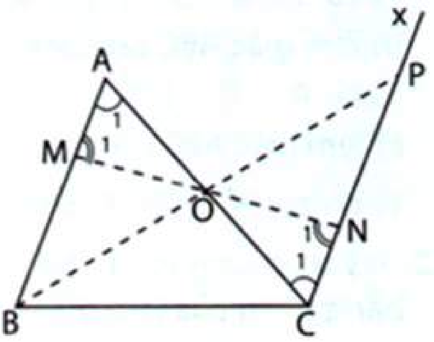
$\Delta DIC = \Delta FIC$ (g.c.g) $\Rightarrow ID = IF$.

Ta có IE = ID (= IF).

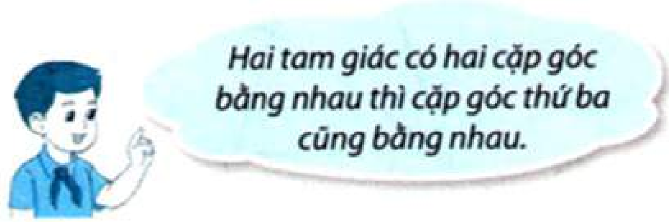


Hình 132

6.23. (h.133) HS tự chứng minh, sử dụng trường hợp bằng nhau thứ ba (g.c.g).



Hình 133



6.24. (h.134) Nối MI. Ta chứng minh $\Delta MEI = \Delta INM$ (MI chung và 2 cặp góc so le trong) (bằng nhau theo g.c.g) $\Rightarrow ME = NI$.

- Tương tự nối EK. Chứng minh $\Delta EPK = \Delta KFE$

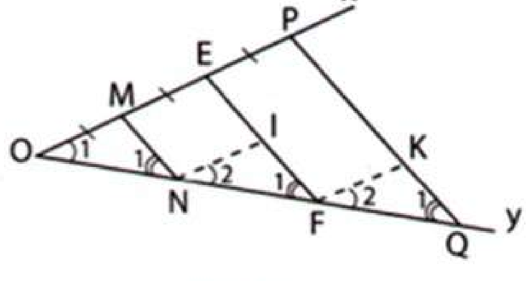
$\Rightarrow EP = FK$.

Mà $OM = ME = EP \Rightarrow OM = NI = FK$.

Xét ΔONM và ΔNFI ; ΔFQK có :

$OM = NI = FK$ (chứng minh trên),

$\widehat{N_1} = \widehat{F_1} = \widehat{Q_1}$ (đồng vị),



Hình 134

$\widehat{O_1} = \widehat{N_2} = \widehat{F_2}$ (đồng vị).

Vậy $\Delta ONM = \Delta NFI = \Delta FQK$ (g.c.g).

Suy ra $ON = NF = FQ$.

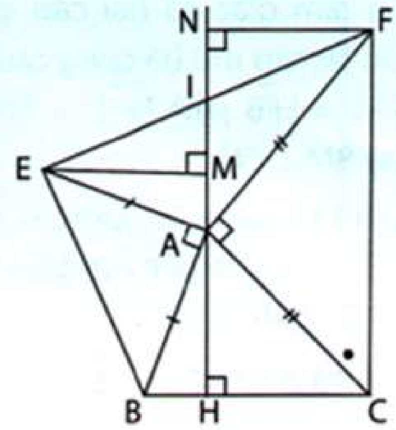
6.25. a) $\Delta AED = \Delta DFA$ (g.c.g) ; $\Delta AFE = \Delta DEF$ (g.c.g).

b) D là giao điểm của tia phân giác góc A và BC.

6.26. (h.135) HD :

a) Chứng minh $\Delta AHB = \Delta EMA$, $\Delta AHC = \Delta FNA$.

b) Chứng minh $\Delta EIM = \Delta FIN$.



Hình 135

Chủ đề 7 TAM GIÁC CÂN. TAM GIÁC ĐỀU

2. 40° ; **3.** 45°.

7.1. Xảy ra ba trường hợp :

a) Tam giác ABC cân tại A.

Ta có $\widehat{C} = \widehat{B} = 50°$; $\widehat{A} = 80°$.

b) Tam giác ABC cân tại B.

Ta có $\widehat{A} = \widehat{C} = 65°$.

c) Tam giác ABC cân tại C.

Ta có $\widehat{A} = \widehat{B} = 50°$; $\widehat{C} = 80°$.

Sai lầm thường mắc phải khi giải bài 7.1 là chỉ xét một trường hợp xảy ra.

7.2. HS tự chứng minh. Sử dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác.

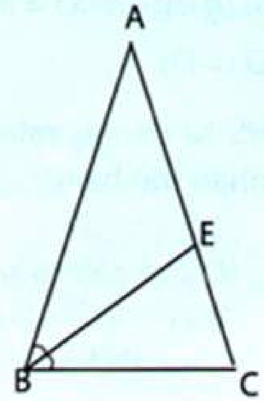
7.3. (h.136) ΔABC có góc ở đỉnh 36°.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$.

BE là tia phân giác nên $\widehat{ABE} = \dfrac{1}{2}\widehat{B} = \dfrac{1}{2}.72° = 36°$.

Vậy $\widehat{A} = \widehat{ABE} = 36° \Rightarrow \Delta AEB$ cân tại E $\Rightarrow EA = EB$.

Ngoài ra, $BE = BC$ do ΔBCE cân tại B. Vậy $AE = BC$.



Hình 136

7.4. (h.137) ΔABC cân tại A (gt) : $\widehat{B} = \widehat{C_1} = 30°$.

$\widehat{A_1} = 60°$ (góc ngoài của ΔABC).

ΔACE có $AE = AB$ (gt) ; $AC = AB$ (giả thiết).

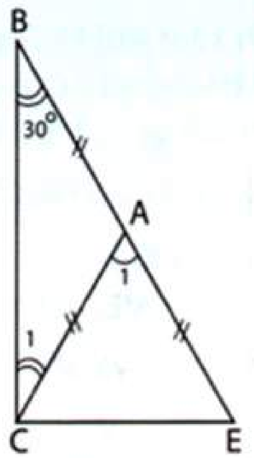
Vậy : $AE = AC$ (cùng bằng AB)

$\Rightarrow \Delta ACE$ cân, lại có $\widehat{A_1}$ bằng 60°.

Vậy ΔACE đều.

b) Xét ΔBCE có $\widehat{B} = 30°$; $\widehat{E} = 60°$ (ΔACE đều).

Suy ra $\widehat{BCE} = 180° - (30° + 60°) = 90°$. Vậy ΔBCE vuông tại C.



Hình 137

7.5. HS tự chứng minh, tương tự bài tập trên.

7.6. (h.138) Lấy F thuộc AC sao cho $AD = AF$. Khi đó tam giác ADF vuông cân ở A, suy ra $\widehat{DFA} = 45°$ và $\widehat{DFC} = 135°$.

Ta có: $\widehat{BDE} = 180° - \widehat{EDC} - \widehat{ADC}$

$= 180° - 90° - \widehat{ADC} = 90° - \widehat{ADC}$. (1)

$\widehat{ACD} = 90° - \widehat{ADC}$. (2)

Từ (1) và (2) Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDE}$.

Mặt khác:

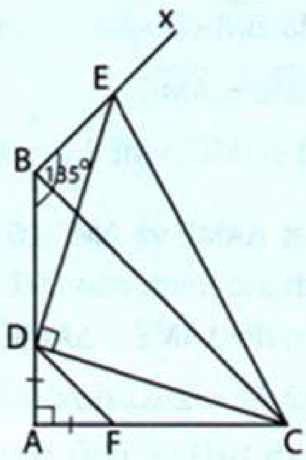
$BD = AB - AD$, $CF = AC - AF$, $AB = AC$, $AD = AF$

nên $BD = CF$.

Xét tam giác BDE và tam giác FCD:

$BD = FC$, $\widehat{BDE} = \widehat{FCD}$, $\widehat{EBD} = \widehat{DFC}$ $(=135°)$

Suy ra $\Delta BDE = \Delta FCD$ (g.c.g) $\Rightarrow DE = DC$. Mà tam giác EDC vuông ở D. Vậy tam giác EDC vuông cân ở D.



Hình 138

7.7. $\widehat{MCN} = 45°$. Giải tương tự ví dụ 1, chủ đề 7.

7.8. (h.139) Chứng minh $\widehat{ADB} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} \Rightarrow$ ΔABD cân tại B. Suy ra $AB = BD = BE + DE$. (1)

– Chứng minh tương tự ta có ΔACE cân tại C.

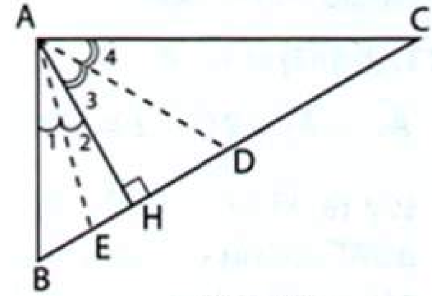
Suy ra : $AC = CE$. (2)

Cộng (1) với (2) có :

$AB + AC = BE + ED + CE$

$= (BE + EC) + ED$

$= BC + ED$.



Hình 139

7.9. (h.140) Vẽ tia đối của tia DA, trên tia này lấy điểm E sao cho $DE = DA$.

$\Delta DAB = \Delta DEM$ (c.g.c).

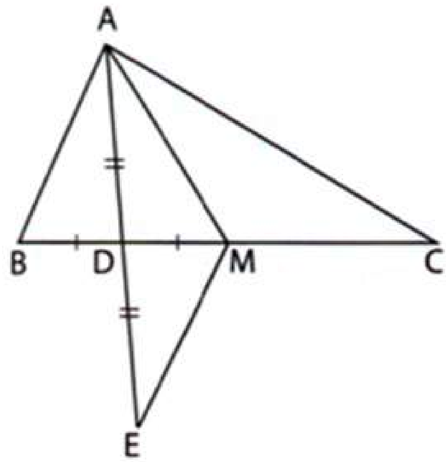
Suy ra $AB = ME$, $\widehat{BAD} = \widehat{MED}$.

Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{MED}$, $\widehat{BAD}$ và $\widehat{MED}$ so le trong

$\Rightarrow AB \,//\, ME \Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{AME} = 180°$.

Mặt khác $AB = MB \left(= \dfrac{1}{2}BC\right)$

$\Rightarrow \Delta BAM$ cân đỉnh B $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{BMA}$.



Hình 140

Mà $\widehat{BMA} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù), suy ra $\widehat{AME} = \widehat{AMC}$.

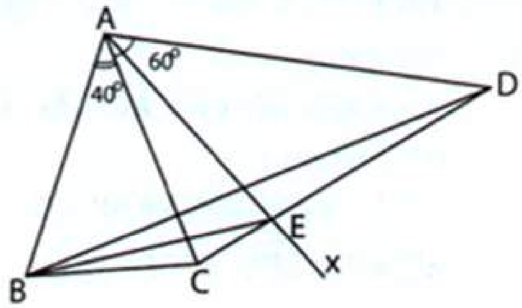
Ta có $MC = ME \left(= \frac{1}{2}BC = AB\right)$.

Xét ΔAME và AMC có : AM chung, $\widehat{AME} = \widehat{AMC}$ (chứng minh trên), $ME = MC$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta AME = \Delta AMC$ (c.g.c). Suy ra $AE = AC$.

Mà $AE = 2AD$, do đó $AC = 2AD$.

7.10. (h.141) Vẽ phía trong góc CAD vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = 20^\circ$. Gọi E là giao điểm của tia Ax và CD.



Hình 141

Ta có ΔACE cân tại $A \Rightarrow AC = AE$,

do đó ΔABE đều $\Rightarrow EB = EA$.

$\widehat{EDA} = \widehat{AEC} - \widehat{EAD} = 40^\circ$

$\Rightarrow \Delta EAD$ cân tại $E \Rightarrow EA = ED$.

ΔBED cân có $\widehat{BED} = 160^\circ$ nên $\widehat{EDB} = 10^\circ$.

Do đó $\widehat{ACD} + \widehat{EDB} = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AC$.

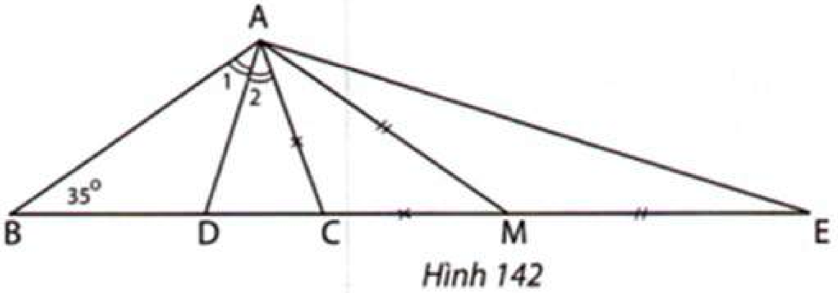
7.11. (h.142) a) Ta có

$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 75^\circ : 2 = 37^\circ30'$,

suy ra $\widehat{ADM} = 72^\circ30'$ (góc ngoài của ΔABD) ;

ΔDAE vuông có AM là trung tuyến nên ΔMAD cân (xem ví dụ 4, chủ đề 6), do đó

$\widehat{AMD} = 180^\circ - 2\widehat{ADM} = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$. (1)



Hình 142

Ta lại có trong ΔABC :

$\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 70^\circ$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔACM cân.

b) Ta có $AC = CM$ (ΔACM cân),

$MA = ME$ (ΔAME cân), $MA = AB$ (ΔABM cân).

Do đó $BE = BC + CA + AB$.

7.12. (h.143) Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = AD.

Từ giả thiết ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^\circ$.

$\Delta ABD = \Delta BAE$ (c.g.c) $\Rightarrow BD = AE$.

$\widehat{ADB} = \widehat{BEA}$, $\widehat{BEA} = 72^\circ$,

$\widehat{ACE} = 36^\circ$ nên $\widehat{EAC} = 36^\circ$.

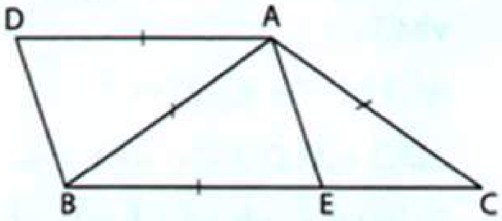
ΔEAC cân tại E $\Rightarrow AE = EC$.

Ta có $BD = AE = EC = BC - BE = BC - AB = a - b$.

Vậy chu vi ΔABD là

$AB + AD + BD = b + b + a - b = a + b$.

(Tham khảo lời giải ví dụ 4)



Hình 143

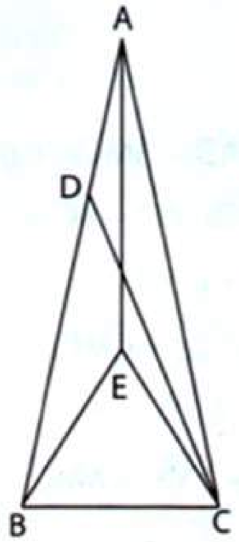
7.13. (h.144) Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tam giác đều BCE.

$\Delta ABE = \Delta ACE$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE} = 10^\circ$.

$\widehat{ACE} = \widehat{ACB} - \widehat{BCE} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

$\Delta EAC = \Delta DCA$ (c. g. c) $\Rightarrow \widehat{ACD} = \widehat{EAC}$.

Vậy $\widehat{ACD} = 10^\circ$.



Hình 144

7.14. (h.145) Từ giả thiết suy ra $\hat{B} = \hat{C} = 80^\circ$,

$\widehat{DBE} = 20^\circ$.

Qua D vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB ở F.

Gọi M là giao điểm của BD và CF.

Ta có các tam giác MBC, MDF đều, tam giác BCE cân tại B, do đó BM = BE.

Ta tính được $\widehat{BFC} = 40^\circ$, $\widehat{BME} = 80^\circ$, $\widehat{EMF} = 40^\circ$.

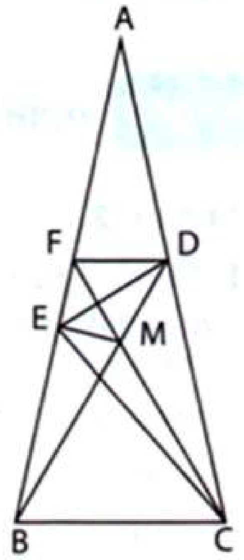
ΔEMF cân tại E (hai góc ở đáy bằng nhau)

$\Rightarrow EM = EF$.

$\Delta EDM = \Delta EDF$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{EDM} = \widehat{EDF}$.

$\widehat{BDE} = \dfrac{1}{2}\widehat{MDF} = 30^\circ$.

Vậy $\widehat{BDE} = 30^\circ$.



Hình 145

Các bài 7.13, 7.14, ta đã sử dụng phương pháp vẽ thêm hình phụ. Đối với bài toán có yếu tố tam giác cân, ta nên vẽ thêm tam giác đều.

7.15. (h.146) Trên cạnh BC lấy điểm K sao cho BK = BE thì CK = CD. Gọi I là giao điểm của BD và CE.

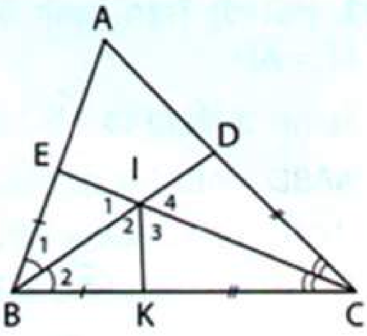
$\Delta EBI = \Delta KBI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{I_2}$.

$\Delta DCI = \Delta KCI$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{I_3} = \widehat{I_4}$.

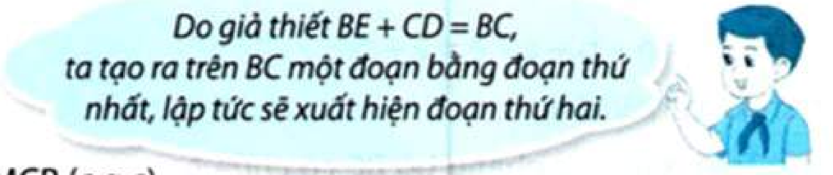
Ta lại có $\widehat{I_1} = \widehat{I_4}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{I_2} = \widehat{I_3} = \widehat{I_4}$.

Từ đó tính được $\widehat{I_1} = \widehat{I_2} = \widehat{I_3} = \widehat{I_4} = 60^\circ$.

Do đó tính được $\widehat{A} = 60^\circ$.



Hình 146



7.16. (h.147) $\Delta MAD = \Delta MCB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MAD} = \widehat{MCB}$, AD = BC nên AE = CF.

$\Delta MAE = \Delta MCF$ (c.g.c)

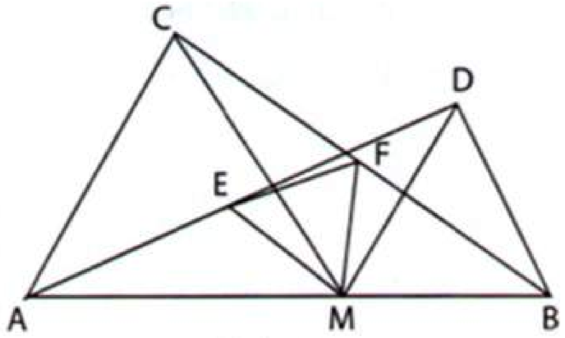
$\Rightarrow ME = MF, \widehat{AME} = \widehat{CMF}$.

$\widehat{EMF} = \widehat{EMC} + \widehat{CMF}$

$= \widehat{EMC} + \widehat{AME} = \widehat{AMC} = 60^\circ$.

$ME = MF \Rightarrow \Delta MEF$ cân tại M và $\widehat{EMF} = 60^\circ$,

do vậy tam giác MEF đều.



Hình 147

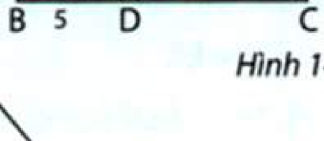
Chủ đề 8 ĐỊNH LÍ PY-TA-GO

1. Không ; **2.** $2\sqrt{2}$; **3.** $\sqrt{3}$.

8.1. (h.148) Theo định lí Py-ta-go, trong tam giác vuông ADB ta có : $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 13^2 - 5^2 = 144$. Trong tam giác vuông ADC :

$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 15^2 - 144 = 81$.

Vậy CD = 9 (cm).



Hình 148

8.2. (h.149) Trong tam giác vuông ABC :

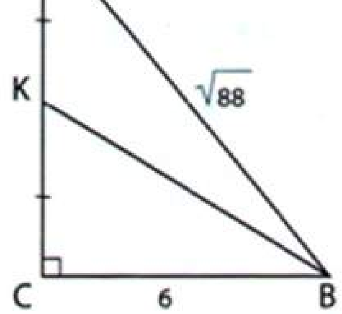
$AC^2 = AB^2 - BC^2 = \left(\sqrt{88}\right)^2 - 6^2 = 88 - 36 = 52$

$\Rightarrow AC = \sqrt{52}$ (cm) $\Rightarrow KC = \dfrac{\sqrt{52}}{2}$ (cm).

Trong tam giác vuông KCB :

$BK^2 = CK^2 + BC^2 = \left(\dfrac{\sqrt{52}}{2}\right)^2 + 6^2 = \dfrac{52}{4} + 36 = 49$

$\Rightarrow BK = 7$ (cm).



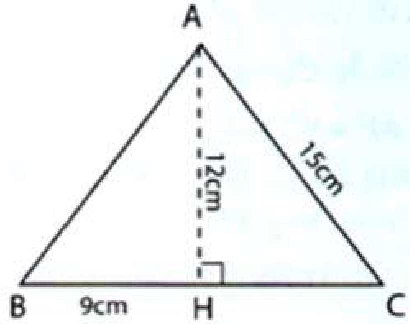
Hình 149

8.3. (h.150)

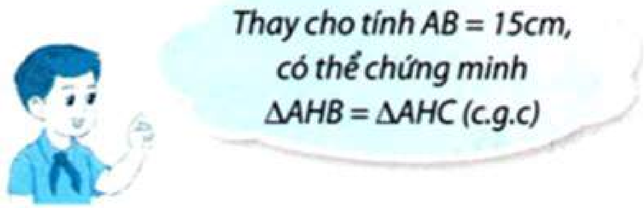
Xét ΔAHB vuông tại H theo định lí Py-ta-go ta có :

$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 9^2 = 225 \Rightarrow AB = 15(cm)$.

Vậy ΔABC có $AB = AC = 15cm$, nên ΔABC cân tại A.



Hình 150



8.4. *Cách 1.* Hai cạnh góc vuông tỉ lệ với 3 và 4, ta có : $3^2 + 4^2 = 5^2$. Vậy nếu hai cạnh góc vuông là 3 phần, 4 phần thì cạnh huyền 5 phần. Mỗi phần ứng với $55 : 5 = 11(cm)$.

Vậy hai cạnh góc vuông là 33(cm) và 44(cm).

Cách 2. Gọi độ dài các cạnh góc vuông là b và c.

Ta có $\dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4}$ và $b^2 + c^2 = 55^2$.

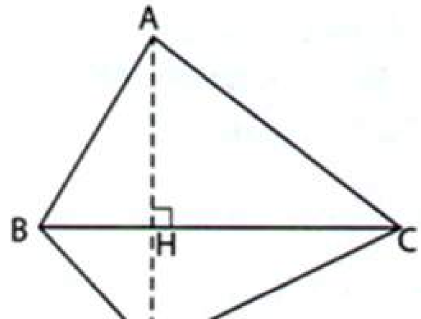
Do đó $\left(\dfrac{b}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{4}\right)^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{25} = \dfrac{55^2}{25} = 11^2$.

Suy ra $b = 11.3 = 33$ (cm), $c = 11.4 = 44$ (cm).

8.5. ΔABC vuông có $AB = AC = x$ (x nguyên). Theo định lí Py-ta-go ta có :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow BC = x\sqrt{2}$;

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ. Vậy $x\sqrt{2}$ là số vô tỉ.



Hình 151

8.6. (h.151) a) Xét ΔABH vuông có :

$AH^2 = AB^2 - BH^2$

Xét ΔACH vuông có : $AH^2 = AC^2 - CH^2$.

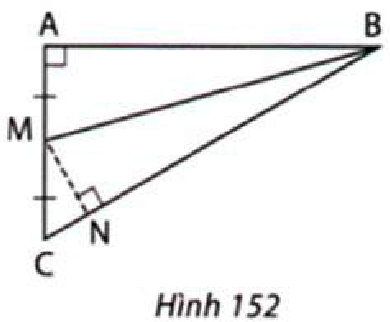
Suy ra : $AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$ (cùng bằng AH^2)

$\Rightarrow AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2$.

b) Áp dụng định lí Py-ta-go.

8.7. (h.152) Áp dụng định lí Py-ta-go.

$NB^2 - NC^2 = MB^2 - MC^2 = MB^2 - MA^2 = AB^2$.



Hình 152

8.8. (h.153) a) $\Delta ABH = \Delta CAI \Rightarrow BH = AI$.

b) Áp dụng định lí Py-ta-go cho ΔAIC ta có

$AI^2 + IC^2 = AC^2 \Rightarrow BH^2 + IC^2 = AC^2$.

Mà AC có giá trị không đổi $\Rightarrow BH^2 + IC^2$ có giá trị không đổi.

c) Gọi O là giao của DN và AC

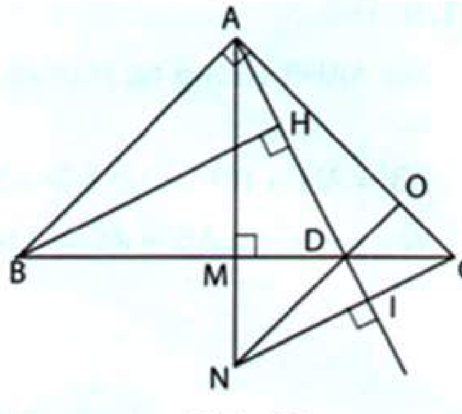
$\Delta ABH = \Delta CAI \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CAI}$.

Mà $\widehat{ABD} = \widehat{CAN} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{NAI}$.

Suy ra $\Delta BDH = \Delta ANI$ (cạnh góc vuông - góc nhọn)

$\Rightarrow AN = BD \Rightarrow DM = MN\ (BM = AM) \Rightarrow \widehat{DNM} = 45^\circ$.

Mà $\widehat{NAO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AON} = 90^\circ$ hay DN vuông góc với AC.



Hình 153

8.9. (h.154) Theo công thức tính diện tích ΔABC ta có :

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC$ và $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$.

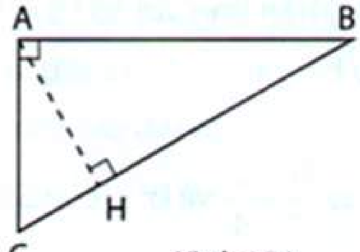
Vậy : $AB.AC = AH.BC \Rightarrow AH = \frac{AB.AC}{BC}$,

$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2.AC^2}$

$= \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2.AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

b) Thay $BC = 10(cm)$; $AC = 8(cm)$ vào $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ta tính được $AB = 6(cm)$.

Từ đó tính được $AH = 4{,}8cm$.



Hình 154

8.10. *ĐS :* $AB = 4m$; $BC = 4\sqrt{3}$ m, $HK = \sqrt{3}$ m.

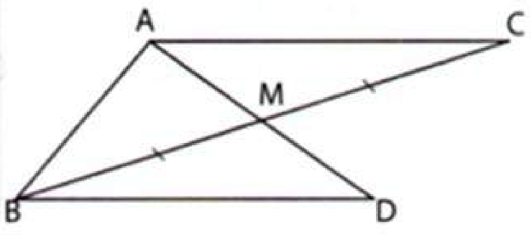
8.11. (h.155) Kéo dài AM lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

$\Delta MAC = \Delta MDB$ (c.g.c), suy ra $AC = BD = 10cm$ và $AD = 2AM = 8$ (cm).

Ta có $AB^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = BD^2$.

Như vậy ΔABD có $AB^2 + AD^2 = BD^2$.

Theo định lí Py-ta-go đảo ta có tam giác ABD vuông tại A. Vậy $\widehat{MAB} = 90^\circ$.



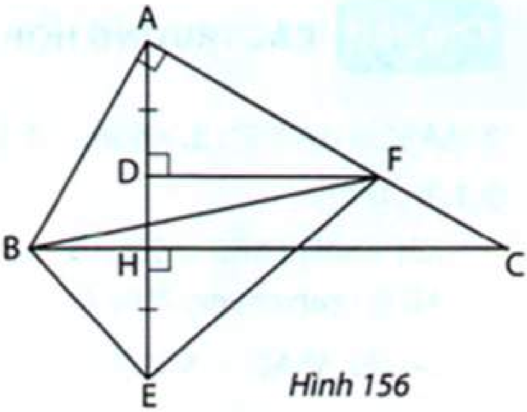
Hình 155

8.12. (h.156) Ta có $AD = HE$

$\Rightarrow AD + DH = HE + DH \Rightarrow AH = DE$.

Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông HBE, DEF, HAB, DAF, ABF, ta có :

$$\begin{aligned} BE^2 + EF^2 &= BH^2 + EH^2 + DE^2 + DF^2 \\ &= BH^2 + DE^2 + EH^2 + DF^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + AD^2 + DF^2 \\ &= AB^2 + AF^2 = BF^2. \end{aligned}$$



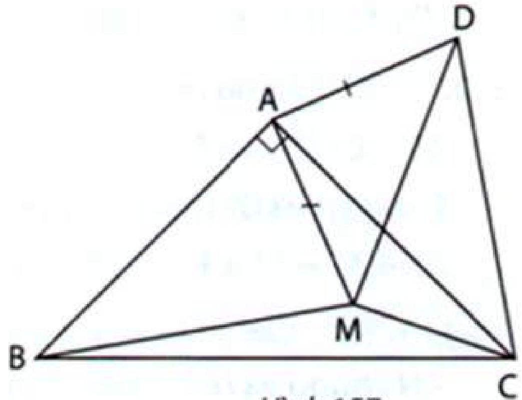
Hình 156

ΔBEF có $BE^2 + EF^2 = BF^2 \Rightarrow \Delta BEF$ vuông tại E (định lí Py-ta-go đảo).

Vậy $\widehat{BEF} = 90°$.

8.13. (h.157) Trên nửa mặt phẳng bờ AM không chứa điểm B, vẽ tam giác ADM vuông cân tại A. Ta có $AD = MA = 2$ cm.

$\widehat{AMD} = 45°$, $\widehat{DMC} = \widehat{AMC} - \widehat{AMD} = 90°$.



Hình 157

Xét ΔADC và ΔAMB có : $AD = AM$, $\widehat{DAC} = \widehat{MAB}$ (hai góc cùng phụ với góc CAM), $AB = AC$ (giả thiết). Do đó $\Delta ADC = \Delta AMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow DC = MB = 3$cm.

Xét ΔAMD vuông tại A nên $MD^2 = MA^2 + AD^2 = 8$.

Xét ΔMDC vuông tại M nên $DC^2 = MD^2 + MC^2$

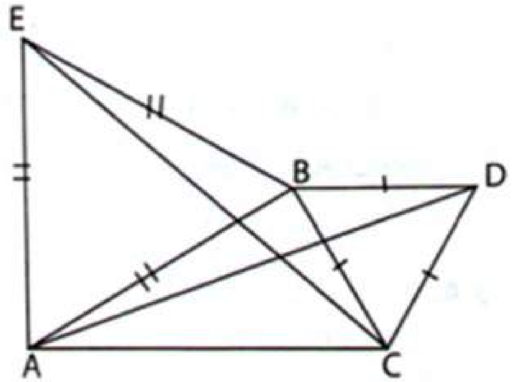
$\Rightarrow MC^2 = 1$. Vậy $MC = 1$ cm.

8.14. (h.158) Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác đều ABE, chứng minh

$\Delta BEC = \Delta BAD$ (c.g.c) $\Rightarrow EC = AD$.

Vì ΔAEC vuông tại $A \Rightarrow AE^2 + AC^2 = EC^2$.

Vậy $AD^2 = AB^2 + AC^2$.



Hình 158

8.15. (h.159) Xét ΔAOI và ΔAOM vuông tại I và M ta có :

$OA^2 = AI^2 + OI^2$.

$OA^2 = AM^2 + OM^2$.

Vậy : $AI^2 + OI^2 = AM^2 + OM^2$

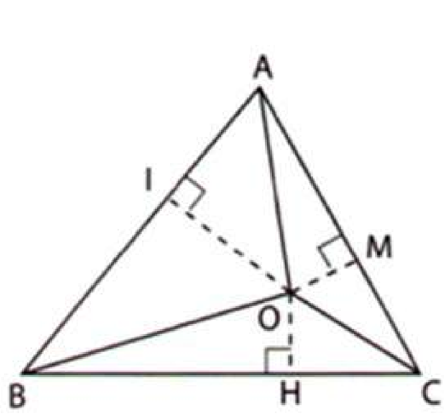
hay : $AI^2 = AM^2 + OM^2 - OI^2$. (1)

Tương tự có $BH^2 = BI^2 + OI^2 - OH^2$. (2)

$CM^2 = CH^2 + OH^2 - OM^2$. (3)

Cộng (1) ; (2) ; (3) theo vế ta có :

$AI^2 + BH^2 + CM^2 = AM^2 + BI^2 + CH^2$.



Hình 159

Chủ đề 9 CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC VUÔNG

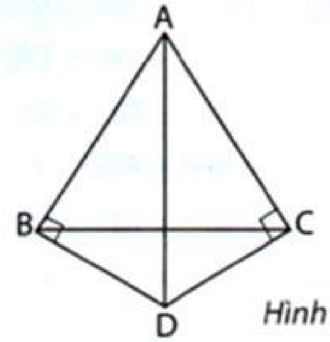
1. $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$; **2.** Không ; **3.** Có.

9.1. (h.160)

Xét ΔBAD ($\widehat{ABD} = 90^\circ$) và ΔCAD ($\widehat{ACD} = 90^\circ$) có AD là cạnh chung, AB = AC (ΔABC cân tại A).

Do đó $\Delta BAD = \Delta CAD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (cặp góc tương ứng).

Vậy AD là tia phân giác của góc BAC.



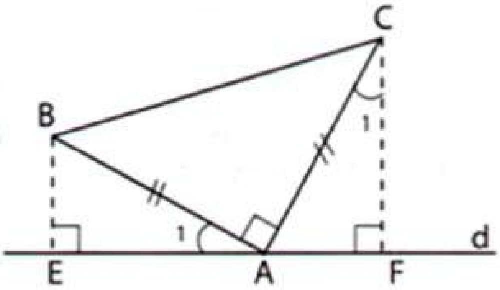
Hình 160

9.2. (h.161) Chứng minh $\Delta ABE = \Delta CAF$ để suy ra :

AE = CF (1) và AF = BE (2).

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta có :

$AE + AF = CF + BE \Rightarrow EF = CF + BE$.



Hình 161

9.3. (h.162) Xét ΔAND và ΔANH vuông tại N có AN chung và ND = NH (gt). Vậy $\Delta AND = \Delta ANH$ (hai cạnh góc vuông).

Suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (góc tương ứng).

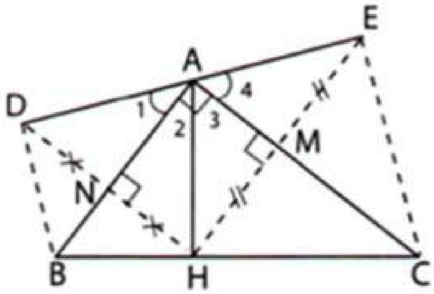
Tương tự ta có $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$.

Suy ra : $\widehat{A_1} + \widehat{A_4} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{A_4} = 180^\circ$.

Vậy D, A, E thẳng hàng.

b), c) HS tự chứng minh



Hình 162

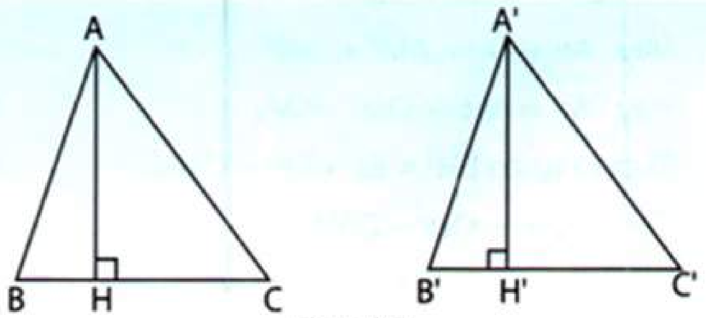
9.4. (h.163) Vẽ $AH \perp BC$ tại H, $A'H' \perp B'C'$ tại H' thì theo giả thiết, H thuộc đoạn BC, H' thuộc đoạn B'C'.

Ta có $\Delta HBA = \Delta H'B'A'$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow AH = A'H'$, $BH = B'H'$.

Suy ra $\Delta HAC = \Delta H'A'C'$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow HC = H'C'$.

Do đó $BH + HC = B'H' + H'C'$.

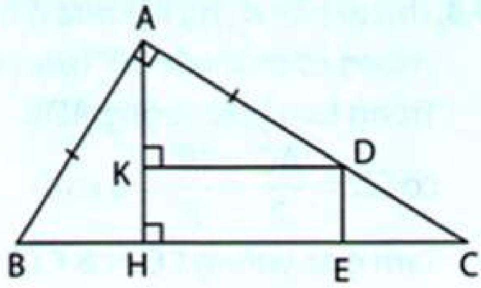
Vậy $BC = B'C'$.



Hình 163

9.5. (h.164) Vẽ $DK \perp AH$ tại K rồi chứng minh

$HA = KD = HE$.



Hình 164

9.6. (h.165) Vẽ $BN \perp EM$ tại N.

Dễ dàng chứng minh được

$AB = BH = BN$, $\widehat{ABN} = 90^\circ$.

Từ giả thiết ta có $\widehat{DBH} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$.

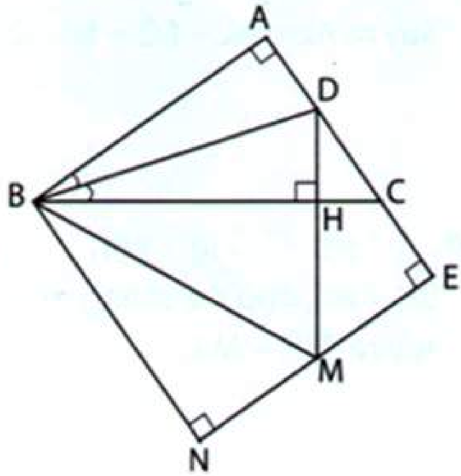
$\Delta HBM = \Delta NBM$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{HBM} = \widehat{NBM} \Rightarrow \widehat{HBM} = \dfrac{1}{2}\widehat{CBN}$.

Do đó $\widehat{DBM} = \widehat{DBH} + \widehat{HBM}$

$= \dfrac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{CBN}) = \dfrac{1}{2}\widehat{ABN} = 45^\circ$.

Vậy $\widehat{DBM} = 45^\circ$.



Hình 165

9.7. (h.166) a) Từ M hạ $MN \perp AC$.

– Xét ΔAHM và ΔANM vuông tại H và N, có AM chung và $\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$ (gt).

Vậy $\Delta AHM = \Delta ANM$.

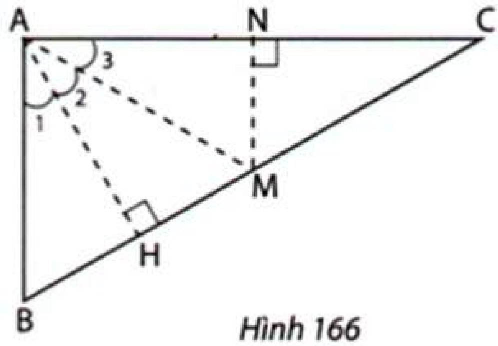
– Xét ΔAHM và ΔAHB có AH chung và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

$\Rightarrow \Delta AHM = \Delta AHB$.

Vậy $\Delta AHM = \Delta ANM = \Delta AHB \Rightarrow MN = MH = BH$.

Mà $MH + BH = BM$. Vậy $MN = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{2}MC$

$(BM = MC)$.



Hình 166

Suy ra $\hat{C} = 30^\circ$ (xem ví dụ 8, chủ đề 6).

ΔHAC vuông tại H và $\hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta BAC$ vuông tại A.

b) $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A_3} = 30^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ$

$\Rightarrow \Delta AMC$ cân tại M.

c) $AB = AM$ $(\Delta ABH = \Delta AMH)$. Vậy ΔABM cân.

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^\circ$. Vậy ΔABM đều.

9.8. (h.167) Áp dụng kết quả đối với tam giác vuông có một góc 30° (xem ví dụ 4, chủ đề 7).

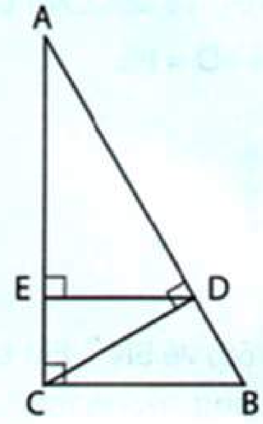
Trong tam giác vuông ADC

có $CD = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$ (cm).

Tam giác vuông CED có $\widehat{CDE} = 30^\circ$

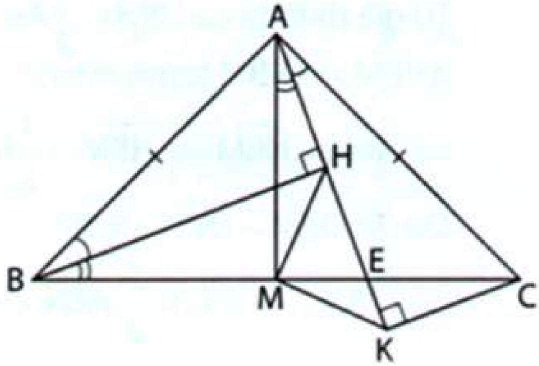
nên $EC = \frac{CD}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$ (cm).

Suy ra $AE = AC - EC = 10 - 2,5 = 7,5$ (cm).



Hình 167

9.9. (h.168) Chứng minh $\Delta ABH = \Delta CAK$ suy ra $BH = AK$, nhờ đó chứng minh $\Delta MBH = \Delta MAK$, suy ra $MH = MK$.



Hình 168

9.10. (h.169) a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MN = MA$. Ta dễ dàng chứng minh $\Delta AMC = \Delta NMB \Rightarrow AC = BN$.

Chứng minh $\Delta ABN = \Delta AEF$ để suy ra : $AN = EF$.

Mà $AM = \frac{1}{2} AN \Rightarrow AM = \frac{1}{2} EF$.

b) Kéo dài AM cắt EF tại I. Do I, A, M thẳng hàng

nên $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^\circ$.

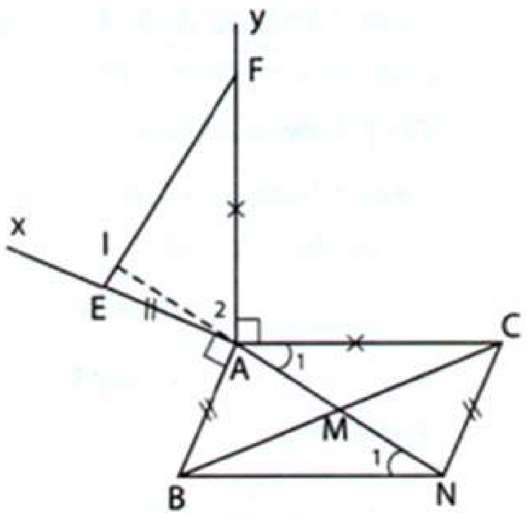
$\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (so le, AC // BN),

$\widehat{IFA} = \widehat{N_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{IFA}$.

Vậy ΔIAF có $\widehat{IFA} + \widehat{A_2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AIF} = 90^\circ$.

Do đó $AM \perp EF$.



Hình 169

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGƯT. NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS. VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Giám đốc Công ti CP Dịch vụ xuất bản Giáo dục Hà Nội PHAN KẾ THÁI

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN THÀNH

Biên tập :

ĐẶNG MINH THU - NGUYỄN NGỌC TÚ

Thiết kế sách :

NGUYỄN THỊ HỒNG VI

Trình bày bìa :

LÊ THẾ HẢI

Sửa bản in :

ĐẶNG MINH THU - NGUYỄN NGỌC TÚ

Chế bản :

CTCP Mĩ thuật và Truyền thông

BỒI DƯỠNG TOÁN 7 - TẬP MỘT

Mã số : T7T72H4 - NBE

Số đăng kí KHXB : 568 - 2014/CXB/44-349/GD.

In 10.000 cuốn, (QĐ68TK), khổ 17 x 24 cm.

Tại Công ty TNHH In & DVTM Phú Thịnh.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2014.