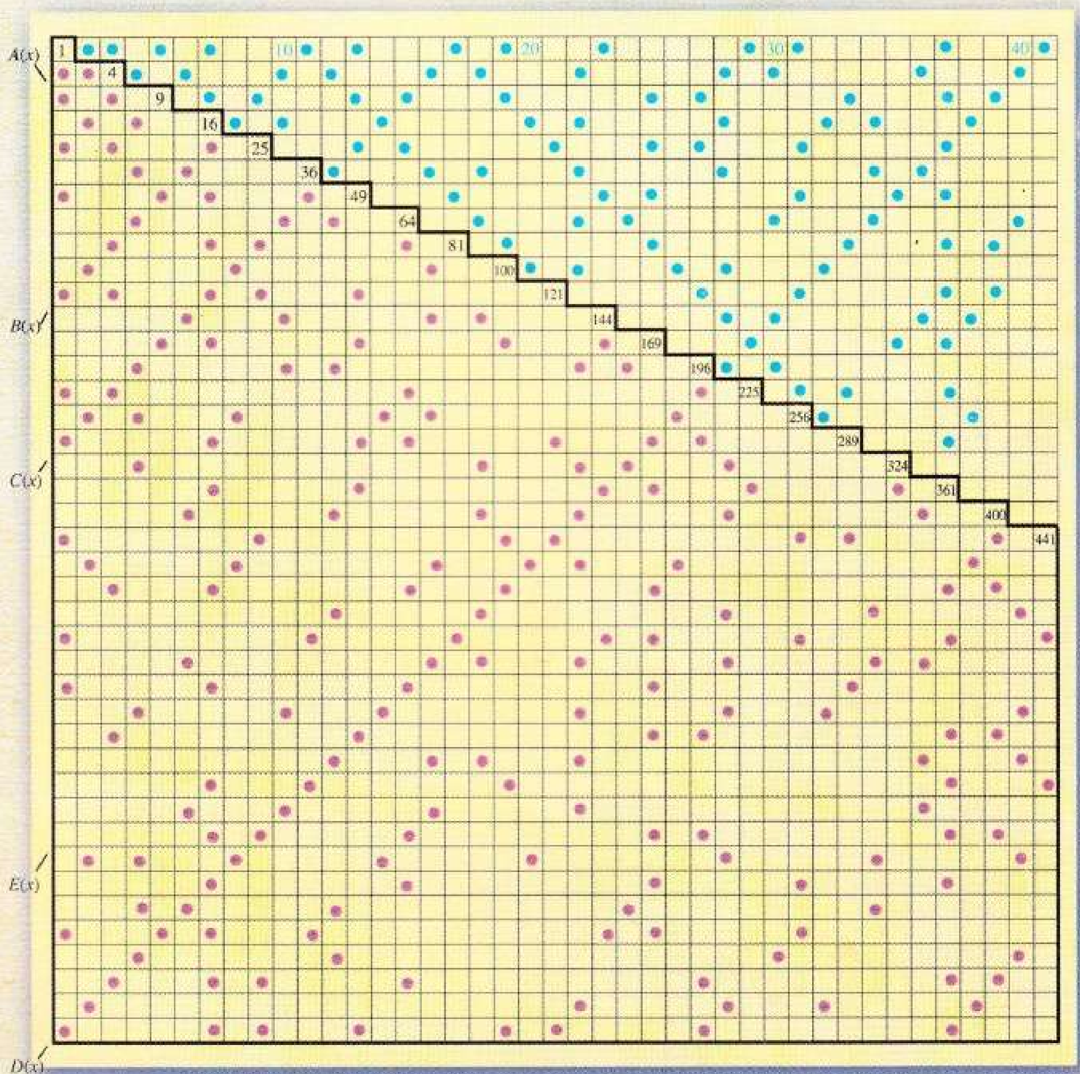
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❁ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

3
2003

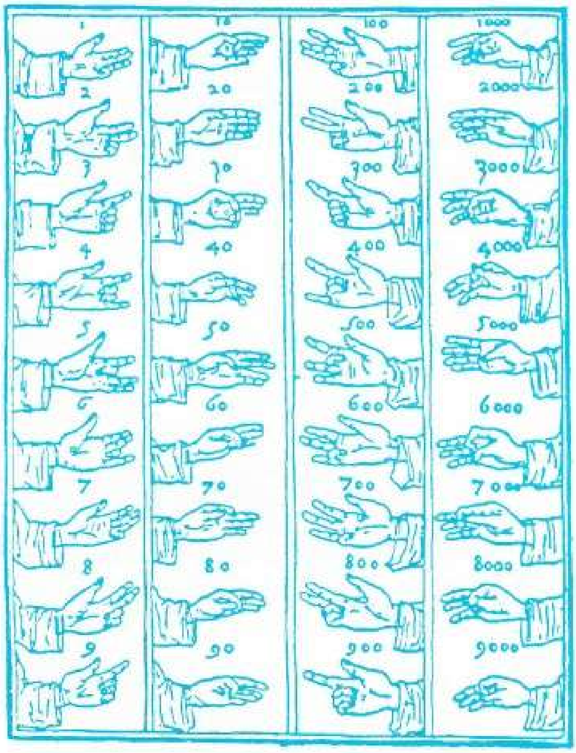
SỐ 309 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



SÀNG NGUYÊN TỐ TRÊN BẢNG SỐ BẬC THANG

Người xưa đếm số bằng các ngón tay như thế nào ?



Trước khi sử dụng những công cụ đơn giản để tính toán như các que tính, bàn tính, con người đã dùng bàn tay cùng các ngón tay để tính toán và trao đổi thông tin với nhau. Xin giới thiệu một cách đếm số lấy trong quyển sách "Số học" xuất bản năm 1494 của nhà toán học Ý Pacioli Luca (1445-1517).

AN MINH
(Sưu tầm)

CÙNG BẠN ĐỌC

CÁC THẦY CÔ GIÁO VÀ CÁC BẠN HỌC SINH TRUNG HỌC CƠ SỞ THÂN MẾN !

Từ năm 1992 trên tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ** đã thường xuyên có các trang viết và đề toán dành riêng cho thầy cô và học sinh Trung học cơ sở và các bạn yêu toán. Ngoài ra các bạn **Trung học cơ sở** còn có thể đọc các bài về *Lịch sử toán, Toán học và Đời sống, Nhìn ra thế giới, Giải trí toán học, Câu lạc bộ, Các đề thi vào lớp 10 chuyên các địa phương, Tiếng Anh qua các bài toán, Toán học muôn màu...* THTT sẽ từng bước cải tiến nội dung và hình thức để đáp ứng các yêu cầu của bạn đọc nêu trong đợt thăm dò ý kiến vừa qua.

Trước mắt từ năm 2003 sẽ có thêm 2 đề toán mỗi kì *dành cho các bạn lớp 6, lớp 7* trong mục *Đề ra kì này* phù hợp với nội dung mới của sách giáo khoa. Tác giả của các đề toán trên THTT là các giáo sư, tiến sĩ, các nhà giáo, nhà nghiên cứu của các trường Đại học, Viện Toán học, viện Nghiên cứu Giáo dục, Viện Công nghệ Thông tin, NXB Giáo dục, các trường học trong cả nước. Hướng tới kỉ niệm 40 năm thành lập và phát triển, THTT sẽ cố gắng thỏa mãn nhiều hơn những mong muốn của bạn đọc trong đó có các bạn **Trung học cơ sở**. Tạp chí THTT *chỉ ra mỗi tháng một số vào ngày 15*, không có số dành riêng cho THCS. Bạn chú ý đặt mua sớm **Toán học và Tuổi trẻ** để có liên tục các số. Cảm ơn các bạn.

THỂ LỆ GỬI BÀI CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

- *Bài cần đánh máy hoặc viết tay không dập xóa trên một mặt giấy. Hình vẽ rõ ràng. Không nhận bản photocopy*
- *Mỗi bài dài không quá 2000 chữ hoặc không quá 6 trang đánh máy. Đề ra cần gửi kèm lời giải. Không nhận đề của học sinh phổ thông.*
- *Ghi đầy đủ họ và tên thật, địa chỉ để tiện liên hệ. Mỗi bài chỉ gửi một lần.*
- *Đối với bài giải dự thi, mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng (vì mỗi bài do 1 giáo viên chấm). Phía trên bên trái ghi số của bài, bên phải ghi họ tên và lớp, trường, huyện (quận), tỉnh (thành phố). Bài giải chỉ gửi về một địa chỉ :* ***Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội****. Ngoài phong bì ghi rõ:* ***Dự thi giải toán số tạp chí****... Không gửi bài của nhiều số tạp chí trong cùng một phong bì.*
- *Thời hạn nhận bài giải* ***Giải bài kì trước*** *là hai tháng tính từ cuối tháng ra số tạp chí đó. Các bài giải của chuyên mục khác là 1 tháng.*

Dành cho THCS

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN NHỜ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT SỐ NGUYÊN TỐ

HOÀNG HÂN
(GV THCS Lương Trung, Bá Thước, Thanh Hóa)

Trong nhiều trường hợp khi giải phương trình nghiệm nguyên dẫn đến việc xét các ước số nguyên tố của số dạng $n = a^{2^t} + b^{2^t}$.

Xin nêu ra một số tính chất của ước số nguyên tố của số n để sử dụng vào giải phương trình.

Mệnh đề 1. *Nếu số nguyên tố $p = 2^t k+1$ với các số nguyên dương t, k và k lẻ, là ước số của số $n = a^{2^t} + b^{2^t}$ thì p là ước số chung của a và b.*

Chứng minh. Giả sử p không là ước số của số a thì p cũng không là ước số của số b $\Rightarrow (a, p) = (b, p) = 1$. Theo ĐL nhỏ Phecma thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ hay $a^{2^t k} \equiv 1 \pmod p$. Tương tự $b^{2^t k} \equiv 1 \pmod p$ suy ra $a^{2^t k} + b^{2^t k} \equiv 2 \pmod p$ (*)

Mặt khác sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ ta có $\left(a^{2^t}\right)^k + \left(b^{2^t}\right)^k = \left(a^{2^t} + b^{2^t}\right).M = n.M$ trong đó k lẻ và M là số nguyên.

Theo giả thiết $n \vdots p \Rightarrow \left(a^{2^t k} + b^{2^t k}\right) \vdots p$, mâu thuẫn với (*). Tương tự p không là ước của số b thì p không là ước số của a cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy số nguyên tố p phải là ước số chung của số a và số b.

Mệnh đề 2. *Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$ chỉ có dạng $4m + 1$ (mà không có dạng 4m+3) trong đó m là số nguyên dương.*

Chứng minh. Xét ước số nguyên tố $p = 4m + 3 = 2(2m + 1) + 1$. Theo MĐ 1 nếu p là ước số nguyên tố của $n = a^2 + b^2$ thì p là ước số chung của a và $b \Rightarrow p = 1$, mâu thuẫn. Vì p lẻ nên p chỉ có dạng $p = 4m + 1$.

Ta thử vận dụng các tính chất trên vào giải một số phương trình nghiệm nguyên dưới đây.

Bài 1. *Giải phương trình nghiệm nguyên*

$$x^2 - y^3 = 7 \qquad (1)$$

Lời giải. PT (1) $\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^3 + 2^3$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4) \qquad (2)$

Nếu y chẵn thì vế phải của (2) chia hết cho 4 $\Rightarrow x$ lẻ, $x = 2t + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 4t^2 + 4t + 2$ không chia hết cho 4. Mâu thuẫn.

Vậy y là số lẻ, $y = 2k + 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 4k^2 + 3$ nên nó phải có ước số nguyên tố lẻ dạng $4m+3$ (vì tích các số dạng $4m+1$ lại có dạng $4k+1$). Suy ra $x^2 + 1$ có ước số nguyên tố dạng $p = 4m+3$, trái với MĐ2. Vậy PT (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 2. *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) sao cho $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.*

Lời giải. Giả sử $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} = k$ nguyên dương và k là ước số của $1995 = 5.3.7.19 = 5n$ với $n = 3.7.19$. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng $2(2m+1) + 1 = 4m + 3$

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d = (x, y)$ thì $x = du$, $y = dv$ với $(u, v) = 1$. Theo giả thiết $x^2 + y^2 = k(x - y) \Leftrightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v)$ (1)

Xét 2 trường hợp :

1) k là ước số của $n \Rightarrow k$ có ƯS nguyên tố dạng $4m + 3$.

Áp dụng MĐ2 vào (1) thì $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d = k.t$. Từ (1) có $t(u^2 + v^2) = u - v$, do đó $u^2 < u^2 + v^2 \leq u - v < u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) $k = 5m$ với m là ước số của n. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2 + v^2) = 5m(u - v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra $d = m.t$. Từ đó có $t(u^2 + v^2) = 5(u - v)$ (2)

Từ (2) có $u^2 + v^2 \le 5(u - v)$

$\Rightarrow A = u^2 + v^2 - 5(u-v) \le 0$ (3)

Mặt khác

$4A = 4u^2 - 20u + 25 + 4v^2 + 20v + 25 - 50$

$= (2u - 5)^2 + (2v + 5)^2 - 50 \ge 1^2 + 7^2 - 50 \ge 0$

$\Rightarrow A \ge 0$. Kết hợp với (3) phải có $A = 0$. Điều này xảy ra chỉ khi $2u - 5 = \pm 1$ và $v = 1$, nghĩa là

$\begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$

Từ $A = 0$ và (2) suy ra $t = 1 \Rightarrow d = m$. Các số x, y phải tìm là $\begin{cases} x=3m \\ y=m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2m \\ y=m \end{cases}$ trong đó m là ước số của $n = 3.7.19$, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau : 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 3. *Tìm số nhỏ nhất trong tập hợp các số chính phương dạng 15a + 16b và 16a - 15b với a, b là các số nguyên dương nào đó.*

Lời giải. Giả sử $15a + 16b = m^2$ và $16a - 15b = n^2$ (1) với m, n là các số nguyên dương. Khi đó

$m^4 + n^4 = (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 =$

$= (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2)$

hay $m^4 + n^4 = 13.37(a^2 + b^2)$ (2)

Các số nguyên tố 13 và 37 đều có dạng $p = 2^2k + 1$ với k lẻ.

Giả sử $(m, n) = d \Rightarrow m = du$, $n = dv$ với $(u, v) = 1$ thì (2) trở thành $d^4(u^4 + v^4) = 481(a^2 + b^2)$ (3)

Vì $(u, v) = 1$ nên $u^4 + v^4$ không chứa ước số nguyên tố 13 và 37 do đó 481 là ước của $d \Rightarrow d = 481.t$. Để cho m, n nhỏ nhất, ta lấy $t = 1$. Lúc đó (3) trở thành $481^3(u^4 + v^4) = a^2 + b^2$ (4)

Từ (1) có $m^2 - n^2 = 31b - a$ hay $481^2(u^2 - v^2) = 31b - a$ (5)

Có thể chọn $u = v = 1$ để m, n nhỏ nhất, lúc đó $a = 31b$ và $a^2 + b^2 = 481^3.2$. Từ đó có $b = 481$ và $a = 31.481$ suy ra $m = n = 481$.

Các bạn hãy sử dụng các mệnh đề trên để giải các phương trình nghiệm nguyên dương sau :

1) $x^2 + y^2 = 585$

2) $x^2 + y^2 = 1210$

MỘT SỐ GIẢI THƯỞNG TOÁN HỌC NĂM 2002

1. M. L. Gromov nhận giải thưởng Kyoto năm 2002. Giải thưởng này do Quỹ Inamori (Nhật Bản) lập năm 1984 và trao cho những người có công lớn trong việc phát triển khoa học, văn hóa và tinh thần của nhân loại. Trị giá giải thưởng là 50 triệu Yên (420 000 $ Mỹ). Gromov là nhà toán học gốc Nga, giáo sư Học viện nghiên cứu cấp cao (IHES) của Pháp và giáo sư Viện Toán Courant (Mỹ). Ông là người sáng lập ra hình học mới có ảnh hưởng sâu sắc tới mọi lĩnh vực của Toán học.

Trong số những người đã đạt giải thưởng này có các nhà toán học và tin học : R. E. Kalman (1985), C.E. Shannon (1985), J. Mc Carthy (1988), I. M. Gelfand (1989), A. Weil (1994), D. E. Knuth (1996) và Itô (1998).

2. Giải thưởng P. Erdös năm 2002 được trao cho B. Marinkovich (Nam Tư), H. R. Reiter (Mỹ) và W. H. Sun (Đài Loan) vì những công lao lớn trong việc phát triển và truyền bá Toán học ở tầm quốc gia.

3. C. R. Rao (ĐHTH Pennsylvania) và E. M. Stein (ĐHTH Princeton) nhận Giải thưởng quốc gia về khoa học của Mỹ năm 2002. Rao nghiên cứu Giải tích đa trị và ứng dụng của Thống kê vào các vấn đề thực tiễn. Stein nghiên cứu Giải tích (như giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng, hàm phức nhiều biến, ...). Giải thưởng được trao hàng năm, bắt đầu từ 1959, cho những nhà khoa học xuất sắc của Mỹ. Năm 2002 có 15 nhà khoa học được nhận giải thưởng này. Từ trước tới nay có tổng cộng 401 nhà khoa học Mỹ được trao giải thưởng này, trong đó có 45 nhà toán học và tin học.

*Theo **Thông tin Toán học** 12.2002*

VÀI PHÚT THƯ GIÃN

```
  FOUR
+ FIVE
  ----
  NINE
```

Bốn cộng năm bằng chín. Còn bây giờ mời các bạn thư giãn sau giờ học các bài học thuộc lòng bằng con tính bên (chữ giống nhau thay bằng số giống nhau, chữ khác nhau thay bằng số khác nhau)

VŨ ĐỖ QUAN *(st)*

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TOÁN VÀO LỚP 10
KHỐI PTCTT ĐẠI HỌC VINH NĂM 2002

(Đề thi đã đăng trên THTT số 308 tháng 2/2003)

Câu I. Xét 2004 số dạng :

$a_n = 20022002...2002$ $(1 \le n \le 2004)$ gồm n số 2002 viết liên tiếp nhau.

Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại 2 số a_k, a_t mà $(a_k - a_t) \vdots 2003$ $(1 \le t < k \le 2004)$ với $a_k - a_t = 10^{4t}.a_{k-t}$. Do $(10^{4t}, 2003) = 1 \Rightarrow a_{k-t} \vdots 2003$ (đpcm).

Câu II. Đặt $t = x + 15$. Khi đó PT đã cho có dạng : $(t-4)(t-5)(t-6) - 8(t-15) = 0$
$\Leftrightarrow t(t^2 - 15t + 66) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x = -15$

Câu III. *Nhận xét.* 1) Từ điều kiện đề bài có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \qquad (1)$$

2) Với mọi $x, y > 0$, ta có $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ (2)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Áp dụng (2) ta có :

$$\frac{1}{a+2b+3c}=\frac{1}{(a+c)+2(b+c)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{2(b+c)}\right)$$

$$\le \frac{1}{16a}+\frac{1}{16c}+\frac{1}{32b}+\frac{1}{32c}=\frac{1}{16a}+\frac{1}{32b}+\frac{3}{32c}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a + c = 2(b+c)$, $a = c$ và $b = c \Leftrightarrow c = 0$ (mâu thuẫn). Vậy

$$\frac{1}{a+2b+3c} < \frac{1}{16a}+\frac{1}{32b}+\frac{3}{32c}.$$

Tương tự : $\frac{1}{2a+3b+c} < \frac{1}{32a}+\frac{3}{32b}+\frac{1}{16b}$

$$\frac{1}{3a+b+2c} < \frac{3}{32a}+\frac{1}{16b}+\frac{1}{16c}$$

Đặt vế trái của BĐT đề bài là P, từ trên có

$$P < \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{3}{32}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{16} \text{ theo NX 1}$$

LTS : Có thể đánh giá BĐT ở đề bài một cách tốt hơn theo hai cách sau :

Cách 1. Vẫn sử dụng BĐT (2) : với $x, y, z > 0$ ta có

$$\frac{1}{x+y+z} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z}\right) \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{4z}=\frac{1}{16x}+\frac{1}{16y}+\frac{1}{4z}$$

Khi đó $\frac{1}{a+2b+3c} \le \frac{1}{16a}+\frac{1}{32b}+\frac{1}{12c}$;

$$\frac{1}{c+2a+3b} \le \frac{1}{16c}+\frac{1}{32a}+\frac{1}{12b}$$

$$\frac{1}{b+2c+3a} \le \frac{1}{16b}+\frac{1}{32c}+\frac{1}{12a}$$

Vậy $P < \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Từ (1) có $P < \frac{17}{96}$ • $\left(\frac{17}{96} < \frac{3}{16}\right)$

Cách 2. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki và (1) ta có

$$\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{2b}\right)^2+\left(\sqrt{3c}\right)^2\right]\left[\frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{b}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{c}\right)^2}\right]$$

$\ge \left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$, $\forall a, b, c > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{a+2b+3c} \le \frac{1}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}$. Đổi vai trò của a, b, c cuối cùng được $P < \frac{3}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} < \frac{3}{17,19} < \frac{3}{17}$

Câu IV. PT $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-m}\left(\sqrt[3]{x-m}-\sqrt[3]{x+m}\right)+$
$+\, m\left(\sqrt[3]{x-m}-\sqrt[3]{x+m}\right)\sqrt[3]{x+m} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-m}-\sqrt[3]{x+m}\right)\left(\sqrt[3]{x-m}+m\sqrt[3]{x+m}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt[3]{x-m}-\sqrt[3]{x+m}=0 & (1) \\ \sqrt[3]{x-m}+m\sqrt[3]{x+m}=0 & (2) \end{array}\right.$$

PT (2) $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-m}=-m\sqrt[3]{x+m}$
$\Leftrightarrow (1+m^3)x = m(1-m^3)$ (3)

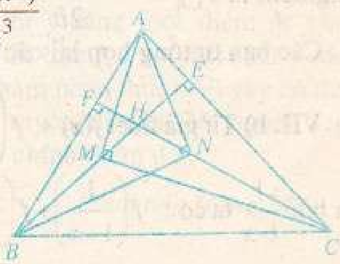
Giải các PT (1), (3) và tổng hợp kết quả được :

• Với $m = 0$ thì PT đã cho nhận mọi $x \in R$ làm nghiệm

• Với $m = -1$ thì PT đã cho vô nghiệm.

• Với $m \ne 0$ và $m \ne -1$ thì PT đã cho có 1 nghiệm $x = \frac{m(1-m^3)}{1+m^3}$

Câu V. Vì ANB vuông tại N với đường cao NF nên $AN^2 = AF.AB$ (1) ΔAMC vuông tại M với



đường cao ME nên $AM^2 = AE.AC$ (2).

Từ $\Delta AEB \backsim \Delta AFC$ có $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AM = AN$ (đpcm)

Câu VI. Nhận xét :

$n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ là chẵn và chia hết cho 5 nên nó có tận cùng bằng 0, $(\forall n \in N)$. Mà $n^{4k+1} - n = n\left(n^{4k} - 1\right)$ chia hết cho $n\left(n^4 - 1\right) = n^5 - n$ nên $n^{4k+1} - n$ cũng có tận cùng là 0.

Vậy $(2^1 - 2) + (3^5 - 3) + (4^9 - 4) + ... + (502^{2001} - 502)$ tận cùng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của S chính là chữ số tận cùng của tổng

$$T = 2+3+ ... + 501 + 502 = \frac{501.504}{2} = 501.252$$

Vậy 2 là chữ số tận cùng của T và cũng là của S.

Câu VII. a) Đặt $y = a - bx^2$ thì từ PT đã cho có hệ : $\begin{cases} x = a - by^2 \\ y = a - bx^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = b(x^2 - y^2) \\ x = a - by^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(1-bx-by)=0 \\ x = a - by^2 \end{cases}$

Có các trường hợp sau :

(I) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x = a - by^2 \end{cases}$ (II) $\begin{cases} bx + by = 1 \\ x = a - by^2 \end{cases}$

Xét hệ (I) : Nếu $b = 0$ thì $x = a$.

Nếu $b \neq 0$ thì hệ (I) có nghiệm

$\Leftrightarrow$ PT $bx^2 + x - a = 0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow ab \geq -\dfrac{1}{4}$ và nghiệm là $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4ab+1}}{2b}$

Xét hệ (II) : Nếu $b = 0$, hệ vô nghiệm

Nếu $b \neq 0$, thì hệ (II) có nghiệm $\Leftrightarrow$ PT

$bx^2 - x + \dfrac{1}{b} - a = 0$ có nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq \dfrac{3}{4}$ và nghiệm là $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4ab-3}}{2b}$

Các bạn tự tổng hợp lại các kết quả trên.

VII. b) Từ giả thiết $f(x) + f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = x$ (1), thay x bởi $\dfrac{1}{1-x}$ ta có : $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \dfrac{1}{1-x}$ (2)

Thay x bởi $\dfrac{x-1}{x}$ ta được :

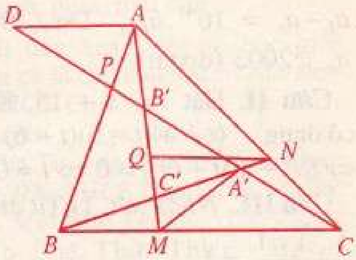
$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} \quad (3)$$

Cộng theo từng vế ba phương trình (1), (2), (3), ta tìm được :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{-x^3 + x - 1}{2x(1-x)}$$

Câu VIII. a) Qua A kẻ AD song song với BC cắt CP ở D.

Khi đó



$\dfrac{AB'}{B'M} = \dfrac{AD}{MC} = \dfrac{3AD}{2BC} = \dfrac{3}{2}.\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{AB'}{AM} = \dfrac{3}{7}$ (1)

Qua N kẻ $NQ // BC$ cắt AM tại Q ta có :

$\dfrac{MC'}{C'Q} = \dfrac{BM}{QN} = \dfrac{3BC}{3.2MC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{MC'}{MQ} = \dfrac{3}{7}$, do đó $\dfrac{MC'}{AM} = \dfrac{1}{7}$ (2). Từ (1), (2) có $\dfrac{B'C'}{AM} = \dfrac{3}{7}$ nên $AB' = B'C'$. Tương tự $CA' = A'B'$. Từ đó có

$S_{A'B'C'} = \dfrac{3}{4}S_{A'B'M} = \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}S_{CB'M} =$

$= \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{7}S_{CAM} = \dfrac{1}{7}S_{ABC}$.

b) Kí hiệu các đỉnh liên tiếp của đa giác đều 2001 cạnh là $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2001}$

Mỗi đa giác đều có đỉnh là đỉnh của đa giác đều 2001 cạnh thì số cạnh (đỉnh) của nó phải là ước của 2001.

Ta có 2001 = 3.23.29

Do đó : có 1 đa giác đều 2001 cạnh, có 3 đa giác đều 667 cạnh là $A_1A_4...A_{1999}$, $A_2A_5...A_{2000}$, $A_3A_6...A_{2001}$. Tương tự có 23 đa giác đều 87 cạnh, có 29 đa giác đều 69 cạnh, có 69 đa giác đều 29 cạnh, có 87 đa giác đều 23 cạnh, có 667 đa giác đều 3 cạnh.

Vậy có tất cả là 1 + 3 + 23 + 29 + 69 + 87 + 667 = 879 đa giác đều có đỉnh là đỉnh của đa giác đều đã cho.

Hướng dẫn giải :

MAI VĂN TƯ

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN LỚP 10

THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HỒ CHÍ MINH 2002

VÒNG I

(Dành cho mọi thí sinh - Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

b) $B = \dfrac{x^8 + 3x^4 + 4}{x^4 + x^2 + 2}$

Câu II. Cho phương trình :

$x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 4 = 0$ (có ẩn số là x)

a) Chứng minh rằng phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của $y = x_1^2 + x_2^2$.

Câu III. a) Chứng minh : $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2}$

b) Chứng minh : $x^4 + y^4 \geq \dfrac{(x+y)^4}{8}$.

c) Cho $x > 0$, $y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh :

$8(x^4 + y^4) + \dfrac{1}{xy} \geq 5$.

Câu IV. Giải các phương trình :

a) $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$

b) $(4x + 1)(12x - 1)(3x + 2)(x + 1) = 4$

Câu V. Cho đường tròn $(O ; R)$ và đường thẳng (d) cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, B. Từ một điểm M trên đường thẳng (d) và ở ngoài (O), (d) không đi qua O, ta vẽ hai tiếp tuyến MN, MP với đường tròn (O) (N, P là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh : $\widehat{NMO} = \widehat{NPO}$

b) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP đi qua hai điểm cố định khi M lưu động trên đường thẳng (d).

c) Xác định vị trí điểm M trên đường thẳng (d) sao cho tứ giác $MNOP$ là một hình vuông.

d) Chứng minh rằng tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác MNP lưu động trên một đường cố định khi M lưu động trên (d).

VÒNG II

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin - Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu VI. Tìm các giá trị của m để phương trình sau có nghiệm và tính các nghiệm ấy theo m : $x + |x^2 - 2x + m| = 0$

Câu VII. Phân tích thành nhân tử :

$$A = x^{10} + x^5 + 1$$

Câu VIII. Giải các phương trình và hệ phương trình :

a) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$

b) $\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}$

c) $\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 \end{cases}$

Câu IX. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của :

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}$$

Câu X. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và có $AB < AC$. Lấy điểm M thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa điểm A của đường tròn (O). Vẽ MH vuông góc BC, MK vuông góc CA, MI vuông góc AB (H thuộc BC, K thuộc AC, I thuộc AB). Chứng minh $\dfrac{BC}{MH} = \dfrac{AC}{MK} + \dfrac{AB}{MI}$

Câu XI. Cho tam giác ABC. Giả sử các đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{A}$ của tam giác ABC lần lượt cắt đường thẳng BC tại D, E và có $AD = AE$.

Chứng minh : $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Diễn đàn **DẠY VÀ HỌC TOÁN**

ĐỀ TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN

NGUYỄN THẾ THẠCH
(Vụ Trung học phổ thông)

Để đảm bảo sự đồng bộ và thống nhất tương đối giữa các địa phương trong nội dung và hình thức kiểm tra, đánh giá kết quả học tập của học sinh phù hợp với việc đổi mới chương trình nội dung giáo dục phổ thông và cải tiến thi tuyển sinh vào đại học, cao đẳng, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã có công văn số : 7492/THPT ngày 27.8.2002 hướng dẫn một số vấn đề như sau :

I. Yêu cầu kiểm tra, đánh giá kết quả học tập

"Kiểm tra, đánh giá là một khâu quan trọng trong quá trình dạy học được kết thúc trọn vẹn trong khuôn khổ nhất định về thời gian theo quy định của kế hoạch dạy học. Kiểm tra là phương tiện và hình thức của đánh giá. Các loại kiểm tra trong kế hoạch dạy học được quy định bao gồm: kiểm tra thường xuyên, kiểm tra định kì và thi tốt nghiệp, tuyển sinh. Hình thức kiểm tra bao gồm trắc nghiệm tự luận, trắc nghiệm khách quan, làm bài thực hành, song đều phụ thuộc vào các yếu tố của quá trình dạy học, đó là mục đích, nội dung, phương pháp, phương tiện và hình thức tổ chức dạy học". Do đó, việc kiểm tra, đánh giá kết quả học tập của học sinh phải bảo đảm các yêu cầu : đánh giá được trình độ nhận thức của học sinh, hiệu quả giảng dạy của thầy giáo ; nội dung kiểm tra phù hợp với đặc thù của bộ môn, nội dung chương trình ; căn cứ vào điều kiện về đối tượng HS và trang thiết bị ; thể hiện mức độ nhận thức của học sinh qua bài làm.

II. Nội dung và hình thức kiểm tra

"Kết quả học tập của học sinh chỉ có thể đánh giá một cách đầy đủ và chính xác khi xây dựng được một hệ thống các mục tiêu dạy học cụ thể và các năng lực cần được đánh giá trong bài kiểm tra.

Nội dung bài kiểm tra nhằm giúp học sinh xác định điều gì đòi hỏi họ phải đạt được về kiến thức và kĩ năng trong nội dung học tập của một môn học.

Kiểm tra có thể áp dụng các hình thức như sau :

1) Kiểm tra với hình thức trắc nghiệm tự luận

... Khi soạn bài kiểm tra trắc nghiệm tự luận phải cho phép học sinh có sự tự do tương đối để trả lời một vấn đề đặt ra, nhưng đồng thời đòi hỏi học sinh phải nhớ lại hơn là nhận biết thông tin, học sinh phải biết sắp xếp và diễn đạt ý kiến một cách chính xác và sáng sủa. Một bài kiểm tra với hình thức trắc nghiệm tự luận được chấm điểm một cách chủ quan của những người chấm, do đó phải có đáp án, biểu điểm chi tiết, rõ ràng để những người chấm dễ thống nhất thực hiện.

2) Kiểm tra với hình thức trắc nghiệm khách quan

Bài kiểm tra với hình thức trắc nghiệm khách quan trong đó cách cho điểm là khách quan không phụ thuộc vào người chấm. Bài kiểm tra loại này gồm nhiều câu hỏi nhưng chỉ có một câu trả lời đúng hay câu trả lời tốt nhất mà người được kiểm tra sẽ chọn. Nội dung của bài kiểm tra trắc nghiệm khách quan cũng có phần chủ quan bởi vì nó phụ thuộc vào sự suy đoán, lựa chọn của người được kiểm tra.

Bài kiểm tra trắc nghiệm khách quan thường sử dụng một số loại câu hỏi như sau :

a. Câu hỏi nhiều lựa chọn

Đây là loại câu hỏi thường sử dụng nhất. Câu trả lời đúng cho từng câu hỏi được chọn từ nhiều phương án, thông thường từ 4 đến 5 phương án.

b. Câu hỏi ghép đôi.

Câu hỏi loại này gồm một dãy các phương án lựa chọn được dùng để trả lời hoặc để gắn kết với một trong các câu hỏi khác nhau.

c. Câu hỏi đúng sai

Đây là câu câu hỏi chỉ có hai cách lựa chọn.

d. Câu hỏi điền khuyết

Trong câu hỏi này đòi hỏi phải điền một từ hay liệt kê các sự việc hoặc nhiều từ hay nhiều sự việc.

đ. Câu nhiễu

Các phương án lựa chọn sai của câu hỏi trong bài kiểm tra.

3) Bài kiểm tra thực hành

Nội dung phải nêu được những công việc đòi hỏi học sinh phải làm từ khâu chuẩn bị dụng cụ, thao tác thực hiện và viết báo cáo kết quả theo yêu cầu bài kiểm tra đặt ra."

Bộ Giáo dục và Đào tạo chủ trương đổi mới việc kiểm tra, đánh giá kết quả học tập của học sinh bậc trung học từ năm học 2002 – 2003. Riêng đề thi vào đại học thì có thể được ra dưới dạng trắc nghiệm – tự luận từ năm 2005.

Dưới đây giới thiệu một đề toán lớp 12 ở dạng trắc nghiệm - tự luận để bạn đọc tham khảo

ĐỀ MÔN TOÁN LỚP 12 *(150 phút)*

Bài 1. (Tự luận. 3,0 điểm)

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số.

2. Dựa vào đồ thị (C), hãy xác định các giá trị m để phương trình $x^4 - 2x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 2. (Trắc nghiệm. 2,0 điểm)

1. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2}\cos 2x + 4\sin x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1.1. Tập hợp nào sau đây là tập điểm tới hạn của hàm số :

A) $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ B) $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

C) $0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ E) Tập rỗng

1.2. Số giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là : A) 5 ; B) 3 ; C) 4 ; D) 0 ; E) 2.

1.3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là :

A) $\begin{cases} \min\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = \sqrt{2} \\ \max\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 4 - \sqrt{2} \end{cases}$; B) $\begin{cases} \min\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 2\sqrt{2} \\ \max\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 4 - \sqrt{2} \end{cases}$

C) $\begin{cases} \min\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 2 - \sqrt{2} \\ \max\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 4 - \sqrt{2} \end{cases}$; D) $\begin{cases} \min\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = \sqrt{2} \\ \max\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 2\sqrt{2} \end{cases}$

E) $\begin{cases} \min\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 2 - \sqrt{2} \\ \max\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = \sqrt{2} \end{cases}$

2. Xét tập hợp các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau.

2.1. Số những số có chữ số 0 ở tận cùng là :

A) P_4 ; B) A_9^4 ; C) C_9^3 ; E) A_9^3 ; D) C_9^4

2.2. Số những số có chữ số ở tận cùng khác 0 là :

A) 9 ; B) 8 ; C) 4 ; E) $P_9 - P_4$; D) $4.8.A_8^2$

2.3. Số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau là :

A) $P_4 + 9$; B) $A_9^3 + 8$; C) $A_9^4 + 4$;

E) 2296 ; D) $A_9^3 + 4.8.A_8^2$.

Bài 3. (Trắc nghiệm ; 1,5 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét hypebol (H) đi qua điểm $M\left(5;\frac{9}{4}\right)$ và nhận điểm $F_1\ (5\ ;0)$ làm tiêu điểm của nó.

1. Phương trình chính tắc của hypebol (H) là :

A) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; B) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$;

C) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; D) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$;

E) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

2. Cho đường thẳng $(d) : 5x + 4y - 1 = 0$

2.1. Số tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng (d) là :

A) 4 ; B) 0 ; C) 2 ; D) 1 ; E) 5.

2.2. Các tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng (d) nhận các tiếp điểm :

A) $\left(5;-\frac{5}{4}\right), \left(-5;\frac{5}{4}\right), \left(9;-\frac{9}{4}\right), \left(-9;\frac{9}{4}\right)$;

B) $\left(9;-\frac{5}{4}\right), \left(-9;\frac{5}{4}\right)$; C) $\left(5;-\frac{9}{4}\right), \left(-5;\frac{9}{4}\right)$;

D) $\left(5;-\frac{5}{4}\right)$; E) $\left(-9;\frac{9}{4}\right)$

2.3. Các tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng (d) là :

A) $5x + 4y = 9$; B) $5x + 4y = -9$;

C) $5x + 4y = 5, 5x + 4y = -5$;

D) $5x + 4y = 16, 5x + 4y = -16$

E) $5x + 4y = 25, 5x + 4y = -25$

Bài 4. (Tự luận. 2,5 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) :

$x+y+z-1 = 0$ và đường thẳng $(d) : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CỦA BỘ QUỐC PHÒNG

KHỐI D - NĂM 2002

MÔN THI : TOÁN

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I: Cho hàm số $y = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$

1. Khảo sát hàm số. Gọi đồ thị hàm số là (C).

2. Từ một điểm trên đường thẳng $x = 1$ viết phương trình tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Câu II. 1. Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1} = 3x+2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$$

2. Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn

$$\log_2(x^2+2x+3)^{y^2+8} \le 7 - y^2 + 3y$$

Câu III. 1. Giải phương trình

$$(\cos2x - 1)(\sin2x + \cos x + \sin x) = \sin^2 2x$$

2. Tam giác ABC có AD là phân giác trong của góc A ($D \in BC$) và $\sin B\sin C \le \sin^2\dfrac{A}{2}$. Hãy chứng minh $AD^2 \le BD.CD$.

Câu IV. 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho elip có phương trình $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0$. Tìm điểm trên elip sao cho tiếp tuyến của elip tại điểm đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) : $x - y + z + 5 = 0$ và (Q) : $2x + y + 2z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt phẳng (Q) tại $M(1, -1, -1)$.

Câu V. 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2 - \dfrac{x^2}{4}$ và $x + 2y = 0$

2. Đa thức $P(x) = (1 + x + x^2)^{10}$ được viết lại dưới dạng : $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{20}x^{20}$. Tìm hệ số a_4 của x^4.

---

1. Viết phương trình chính tắc của các đường thẳng là giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt phẳng tọa độ. Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$, biết A, B, C là giao điểm tương ứng của mặt phẳng (α) với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz ; còn D là giao điểm của đường thẳng (d) với mặt phẳng tọa độ Oxy.

2. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D. Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn là giao tuyến của mặt cầu (S) với mặt phẳng (ACD).

Bài 5. (Trắc nghiệm. 1,0 điểm). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x + 1$ và $y = x - 1$ là :

A) 3. B) $\dfrac{9}{2}$; C) $\dfrac{23}{3}$; D) $\dfrac{16}{3}$;

E) Một số khác.

ĐÁP ÁN

Bài tự luận : *Bài 1 và Bài 4.* Chính là bài trong đề thi tốt nghiệp THPT năm học 2001 – 2002.

Bài trắc nghiệm :

Bài 2. 1.1. D) $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{2}$

1.2. E) 2

1.3. D) $\begin{cases} \min\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = \sqrt{2} \\ \max\limits_{[0;\pi/2]} f(x) = 2.\sqrt{2} \end{cases}$

2.1. E) A_9^3 2.2. D) $4.8.A_8^2$.

2.3. D) và E) $A_9^3 + 4.8.A_8^2 = 2296$

Bài 3. 1) C) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

2.1. C) 2.

2.2. C) $\left(5; -\dfrac{9}{4}\right)$, $\left(-5; \dfrac{9}{4}\right)$

2.3. D) $5x + 4y = 16$, $5x + 4y = -16$.

Bài 5. D) $\dfrac{16}{3}$

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

GIÚP BẠN TỰ ÔN THI

Để đáp ứng nhu cầu đông đảo của bạn đọc chuẩn bị thi tốt nghiệp THPT và Đại học, Cao đẳng, chúng tôi mạnh dạn biên soạn một số đề. Các đề này sẽ giúp các bạn tự rèn luyện các phương pháp giải các loại bài toán thường gặp trong đề thi, và điều không kém phần quan trọng là phương pháp trình bày lời giải của bài thi trong thời gian cho phép. Phần hướng dẫn giải sẽ đăng trong số báo tiếp theo.

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 1

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số : $y = x^4 - mx^2 + 4x + m$.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.

2) Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị sao cho tam giác có đỉnh là ba điểm cực trị nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Câu II. (2 điểm)

1) Giải phương trình :

$$\log_{2002-x}\left(\log_{2002-x} x\right) = \log_x\left(\log_x(2002-x)\right)$$

2) Tìm tất cả các giá trị của a để tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{2a+x}{2a-x}}$ chứa tập giá trị của hàm số $g(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+4a-2}$

Câu III. (2 điểm)

1) Giải phương trình :

$$\cos^8 x + \sin^8 x = 64(\cos^{14} x + \sin^{14} x)$$

2) Hai đường cao AA_1, BB_1 của tam giác nhọn ABC cắt nhau tại H. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng diện tích tam giác HA_1B_1 bằng $R^2.\sin 2C.\cos A.\cos B.\cos C$

Câu IV. (2 điểm)

1) Cho tứ diện $OABC$ có: $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$, gọi OD là đường phân giác trong của góc $\widehat{AOC}$. Hãy tính góc $\widehat{BOD}$.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Đêcác vuông góc $Oxyz$ cho hai đường thẳng :

$$(\Delta)\begin{cases}2x+y+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases} \qquad (\Delta')\begin{cases}3x+y-z+3=0\\2x-y+1=0\end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ) và (Δ') cắt nhau.

b) Viết phương trình chính tắc của cặp đường phân giác của các góc tạo bởi (Δ) và (Δ')

Câu V. (2 điểm)

1) Tính tích phân :

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^4 x(\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg} x + 5)}$$

2) Trong hộp đựng $2n$ viên bi có n viên bi đỏ giống hệt nhau và n viên bi xanh đôi một khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách khác nhau lấy n viên bi từ hộp đó.

ĐẶNG VŨ HÀ
(Sơn Tây, Hà Tây)

TRỞ LẠI ĐỊNH LÍ LỚN FERMAT

LÊ XU
(Ủy ban kiểm tra Trung ương)

Phương trình $x^n + y^n = z^n$ (1), trong đó n là số tự nhiên lớn hơn 2 không có nghiệm nguyên khác 0. Trong (1) ta chỉ cần xét $(x, y, z) = 1$, vì nếu không như thế thì chỉ một phép chia cho ước chung lớn nhất của chúng là chuyển về điều kiện đó.

Đó là định lí lớn Fermat dễ hiểu nhưng việc chứng minh cực khó. Báo Toán học và Tuổi trẻ đã đăng nhiều bài xung quanh định lí này. Bài "*Định lí lớn Fermat và việc tìm tòi chứng minh sơ cấp của nó*" của thầy Nguyễn Cảnh Toàn đã nêu vài nét lịch sử việc chứng minh (1) cho các trường hợp $n = 3, 5, 7, 14$ và giới thiệu ba định lí của Sophie Germain (1776 – 1831), như sau :

Mệnh đề 1. *Nếu $x^5 + y^5 = z^5$ thì một trong các số x, y, z phải chia hết cho 5.* (2)

Mệnh đề 2. *Nếu p và 2p + 1 là những số nguyên tố lẻ thì từ $x^p + y^p = z^p$ suy ra hoặc x, hoặc y hoặc z chia hết cho p* (3)

Mệnh đề 3. *Nếu p là số nguyên tố lẻ, p < 100 thì $x^p + y^p = z^p$ không có nghiệm dạng (x_o, y_o, z_o), trong đó x_o, y_o, z_o đều không chia hết cho p* (4)

Bảy năm đã qua, kể từ ngày giáo sư Andrew Wiles, Đại học Tổng hợp Princeton, Hoa Kỳ đã vận dụng thông minh những kiến thức của nhiều ngành toán học để hoàn chỉnh phép chứng minh định lí lớn Fermat, kết thúc sự tìm tòi lời giải cho bài toán đã thách thức những nhà toán học suốt gần ba thế kỉ rưỡi, đem lại vinh quang cho trí tuệ siêu việt của con người.

Tuy nhiên, phép chứng minh của Wiles chỉ có một số không nhiều lắm trong các nhà toán học chuyên nghiệp hiểu được mà thôi, cho nên dáng vẻ quyến rũ của định lí lớn vẫn không ngừng tỏa ra những tia sáng huyền ảo, lung linh khi ta quan sát nó dưới góc độ của phép giải sơ cấp.

Nay xin trở lại định lí này để trình bày tóm tắt một phép chứng minh (2) và những điều tương tự (3), (4) bằng những kiến thức đơn giản, rồi đề xuất một vài giả thuyết liên quan đến (1).

Chứng minh mệnh đề 1. Giả sử $x^5 + y^5 = z^5$ với x, y, z đều không chia hết cho 5 (5)

Theo ĐL nhỏ Phecma thì $x^5 \equiv x \pmod 5$, $y^5 \equiv y \pmod 5$, $z^5 \equiv z \pmod 5$. Từ (5) có $x + y \equiv z \pmod 5$ (6)

Biểu diễn x, y, z dưới dạng $x = 5c + a$, $y = 5d + b$, $z = 5e + c$ và lựa chọn c, d, e sao cho giá trị tuyệt đối của a, b, c chỉ là 1 hoặc 2 thì $x \equiv a \pmod 5$, $y \equiv b \pmod 5$, $z \equiv c \pmod 5$.

Từ (6) có $a + b \equiv c \pmod 5$ (7)

Vì $x^5 = (5c + a)^5$ nên $x^5 \equiv a^5 \pmod{25}$, tương tự $y^5 \equiv b^5 \pmod{25}$, $z^5 \equiv c^5 \pmod{25}$ và do (5) nên $a^5 + b^5 \equiv c^5 \pmod{25}$ (8)

Ta sẽ kiểm tra (8) theo các điều kiện của a, b, c đối với tất cả các trường hợp có thể xảy ra ; tuy nhiên từ (7) tất cả trường hợp đều có thể đưa về ba trường hợp sau: $a = b = 1, c = 2$, $a = b = 2, c = -1$ và $a = 1, b = 2, c = -2$.

Kết quả là $1^5 + 1^5 \not\equiv 2^5 \pmod{25}$, $2^5 + 2^5 \not\equiv (-1)^5 \pmod{25}$. $1^5 + 2^5 \not\equiv (-2)^5 \pmod{25}$

Từ mâu thuẫn này suy ra (2).

2. Định lí : *Nếu p và 2p+1 là những số nguyên tố lẻ thì từ $x^p + y^p = z^p$ suy ra hoặc x, hoặc y hoặc z chia hết cho 2p+1* (9)

Chứng minh : Giả sử $x^p + y^p = z^p$ và x, y, z đều không chia hết cho $2p + 1$.

Để cho gọn, ta đặt $X = x^p$, $Y = y^p$, $Z = z^p$ và $r = 2p + 1$. Rõ ràng là $Z = X + Y$ và theo định lí nhỏ Fermat thì $Z^2 \equiv 1 \pmod r$, $Y^2 \equiv 1 \pmod r$, $X^2 \equiv 1 \pmod r$ và r là nguyên tố. Từ đó $X^2 - Y^2 \equiv 0 \pmod r \Rightarrow (X - Y)(X + Y) \equiv 0 \pmod r$.

Theo điều giả sử $Z = X + Y \not\equiv 0 \pmod r$ nên $X - Y \equiv 0 \pmod r \Rightarrow X \equiv Y \pmod r \Rightarrow Z^2 \equiv 2X \pmod r \Rightarrow Z \equiv 4X^2 \pmod r \Rightarrow 1 \equiv 4 \pmod r$ ☛

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN – BÀI SỐ 61

Problem. Given n numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ each of them is equal to +1 or to -1. Find n if we know that $1997 \le n \le 2003$ and

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

Solution. There are n products $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$. Since each of the products $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ is equal to -1 or 1, the sum of all these products can only be equal to zero when n is an even number. Write $n = 2m$. Then there are exactly m products among $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ which are equal to -1. Each product -1 corresponds to a change of sign in the sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$. Hence m is the number of the changes of sign in the sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$. If we replace a number -1 of the sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n$ with 1, the number of the changes of sign differs from the old one only by -2, 0, 2. When we reach the sequence 1, 1, ..., 1, the number of the changes of sign is 0. Therefore, the number m must be even and hence n is divisible by 4. Now, from the assumption $1997 \le n \le 2003$ we can deduce that $n = 2000$.

Từ mới:

product	= tích
even	= chẵn (tính từ)
exactly	= chính xác, đúng đắn (phó từ)
correspond	= tương ứng (động từ)
change	= sự thay đổi, sự biến đổi
sign	= dấu, ký hiệu
sequence	= dãy
replace	= thay thế, thay chỗ (động từ)
differ	= khác, không giống (động từ)
reach	= đến, tới (động từ)
therefore	= bởi vậy, cho nên (phó từ)
divisible	= chia hết cho (phó từ)
assumption	= giả thiết
deduce	= suy ra, luận ra (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

Điều này chỉ xảy ra khi $r = 3 \Rightarrow p = 1$ vậy điều giả sử là sai, nghĩa là có (9).

3. Định lí : *Nếu p và 4p + 1 là những số nguyên tố lẻ thì từ $x^n + y^n = z^n$ suy ra hoặc x, hoặc y hoặc z chia hết cho 4p + 1* (10)

Chứng minh:

Đặt $s = 4p + 1$ là số nguyên tố, $X = x^p$, $Y = y^p$, $Z = z^p$. Ta có $X^4 \equiv Y^4 \equiv Z^4 \equiv 1 \pmod s$, $Z = X + Y \not\equiv 0 \pmod s$, $X^4 - Y^4 \equiv 0 \pmod s$,

$$(X-Y)(X+Y)(X^2+Y^2) \equiv 0 \pmod s$$

$(XY)^4 \equiv 1 \pmod s$. Nếu $X^2 + Y^2 \equiv 0 \pmod s$ thì

$X^2 + Y^2 = (X+Y)^2 - 2XY \Rightarrow 1 \equiv Z^4 \equiv 16(XY)^4 \equiv 16 \pmod s$; nhưng $s \ne 5$ nên $1 \not\equiv 16 \pmod s$. Vậy $X \equiv Y \pmod s$.

Từ đó $Z^2 = (X+Y)^2 \equiv 4X^2 \pmod s \Rightarrow 1 \equiv Z^4 \equiv 16X^4 \equiv 16 \pmod s$ mâu thuẫn.

4. Định lí. *Nếu p và 8p + 1 là những số nguyên tố lẻ thì từ $x^n + y^n = z^n$ suy ra hoặc x, hoặc y, hoặc z chia hết cho 8p + 1.*

Việc chứng minh ĐL này có khó khăn hơn chút ít so với chứng minh (9) và (10) nhưng chắc các bạn sẽ vượt qua.

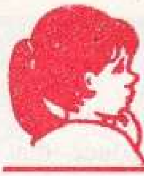
Từ ba định lí trên có thể nêu lên các giả thuyết sau :

Giả thuyết 1: *Nếu p và $2^k p+1$ ($k \ge 1$) là những số nguyên tố lẻ thì từ $x^n + y^n = z^p$ suy ra hoặc x, hoặc y hoặc z chia hết cho $2^k p+1$.*

Giả thuyết 2: *Với p là số nguyên tố lẻ thì dãy số $u_k = 2^k p+1$ (k = 1, 2, ...) chứa vô hạn số nguyên tố.*

Nếu chứng minh được các *giả thuyết 1* và 2 thì cũng khẳng định được *phương trình $x^p + y^p = z^p$ với p là nguyên tố lẻ, không có nghiệm nguyên khác 0. Từ đó chứng minh được (1).*

Mong được các bạn trao đổi thêm về vấn đề này.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

T1/309. (Lớp 6). So sánh giá trị của biểu thức $A=\frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{9999}{10000}$ với các số 98 và 99.

TRẦN VĂN HINH
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

T2/309. (Lớp 7). Tam giác ABC có $\widehat{ABC}=30^o$, $\widehat{ACB}=20^o$. Đường trung trực của AC cắt BC ở E và cắt tia BA ở F. Chứng minh rằng $AF=EF$ và $AC=BE$.

VŨ HỮU BÌNH
(GV THCS Trưng Vương, Hà Nội)

T3/309. Tìm các số nguyên x, y sao cho

$$\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{7}{20}$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV THCS Tp. Hồ Chí Minh)

T4/309. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}+\frac{(a-b)^2(3a+b)(a+3b)}{8(a+b)(a^2+6ab+b^2)}$$

trong đó a, b là các số dương.

VŨ TIẾN VIỆT
(GV ĐH An Ninh)

T5/309. Giải bất phương trình

$$(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}\ge 2(x+1)$$

ĐỖ BÁ CHỦ
(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

T6/309. Trên một đường thẳng lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự. Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AD, AE với đường tròn đường kính BC (D, E là các tiếp điểm). Kẻ $DH\perp CE$ tại H. Gọi P là trung điểm của DH. Đường thẳng CP cắt đường tròn lần nữa tại Q. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm A, D, Q tiếp xúc với đường thẳng AC.

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

T7/309. Trên đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC lấy điểm M. Gọi K, H, J lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AB, BC, CA. Hãy xác định vị trí của điểm M để tổng $MK+MH+MJ$ đạt

a) giá trị lớn nhất

b) giá trị nhỏ nhất.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCTT ĐHSP Hà Nội)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

T8/309. Hãy xác định tất cả các dãy số nguyên dương (x_n) ($n=1, 2, 3, ...$) thỏa mãn : $x_1=1$, $x_2>1$, $x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}^4}{x_n}$ với mọi $n=1, 2, 3, ...$

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, PlâyKu, Gia Lai)

T9/309. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}\log_2(1+3\cos x)=\log_3(\sin y)+2\\ \log_2(1+3\sin y)=\log_3(\cos x)+2\end{cases}$$

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT NK Hưng Yên)

T10/309. Cho số nguyên dương n, tìm số $t=t(n)$ nhỏ nhất sao cho với mọi số thực x_1, x_2, ..., x_n luôn có

$$\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2\le t\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$$

VŨ HOÀNG HIỆP
(SV nhóm toán K6, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

T11/309. Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì có

$$\sin A\cos B+\sin B\cos C+\sin C\cos A\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

LÊ XUÂN SƠN
(GV PTCTT ĐH Vinh)

T12/309. Trong không gian cho n điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n\ge 2$) và n điểm $K_1, K_2, ..., K_n$ sao cho K_i không trùng A_i với mọi $i=1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng tồn tại n hình cầu (bán kính dương) S_i ($i=1, 2, ..., n$) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện :

1) Các hình cầu S_i đôi một không giao nhau

2) Tích $\mathscr{P}_{A_i/S_i}\cdot\mathscr{P}_{K_i/S_i}$ là số âm với mọi $i=1, 2, ..., n$ trong đó $\mathscr{P}$ chỉ phương tích của điểm đối với hình cầu.

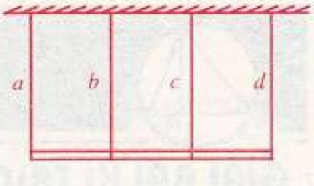
HOÀNG CÔNG THẠNH
(GV THPT Nguyễn Chí Thanh, Thừa Thiên – Huế)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

L1/309. Một chất điểm bắt đầu chuyển động từ điểm A_o $(x_o, 0)$ theo chiều dương của trục Ox với gia tốc không đổi $\overrightarrow{a_1}$. Cùng một lúc, chất điểm thứ hai từ điểm B_o $(y_o, 0)$ cũng bắt đầu chuyển động theo chiều dương của trục Oy với gia tốc không đổi $\overrightarrow{a_2}$. Hỏi sau bao lâu hai chất điểm lại gần nhau nhất và tính khoảng cách giữa chúng lúc đó. Với điều kiện nào của a_1, a_2, x_o, y_o thì chúng có thể gặp nhau.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

L2/309. Một thanh đồng chất, tiết diện đều có khối lượng m được treo bằng 4 sợi dây đàn hồi giống nhau, song song với nhau và cách đều nhau (hình vẽ). Người ta bỏ sợi dây a đi. Để giảm sự nguy hiểm có người nói phải bỏ bớt sợi dây d, điều đó có đúng không ? Tìm lực căng của các sợi dây b, c, d sau khi bỏ sợi dây a, cho biết các dây đàn hồi tuân theo định luật Huc.



NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/309.(for 6th grade) Compare the value of the expression $A = \frac{3}{4}+\frac{8}{9}+\frac{15}{16}+...+\frac{9999}{10000}$ with the numbers 98 and 99.

T2/309. (for 7th grade) Let ABC be a triangle with $\widehat{ABC} = 30^o$, $\widehat{ACB} = 20^o$. The perpendicular bisector of AC cuts BC at E and cuts the ray BA at F. Prove that $AF = EF$ and $AC = BE$.

T3/309. Find the intergers x, y satisfying

$$\frac{x+2y}{x^2+y^2} = \frac{7}{20}$$

T4/309. Prove that

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} + \frac{(a-b)^2(3a+b)(a+3b)}{8(a+b)(a^2+6ab+b^2)}$$

for positive numbers a, b.

T5/309. Solve the inequation :

$$(x-1)\sqrt{x^2-2x+5} - 4x\sqrt{x^2+1} \geq 2(x+1)$$

T6/309. On a line, take three distinct points A, B, C in this order. Draw the tangents AD, AE to the circle with diameter BC (D and E are the touching points). Draw $DH \perp CE$ at H. Let P be the midpoint of DH. The line CP cuts again the circle at Q. Prove that the circle passing through the three points A, D, Q is tangent to the line AC.

T7/309. M is a point on the incircle of triangle ABC. Let K, H, J be respectively the orthogonal projections of M on the lines AB, BC, CA. Determine the position of M so that the sum $MK + MH + MJ$

a) attains its greatest value

b) attains its least value

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/309. Determine all sequences of positive integers (x_n) ($n = 1, 2, 3, ...$) satisfying :

$$x_1 = 1,\ x_2 > 1,\ x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}^4}{x_n} \text{ for all } n = 1, 2, 3, ...$$

T9/309. Solve the system of equations

$$\begin{cases} \log_2(1+3\cos x) = \log_3(\sin y)+2 \\ \log_2(1+3\sin y) = \log_3(\cos x)+2 \end{cases}$$

T10/309. Let n be a given positive integer. Find the least number $t = t(n)$ such that for all real numbers $x_1, x_2, ..., x_n$, holds the following inequality

$$\sum_{k=1}^{n}(x_1+x_2+...+x_k)^2 \leq t\left(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2\right)$$

T11/309. Prove that for arbitrary triangle ABC,

$$\sin A\cos B + \sin B\cos C + \sin C\cos A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

when does equality occur ?

T12/309. In space, let be given n distinct points $A_1, A_2, ..., A_n$ $(n \geq 2)$ and n points $K_1, K_2, ..., K_n$ (K_i does not coincide with A_i for every $i = 1, 2, ..., n$). Prove that there exist n spheres (with positive radii) S_i ($i = 1, 2, ..., n$) satisfying simultaneously the following two conditions :

i) the spheres do not intersect each others,

ii) the products $\mathscr{P}_{A_i/S_i} \cdot \mathscr{P}_{K_i/S_i}$ are negative numbers for all $i = 1, 2, ..., n$, where $\mathscr{P}$ denotes the power of a point with respect to a sphere.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T1/303. *Chứng minh rằng dãy số $2003 + 23k$ với $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.*

Lời giải. Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho

$$2003 + 23k = p^n \qquad (1)$$

trong đó k, n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên $(p, 23) = 1$.

Theo định lí nhỏ Phecma thì $p^{22} - 1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t} = 1 + 23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n} = (1+23s)p^n = p^n + 23s.p^n = 2003+ 23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n} = 2003 + 23(k+sp^n)$ với mọi $t = 1, 2, 3, \ldots$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn (1). Chẳng hạn :

với $p = 2$ có $2003 + 23.91 = 2^{12}$

với $p = 3$ có $2003 + 23.8 = 3^7$

với $p = 2141$ có $2003 + 23.6 = 2141$

với $p = 2003$ thì tồn tại k theo ĐL Phecma thỏa mãn $2003 + 23k = 2003^{23}$

Nhận xét. 1) Một số bạn đã không chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn (1). Nhiều bạn chỉ ra dãy số $\left(p^{n.23^t}\right)$ với $t = 0, 1, 2, \ldots$ cũng có dạng $2003 + 23k$.

2) Các bạn sau có lời giải đầy đủ :

Phú Thọ : *Trần Duy Thành*, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì , *Trần Hữu Hưởng*, 7A, THCS Cấp Dẫn, Cẩm Khê, *Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Trung Kiên A, Đỗ Duy Hưng*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Hữu Kiên, Đoàn Mạnh Hùng, Đỗ Đình Khang*, 8A, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Thị Kiều Chinh, Lưu Thị Thùy Dương*, 8A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Mê Linh, *Đỗ Tiến Đăng*, 8B, *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch ; **Hòa Bình :** *Nghiêm Mạnh Hùng*, 9A, THCS Cao Thắng, Kim Bôi ; **Hà Nội :** *Đỗ Xuân Huy, Nguyễn Hoàng Việt, Vũ Nhật Minh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Bắc Ninh :** *Cao Văn Việt*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx. Bắc Ninh, *Nguyễn Thị Lương*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ ; **Hưng Yên :** *Đỗ Việt Phương*, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Dương :** *Bùi Tiến Dũng*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Bùi Xuân Lân*, 9A, THCS Thái Học, Bình Giang ; **Hải Phòng :** *Đinh Khang, Vũ Ngọc Linh*, 9A, *Phạm Huy Hoàng*, 9B, THCS NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Đinh Xuân Tuyên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Triệu Minh Tiến*, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Thành Kiên*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa, *Nguyễn Tuấn Nam*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Đậu Thế Linh, Hoàng Nguyên*, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, *Trần Đức Nhân*, 8A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, *Đinh Thị Trang*, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Đào Lê Trung*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Tp. Hồ Chí Minh** *Huỳnh Trung Anh*, 9/7, THCS Colette, *Trần Hải Đăng*, 8A9, THCS Trần Đại Nghĩa, Q. 1.

VIỆT HẢI

Bài T2/305. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{3x^2-x+2001}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}-\sqrt[3]{6x-2003} = \sqrt[3]{2002}$$

Lời giải. Đặt $u = \sqrt[3]{3x^2-x+2001}$

$$v = -\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}$$

$$w = -\sqrt[3]{6x-2003}$$

Theo cách đặt u, v, w ta có

$$u^3+v^3+w^3 = 2002.$$

Phương trình đã cho được viết lại là

$$(u+v+w)^3 = (u^3+v^3+w^3) \qquad (*)$$

Từ (*) và hằng đẳng thức

$$(u+v+w)^3 - (u^3+v^3+w^3) = 3(u+v)(v+w)(w+u),$$

ta có phương trình

$$3(u+v)(v+w)(w+u) = 0 \qquad (**)$$

Xét 3 trường hợp :

1) $u + v = 0$, tức là

$$\sqrt[3]{3x^2-x+2001} = \sqrt[3]{3x^2-7x+2002}$$

Phương trình này có nghiệm là $x_1 = \dfrac{1}{6}$,

2) $v + w = 0$, tức là

$$\sqrt[3]{3x^2-7x+2002} = -\sqrt[3]{6x-2003}$$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0$. Phương trình này có nghiệm $x_{2,3} = \dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

3) $w + u = 0$, tức là

$$\sqrt[3]{3x^2-x+2001} = \sqrt[3]{6x-2003}$$

$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 4004 = 0$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm.

$$x_1 = \frac{1}{6},\ x_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$$

Nhận xét. Tuy có rất nhiều bạn gửi lời giải, nhưng số bạn giải sai bài toán cũng khá nhiều. Có vài bạn quên không ghi tên, hoặc ghi tên địa phương không đầy đủ. Các bạn sau đây có lời giải sạch đẹp ngắn gọn và chính xác :

Nam Định : *Phạm Anh Thư*, 9A, THCS Trần Đăng Ninh ; **Quảng Nam :** *Thăng Bình*, 9/6 THCS Lê Quý Đôn ; **Hà Tĩnh :** *Bùi Quang Khánh*, 9H, THCS Kỳ Anh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thu Ngọc*, 9C, THCS Vĩnh Yên ; **Phú Thọ :** *Nông Quốc Khánh* và *Nguyễn Trung Kiên*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, *Nguyễn Việt Sơn*, 93, THCS Lâm Thao ; **Quảng Trị :** *Dương Bảo Nhân*, 9 Đại Hòa ; **Nghệ An :** *Hồ Ngọc Kiên*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Hòa Bình :** *Nghiêm Mạnh Hùng*, 9A, THCS Cao Thắng, Kim Bôi ; **Bình Định :** *Cao Trung Sỹ*, 7A1, THCS Phước Thành Tuy Phước, *Phan Huyền Trang*, 4A6, TH công lập I Phước Thành, Tuy Phước.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/305. *Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10$$

trong đó a, b, c là các số thực thuộc [1, 2].

Lời giải. *Cách 1.* Không mất tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Ta có điều phải chứng minh lần lượt tương đương với

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-10abc \le 0$$

$$(a+c)b^2+ac(a+c)+(a^2+c^2)b-7abc \le 0$$

$$[(a+c)b^2+ac(a+c)-(a+c)^2b]+[2(a^2+c^2)b-5abc]\le 0$$

$$(a+c)(b-a)(b-c)+b(2a-c)(a-2c)\le 0$$

Bất đẳng thức sau cùng đúng vì $2c \ge a \ge b \ge c > 0$. Suy ra bất đẳng thức trong đề bài là đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) bằng $(2, 2, 1)$ hoặc $(2, 1, 1)$. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên có 6 bộ số làm dấu đẳng thức xảy ra.

Cách 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \le a \le b \le c \le 2$. Ta có

$$\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)+\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)\ge 0$$

nên $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\le 2+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$

Suy ra :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$

$$\le 5+2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad (1)$$

Do $\frac{1}{2}\le\frac{a}{c}\le 1$ nên $\left(2-\frac{a}{c}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{c}\right)\le 0$

suy ra $\left(\frac{a}{c}\right)^2+1\le\frac{5}{2}.\frac{a}{c}$

Từ đó $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\le\frac{5}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\le 10$

Dấu đẳng thức xảy ra khi tất cả các bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức tức $(a, b, c) = (1, 1, 2)$ hoặc $(1, 2, 2)$. Do vai trò bình đẳng của a, b, c nên có 6 bộ số làm đẳng thức xảy ra là

$(a, b, c) = (2, 2, 1) ; (2, 1, 2) ; (1, 2, 2) ; (2, 1, 1) ; (1, 2, 1) ; (1, 1, 2)$.

Nhận xét. 1. Số đông các bạn giải dài dòng. Đa số các bạn theo cách 2.

2. Giải tốt bài này có các bạn : **Vĩnh Phúc :** *Vũ Văn Quảng*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch ; **Bắc Ninh :** *Trương Đình Cương*, 6B, THCS Tam Đa, *Lê Quốc Khánh*, 9A, THCS Yên Phong ;**Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu VănAn, Thanh Hà ; **Hải Phòng :** *Vũ Ngọc Linh*, 9A, THPT NK Trần Phú; **Hà Nội :** *Trần Nam Sơn*, 8A, THPT Hà Nội – Amsterdam, *Trần Hồng Bảo*, 9B, THCS Trưng Nhị ;**Nam Định :** *Phạm Thị Trang Nhung*, 9A6, *Trần Ngọc Tân*, 8A6, THCS Trần Đăng Ninh ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Tuấn Nam*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Nguyễn Cảnh Long*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, *Nguyễn Thị Thu Thủy*, 9C, THCS TT Quỳ Hợp ; **Bình Định :** *Huỳnh Tấn Sang*, 9A4, THCS Đống Đa, Quy Nhơn ; **Phú Yên :** *Nguyễn Võ Minh Toàn*, 9C, THCS Hòa Xuân Tây, huyện Tuy Hòa, *Phan Thành Việt*, 8D, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa ; **Đồng Tháp :** *Lữ Thiện Nhân*, 9A1, THPT Tx. Sa Đéc, *Nguyễn Trọng Nguyên*, 6T, THPT Cao Lãnh.

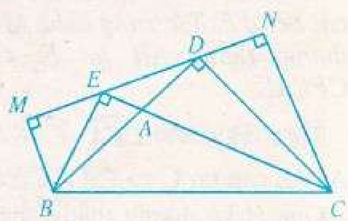
VŨ KIM THỦY

Bài T4/305. *Cho tam giác ABC với góc A tù. Gọi D và E là chân đường vuông góc hạ từ C tới AB và từ B tới AC theo thứ tự. Gọi M và N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C tới DE. Chứng minh công thức về diện tích :*

$$S_{ABC}=S_{ADE}+S_{BEM}+S_{CDN}$$

Lời giải. Ta có : $\widehat{BEC}=\widehat{BDC}=90^\circ$ nên tứ giác $BEDC$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{EDB}=\widehat{ECB}=\widehat{DCN}$.

Từ đó $\Delta BMD \backsim \Delta BEC \backsim \Delta DNC$



Do đó

$$\frac{S_{BMD}}{S_{BEC}}+\frac{S_{DNC}}{S_{BEC}}=\frac{BD^2+CD^2}{BC^2}$$

= 1 (với S(.) là kí hiệu diện tích) hay $S_{BMD}+S_{DNC}=S_{BEC}$

Suy ra $S_{BEC}+S_{BDC} = S_{BMD}+S_{DNC}+S_{BDC} = S_{BMNC}$ nên $S_{BEA}+S_{BAC}+S_{BAC}+S_{DAC} = S_{BME}+S_{EAD}+S_{DCN}+S_{EBA}+S_{DAC}+S_{ABC}$

Vậy $S_{ABC}=S_{ADE}+S_{BEM}+S_{CDN}$.

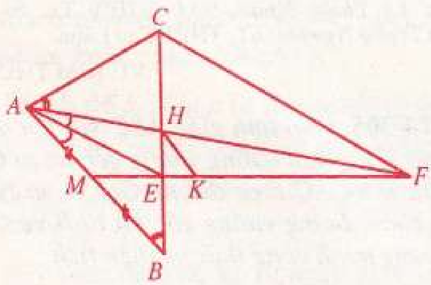
Nhận xét. 1. Giải tốt bài này có các bạn : **Phú Thọ :** *Ngô Vĩnh Thái*, 9A1, *Nguyễn Trung Kiên A*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Kim Thuật*, 8A, THCS Yên Lạc ; **Bắc Ninh :** *Lê Quốc Khánh*, 9A, THCS Yên Phong ; **Hải Phòng :** *Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** *Vũ Đình Nghĩa*, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh, *Đinh Xuân Tuyên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Thành Kiên*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh ; **Nghệ An :** *Bùi Hoàng Vương*, 9B, THCS Bạch Liên, Yên Thành, **Thừa Thiên – Huế :** *Phan Lê Anh Minh*, 9_1, trường Nguyễn Tri Phương ; **Đắc Lắc :** *Ngô Thùy Dương*, $9A^1$, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột

2. Bạn P. Minh còn đưa ra công thức của S_{ABC} trong trường hợp góc A nhọn.

VŨ THANH THÀNH

Bài T5/305. *Cho tam giác ABC với góc A vuông và đường cao AH. Đường phân giác của góc BAH cắt BH tại E. Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đường thẳng AH tại F. Chứng minh rằng CF//AE.*

Lời giải. (Theo bạn *Trần Tấn Phong*, 7A, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**)



Chúng ta giải bài toán mạnh hơn : *Cho ΔABC có $\hat{A} > \hat{B}$. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $\widehat{HAC} = \widehat{ABC}$. Đường phân giác của góc $\widehat{BAH}$ cắt BH ở E. Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đường thẳng AH tại F. Chứng minh rằng CF//AE.*

Thật vậy vì $\widehat{CEA}=\widehat{CAE} = \hat{B}+\widehat{BAE}$ nên ΔCAE cân tại $C \Rightarrow CA = CE$ (1)

Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt MF ở K. Ta có :

$$\frac{BE}{EH}=\frac{MB}{KH}=\frac{MA}{KH}=\frac{FA}{FH} \quad (2)$$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong ΔABH thì được : $\frac{BE}{EH}=\frac{AB}{AH}$ (3)

Do $\Delta CAH \backsim \Delta CBA$ suy ra :

$$\frac{AB}{AH}=\frac{AC}{CH}=\frac{CE}{CH} \text{ (theo (1))} \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) $\Rightarrow \frac{FA}{FH}=\frac{CE}{CH}$ hay $\frac{AH}{FH}=\frac{EH}{CH}$, do đó : $AE//CF$ (đpcm). Lời giải cho bài T5/304 cũng tương tự như lời giải trên.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải bằng cách áp dụng định lí Mênêlauyt cho ΔABH với cát tuyến (MEF) và tính chất đường phân giác cho ΔABH để từ đó suy ra : $\frac{AH}{FH}=\frac{EH}{CH}$

2) Một số bạn nhận xét sai rằng : giả thiết ở bài ra phải là ΔABC vuông cân tại A, vì các bạn đã quan niệm : Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi (!). Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn : **Phú Thọ :** *Đỗ Duy Hưng, Lê Tiến Thành*, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, *Nguyễn Mạnh Hùng*, 9A3, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** *Nguyễn Thế Hùng*, 9C, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Kim Thuật*, 8A, THCS Yên lạc ; **Hà Nội :** *Vũ Nhật Minh*, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Mạnh Chiến, Lương Phú Khánh, Vũ Ngọc Linh*, 9A, *Đặng Ngọc Chiến, Phạm Huy Hoàng*, 9B, THCS NK Trần Phú ; **Hải Dương :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, *Phạm Trường Xuân*, 7/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương, *Nguyễn Quang Anh*; **Hưng Yên :** *Nguyễn Thùy Linh*, $9A^2$, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hà Tây :** *Trần Huyền Phương*, 7B6, THCS Lê Lợi, Tx. Hà Đông, *Ngô Thành Long*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Nam Định :** *Đinh Xuân Tuyên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Ninh Bình :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình ; **Thanh Hóa :** *Lê Thị Thu, Lữ Thị Mai*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** *Hồ Danh Chuẩn*, 7B, *Đào Lê Trung*, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, *Hồ Ngọc Kiên, Nguyễn Việt Hùng*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Thừa Thiên – Huế :** *Phan Lê Anh Minh*, 9_1, THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế ; **Quảng Nam :** *Phan Hồ Anh Thư*, 9/6, THCS Lê Quý Đôn, Thăng Bình ; **Khánh Hòa:** *Phạm Kiều Anh*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Tp. Nha Trang ; **Đắk Lắk :** *Ngô Thùy Dương*, $9A^1$, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột **Phú Yên :** *Nguyễn Võ Minh Toàn*, 9C, THCS Hòa Xuân Tây, Tuy Hòa...

HỒ QUANG VINH

Bài T6/305. *Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn các điều kiện sau :*

1) $\frac{a}{2002} > \frac{b}{d} > \frac{c}{2004}$ *với d là số nguyên dương nhỏ nhất có thể được.*

2) $\dfrac{a}{2002}-\dfrac{c}{2004}=\dfrac{2}{2002.2004}$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Phong Châu, **Phú Thọ**).

Từ 2) $\Rightarrow 1002(a-1) = 1001(c-1)$, vì $(1001, 1002) = 1$ nên $\begin{cases} a=1001k+1 \\ c=1002k+1 \end{cases}$ $(k \in N)$.

Thay vào 1) ta có

$$\frac{1}{2002} > \frac{2b-kd}{2d} > \frac{1}{2004} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $d \geq 2003$ vì nếu $d \leq 2002$ thì $0 < 2b - kd < 2 \Rightarrow 2b - kd = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1001} > \dfrac{1}{d} > \dfrac{1}{2002}$ vô lí. Với $d = 2003$ từ (3) ta có

$$1 < \frac{2003}{1002} < 2b - kd < \frac{2003}{1001} < 3$$

Suy ra $2b - kd = 2 \Rightarrow k$ chẵn, $k = 2t$. Vậy $b = td + 1 = 2003t + 1$.

Kết luận : $\begin{cases} a=2002t+1 \\ b=2003t+1 \\ c=2004t+1 \\ d=2003 \end{cases}, t \in N$

Nhận xét. Bài này được rất đông các bạn tham gia giải trong đó có nhiều bạn ở THCS. Các bạn có lời giải tốt bao gồm : *Bùi Ngọc Khôi*, 9A, THPT Trần Phú, **Hải Phòng** ; *Trần Hữu Hiếu*, 10T, THPT Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Bùi Ngọc Quỳnh*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định** ; *Nguyễn Hoàng Nguyên*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa** ; *Lê Hữu Phúc*, 11T1, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long** ; *Lê Mạnh Đức*, 11T, THPT Đào Duy Từ, **Thanh Hóa** ; *Nghiêm Văn Thơ*, THPT Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Nguyễn Thị Thanh Tú*, 10A, THPT chuyên **Vĩnh Phúc**; *Dương Bảo Nhân*, 9A, THCS Đại Hòa, **Quảng Trị**, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A, ĐHSP **Hà Nội**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/305. *Hỏi phương trình $x^2 = 100^{\sin x}$ có bao nhiêu nghiệm trên $[2\pi, 3\pi]$?*

Lời giải. Với $x > 0$ ta có $x^2 = 100^{\sin x} \Leftrightarrow x = 10^{\sin x} \Leftrightarrow \lg x = \sin x$. Xét hàm số $f(x) = \lg x - \sin x$ với $2\pi \leq x \leq 3\pi$.

Chú ý $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10} - \cos x = 0 \Leftrightarrow x.\cos x.\ln 10 = 1$. Xét hàm số $g(x) = x.\cos x$ với $2\pi \leq x \leq 3\pi$.

Ta thấy ngay rằng $g'(x) = \cos x - x.\sin x = 0$ có duy nhất một nghiệm x_o trên $(2\pi, 3\pi)$ và $2\pi < x_o < \dfrac{5\pi}{2}$, $g(x)$ đồng biến trên $(2\pi, x_o)$, $g(x)$ nghịch biến trên $(x_o, 3\pi)$. Hơn nữa $g(2\pi) = 2\pi > \dfrac{1}{\ln 10}$, $g(3\pi) = -3\pi < 0$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(2\pi, 3\pi)$.

Mặt khác $f(2\pi) = \lg(2\pi) > 0$, $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = \lg\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) - 1 < 0$, $f(3\pi) = \lg(3\pi) > 0$, nên ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm trên $[2\pi, 3\pi]$ (theo định lí Rôn).

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản thuộc "Ứng dụng của đạo hàm trong việc tính số nghiệm của phương trình". Tòa soạn nhận được lời giải của gần 100 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt : **Hà Nội :** *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, ĐHSP I ; **Hải Dương :** *Lê Đình Huy*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** *Phạm Khoa Thu Hương*, *Nguyễn Quang Khánh*, *Phạm Huy Tiến*, 11T, THPT Trần Phú ; **Nghệ An :** *Đinh Viết Sang*, 12A1, THPT Phan Bội Châu ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Trọng Hòa*, 10T, THPT Lam Sơn; **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT Lương Văn Chánh ; **Trà Vinh :** *Nguyễn Thị Thanh My*, 12A2, THPT Cầu Kè, ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/305. *Xét hàm $f : R^2 \to R$ thỏa mãn các điều kiện sau :*

1) $f(x, y) = f(y, x)$ với mọi $x, y \in R$.

2) $f(x, ky_1 + y_2) = kf(x, y_1) + f(x, y_2)$ với mọi $k, x, y_1, y_2 \in R$

3) $f(x, x) \geq 0$ với mọi $x \in R$ và $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Chứng minh rằng :

1) $[f(x, y)]^2 = f(x, x).f(y, y)$ với mọi $x, y \in R$.

2) $\sqrt{f(x+y, x+y)} \leq \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}$ với mọi $x, y \in R$.

Lời giải. (của đa số các bạn)

1) Từ điều kiện 2) với $y_1 = y_2 = y$ ta được $f(x, (k+1)y) = (k+1)f(x, y)$ hay $f(x, ky) = k(x, y)$ $\forall x, y, k \in R$. Từ đó suy ra :

$$f(x, y) = f(x, y.1) = y.f(x, 1) = y.f(1, x) = xyf(1, 1) \quad (*)$$

Vậy nên $f(x, x) = x^2 f(1, 1)$;

$$f(y, y) = y^2 f(1, 1) \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta thu được đẳng thức

$$|f(x, y)|^2 = f(x, x)\,f(y, y), \forall x, y \in R$$

2) Áp dụng (*) ta được :

$$f(x+y, x+y) = (x+y)^2 f(1, 1) \quad (***)$$

Từ (**) và (***) ta thu được đpcm.

Nhận xét. Tất cả các bạn giải câu 1 đều phát hiện ra và sửa dấu ≤ thành dấu =.

2) Đa số các bài giải gửi tới tòa soạn đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Bắc Ninh : *Nguyễn Thị Lương*, 9C, THCS Nguyễn Cao ; *Lê Duy Cường*, 11A, THPT Yên Phong, *Nguyễn Văn Thảo*, 12T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hà Nội :***Vũ Quang Thanh, Lê Hùng Việt Bảo*, 11AT, *Nguyễn Hữu Thuần*, 12A Lý, *Trần Anh Tuấn*, 12A2, ĐHKHTN, *Nguyễn Chí Hiệp*, *Nguyễn Hoàng Thanh*12A1, *Văn Anh Tuấn, Nguyễn Chí Hoàng*, 12A2, ĐHSP Hà Nội ; **Lâm Đồng :** *Nguyễn Trường Kha*, 12T THPT Thăng Long, Đà Lạt ; **Hòa Bình :** *Vũ Hữu Phương*, 12CT, THPT Hoàng Văn Thụ, *Nguyễn Nhất Sơn*, 10T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Nghệ An :** *Nguyễn Đức Minh*, 10A1, *Đinh Viết Sang*, 12A1, K29, THPT Phan Bội Châu, *Chu Quang Huy*, 11A, THPT Quỳnh Lưu ; **Phú Thọ :** *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Phong Châu, Phù Ninh ; *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT Hùng Vương ; **Bến Tre :** *Nguyễn Tiến Dũng*, 11T, THPT Bến Tre ; **Vĩnh Phúc :** *Đỗ Gia Nam*, 12A2, *Vũ Nhật Huy*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Quảng Trị :** *Lê Hải Dương*, 11B, *Trần Minh*, 11A, THPT Hải Lăng, *Nguyễn Hà Lam Phương*, 10T, *Hồ Sỹ Sáng*, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **Hải Phòng :** *Đường Hải Long*, 9B, *Tăng Vũ Đức*, 10T, *Lê Hải Yến, Trần Thị Tuyết Mai, Nguyễn Thu Trang, Phạm Khoa Thu Hương, Phạm Huy Tiến*, 11T, THPT NK Trần Phú ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Bùi Lê Trọng Thanh*, 10T, ĐHKHTN Tp. Hồ Chí Minh ; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Thắng*, 12T, THPT Lê Khiết; **Hải Dương :** *Lê Đình Huy, Phạm Văn Dương, Trần Quốc Hoàn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Khánh Hòa :** *Nguyễn Hoàng Nguyên*, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Đồng Nai :** *Lê Phương*, 12T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Bình Định :** *Lê Tôn Chánh*, 11t, THPT Lê Quý Đôn ; **Đồng Tháp :** *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 12T, THPT Sa Đéc, **Phú Yên :** *Phan Thành Nam*, 12T2, THPT Lương Văn Chánh; **Vĩnh Long :** *Võ Minh Tâm*, 11T1, THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Hà Tây :** *Nghiêm Ngọc Phương*, 11T1, THPT Nguyễn Huệ ; **Thanh Hóa :** *Trịnh Thành Kiên*, 9A1, THPT Trần Mai Ninh, *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1 ; **Cần Thơ :** *Thân Nguyên Hiệu* 10A1, *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lý Tự Trọng.

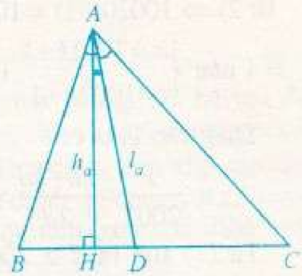
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/305. *Gọi R và r lần lượt là bán kính của đường tròn ngoại tiếp và của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi h_a, h_b, h_c theo thứ tự là độ dài các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C. Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đường phân giác hạ từ các đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng :*

$$\frac{h_a}{l_a}+\frac{h_b}{l_b}+\frac{h_c}{l_c} \geq 1 + \frac{4r}{R} \qquad (*)$$

Lời giải 1. (Dựa theo *Nguyễn Quốc Khánh*, 11 Toán, THPT NK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**).

Dựng đường cao AH và phân giác AD ; $AH = h_a$, $AD = l_a$. Trong mọi trường hợp, dễ dàng tính được : $\widehat{HAD} = \frac{1}{2}\left|\widehat{B} - \widehat{C}\right|$; từ đó suy ra : $\frac{h_a}{l_a} = \cos\frac{B-C}{2}$.



– Trước hết, để trình bày được thuận tiện, ta thay đổi kí hiệu : A_1, A_2, A_3 thay cho A, B,C và do đó : h_1, h_2, h_3 thay cho h_a, h_b, h_c ; l_1, l_2, l_3 thay cho l_a, l_b, l_c ; Các kí hiệu $\sum\limits_i$, $\prod\limits_i$ thay cho các tổng, tích mà trong đó vai trò A_1, A_2, A_3 là bình đẳng.

– Sau nữa, ta sử dụng các hệ thức quen thuộc sau trong tam giác $A_1A_2A_3$: $\frac{r}{R} = 4\prod\limits_{i=1}^{3}\sin\frac{A_i}{2} = \sum\limits_{i=1}^{3}\cos A_i - 1$, (1) ; $R \geq 2r \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{3}\sin\frac{A_i}{2} \leq \frac{1}{8}$ (2) (trong đó r và R là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$).

Vì $\frac{h_i}{l_i} = \cos\frac{A_j - A_k}{2}$, trong đó $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, $i = 1, 2, 3$ nên BĐT (*) cần chứng minh có dạng :

$$t = \sum_{i=1}^{3}\frac{h_i}{l_i} = \sum_{j\neq k=1}^{3}\cos\frac{A_j - A_k}{2} \geq 1 + 4\frac{r}{R}$$

Lại vì :

$$\cos\frac{A_j - A_k}{2} = \cos\frac{A_j + A_k}{2} + 2\sin\frac{A_j}{2}\sin\frac{A_k}{2}$$

$$= \sin\frac{A_i}{2} + 2\sin\frac{A_j}{2}\sin\frac{A_k}{2}$$ nên ta được :

$$t = \sum_i \sin\frac{A_i}{2} + 2\sum_{j\neq k}\sin\frac{A_j}{2}\sin\frac{A_k}{2} \qquad (**)$$

Ngoài ra, từ

$$\cos A_j + \cos A_k = 2\cos\frac{A_j + A_k}{2}\cos\frac{A_j - A_k}{2}$$

$$\leq 2\cos\frac{A_j + A_k}{2} = 2\sin\frac{A_i}{2}$$ và từ (1) ta lại được :

$$\sum_i \sin\frac{A_i}{2} \geq \sum_i \cos A_i = 1 + 4\prod_i \sin\frac{A_i}{2} = 1 + \frac{r}{R} \quad (3)$$

Mặc khác, theo BĐT Côsi, ta có :

$$2\sum_{j\neq k}\sin\frac{A_j}{2}\sin\frac{A_k}{2}\ge 2\left[3\sqrt[3]{\prod_i \sin^2\frac{A_i}{2}}\right] \quad (4)$$

Đối chiếu (2), (4) và (1) ta được :

$$2\sum_{j\neq k}\sin\frac{A_j}{2}\sin\frac{A_k}{2}\ge 12\prod_i\sin\frac{A_i}{2}=3\frac{r}{R} \quad (5)$$

Cuối cùng ; từ (3), (5) và (**) ta được BĐT (*) cần tìm. Dấu đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra đồng thời ở (2), (3) và (5), nghĩa là khi và chỉ khi $A_1 = A_2 = A_3$ tức tam giác $A_1A_2A_3$ là đều.

Lời giải 2. (của *Bùi Thiên Kim*, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**).

– Trước hết, cũng như lời giải 1, thiết lập các hệ thức :

$$\frac{h_a}{l_a}=\cos\frac{B-C}{2}\ ;\ \frac{h_b}{h_c}\cos\frac{C-A}{2},\ \frac{h_c}{l_c}=\cos\frac{A-B}{2}.$$

– Sau nữa, sử dụng hệ thức quen thuộc (1), BĐT (*) cần chứng minh có dạng một BĐT lượng giác sau đây (trong hình tam giác) :

$$t=\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\ge$$

$\ge 1+16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (*') trong đó A, B, C là các góc của một tam giác ABC nào đó. Do $0\le\cos\frac{A-B}{2},\ \cos\frac{B-C}{2},\ \cos\frac{C-A}{2}\le 1$ nên ta được:

$$t\ge\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{C-A}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)\right]\ ;\ \text{(i)}$$

Bây giờ sử dụng hệ thức lượng giác quen thuộc sau đây để biến đổi vế phải của (i) :

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=$$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.\cos\frac{\lambda+\alpha}{2}\ ;\quad \text{(ii)}$$

Thay $\alpha = B - C$, $\beta = C - A$, $\gamma = A - B$ và $\alpha+\beta+\gamma = 0$ vào (i) thì từ (ii) ta được BĐT sau :

$$t\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[4\cos\frac{(B-C)+(C-A)}{2}.\cos\frac{(C-A)+(A-B)}{2}.\right.$$

$$\left..\cos\frac{(A-B)+(B-C)}{2}-\cos 0\right]\text{, hay là :}$$

$$t\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left[4\cos\frac{B-A}{2}\cos\frac{C-B}{2}\cos\frac{A-C}{2}-1\right]$$

$$=1+2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\ ;\ \text{(iii)}$$

Mặt khác, ta lại có :

$$8\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$$

$$=8\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=8\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{B+C}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{C+A}{2}$$

$= (\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)$

$\ge 2\sqrt{\sin A\sin B}\,.2\sqrt{\sin B\sin C}\,.2\sqrt{\sin C\sin A}$

$= 8\sin A\sin B\sin C$

$$=64\left(\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\right).\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)\ \text{(iv)}$$

Từ đó, đối chiếu hai vế của (iv), ta được :

$$2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\ge 16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\qquad \text{(v)}$$

Và từ (v) ta thu được BĐT (*), cũng có nghĩa là BĐT (*) được chứng minh.

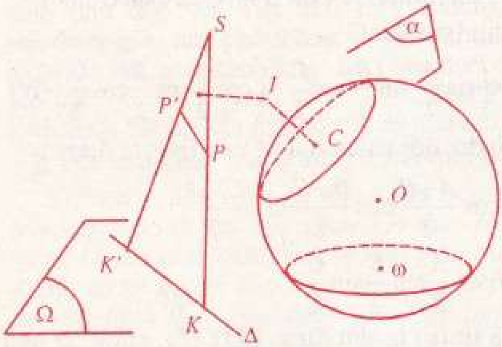
Nhận xét. 1) Cả hai lời giải trên đây đều tìm cách chuyển một BĐT liên quan đến độ dài một số yếu tố trong hình tam giác (h_a, l_a, v.v..., r, R) về một BĐT lượng giác giữa các góc trong một tam giác sau khi đã sử dụng hệ thức (1) liên hệ giữa các bán kính r, R của các đường tròn nội, ngoại tiếp một tam giác và các góc của tam giác. Cả hai lời giải đều thực hiện một số phép biến đổi lượng giác tương đương hoặc đều sử dụng BĐT Côsi. Tuy nhiên, sau khi đã chuyển nhanh chóng từ (*) về (*') thì lời giải 2 chỉ sử dụng thêm một hệ thức lượng giác nữa (hệ thức (ii)) và sử dụng BĐT Côsi chỉ đối với hai số dương mà thôi. Vì vậy, lời giải 2 là lời giải ngắn gọn hơn và chỉ đòi hỏi áp dụng những kiến thức rất cơ bản về hình học và lượng giác. Nhiều lời giải khác thường trình bày rườm rà, không gọn.

2) Ngoài hai bạn nói trên, các bạn sau đây cũng có lời giải gọn gàng. **Hà Nội :** *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, PTCTT, ĐHSP Hà Nội ; *Vũ Quang Thanh*, 11A Toán, PTCTT, ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Văn Trình*, 12 chuyên Hóa, THPT NK Hàn Thuyên ; **Phú Thọ :** *Lê Việt Hà*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Hải Dương :** *Nguyễn Thế Lộc*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng:** *Phạm Khánh Toàn*, 10Toán, THPT NK Trần Phú ; **Hòa Bình :** *Vũ Hữu Phương*, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Thanh Hóa :** *Nguyễn Trọng Hoài*, *Nguyễn Ngọc Tú*, 10T, THPT Lam Sơn, *Nguyễn Hùng Cường*, 11A, THPT Thiệu Hóa; **Quảng Trị :** *Nguyễn Văn Việt*, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** *Phạm Lê Thịnh*, 12T, THPT Lê Khiết ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần Võ Huy*, 12T, THPT NK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/305. *Trong không gian cho một đường tròn (ω) không nằm trên mặt phẳng (α). Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa (ω) và mặt phẳng (α). Một mặt cầu thay đổi (O) luôn đi qua đường tròn (ω) và cắt mặt phẳng (α). Gọi I là tâm mặt cầu đi qua điểm S và giao tuyến của (α) và (O). Chứng minh rằng điểm I chạy trên một đường thẳng cố định.*

Lời giải 1. (dựa theo lời giải của bạn *Nguyễn Võ Vĩnh Lộc*, 12T, THPT Sa Đec, **Đồng Tháp**)



Ta kí hiệu ω là tâm của đường tròn (ω), (Ω) là mặt phẳng chứa đường tròn (ω), (*C*) là đường tròn giao tuyến của (α) và (*O*), *C* là tâm của (*C*), (*I*) là mặt cầu tâm *I* đi qua *S* và (*C*).

Trường hợp 1 : (α), (Ω) song song với nhau

Dễ thấy *I* chạy trên đường thẳng qua (ω), vuông góc với mặt phẳng (Ω).

Trường hợp 2 : (α) và (Ω) không song song

Giả sử Δ là giao tuyến của mp(α) với mp(Ω). Trên Δ lấy hai điểm cố định phân biệt *K*, *K'* (h. 1). Gọi *P*, *P'* là các giao điểm của *SK*, *SK'* với mặt cầu (*I*) ($P \neq S, P' \neq S$).

Ta thấy : $\overline{KL}.\overline{KS} = \mathscr{P}_{K/(I)} = \mathscr{P}_{K/(C)} = \mathscr{P}_{K/(O)} = \mathscr{P}_{K/(\omega)} \Rightarrow \overline{KP} = \dfrac{\mathscr{P}_{K/(\omega)}}{\overline{KS}}$ không đổi $\Rightarrow P$ cố định.

Tương tự như trên, *P'* cố định.

Vậy : *I* luôn chạy trên trục của đường tròn ngoại tiếp Δ *SPP'* cố định (đpcm)

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó. Tuy nhiên chỉ có 27 bạn tham gia giải, một bạn giải sai. Nói chung các bạn trình bày chưa tốt. Nhiều bạn vẽ hình quá phức tạp.

2) Một số bạn giải bằng phương pháp tọa độ cũng có lời giải đúng.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bắc Ninh : *Phạm Thái Sơn*, 11T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT NK Hùng Vương ; **Đồng Nai:** *Lê Phương*, 12T1, THPT NK Lương Thế Vinh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Võ Huy*, 12T, THPT NK Lê Hồng Phong ; **Cần Thơ :** *Mạch Nguyệt Minh*, 12A1, THPT Lí Tự Trọng ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Văn Trung*, 12T, THPT Lê Khiết ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Trọng Bắc*, 11B1, THPT Lê Văn Hưu ; **Nghệ An:** *Nguyễn Việt Đức*, *Hoàng Tuấn Anh*, 11A1, THPT Phan Bội Châu ; **Hà Nội :** *Phạm Trọng Tiến*, *Nguyễn Hoàng Thanh* và *Nguyễn Chí Hiệp*, 12A1, *Nguyễn Chí Hoàng*, 12A2, khối PTCT–Tin ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/305. *Một con lắc lò xo nằm ngang, lò xo có khối lượng không đáng kể và độ cứng k = 100N/m, vật nặng có khối lượng m = 400g. Chọn trục Ox cùng phương với trục lò xo, O là vị trí cân bằng. Tại thời điểm t = 0 lúc con lắc*

đang cân bằng người ta tác dụng lên m một lực F = 2(N) theo chiều dương của trục trong thời gian 0,3s. Viết phương trình dao động của vật. Bỏ qua ma sát.

Lời giải. – Xét khoảng thời gian $0 \leq t \leq 0{,}3$s. Khi vật có tọa độ *x*, theo định luật II Niutơn : $F - kx = ma = mx'' \Rightarrow X'' + \omega^2 X = 0$ với $X = x - \dfrac{F}{k}$, $\omega^2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 5\sqrt{10}$ rad/s. Lúc $t = 0$, $x = 0$ và $v = x' = 0$. Từ đó tìm được : $X = A\sin(\omega t + \varphi)$, với $A = \dfrac{F}{k} = 2$cm ; $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Do đó ta có phương trình dao động :

$$x = 2 + 2\sin\left(5\sqrt{10}t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (cm)} \qquad (1)$$

– Xét khoảng thời gian $t \geq 0{,}3$s, khi đó $F = 0$. Áp dụng định luật II Niutơn : $-kx = a = mx'' \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ (2). Từ điều kiện liên tục, theo (1) ta có : tại thời điểm $t = 0{,}3s$, $x_1 = 2$cm và $v_1 = -10\sqrt{10}$ (cm/s). Do đó từ (2) tìm được : $A_1 = 2\sqrt{2}$ (cm) và $\varphi_1 = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Vậy phương trình dao động của vật với $t \geq 0{,}3$s là $x_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(5\sqrt{10}t - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đáp số đúng :

Phú Thọ : *Nguyễn Kim Ngọc*, 12B1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Hải Dương :** *Mạc Trường Giang*, 11B5, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Hải Phòng :** *Đinh Ngọc Tùng*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú ; **Quảng Ngãi :** *Nguyễn Văn Thắng*, 12T, THPT chuyên Lê Khiết ;

Bình Định : *Đinh Thành Vinh*, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Bắc Giang :** *Nguyễn Thị Quyên*, THPT dân tộc nội trú tỉnh Bắc Giang ; **Nghệ An :** *Trần Quang Vũ*, 12A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; *Lê Đức Tuấn Sĩ*, 11A, THPT Nam Đàn I ; **Vĩnh Phúc :** *Hoàng Vĩnh Hưng*, 12A3, *Nguyễn Ngọc Chinh*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh :** *Đào Đức Nguyên*, 12A1, THPT Tiên Du I.

MAI ANH

Bài L2/305. *Hai quả cầu nhỏ có điện tích và khối lượng lần lượt là q_1, m_1 và q_2, m_2. Ban đầu chúng có vận tốc giống nhau về hướng và độ lớn. Chúng bắt đầu chuyển động vào trong một điện trường đều. Sau 1 khoảng thời gian nào đó thì thấy hướng chuyển động của quả cầu thứ nhất quay đi góc 60^o và độ lớn của nó giảm 2 lần, còn hướng chuyển động quả cầu thứ hai thì quay đi góc 90^o.*

a) Hỏi vận tốc quả cầu thứ hai tăng hay giảm bao nhiêu lần ?

b) Xác định $k_2 = \dfrac{q_2}{m_2}$ theo $k_1 = \dfrac{q_1}{m_1}$

Lời giải. Kí hiệu $\overrightarrow{v_o}$ là vận tốc của hai quả cầu khi chúng bắt đầu đi vào trong điện trường. Sau khoảng thời gian Δt, quả cầu 1 và 2 có vận tốc $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ tương ứng. Theo đề bài, $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_o}\right) = 60^o$, $v_1 = \dfrac{v_o}{2}$ và $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_o}\right) = 90^o$. Chọn hệ trục tọa độ xOy với Ox song song và ngược hướng với $\overrightarrow{v_o}$.

Xét quả cầu 1 ta có :

$$a_{1x} = \frac{q_1 E_x}{m_1} = \frac{-\dfrac{v_o}{2}\cos 60^o + v_o}{\Delta t} \quad (1),$$

và $$a_{1y} = \frac{q_1 E_y}{m_2} = \frac{\dfrac{v_o}{2}\sin 60^o}{\Delta t} \quad (2)$$

Xét quả cầu 2 ta có :

$$a_{2x} = \frac{q_2 E_x}{m_2} = \frac{0-(-v_o)}{\Delta t} \quad (3)$$

và $$a_{2y} = \frac{q_2 E_y}{m_2} = \frac{v_2 - 0}{\Delta t} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) tìm được : $v_2 = \dfrac{v_o}{\sqrt{3}}$ (vận tốc quả cầu 2 giảm $\sqrt{3}$ lần), và $k_2 = \dfrac{4}{3}k_1$.

Nhận xét. Các em có lập luận chặt chẽ và đáp số đúng :

Hà Nội : *Phạm Việt Đức*, 10A chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Yên Bái :** *Phạm Long Thành*, 11E, THPT Trần Nhật Duật, Yên Bình ; **Vĩnh Phúc :** *Chu Anh Dũng*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh :** *Nghiêm Văn Thơ*, 11A1, THPT Yên Phong I ; **Bắc Giang :** *Lê Nho Thủy*, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên.

MAI ANH

Kết quả : TÌM TIẾP TUYẾN

Các bạn đã bình luận rất đúng : thí sinh đó không phân biệt được tiếp tuyến **đi qua** một điểm với tiếp tuyến **tại** một điểm.

Ta thấy $y = 0$ chỉ là PT tiếp tuyến với (C) **tại** gốc tọa độ mà thôi. Mà như các bạn đã biết đề bài yêu cầu lập PT tiếp tuyến với (C) **đi qua** O (0, 0). Chỉ vì hiểu đầu bài không đúng mà thí sinh nọ đã bỏ sót mất hai tiếp tuyến. Vậy là nhầm một từ mà ... sai cả bài phải không các bạn ?

Lời giải đúng. PT đường thẳng (Δ) qua O có hệ số góc k là $y = kx$. (Δ) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ PT sau có nghiệm : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 = kx & (1) \\ 2x^3 - x = k & (2) \end{cases}$

Giải ra ta được : $x = 0$, $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy có 3 tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện bài toán :

$(\Delta_1) : y = 0$; $(\Delta_2) : y = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}x$; $(\Delta_3) : y = \dfrac{\sqrt{3}}{9}x$.

Nhận xét. 1) Lưu ý rằng một điểm M cho trước nằm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$ (lưu ý các hàm bậc 3, bậc 4, hàm phân thức). Vì vậy có thể tồn tại nhiều tiếp tuyến **đi qua** M, ngoài tiếp tuyến với đồ thị tại chính điểm đó.

(Xem tiếp trang 24)

THÁP NHIỀU TẦNG

Hãy xếp những cái tháp kiểu như sau, càng nhiều tầng càng tốt với điều kiện mỗi tầng chỉ là một từ hoặc một khái niệm toán học, trong đó mỗi ô chứa đúng một chữ cái (có dấu hoặc không dấu).

Nào xem tháp của bạn nào xây cao nhất. Sau đây là một ví dụ.

Ô
VẾ
TÂM
ĐỈNH
VUÔNG
NGHIỆM
BÁNKÍNH
VÒNGTRÒN
LẬPPHƯƠNG
TƯƠNGĐƯƠNG
NGUYÊNDƯƠNG
TAMGIÁCVUÔNG
TRUNGBÌNHCỘNG
TIẾPTUYẾNCHUNG
ƯỚCCHUNGLỚNNHẤT
NGUYÊNTỐCÙNGNHAU

VKT

Giải đáp :

Ô CHỮ NGÀY TẾT

VERTEX
VALUE
ABSCISSA
ANGLE
SQUARE
CALCULATE
QUANTITY
NUMERATOR
DEDUCE
SIDE

Cột dọc thêm các dấu vào sẽ được XUÂN QUÝ MÙI. Các từ theo hàng ngang là :

vertex	: đỉnh
value	: giá trị
abscissa	: hoành độ
angle	: góc
square	: hình vuông, bình phương, êke, bậc hai
calculate	: tính
quantity	: số lượng
numerator	: tử số
deduce	: suy ra
side	: cạnh, phía, mặt bên

Các bạn khai bút đầu xuân đều sẽ học giỏi nhưng may mắn hơn cả là các bạn sau : *Trần Kim Thịnh*, lớp 7A5, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên, **Thái Nguyên** ; *Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc** ; *Hoàng Thị Hường*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa** ; *Mai Văn Thanh*, 11D, Thạch Hãn, Thuận Hòa, Tp. Huế, **Thừa Thiên – Huế** ; *Phan Joli*, 11B9, THPT số 1 Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi** ; *Trần Thị Thảo Lành*, 11A4, THPT Hoài Ân, **Bình Định**.

BÍNH NAM HÀ

Giải đáp :

CÁC NHÀ TOÁN HỌC TUỔI MÙI

Xin nêu ra đây tên những nhà toán học sinh năm dương lịch ứng với năm Mùi mà nhiều bạn đọc quen biết :

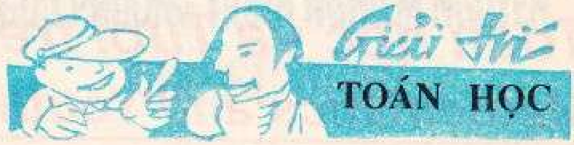
Tartaglia N.F, Ý,	(1499-1557)	Kỷ Mùi
Képler J., Đức,	(1571-1630)	Tân Mùi
Bernoulli Johann, Thụy Sĩ,	(1667-1748)	Đinh Mùi
Moivre A., Anh gốc Pháp,	(1667-1754)	Đinh Mùi
Ampère A.M., Pháp,	(1775-1836)	Ất Mùi
Horner W.G., Anh,	(1787-1837)	Đinh Mùi
Galois E., Pháp,	(1811-1832)	Tân Mùi
Kronecker L., Ba Lan,	(1823-1891)	Quý Mùi
Eisenstein F.G.M, Đức,	(1823-1852)	Quý Mùi
Zolotarev E.I., Nga,	(1847-1878)	Đinh Mùi
Hölder L.O., Đức,	(1859-1937)	Kỷ Mùi
Zermelo E.F.F, Đức,	(1871-1953)	Tân Mùi
Nevanlinna R.H., Phần Lan	(1895-1980)	Ất Mùi

Ngoài ra còn nhiều nhà toán học khác tuổi Mùi có các công trình về toán học cao cấp.

Xin gửi tặng phẩm tới các bạn :

Đinh Thành Quang, 8A5, THCS Quang Trung, Quy Nhơn, **Bình Định**, *Đường Hải Long*, 9B, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**, *Lê Quốc Khánh*, 10A1, THPT Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**, *Mai Thanh Văn*, 110 Thạch Hãn, Thuận Hòa, Huế, **Thừa Thiên Huế**.

AN MINH



Giải đáp bài :

NGÀY THỨ MẤY TRONG NĂM 2003

Gọi x_k là số cần nhớ của tháng k. Do tính theo mod7 nên $1 \leq x_k \leq 7$ (thay số dư 0 bằng 7). Với $k = 1$ thì có $x_1 = 3$. Ngày cuối tháng 1 là 31. Tính $31 + 3 = 34$, lấy 34 chia cho 7 được dư 6. Vậy 31/1 là thứ 6, suy ra 1/2 là thứ bảy sẽ ứng với số dư 0. Ta có PT đồng dư : $1 + x \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x = 6$. Tiếp tục tính ngày cuối cùng của các tháng ta được dãy số cần nhớ thể hiện qua bảng sau

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số ngày trong tháng	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31
Số cần nhớ	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

Có nhiều câu thần chú để nhớ dãy số sau, chẳng hạn :

3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
Ba	Sáu	Sáu	Hai	Tư	Không	Hai	Năm	Một	Ba	Sáu	Một
Ba	say	sưa	học	toán	không	hề	nhờ	mấy	bài	soạn	mẫu

Vì chỉ có 14 kiểu lịch (dương lịch) khác nhau (xem bài *Tính tuần hoàn trong dương lịch của tác giả Nguyễn Việt Hải, THTT số 282 tháng 12/2000*) nên có tất cả **14** dãy số đáng nhớ cho các năm dương lịch.

Nhận xét. Cách tính trên đơn giản, nhưng thực chất cũng là cách tính như ở bài *Tờ lịch trên một ngón tay của tác giả Xuân Trung*, THTT số 283 (1/2001). Cách tính này lợi dụng *số dư k trùng với thứ k (mod 7)*. Các bạn sau có lời giải tốt, tìm ra câu *thần chú* hay, dễ nhớ :

Bắc Ninh : *Nguyễn Minh Tháp*, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ ; **Hải Phòng :** *Phạm Ngọc Sơn*, 10C2, THPT Ngô Quyền ; **Thanh Hóa :** *Hoàng Kiên Trung*, 12T1, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Đàm Thanh Thủy*, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Phú Yên :** *Võ Quang Đảm*, 12A2, THPT Nguyễn Huệ, Tx. Tuy Hòa.

HỒNG QUANG

DÊ CON ĐI CHƠI XUÂN NĂM MÙI

Ngày xuân có một chú dê con mải chơi đi mãi vào rừng sâu. Trời gần tối dê con mới sực nhớ ra cần phải về nhà ngay. Nhưng nó không biết mình đang ở đâu. Đường rừng chằng chịt. Dê con không còn biết cần đi như thế nào để về đến nhà. Tại bất kì vị trí nào ở trong rừng nó chỉ còn nhận ra là nó đã tới chỗ đó chưa và nhớ đã mấy lần đi qua chỗ đó.

Bạn có thể mách cho dê con làm cách nào quay về nhà không ?

VŨ ĐÌNH HÒA
(Hà Nội)

SAI LẦM Ở ĐÂU *(Tiếp trang 21)*

2) Các bạn sau có lời phân tích sai lầm tốt, gửi bài sớm về TS : **Hà Tây :** *Đặng Thùy Trang*, 12 Anh 1, THPT Nguyễn Huệ, Tx. Hà Đông ; **Hòa Bình :** *Lê Hồng Nhung*, 11 chuyên tin, THPT Hoàng Văn Thụ, Tx. Hòa Bình ; **Nam Định :** *Trần Thị Họa My*, 12H, THPT Giao Thủy A ; **Phú Yên :** *Nguyễn Ngọc Sơn*, 12T1, THPT Lương Văn Chánh, Tx. Tuy Hòa ; **Đồng Tháp :** *Trần Vinh Sơn*, 12TH, THPT Tx. Cao Lãnh.

NGỌC HIỂN

MỘT LỜI GIẢI LẠ LÙNG !

Khi giải các bài toán bằng cách lập phương trình, đôi khi gặp những lời giải lạ lùng làm cho không ít người lúng túng ! Ví dụ có bài toán : *Tìm một số gồm hai chữ số có các tính chất : Chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị là 4, nếu đảo ngược thứ tự các chữ số của số đó thì số mới tạo thành lớn hơn số ban đầu là 27.*

Lời giải. Gọi x là chữ số hàng chục, y là chữ số hàng đơn vị. Ta lập được hệ PT :

$$\begin{cases} x = y - 4 & (1) \\ (10y + x) - (10x + y) = 27 & (2) \end{cases}$$

Từ (1), (2) có $10y + (y-4) - [10(y-4) + y] = 27$. Sau khi rút gọn ta được $4 = 3$ (!).

Vì sao lại như thế nhỉ ?

NGUYỄN VĂN THIÊM
(Hà Nội)

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 40
Số 309 (3-2003)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhoctt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Hoàng Hân – Giải phương trình nghiệm nguyên nhờ sử dụng tính chất số nguyên tố

2 Một số giải thưởng Toán học năm 2002

3 Hướng dẫn giải đề thi toán vào lớp 10 khối PTCTT – ĐH Vinh năm 2002

5 Đề thi tuyển sinh môn toán lớp 10 THPT chuyên Lê Hồng Phong Tp. Hồ Chí Minh năm 2002

6 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Thế Thạch – Đề trắc nghiệm môn toán

8 Đề thi tuyển sinh đại học của Bộ Quốc phòng - khối D - năm 2002

9 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preperation**
Đặng Vũ Hà – Giúp bạn tự ôn thi. Đề tự ôn thi số 1.

10 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**
Lê Xu – Trở lại định lí lớn Fermat

11 **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems**
Ngô Việt Trung – Bài số 61

12 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/309, ..., T12/309, L1, L2/309

14 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 305

21 **Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistakes ?**

22 **Câu lạc bộ - Math Club**

23 **Giải trí toán học – Math Recreation**

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

SÀNG NGUYÊN TỐ TRÊN BẢNG SỐ BẬC THANG

Ta đã biết trong THTT số 306 (12/2002) nếu đặt tất cả các hình vuông V_k (k = 2, 3...) phủ kín bảng số bậc thang kiểu 2 (h. 1) có hữu hạn hàng và cột thì tìm được mọi bội số của k trong bảng số đó. Xóa hết các bội số này ta còn lại các số nguyên tố, gọi là sàng nguyên tố trên bảng số bậc thang kiểu 2. Ở bìa 1 thể hiện sàng nguyên tố này, đồng thời có đánh dấu thêm các số nguyên tố ở phía trên bên phải bảng số bậc thang.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
17	18	19	20	21	22	23	24	25	20	21	
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	

Hình 1

Dành cho bạn đọc

Bạn hãy tìm các biểu thức $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$ mà các giá trị của nó chứa các số nguyên tố (hợp số) liên tiếp thẳng hàng (xem bìa 1) khi x lấy các giá trị nguyên dương liên tiếp trong một khoảng nào đó.

Giải đáp : TÌM BỘI SỐ TRÊN BẢNG SỐ BẬC THANG

Trong bảng số bậc thang kiểu 2 (h. 1) kí hiệu (m, n) là ô ở cột thứ m (từ trái sang) và hàng thứ n (từ trên xuống) và gọi số ở ô (m, n) là $S(m, n)$. Nhận xét rằng ô cuối cùng bên phải hàng thứ $n-1$ và thứ n của bảng kiểu 2 theo thứ tự là $(n-1)^2$ và n^2, do đó $S(m, n) = (n-1)^2 + m$. Hàng thứ n có $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ ô nên xét hình vuông V_k mà ở bên trái có p hình V_k và ở phía trên có q hình V_k ($k > 1$). Ô (x, y) ở cột x, hàng y của hình V_k là ô (m, n) của bảng số bậc thang với $m = pk + x$, $n = qk + y + 1$ (hàng thứ nhất có 1 ô nằm phía trên các hình V_k).

Từ đó số ở ô (x, y) của hình V_k đang xét bằng $S(m, n) = (\mathrm{q}k + y)^2 + pk + x = T + R$, trong đó $T = q^2k^2 + 2qyk + pk = k(q^2k + 2qy + p)$ chia hết cho k và $R = x + y^2$. Vậy $S(m, n) \vdots k \Leftrightarrow R \vdots k$.

1) Ô $(k-1, 1)$ của V_k có $R = k - 1 + 1^2 = k$

Ô $(k-1, k-1)$ của V_k có $R = k - 1 + (k-1)^2 = k(k-1)$

Ô (k, k) của V_k có $R = k + k^2 = k(k+1)$

suy ra số ở các ô này đều là bội của k.

2) Mỗi hàng của V_k có k số liên tiếp nhau nên mỗi hàng đó có đúng 1 số chia hết cho k.

3) Giả sử trong V_k bỏ hàng thứ k thì hai ô đối xứng với nhau qua trục nằm ngang có dạng :

$(x, m-r)$ và $(x, m+r)$ $(1 \le r \le m-1)$ khi $k = 2m$,

$(x, m-r)$ và $(x, m+r+1)$ $(0 \le r \le m-1)$ khi $k = 2m+1$

Dễ dàng thấy với $k = 2m$ thì $\left(x+(m-r)^2\right) \vdots k \Leftrightarrow \left(x+(m+r)^2\right) \vdots k$

với $k = 2m+1$ thì $\left(x+(m-r)^2\right) \vdots k \Leftrightarrow \left(x+(m+r+1)^2\right) \vdots k$

Xin gửi tặng phẩm cho các bạn sau :

1) *Nguyễn Đình Minh*, 12/21 THPT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng

2) *Phạm Tiến Dũng*, thôn 12, khuyến Nông, Triệu Sơn, Thanh Hóa

3) *Trần Tiến Hiếu*, 10T, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh

4) *Trần Tiến Hoàng*, hòm thư 3CB–76 Long Thành, Đồng Nai.

5) *Phạm Việt Đức*, 10A Lý ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

PHI PHI

CHÚC MỪNG GS NGÔ THÚC LANH THƯỢNG THỌ 80 TUỔI

Ngày 22/2/2003 Khoa Toán trường ĐHSP Hà Nội đã tổ chức cuộc gặp mặt các thế hệ thầy trò nhân dịp GS Ngô Thúc Lanh tròn 80 tuổi. Sau lời giới thiệu chúc mừng của Ban GH nhà trường, của Khoa Toán là những lời chúc mừng nồng nhiệt GS Ngô Thúc Lanh của các bạn bè, đồng nghiệp, của đại diện các cơ quan Vụ, Viện thuộc Bộ GD và ĐT, Nhà xuất bản Giáo dục, Viện Toán học Việt Nam, ... Đồng chí Trần Đình Hoan, UV Bộ Chính trị BCHTƯ Đảng đã chúc mừng và tặng hoa GS Ngô Thúc Lanh. Rất nhiều thế hệ học trò khoa Toán trường ĐHSP Hà Nội hiện là cán bộ lãnh đạo ở các Sở GD-ĐT, các trường THPT, ... đã về dự và chúc thọ thầy. Thay mặt tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Trưởng ban biên tập Nguyễn Việt Hải đã tặng thầy bức trướng, ghi nhớ công lao của GS Ngô Thúc Lanh, một trong những người sáng lập và tích cực cộng tác với Tạp chí nhiều năm. NGND Ngô Thúc Lanh đã phát biểu ôn lại những kỉ niệm sâu sắc trong cuộc đời giảng dạy, công tác. Tòa soạn THTT xin trích đăng dưới đây bài phát biểu của GS Vũ Tuấn, nguyên Hiệu trưởng trường ĐHSP Hà Nội.

"Đầu tiên anh dạy tại trường Trung học kháng chiến Chu Văn An ở Việt Bắc, bậc học cao nhất ở chiến khu lúc ấy. Thời bấy giờ, trường ở trong lòng dân, thầy, trò ở nhà dân, rồi mới tự mình xây dựng trường sở và nơi ăn chốn ở riêng. Nhiều môn học, nhất là những môn học tự nhiên, các bài giảng chỉ nhờ vào trí nhớ của thầy và một vài quyển sách tiếng Pháp ngẫu nhiên có được, nhưng nhà trường đã hoạt động hết sức hăng hái, nghiêm túc và hiệu quả. Kết thúc khóa học mỗi người nhận một nhiệm vụ mới : vào công binh xưởng, ra mặt trận, vào địch hậu... Anh Lanh được điều động sang dạy học tại Khu học xá Trung ương ở Nam Ninh - Trung Quốc.

Hòa bình lập lại (1954) các trường đại học non trẻ của ta ra đời. Anh lại là một trong những người xây nền móng cho cả hệ thống đại học Việt Nam sau này. Cùng với các giáo sư Lê Văn Thiêm, Nguyễn Thúc Hào, Hoàng Tụy, Nguyễn Cảnh Toàn... giáo sư Ngô Thúc Lanh đã tham gia xây dựng chương trình, viết giáo trình và giảng dạy rất nhiều môn toán khác nhau. Những người thầy đại học đầu tiên ấy đã đào tạo nhiều lớp cán bộ giảng dạy và nghiên cứu Toán học làm nòng cốt cho các trường đại học và các viện nghiên cứu ngày nay.

Từ năm 1956, hai GS Ngô Thúc Lanh và Nguyễn Cảnh Toàn được giao nhiệm vụ xây dựng khoa Toán, trường ĐHSP Hà Nội. Từ đó GS Ngô Thúc Lanh đã cần mẫn làm việc, giảng dạy đào tạo lớp cán bộ toán cho trường ĐHSP Hà Nội. Không được cử đi đào tạo chính quy ở nước ngoài như nhiều người khác, thầy phải tự học, tự đào tạo để hoàn thành mọi nhiệm vụ lúc nào cũng rất cao, rất nặng nề.

Những năm thầy làm chủ nhiệm Khoa là những năm Khoa Toán ĐHSP Hà Nội làm việc nghiêm túc nhất, dạy dỗ chuẩn mực, học tập và lao động hăng say nhất, mặc dù đó là những năm gian khổ của thời bom đạn chống Mỹ.

Thầy đã dạy nhiều nghìn giờ, viết nhiều nghìn trang sách và đã có nhiều nghìn học trò.

Tận tụy, khiêm nhường và trung thực là bài học lớn thầy để lại trong lòng học trò.

Thời gian trôi đi...

Ngày nào còn là anh thanh niên sung sức, nhiệt huyết, hôm nay giáo sư Ngô Thúc Lanh đã bước sang tuổi 80. Còn mạnh khỏe, minh mẫn ; vẫn hăng hái luyện tập, đọc và viết. Đó là phúc ấm của riêng thầy.

Mỗi người có một cuộc đời. Có những người danh vọng chói chang. Rất nhiều cuộc đời khác trôi qua bình lặng, không ồn ào. Bình dị, liêm khiết và cần cù là cuộc đời nhà giáo. Thanh thản, hồn hậu là tâm hồn nhà giáo.

Kính chúc thầy cô mạnh khỏe, sống lâu an hưởng tuổi già đầm ấm trời cho".

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT11M3

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2003

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng