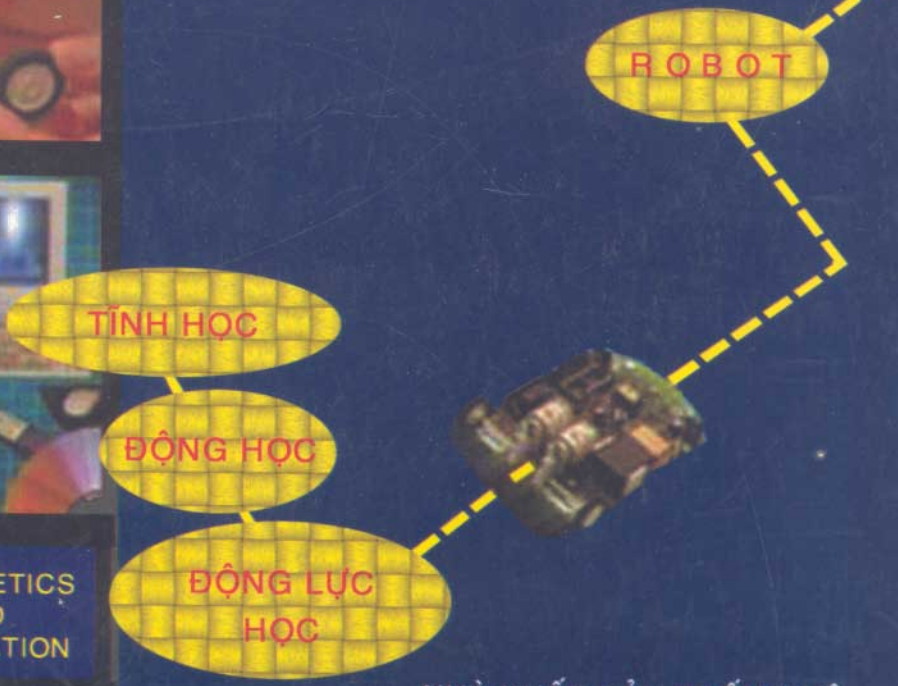
Biên Dịch: TRẦN THẾ SAN
Hiệu Đính: TS NGUYỄN TIẾN DŨNG
Khoa Cơ Khí Chế Tạo Máy Trường Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp. HCM

THUẬT TOÁN
&
LẬP TRÌNH

CƠ SỞ NGHIÊN CỨU & SÁNG TẠO ROBOT

A DYNAMIC LEARNING PLATFORM !



CYBERNETICS
AND
AUTOMATION

NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ

Cơ sở
NGHIÊN CỨU và SÁNG TẠO ROBOT

Biên dịch: TRẦN THẾ SAN
Hiệu đính: TS. NGUYỄN TIẾN DŨNG
KHOA CHẾ TẠO MÁY
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HỒ CHÍ MINH

Cơ sở
NGHIÊN CỨU và SÁNG TẠO
ROBOT

NHÀ XUẤT BẢN THỐNG KÊ

Lời nói đầu

Kỹ thuật tự động hóa là một trong những ngành kỹ thuật cao đang phát triển mạnh mẽ. Robotics, là một trong các chuyên ngành kỹ thuật điều khiển tự động, đang được ứng dụng rộng rãi trên thế giới, bắt đầu được chú ý nhiều ở nước ta. Để xây dựng nền sản xuất hiện đại, chúng ta cần nhanh chóng ứng dụng và phát triển ngành tự động hóa và robotics. Nhiều trường đại học, viện nghiên cứu, ... đang có các công trình về tự động hóa và robotics. Chuyên ngành này cũng rất hấp dẫn các bạn trẻ, nhất là các sinh viên kỹ thuật.

Trong các khu công nghiệp đang xuất hiện các hệ thống và quy trình sản xuất tự động hoặc bán tự động, trong đó các tay máy, người máy được sử dụng rộng rãi.

Cuốn sách này cung cấp kiến thức cơ bản để tìm hiểu, nghiên cứu, và sáng tạo robot, đặc biệt tập trung vào các vấn đề cơ học, động học, và động lực học của các cơ cấu chấp hành.

Từ cuốn sách này, bạn đọc có kiến thức cơ bản về toán cao cấp, cơ lý thuyết, cơ học máy, ... có thể tìm được nhiều kiến thức bổ ích và lý thú. Sách phục vụ rộng rãi cho đông đảo bạn đọc là sinh viên, cán bộ kỹ thuật, kỹ sư, các nhà quản lý, và mọi người quan tâm đến lĩnh vực tay máy, người máy.

Chương 1

GIỚI THIỆU

Kể từ cuộc cách mạng công nghiệp, nhu cầu về cải tiến chất lượng sản phẩm và giảm chi sản xuất ngày càng tăng. Thời kỳ đầu, hầu hết các sản phẩm đều được sản xuất bằng phương pháp thủ công. Chất lượng sản phẩm phụ thuộc chủ yếu vào tay nghề công nhân, chi phí sản xuất khá cao. Thời kỳ này được gọi là *sản xuất thủ công*.

Vào đầu thế kỷ 20, khái niệm sản xuất hàng khối bắt đầu xuất hiện. Trong môi trường sản xuất hàng khối, hầu hết các qui trình đều được thực hiện bằng các máy chuyên dùng. Phương pháp này làm giảm rõ rệt chi phí sản xuất, các sản phẩm công nghiệp phù hợp với đa số người tiêu dùng. Tuy nhiên, mỗi máy công cụ đều được thiết kế để thực hiện nguyên công cho trước, mỗi khi cần thay đổi kiểu mẫu sản phẩm, toàn bộ dây chuyền sản xuất phải được cải tạo lại. Việc sửa đổi dây chuyền sản xuất mỗi khi thay đổi kiểu mẫu sản phẩm có thể rất tốn kém. Kiểu tự động hóa này được gọi là *tự động hóa cứng*.

Tính không linh hoạt và chi phí hơi cao của tự động hóa cứng đã đưa đến phương pháp tiếp cận hoàn toàn mới. Gần đây, các *cơ cấu chấp hành robot* được đưa vào quy trình chế tạo để thực hiện nhiều nguyên công, chẳng hạn chuyển tải vật tư, hàn điểm, sơn phun, và lắp ráp. Do các cơ cấu chấp hành được điều khiển bằng máy tính hoặc bộ vi xử lý, chúng có thể được tái lập trình một cách dễ dàng cho nhiều nguyên công khác nhau. Do đó, không cần phải thay các máy móc này khi thay đổi kiểu mẫu sản phẩm. Đây là kiểu *tự động hóa linh hoạt*.

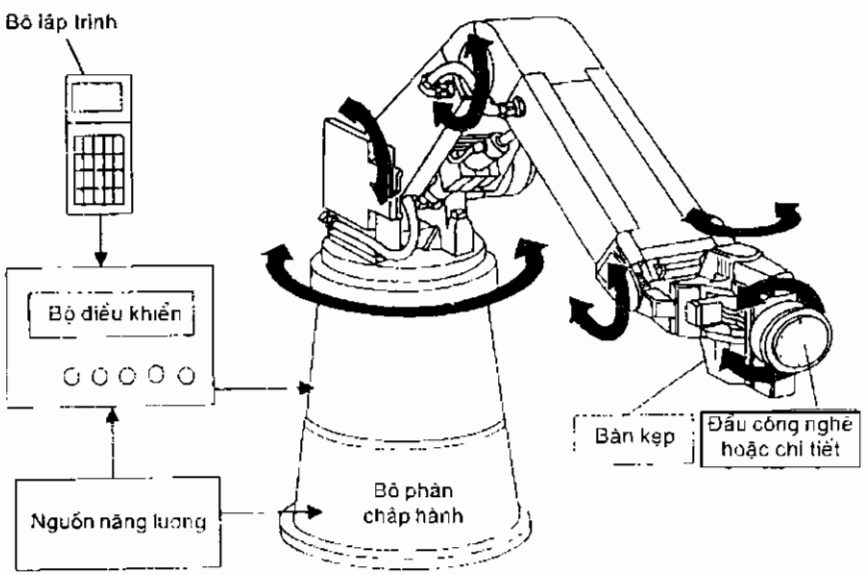
Có nhiều khác biệt giữa sản xuất thủ công, tự động hóa cứng, và tự động hóa linh hoạt. Nói chung, sản xuất thủ công thường có năng suất thấp, chất lượng sản phẩm không ổn định. Mặc dù tự động hóa cứng có tốc độ cao hơn, độ chính xác lớn hơn, nhưng chi phí thay đổi dây chuyền sản xuất mỗi khi thay đổi sản phẩm là tương đối cao. Với tự động hóa linh hoạt, thời gian cần thiết để xác lập dây chuyền sản xuất tương đối ngắn. Ngoài ra, các cơ cấu chấp hành có thể được tái lập trình và hầu như không bị lạc hậu. Nói chung, khi khối lượng sản xuất rất thấp, được gọi là sản xuất đơn chiếc, sản xuất thủ công có tính kinh tế tương đối cao. Khi khối lượng sản xuất tăng, tự động hóa linh hoạt có tính hiệu quả cao. Khi khối lượng sản xuất rất cao, tự động hóa cứng là phương pháp hiệu quả

nhất. Ở đây sẽ nghiên cứu về cơ học của các cơ cấu chấp hành, nền tảng để thiết kế, lập trình và điều khiển các thiết bị này trong môi trường sản xuất linh hoạt.

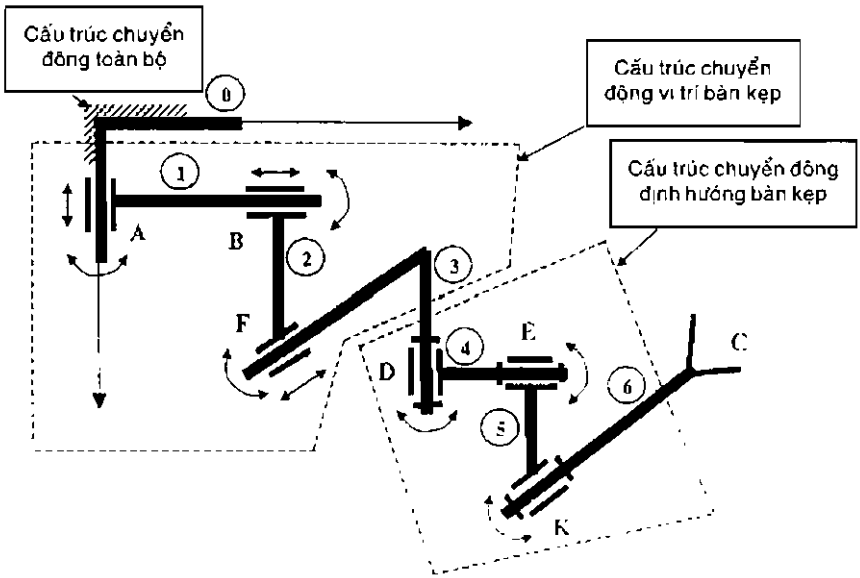
Lịch sử phát triển

Về kỹ thuật, robot được định nghĩa là *"cơ cấu chấp hành đa chức năng tái lập trình, được thiết kế để chuyển tải vật tư, công cụ, hoặc các thiết bị chuyên biệt, thông qua các chuyển động được lập trình để thực hiện các tác vụ khác nhau"*. Định nghĩa này bao gồm các cơ cấu chấp hành, các máy điều khiển bằng số, các máy di chuyển, và người máy của khoa học viễn tưởng. Mặc dù, nhiều người coi robot là người máy, nhưng robot công nghiệp ngày nay có hình thức rất khác với con người. Hình 1.1 minh họa các thành phần cơ bản của tay máy công nghiệp và Hình 1.2 minh họa cấu trúc động học tổng quát của tay máy công nghiệp.

Thuật ngữ robot xuất hiện vào năm 1923, nhưng sự phát triển robot công nghiệp chỉ bắt đầu vào cuối những năm 1940. Robot công nghiệp ban đầu được dùng để chuyển tải các loại vật liệu nguy hiểm, được dùng



Hình 1.1. Các thành phần cơ bản của tay máy công nghiệp



Hình 1.2. Cấu trúc động học tổng quát của tay máy công nghiệp.

trong thám hiểm không gian, và sau đó được dùng trong tự động hóa linh hoạt. Cuối năm 1940, cơ cấu chấp hành chính-phụ xuất hiện để chuyển tải các vật liệu phóng xạ. Cơ cấu chính được người hướng dẫn thao tác, cơ cấu phụ sao chép chuyển động của cơ cấu chính tại vị trí xa. Sự hồi tiếp lực có thể phối hợp để công nhân nhận biết các tín hiệu tải của cơ cấu phụ.

Vào cuối những năm 1950, cơ cấu lập trình bắt đầu xuất hiện và được cải tiến liên tục. Đặc tính quan trọng của robot công nghiệp là phối hợp bộ điều khiển dựa trên máy tính hoặc bộ vi xử lý với các cảm biến hồi tiếp để đạt được khả năng lập trình đa chức năng. Vào những năm 1960, cơ cấu chấp hành robot được trang bị hệ thống thị giác và các bộ cảm biến đặc biệt có tính năng mô phỏng giác quan của con người, chúng có khả năng thực hiện các công đoạn lắp ráp đơn giản.

Trong những năm 80 robot công nghiệp đã có bước phát triển mạnh mẽ, do các yêu cầu cao về tự động hóa linh hoạt và kinh tế trong thám hiểm không gian và công nghiệp ôtô. Vào đầu những năm 90, nhiều công ty ở Bắc Mỹ, Châu Âu, Nhật đã sử dụng rộng rãi robot trong nhiều lĩnh vực công nghiệp.

Trong những năm gần đây robot công nghiệp chủ yếu được dùng cho các thao tác lặp lại nhiều lần và trong các môi trường nguy hiểm. Các thao tác lặp lại nhiều lần bao gồm chuyển tải vật tư, xếp dỡ các chi tiết máy, lắp ráp các bộ phận thành cụm máy. Các ứng dụng trong môi trường nguy hiểm bao gồm chuyển tải vật liệu phóng xạ, thám hiểm không gian và đáy biển, hàn điểm, sơn phun, ... Ngoài ra, robot còn được dùng trong xây dựng, các thiết bị bay và di chuyển không người lái tại những địa hình phức tạp, các máy khai thác mỏ, các cụm gia công thông minh. Trong những năm gần đây, xu hướng mới là chế tạo các robot thông minh và thân thiện với con người, kể cả robot giải phẫu y khoa, giúp việc nhà, giúp người tàn tật, ... Mặc dù có nhiều nỗ lực để phát triển robot thông minh, nhưng các loại robot có thể mô phỏng nhiều chức năng của con người vẫn còn những hạn chế nhất định, do đòi hỏi sự phát triển của công nghệ về trí tuệ nhân tạo.

Các cơ cấu

Các cơ cấu được dùng trong robot công nghiệp gồm nhiều khâu liên kết với nhau bằng các khớp nối. Số bậc tự do (DOF) của cơ cấu phụ thuộc vào số khâu và khớp, kiểu khớp được dùng để xây dựng cơ cấu. Trong phần này sẽ định nghĩa các khâu, các khớp, chuỗi động học, cơ cấu, và các máy, sau đó sẽ khái quát về số bậc tự do và các tiêu chuẩn về độ chuyển động theo vòng lặp.

Khâu và khớp

Các thành phần riêng rẽ tạo nên cơ cấu được gọi là các thanh hoặc các *khâu*. Ở đây, các khâu được coi là vật thể cứng. Khái niệm về vật thể cứng sẽ giúp việc nghiên cứu về các cơ cấu và robot trở nên dễ hiểu hơn. Tuy nhiên, đối với cơ cấu tốc độ cao và tải nặng, các tác dụng đàn hồi của vật thể cơ học có thể tương đối lớn do đó cần phải xét đến trong các nghiên cứu. Để thuận tiện, một số vật thể đàn hồi, chẳng hạn các kiểu xích, dây cáp, đai, tạm thời được coi là có cùng chức năng của vật thể cứng, và được xét theo các khâu. Từ quan điểm động học, hai hoặc nhiều thành phần nối kết với nhau sao cho giữa chúng không có chuyển động tương đối, sẽ được coi là một khâu. Ví dụ, bộ hai bánh răng nối bằng một trục động học chung được coi là một khâu.

Các khâu trong cơ cấu được nối với nhau theo cặp. Mối nối giữa các khâu được gọi là *khớp*. Khớp có các ràng buộc vật lý về chuyển động

tương đối giữa hai thành phần đó. Loại chuyển động tương đối được khớp cho phép được xác định bằng dạng bề mặt tiếp xúc giữa hai thành phần. Bề mặt tiếp xúc của khớp được gọi là thành phần cặp. Hai thành phần cặp tạo thành *cặp động học*. Các cặp động học có thể được phân loại theo cặp thấp và cặp cao, tùy theo kiểu tiếp xúc. Cặp động học được gọi là cặp thấp nếu hai thành phần tiếp xúc với nhau theo diện tích bề mặt. Nói chung, các dạng của hai phần tử cặp thấp tương hợp về mặt hình học là đồng nhất, theo kiểu khối và lỗ (hốc). Cặp động học được gọi là cặp cao, nếu hai thành phần tiếp xúc với nhau theo một điểm hoặc dọc theo một đường. Có sáu kiểu cặp thấp cơ bản và hai kiểu cặp cao được sử dụng thường xuyên trong các cơ cấu và robot.

Khớp quay. R, cho phép hai phần tử cặp quay với nhau theo một trục được xác định bằng dạng hình học của khớp. Do đó, khớp quay có năm giới hạn giữa các thành phần cặp đôi và là khớp 1-dof (một bậc tự do). Khớp quay đôi khi được gọi là khớp xoay, khớp bản lề, hoặc khớp chốt.

Khớp lăng trụ. P, cho phép hai phần tử cặp đôi trượt với nhau dọc trục được xác định bằng dạng hình học của khớp. Do đó khớp lăng trụ có năm giới hạn giữa các thành phần cặp đôi và là khớp 1-dof. Khớp lăng trụ đôi khi được gọi là cặp trượt.

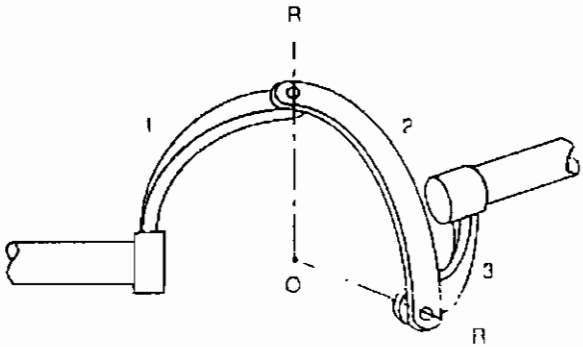
Khớp trụ. C, cho phép quay và tịnh tiến độc lập theo một trục được xác định bằng dạng hình học của khớp. Do đó khớp lăng trụ có bốn giới hạn giữa các thành phần cặp đôi và là khớp 2-dof.

Khớp xoắn. H, cho phép hai phần tử cặp đôi quay và tịnh tiến dọc trục được xác định bằng dạng hình học của khớp. Tuy nhiên, chuyển động tịnh tiến quan hệ với chuyển động quay theo bước vít. Do đó khớp xoắn có năm giới hạn giữa các thành phần cặp đôi và là khớp 1-dof. Khớp xoắn đôi khi được gọi là khớp vít.

Khớp cầu. F, cho phép một phần tử quay tự do với phần tử kia ở tâm khối cầu theo mọi chiều. Không có sự chuyển động tịnh tiến giữa hai thành phần cặp đôi. Do đó khớp cầu có ba giới hạn giữa các thành phần cặp đôi, và là khớp 3-dof.

Cặp phẳng. E, cho phép hai bậc tự do tịnh tiến trên mặt phẳng tiếp xúc và một bậc tự do quay quanh trục vuông góc với mặt phẳng tiếp xúc, do đó có ba ràng buộc giữa các thành phần cặp đôi và là khớp 3-dof.

Cặp bánh răng. G, cho phép một bánh răng lăn và trượt với bánh răng kia tại điểm tiếp xúc giữa hai răng ăn khớp. Ngoài ra, không gian



Hình 1.3. Khớp đa năng.

chuyển động của bánh răng côn, bánh răng xoắn, bánh răng nghiêng bị giới hạn trên mặt phẳng, do đó cặp bánh răng có bốn ràng buộc và là khớp 2-dof.

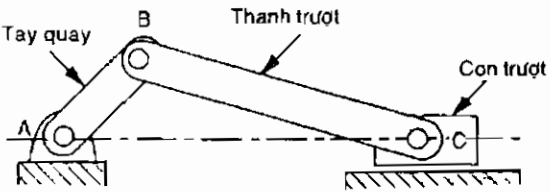
Cặp cam, C_p, tương tự cặp bánh răng nhưng thường dùng lò xo để giữ hai phần tử cặp đôi tiếp xúc với nhau, do đó cặp này là khớp 2-dof.

Cặp phẳng, cầu, xoắn, trụ, lăng trụ, và quay, là các cặp thấp. Cặp bánh răng và cặp cam là cặp cao. Một loại khớp thường dùng khác là *khớp đa năng* (khớp Cardan) (Hình 1.3), khớp này về cơ bản là sự phối hợp của hai khớp quay cắt nhau, do đó là khớp 2-dof.

Chuỗi động học, cơ cấu, máy móc

Chuỗi động học là bộ các khâu được nối với nhau bằng các khớp. Khi mỗi khâu trong chuỗi động học được nối với từng khâu khác bằng tối thiểu là hai đường phân biệt, chuỗi động học tạo thành một hoặc nhiều vòng kín, được gọi là chuỗi vòng kín. Mặt khác, nếu mỗi khâu được nối với khâu khác bằng một và chỉ một đường, chuỗi động học được gọi là chuỗi vòng hở. Chuỗi động học có thể được tạo thành từ các chuỗi vòng kín và vòng hở phối hợp, được gọi là chuỗi động học lai.

Chuỗi động học được gọi là cơ cấu khi một trong các khâu là cố định với nền. Khâu cố định đôi khi được gọi là đế. Trong cơ cấu, một hoặc nhiều khâu có thể được gán là khâu vào. Khi khâu vào chuyển động tương đối với khâu cố định, tất cả các khâu khác sẽ chuyển động theo các ràng buộc động học của các khớp. Do đó, cơ cấu là thiết bị truyền chuyển



Hình 1.4. Cơ cấu thanh trượt và tay quay.

động hoặc moment từ một hoặc nhiều khâu vào đến các khâu khác. Hình 1.4 minh họa cơ cấu thanh trượt - tay quay, có thể truyền chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến hoặc ngược lại.

Máy là bộ gồm một hoặc nhiều cơ cấu, cùng với các thành phần điện, thủy lực và/hoặc khí nén, được dùng để biến đổi năng lượng bên ngoài thành cơ năng hoặc dạng năng lượng khác. Ví dụ, máy khoan điện gồm động cơ điện, bộ giảm tốc, đầu kẹp mũi khoan, công tắc, được dùng để chuyển điện năng thành cơ năng ở mũi khoan. Tuy nhiên, bộ giảm tốc là cơ cấu, không phải là máy.

Thuật ngữ *cơ cấu* và *máy* đôi khi được coi là đồng nghĩa. Theo các định nghĩa nêu trên, hai thuật ngữ này có ý nghĩa khác nhau. Một bộ gồm các chi tiết được gọi là *cơ cấu*, nếu được dùng để truyền chuyển động, và được gọi là *máy* nếu được dùng để chuyển năng lượng bên ngoài thành cơ năng hữu dụng. Cơ cấu chấp hành của hệ thống robot là cơ cấu. Để cơ cấu này trở thành máy cần phải có bộ điều khiển dựa trên bộ vi xử lý, bộ mã hóa và/hoặc các cảm biến lực, cùng với các bộ phận khác, chẳng hạn hệ thống thị giác, phối hợp với nhau để chuyển đổi năng lượng bên ngoài thành công hữu ích. Mặc dù máy có thể gồm một hoặc nhiều cơ cấu, nhưng cơ cấu không phải là máy, do không thực hiện công, chỉ có chức năng truyền chuyển động.

Bậc tự do của cơ cấu

Vấn đề đầu tiên trong nghiên cứu động học của các cơ cấu là *số bậc tự do*. Số bậc tự do của cơ cấu là số các thông số độc lập hoặc các thông số ngõ vào cần thiết để chuyên biệt cấu hình của cơ cấu hoàn chỉnh. Trừ một số trường hợp đặc biệt, nói chung có thể xác định biểu thức tổng quát về số bậc tự do của cơ cấu theo số khâu, số khớp, và kiểu khớp trong cơ cấu. Các ký hiệu sau đây được dùng trong các phương trình về cơ cấu:

c_i: số ràng buộc của khớp i.

F: số bậc tự do của cơ cấu.

f_i: số chuyển động tương đối được phép của khớp i.

j: số khớp trong cơ cấu, giả sử mọi khớp đều là hai chiều.

j_i: số khớp với i bậc tự do.

L: số vòng độc lập trong cơ cấu.

n: số khâu trong cơ cấu, kể cả khâu cố định.

λ: số bậc tự do trong không gian làm việc của cơ cấu.

Do giả thiết tất cả các khớp đều là hai chiều, khớp ba chiều được coi là hai khớp hai chiều, khớp bốn chiều được coi là ba khớp hai chiều, ... Ngoài ra, còn giả thiết một giá trị λ được dùng cho các chuyển động của tất cả các khâu chuyển động, chúng đều vận hành trong cùng không gian làm việc, do đó $\lambda = 6$ đối với cơ cấu không gian, và $\lambda = 3$ đối với cơ cấu phẳng và cơ cấu cầu.

Giá trị bậc tự do của cơ cấu bằng bậc tự do liên quan với tất cả các khâu chuyển động trừ đi số ràng buộc của các khớp. Do đó, nếu tất cả các khâu đều không bị ràng buộc, số bậc tự do của cơ cấu n-khớp, với một khớp cố định, sẽ bằng λ (n-1). Tuy nhiên, tổng các ràng buộc của các khớp là bằng $\sum_{i=1}^{j} c_i$, do đó giá trị bậc tự do của cơ cấu được tính theo phương trình:

$$F = \lambda(n-1) - \sum_{i=1}^{j} c_i \qquad (1.1)$$

Số ràng buộc của một khâu và số bậc tự do của khâu đó bằng thông số chuyển động λ, do đó

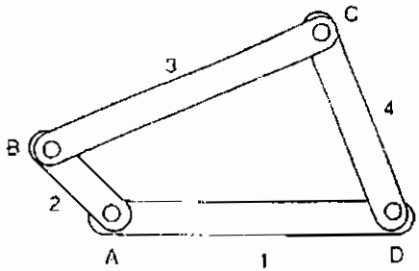
$$\lambda = c_i + f_i \qquad (1.2)$$

Do tổng các ràng buộc của các khâu là

$$\sum_{i=1}^{j} c_i = \sum_{i=1}^{j} (\lambda - f_i) = j\lambda - \sum_{i=1}^{j} f_i \qquad (1.3)$$

Thay pt (1.3) vào (1.1):

$$F = \lambda(n-j-1) + \sum_{i} f_i \qquad (1.4)$$

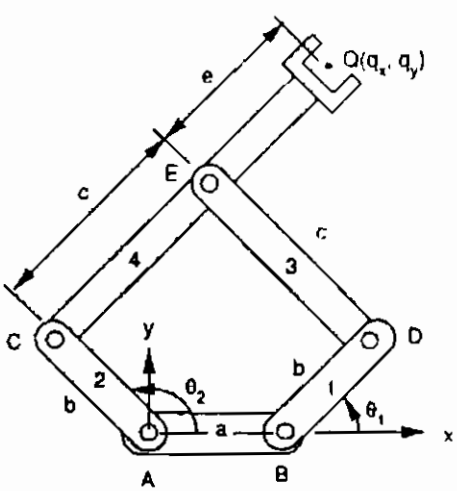


Hình 1.5. Cơ cấu 4 - khâu bản lề.

Phương trình (1.4) được gọi là tiêu chuẩn *Grübler* hoặc *Kutzbach*.

Ví dụ 1.1. *Cơ cấu bốn khâu bản lề.* Hình 1.5 minh họa cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng. Có bốn khâu được nối thành vòng kín bằng bốn khớp quay. Do đó, $\lambda = 3$, $n = 4$, $j = j_1 = 4$, từ pt (1.4) có $F = 3(4 - 4 - 1) + 4 \times 1 = 1$. Cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng thường được dùng trong cơ cấu chấp hành theo kiểu khâu thanh đẩy để truyền chuyển động quay của bộ tác động ở đế hoặc gần đế thành chuyển động quay của khâu ở đầu cuối của cơ cấu chấp hành.

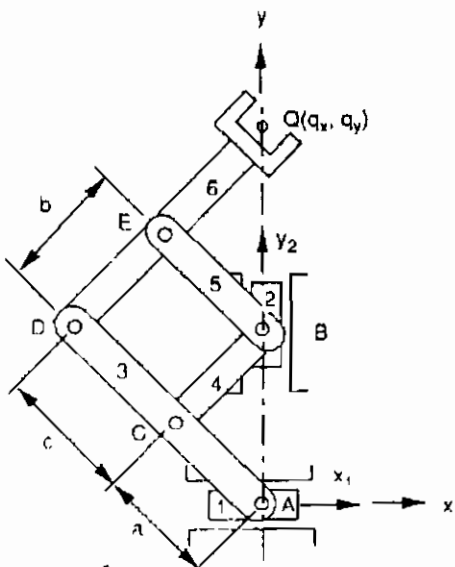
Ví dụ 1.2. *Cơ cấu năm khâu.* Hình 1.6 minh họa cơ cấu năm khâu phẳng, mọi khớp đều là khớp quay. Do đó, $\lambda = 3$, $n = 5$, $j = j_i = 5$, từ pt (1.4) có $F = 3(5 - 5 - 1) + 5 \times 1 = 2$. Cơ cấu này thường được dùng làm cơ cấu



Hình 1.6. Cơ cấu năm khâu, 5 R

chấp hành 2-dof, với các khâu 1 và 2 là khâu nhập, điểm Q được định vị ở vị trí bất kỳ trên mặt phẳng.

Ví dụ 1.3. *Cơ cấu thước phẳng.* Hình 1.7 minh họa cơ cấu thước phẳng, trong đó hai khớp nối với nền là khớp lăng trụ, các khớp còn lại là khớp quay. Trong cơ cấu có $\lambda = 3$, $n = 7$ (kể cả khâu nền), $j = j_1 = 8$, từ pt (1.4) có $F = 3(7 - 8 - 1) + 8 \times 1 = 2$. Cơ cấu này là loại 2-do, với các khâu 1 và 2 là khâu nhập, điểm Q được định vị ở vị trí bất kỳ trên mặt phẳng.



Hình 1.7. Cơ cấu thước phẳng.

Tiêu chuẩn *Grubler* có giá trị khi các ràng buộc từ các khớp là độc lập với nhau và không dư. Ví dụ, chuỗi hai chiều kiểu quay-cầu với trục khớp quay đi qua tâm khớp cầu làm tăng bậc tự do dư. Kiểu bậc tự do này được gọi là bậc tự do thụ động, cho phép khâu trung gian quay tự do quanh trục được xác định từ hai khớp đó. Mặc dù khâu trung gian có khả năng truyền lực hoặc moment và chuyển động cho các trục khác, nhưng không có khả năng truyền moment cho trục thụ động. Nói chung, các khâu hai chiều với các cặp S - S, S - E, E - E đều có bậc tự do thụ động (Bảng 1.1). Do đó các khâu hai chiều với các cặp S - S, S - E, E - E và các khớp ba chiều tương ứng của chúng cũng có bậc tự do thụ động.

Bậc tự do thụ động không thể truyền moment và chuyển động cho trục thụ động. Khi có cặp khớp này trong cơ cấu, cần phải trừ bớt một bậc tự do ở phương trình bậc tự do. Giả sử, f_p là số bậc tự do thụ động trong cơ cấu, số bậc tự do chủ động sẽ là:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i - f_p \qquad (1.5)$$

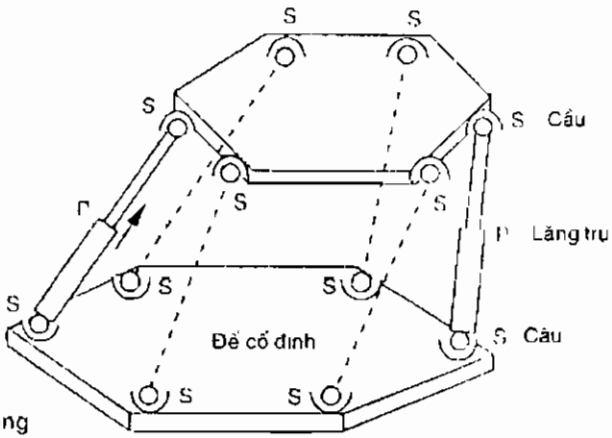
Ví dụ 1.4. *Cơ cấu không gian Stewart-Gough*. Hình 1.8 minh họa cơ cấu không gian, trong đó nền chuyển động được nối vào đế cố định với sáu nhánh mở rộng bằng các khớp cầu. Mỗi nhánh gồm hai khâu hai chiều nối bằng khớp lăng trụ. Cấu trúc này được gọi là nhánh S-P-S. Do sự phối hợp S-P-S, có một bậc tự do thụ động ở từng nhánh. Do $\lambda = 6$, $j_1 = 6$, $j_2 = 12$, và $f_p = 6$, số bậc tự do của cơ cấu được tính theo pt (1.4), với $F = 6(14 - 18 - 1) + (12 \times 3 + 6) - 6 = 6$.

Bảng 1.1. Các khâu hai chiều với bậc tự do thụ động

Kiểu	Bậc tự do thụ động
S - S	Quay quanh trục đi qua các tâm khớp cầu.
S - E	Quay quanh trục đi qua tâm khớp cầu và vuông góc với mặt phẳng của cặp phẳng.
E - E	Trượt dọc trục song song với giao tuyến các mặt phẳng của cặp mặt phẳng. Nếu hai mặt phẳng này song song, sẽ có ba bậc tự do thụ động.

Do pt (1.5) được tính bằng cách dùng một giá trị λ cho tất cả các khâu chuyển động, số bậc tự do của cơ cấu không gian với các khớp nối phẳng hoặc cầu theo kiểu hệ thống con phải được tính đến. Đặc biệt, $\lambda = 3$ được dùng cho hệ thống cầu hoặc phẳng, và $\lambda = 6$ được dùng cho phần không gian của cơ cấu. Ví dụ, cơ cấu chấp hành gồm cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng (các khâu 2, 3, 8, và 7) và cơ cấu cầu (các khâu 3, 4, 5, 6), là hai hệ thống con. Cơ cấu bốn khâu bản lề có một bậc tự do, cơ cấu cầu có ba bậc tự do, chuỗi vòng hở 0 - 1 - 2 có hai bậc tự do, do đó cơ cấu chấp hành không gian này là loại 6-dof.

Nói chung, nếu tiêu chuẩn Grubler có $F > 0$, cơ cấu có F bậc tự do. Nếu $F = 0$, cơ cấu không có bậc tự do. Mặt khác, nếu $F < 0$, cơ cấu sẽ có số ràng buộc dư. Tuy nhiên, cần chú ý có các cơ cấu không tuân theo tiêu



Hình 1.8. Cơ cấu không gian Stewart-Gough

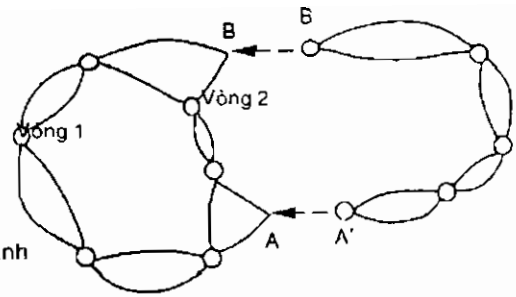
chuẩn Grubler. Các cơ cấu này đòi hỏi chiều dài khâu đặc biệt để đạt được tính linh động cao được gọi là cơ cấu thắng ràng buộc.

Đối với các cơ cấu vòng kín và các cơ cấu chấp hành, số lượng và vị trí các khớp kích hoạt phải được chọn một cách cẩn thận sao cho phần tác động ở phía cuối phải được điều khiển theo yêu cầu. Nói chung, số các khớp kích hoạt phải bằng số bậc tự do của cơ cấu, và vị trí của khớp kích hoạt phải được chọn sao cho chúng có thể tạo thành tập hợp các tọa độ độc lập. Nếu số lượng khâu kích hoạt nhỏ hơn số bậc tự do, chuyển động của các khâu này phải theo tọa độ tương ứng các ràng buộc động học của chúng. Cơ cấu chấp hành được truyền động dư có thể dùng để khử độ lệch bánh răng hoặc khoảng hở do dạng hình học của các khớp.

Tiêu chuẩn chuyển động theo vòng

Như đã đề cập, chuỗi động học là một bộ các khâu nối với nhau bằng các khớp. Nếu mỗi khâu được nối với ít nhất hai khâu khác, chuỗi tạo thành một hoặc nhiều vòng kín. Có thể thiết lập phương trình liên hệ số vòng độc lập với số khâu và khớp trong chuỗi động học. Số vòng độc lập được hiểu là tổng các vòng, trừ vòng bên ngoài.

Cơ cấu bốn khâu bản lề (Hình 1.5) là chuỗi động học với một vòng độc lập, gồm bốn khâu và bốn khớp. Cơ cấu năm khâu (Hình 1.6) cũng là chuỗi động học với một vòng độc lập, gồm năm khâu và năm khớp. Đối



Hình 1.9. Sự hình thành chuỗi nhiều vòng.

với chuỗi động học một vòng (phẳng, cầu, hoặc không gian) số các khâu bằng số các khớp, nghĩa là n = j.

Từ chuỗi một vòng có thể mở rộng sang chuỗi hai vòng. Điều này có thể được thực hiện bằng cách lấy chuỗi vòng hở và có hai đầu được nối với hai thành phần bất kỳ của chuỗi một vòng bằng hai khớp (Hình 1.9), trong đó A và B là các điểm nối. Chú ý, bằng cách mở rộng một vòng thành hai vòng, số các khớp sẽ lớn hơn số khâu là một. Tương tự, chuỗi vòng hở có thể kết hợp chuỗi hai vòng để tạo thành chuỗi ba vòng, ... Nói chung, việc mở rộng chuỗi động học từ một vòng thành L vòng, hiệu giữa số khớp và số khâu sẽ tăng theo giá trị L - 1, do đó có thể viết:

$$j = n + L - 1 \tag{1.6}$$

hoặc

$$L = j - n + 1 \tag{1.7}$$

Phương trình (1.7) được gọi là *phương trình Euler*, số vòng độc lập lớn hơn hiệu giữa số khớp và số khâu là một. Kết hợp pt (1.7) với (1.4):

$$\sum f_i = F + \lambda L \tag{1.8}$$

Phương trình (1.8) được gọi là *tiêu chuẩn chuyển động vòng*. Phương trình (1.7), hoặc (1.8), rất hữu dụng để tính số vòng độc lập trong chuỗi động học. Nói chung, số lượng *phương trình vòng kín* có thể được thiết lập cho cơ cấu bằng số vòng độc lập trong cơ cấu đó.

Ví dụ 1.5. *Cơ cấu thước phẳng*. Đối với cơ cấu thước phẳng trên Hình 1.7, có $\lambda = 3$, n = 7, và j = 8, do đó số vòng độc lập L = 8 - 1 + 7 = 2. Vòng thứ nhất gồm khâu nền, khâu 1, 3, 4, và 2. Vòng thứ hai gồm khâu 3, 4, 5 và 6.

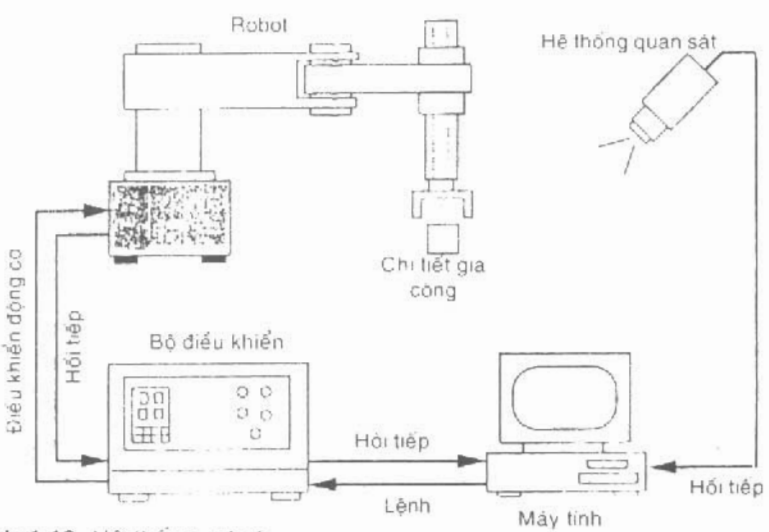
Ví dụ 1.6. *Cơ cấu Steuart-Gough*. Đối với cơ cấu này (Hình 1.8), có $\lambda = 6$, $n = 14$, $j = 18$, số vòng độc lập $L = 18 - 14 + 1 = 5$. Vế phải của pt (1.8) có $F + \lambda L = 6 + 6 \times 5 = 36$, còn vế trái là $\sum f_i = 3 \times 12 + 6 = 42$. Hiệu của hai số này là số bậc tự do độc lập $42 - 36 = 6$.

Hệ thống robot

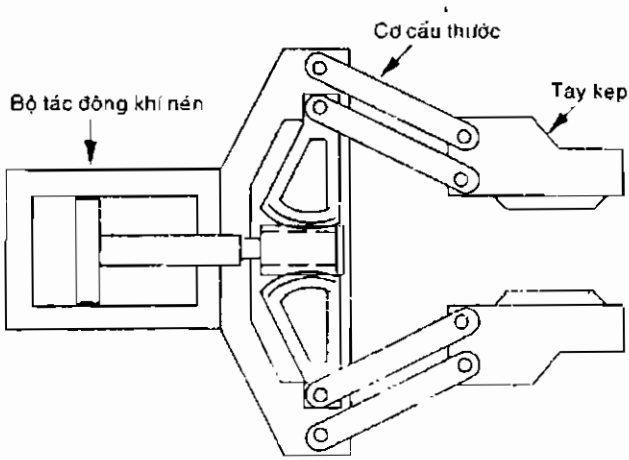
Hệ thống robot gồm cơ cấu chấp hành, đầu tác động, bộ điều khiển dựa trên bộ vi xử lý, máy tính, hệ thống thị giác, hoặc các bộ cảm biến không tiếp xúc (Hình 1.10).

Cơ cấu chấp hành gồm nhiều khâu nối theo nhiều cách. Một khâu cố định với nền, khâu khác được gọi là *khâu động*. Nói chung, số khớp động bằng số bậc tự do để có thể điều khiển cơ cấu này theo yêu cầu. Cơ cấu chấp hành trên Hình 1.2 là loại 6-dof, trong đó khâu 0 là cố định với nền, và các khâu từ 1 - 6 là khâu động. Các khớp giữa các khâu (0 và 1), (1 và 2), (1 và 7), (3 và 4), (4 và 5), (5 và 6) là các khớp động, các khớp còn lại là bị động.

Bộ tác động cuối (bàn kẹp) là thiết bị được lắp vào khâu động để kẹp giữ, nâng, hoặc xử lý chi tiết gia công. Bộ tác động cuối được coi là giao



Hình 1.10. Hệ thống robot



Hình 1.11. Cơ cấu kẹp bánh răng - thanh răng

diện cơ học giữa cơ cấu chấp hành và môi trường xung quanh. Nói chung, bộ tác động này là thiết bị đặc biệt được dùng để chuyển tải các vật thể có kích thước, hình dạng, trọng lượng tương tự nhau trong thao tác lặp. Cơ cấu tác động đôi khi được gọi là cơ cấu kẹp. Hầu hết các bàn kẹp đơn giản là loại 1-dof. Hình 1.11 minh họa cơ cấu kẹp thanh răng-bánh răng được truyền động bằng khí nén.

Đối với một số ứng dụng, cơ cấu tác động cuối có thể có khả năng xử lý các đối tượng với kích cỡ hình dạng hoặc trọng lượng khác nhau, được gọi là cơ cấu kẹp đa năng hoặc tay máy.

Bộ điều khiển có thể từ loại đơn giản, kiểu PID (tỷ lệ - tích phân - đạo hàm) mức thấp, đến phức tạp với trí thông minh nhân tạo. Bộ mã hóa và/hoặc vận tốc kế được lắp trong các khớp của cơ cấu chấp để đo chuyển động giữa hai vật thể được nối kết, cho phép điều khiển hồi tiếp. Một số bộ điều khiển có trang bị bộ cảm biến lực hoặc tiếp xúc cùng với hệ thống thị giác hoặc các cảm biến khác. Ngoài ra, bộ điều khiển còn được trang bị thiết bị học tập, có khả năng học tập chương trình định vị, biên tập hoặc tương tác với máy tính.

Máy tính có thể là phần cứng dựa trên bộ vi xử lý, máy tính cá nhân, hoặc máy tính lớn các bộ tính toán rất cao, cho phép đưa ra các lệnh điều khiển thông minh.

Phân loại robot

Robot có thể được phân loại theo nhiều tiêu chuẩn, số bậc tự do, cấu trúc động học, hệ thống truyền động, dạng hình học của chi tiết gia công, các đặc tính chuyển động, ...

Phân loại theo số bậc tự do

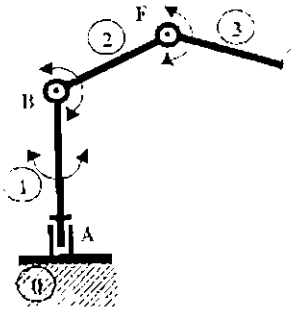
Sơ đồ phân loại robot thường dùng là theo số bậc tự do. Một cách lý tưởng, cơ cấu chấp hành phải có 6 bậc tự do để xử lý đối tượng một cách tự do trong không gian ba chiều. Theo quan điểm này, *robot đa năng* có 6 bậc tự do, *robot dư* có hơn 6 bậc tự do và *robot thiếu* có ít hơn 6 bậc tự do. Robot dư có thêm một bậc tự do để di chuyển qua các chướng ngại hoặc vận hành trong các không gian hẹp. Mặt khác, đối với một số ứng dụng đặc biệt, chẳng hạn lắp ráp các chi tiết trên mặt phẳng, robot bốn bậc tự do là đủ. Robot loại Fanuc (Hình 1.12) có cơ cấu chấp hành đa năng với 6 bậc tự do.

Phân loại theo cấu trúc động học

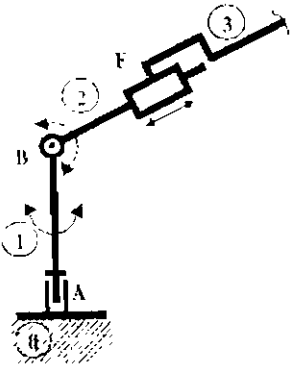
Robot được gọi là *robot nối tiếp* với *cơ cấu chấp hành vòng hở* nếu cấu trúc động học có dạng chuỗi vòng hở, *robot song song* nếu có chuỗi vòng kín, và *robot lai* nếu có cả chuỗi vòng hở và vòng kín. Hầu hết các kỹ sư đều coi Fanuc (Hình 1.12) là robot nối tiếp, nhưng trong thực tế đây là cơ cấu chấp hành lai do phối hợp bốn khâu bản lề (thanh đẩy) để truyền động khớp thứ ba. Nhiều robot công nghiệp sử dụng kiểu cấu trúc này do có thể lắp động cơ thứ ba để giảm quán tính của cơ cấu chấp hành. Nói chung, robot song song có ưu điểm, độ cứng vững cao hơn, khả năng tải lớn hơn, và quán tính thấp hơn so với cơ cấu nối tiếp, nhưng không gian làm việc nhỏ hơn và cơ cấu phức tạp hơn.

Phân loại theo hệ thống truyền động

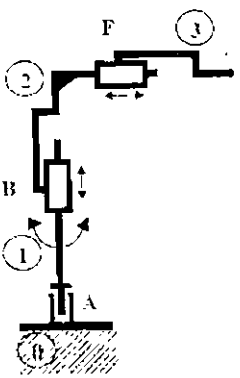
Có ba hệ truyền động phổ biến là *điện*, *thủy lực*, và *khí nén* được dùng cho robot. Hầu hết các cơ cấu chấp hành đều sử dụng động cơ bước hoặc động cơ trợ động dc, do chúng sạch và tương đối dễ điều khiển. Tuy nhiên, khi cần tốc độ cao và khả năng mang tải cao, thường dùng truyền động thủy lực hoặc khí nén. Nhược điểm chính của truyền động thủy lực là khả năng rò rỉ dầu. Ngoài ra, truyền động khí nén có tính linh hoạt khá cao. Mặc dù, truyền động khí nén sạch và nhanh nhưng khó điều khiển do không khí là lưu chất nén được.



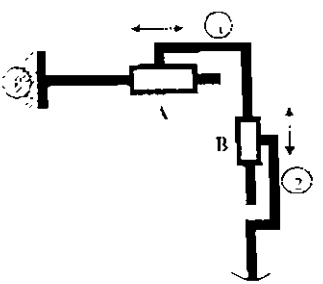
TAY MÁY REVOLUTE



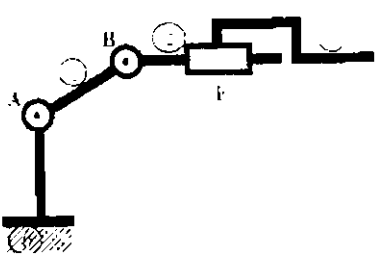
TAY MÁY POLAR



TAY MÁY CYLINDRICAL



TAY MÁY CARTESIAN



TAY MÁY SCARA

Hình 1.12. Phân loại tay máy theo cấu trúc xác định vị trí.

Trong cơ cấu nối tiếp, nói chung một bộ tác động được dùng để điều khiển chuyển động của từng khớp. Nếu từng khâu chuyển động được truyền động bằng một bộ tác động lắp trên khâu trước đó thông qua hộp giảm tốc, sự dịch chuyển của khâu này về mặt động học là độc lập với khâu khác, đây là *cơ cấu chấp hành nối tiếp qui ước*. Mặt khác, nếu mỗi khớp được truyền động trực tiếp bằng bộ tác động không có hộp giảm tốc, cơ cấu đó được gọi là *cơ cấu chấp hành truyền động trực tiếp*.

Việc dùng hộp giảm tốc cho phép sử dụng động cơ nhỏ hơn, do đó làm giảm quán tính của cơ cấu chấp hành. Tuy nhiên, độ lệch hoặc lắc của các bánh răng trong hộp giảm tốc có thể gây ra sai số vị trí ở bộ phận tác động. Kỹ thuật truyền động trực tiếp khắc phục được vấn đề về bánh răng và có thể tăng tốc độ cho cơ cấu chấp hành. Tuy nhiên, các động cơ truyền động trực tiếp tương đối lớn và nặng. Do đó, chúng thường được dùng để truyền động khớp thứ nhất của cơ cấu chấp hành, động cơ được lắp ở đế. Nói chung, động cơ cũng có thể được lắp ở đế để truyền động khớp thứ hai hoặc thứ ba thông qua đai kim loại hoặc khâu thanh đẩy.

Một số cơ cấu chấp hành sử dụng bộ các bánh răng, xích và đĩa xích để truyền động các khớp. Khi sử dụng hệ thống truyền động nay cho cơ cấu chấp hành qua nhiều khớp, độ dịch chuyển của khớp sẽ phụ thuộc lẫn nhau. Các cơ cấu chấp hành kiểu đó được là vòng kín.

Phân loại theo dạng hình học không gian làm việc

Không gian làm việc của cơ cấu chấp hành được xác định là thể tích không gian đầu tác động có thể với tới. Nói chung, thường sử dụng hai định nghĩa về không gian làm việc. Thứ nhất là *không gian có thể với tới*, thể tích không gian trong đó cơ cấu tác động có thể với tới từng điểm theo ít nhất là một chiều. Thứ hai là *không gian linh hoạt*, thể tích không gian trong đó cơ cấu tác động có thể với tới từng điểm theo mọi chiều có thể. Không gian linh hoạt là một phần của không gian có thể với tới.

Mặc dù đây không phải là điều kiện cần, nhưng nhiều cơ cấu chấp hành nối tiếp được thiết kế với ba khâu đầu dài hơn các khâu còn lại. Do đó ba khâu này được dùng chủ yếu để thao tác vị trí, các khâu còn lại được dùng để điều khiển hướng của đầu tác động. Vì lý do đó, ba khâu đầu được gọi là cánh tay, các khâu còn lại được gọi là cổ tay. Trừ các cơ cấu chấp hành với số bậc tự do lớn hơn 6, cánh tay thường có ba bậc tự do, cổ tay có 1-3 bậc tự do. Hơn nữa, bộ cổ tay thường được thiết kế với các trục khớp cắt nhau tại một điểm chung được gọi là tâm cổ tay. Bộ cánh

tay có thể có nhiều kiểu cấu trúc động học, tạo ra các biên làm việc khác nhau, được gọi là *vùng không gian làm việc*. Không gian do nhà sản xuất robot cung cấp thường được xác định theo vùng không gian làm việc.

Có lẽ cấu trúc động học đơn giản nhất của cánh tay robot (còn gọi là tay máy) là ba *khớp lăng trụ* vuông góc. Kiểu robot này được gọi là *robot Decartes*. Vị trí tâm cổ tay của loại robot này có thể được xác định theo ba tọa độ vuông góc liên quan với ba khớp lăng trụ. Vùng không gian làm việc của robot này là khối hộp chữ nhật. Khi robot Decartes được lắp trên các ray phía trên không gian làm việc, được gọi là robot cần trục.

Cánh tay robot, được gọi là *robot trụ* nếu khớp thứ nhất hoặc khớp thứ hai của robot Decartes được thay bằng khớp quay. Vị trí tâm cổ tay của robot trụ có thể được xác định bằng tập hợp các tọa độ cầu liên hệ với ba biến khớp. Các khớp lăng trụ thường có các giới hạn cơ học ở cả hai đầu. Do đó không gian làm việc của robot trụ bị giới hạn bằng hai hình trụ đồng tâm có chiều dài hữu hạn.

Tay máy được gọi là *robot cầu* nếu hai khớp đầu là khớp quay khác nhau và khớp thứ ba là khớp lăng trụ. Nói chung, khớp lăng trụ không song song với trục của khớp thứ hai. Vị trí tâm cổ tay của robot cầu là tập hợp các tọa độ cầu liên quan với ba biến khớp nối. Do đó không gian làm việc robot cầu được giới hạn theo hai khối cầu đồng tâm.

Tay máy được gọi là *robot quay* nếu cả ba khớp đều là khớp quay. Không gian làm việc của robot này, rất phức tạp, thường có tiết diện hình xuyến. Nhiều robot công nghiệp là loại robot quay

Robot SCARA (tay máy liên hợp chọn lọc) là loại robot đặc biệt, gồm hai khớp quay tiếp theo là khớp lăng trụ. Ngoài ra, cả ba trục khớp đều song song với nhau và thường hướng theo trục trọng trường. Do đó, hai bộ tác động đầu không làm việc đối với trọng lực của các khớp và tải. Cổ tay thường chỉ có một bậc tự do, do đó toàn bộ robot có bốn bậc tự do. Kiểu cơ cấu chấp hành này thường được dùng để lắp các chi tiết trên mặt phẳng.

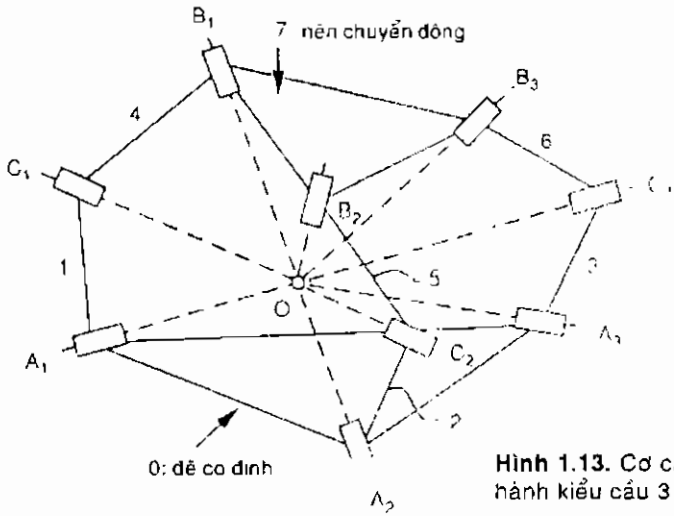
Phân loại theo đặc tính chuyển động

Các cơ cấu chấp hành của robot có thể được phân loại theo bản chất của chuyển động. Vật thể rắn thực hiện *chuyển động phẳng* nếu tất cả các hạt trong vật thể này tạo nên đường cong phẳng trong các mặt phẳng song song. Cơ cấu được gọi là *cơ cấu phẳng* nếu tất cả các khớp chuyển động trong cơ cấu đều thực hiện chuyển động phẳng song song với nhau.

Đối với cơ cấu phẳng, quĩ tích của mọi điểm trong mọi khâu đều có thể được vẽ trên mặt phẳng. Cơ cấu phẳng chỉ sử dụng các khớp cặp thấp được gọi là khớp nối phẳng. Các khớp quay và lăng trụ là các khớp thấp chỉ được phép đối với *khớp nối phẳng*. Trong khớp nối phẳng, các trục của tất cả các khớp quay phải vuông góc với mặt phẳng chuyển động, chiều chuyển động của khớp lăng trụ phải song song với mặt phẳng chuyển động. Cơ cấu chấp hành được gọi là *cơ cấu phẳng* nếu có cơ cấu phẳng (ví dụ cơ cấu trên Hình 1.6 và 1.7). Cơ cấu chấp hành phẳng rất hữu dụng đối với vật thể trên mặt phẳng.

Vật rắn được gọi là *chuyển động cầu* nếu tất cả các hạt trong vật này tạo nên đường cong trên các mặt cầu đồng tâm. Do đó khi vật rắn thực hiện chuyển động cầu, sẽ có ít nhất một điểm tĩnh tại. Theo định nghĩa nêu trên, vật rắn quay xung quanh trục cố định có thể được coi là trường hợp đặc biệt của chuyển động cầu do điểm bất kỳ trên trục quay đều có thể được coi là điểm tĩnh tại. Cơ cấu được gọi là *cơ cấu cầu* nếu mọi khớp chuyển động đều thực hiện chuyển động cầu xung quanh điểm tĩnh tại chung. Trong cơ cấu cầu, chuyển động của tất cả các hạt có thể được diễn tả theo các phép chiếu hướng kính lên bề mặt khối cầu đơn vị. Khớp quay là khớp cặp thấp duy nhất được phép đối với cấu trúc khớp nối cầu. Ngoài ra, tất cả các trục khớp nối cầu phải cắt nhau tại điểm chung. Cơ cấu chấp hành được gọi là *cơ cấu chấp hành kiểu cầu* nếu có cơ cấu cầu. Hình 1.13 minh họa cơ cấu chấp hành kiểu cầu song song 3-dof. Trong cơ cấu này, tất cả các khớp quay cắt nhau tại tâm O chung. Các khâu 1, 2, 3 được coi là khâu vào, khâu 7 được coi là khâu ra. Cơ cấu chấp hành cầu có thể được dùng làm thiết bị trỏ.

Vật rắn thực hiện *chuyển động không gian* nếu chuyển động không thể đặc trưng bằng chuyển động phẳng hoặc chuyển động cầu. Cơ cấu chấp hành được gọi là *cơ cấu cầu* nếu ít nhất một trong các khâu chuyển động có chuyển động không gian tổng quát. Nói chung, không thể đưa ra các đặc trưng chuyển động đối với cơ cấu không gian. Cơ cấu được nêu trên Hình 1.8 là cơ cấu chấp hành song song không gian 6-dof. Các cơ cấu phẳng và cầu có thể được coi là trường hợp đặc biệt của cơ cấu không gian. Chúng xảy ra do kết quả của dạng hình học đặc biệt theo các định hướng riêng của các trục của chung. Do các điều kiện hình học đặc biệt, các bài toán phân tích và tổng hợp đối với cơ cấu phẳng và cầu tương đối đơn giản. Sự lựa chọn cơ cấu chấp hành robot tùy thuộc vào ứng dụng, môi trường làm việc, và các khảo sát khác.

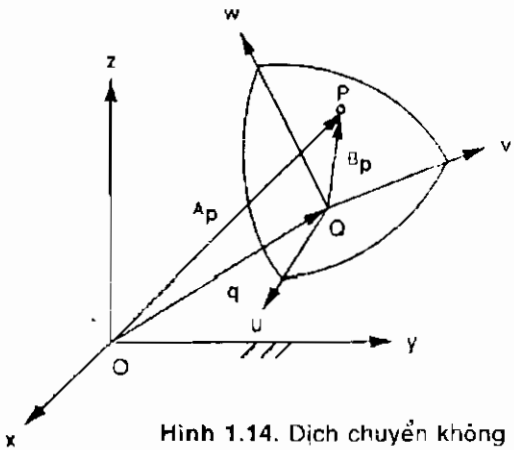


Hình 1.13. Cơ cấu chấp hành kiểu cầu 3 RRR.

Định vị, định hướng, và vị trí của vật rắn

Trong nghiên cứu động học cơ cấu chấp hành robot, cần phải xét đến *vị trí* của nhiều vật thể trong không gian. Các vật thể được nghiên cứu bao gồm các khâu của cơ cấu chấp hành, công cụ, chi tiết gia công, ... Để xác định vị trí của vật thể, cần xây dựng hệ tọa độ quy chiếu. Hệ tọa độ quy chiếu được coi là *khung cố định*, mặc dù trong thực tế khung này không bắt buộc phải cố định với nền. Hệ tọa độ Decartes được dùng để xác định vị trí vật thể, ngoài ra có thể dùng *hệ tọa độ cầu* và *hệ tọa độ trụ*.

Vị trí của vật thể đối với hệ tọa độ quy chiếu được xác định nếu biết vị trí mọi điểm của vật thể đó. Nếu vật thể là rắn, sáu thông số độc lập cần dùng để xác định vị trí trong không gian ba chiều. Hệ toạ độ x,y,z được dùng là khung cố định (Hình 1.14). Hệ tọa độ Decartes đối với vật thể chuyển động được coi là *khung chuyển động* (u,v,w). Vị trí mọi điểm của vật rắn có thể được xác định theo vị trí của khung chuyển động so với khung cố định. *Vị trí* tương đối có thể được coi là vị trí của một điểm, chẳng hạn gốc tọa độ Q, và *hướng* của khung chuyển động tính theo khung cố định. Hơn nữa, nếu giả thiết khung chuyển động ban đầu trùng với khung cố định, vị trí của khung chuyển động so với khung cố định và độ dịch chuyển không gian của vật rắn từ vị trí ban đầu là tương đương.



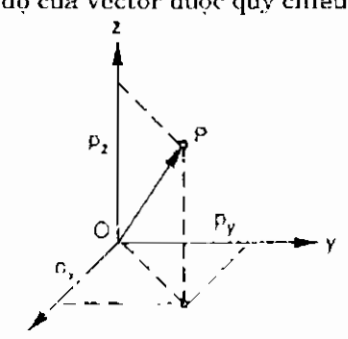
Hình 1.14. Dịch chuyển không gian tổng quát.

Xác định vị trí

Vị trí của điểm bất kỳ đối với khung quy chiếu có thể được xác định theo *vector vị trí* 3 x 1. Ví dụ, vị trí điểm P trong khung quy chiếu A (Hình 1.15) được viết dưới dạng

$$^{A}P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

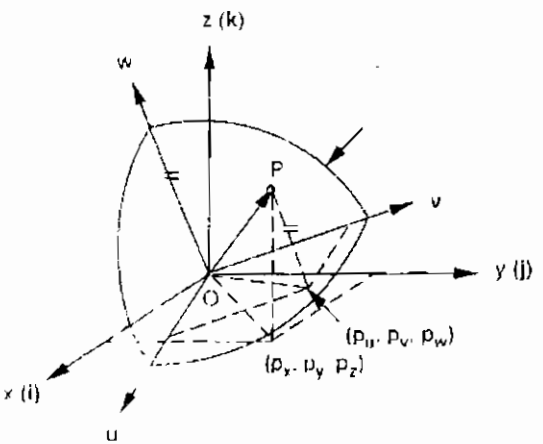
Trong đó các chỉ số x, y, z là các hình chiếu của vector vị trí trên ba trục tọa độ của khung quy chiếu. Do phải làm việc với vài hệ tọa độ, cần phải có thêm ký hiệu hệ tọa độ của vector được quy chiếu.



Hình 1.15. Vector vị trí của điểm P trong không gian.

Xác định hướng

Hướng của vật rắn so với khung cố định có thể được xác định theo nhiều cách khác nhau. Có nhiều cách để xác định, thường dùng *theo hàm cosine*, *theo trục xoắn*, và *theo góc Euler*. Để xác định hướng của vật rắn cần xét chuyển động của khung chuyển động B so với khung cố định A có một điểm cố định. Điều này được gọi là *chuyển động quay* hoặc *chuyển động cầu*, có thể giả thiết gốc tọa độ của khung cố định trùng với khung chuyển động (Hình 1.16).



Hình 1.16. Sự dịch chuyển cầu.

Xác định hướng theo cosine. Một phương pháp thuận tiện để xác định hướng của vật rắn là sử dụng *hàm cosine* của các trục tọa độ theo khung chuyển động so với khung cố định. Giả sử i, j, k là ba vector đơn vị hướng theo ba trục của khung cố định A và u, v, w là ba vector đơn vị hướng theo các trục tọa độ của khung chuyển động B (Hình 1.16). Ba vector đơn vị u, v, w có thể được biểu thị theo khung cố định A như sau:

$$^{A}u = u_x i + u_y j + u_z k.$$

$$^{A}v = v_x i + u_y j + u_z k.$$

$$^{A}w = w_x i + u_y j + u_z k. \qquad (1.10)$$

Vector vị trí của điểm P của vật rắn có thể được biểu thị theo khung cố định A.

$$^{A}p = p_x i + p_y j + p_z k \tag{1.11}$$

hoặc theo khung quay B

$$^{B}p = p_u u + p_v v + p_w w \tag{1.12}$$

Do P là điểm của vật rắn, ^{B}p là hằng. Tuy nhiên, ^{A}p phụ thuộc vào định hướng của B so với A. Thay pt (1.10) vào (1.12) sẽ nhận được vector p trong khung cố định A.

$$\begin{aligned} ^{A}p = \quad & (p_u u_x + p_v v_x + p_w w_x)i + (p_u u_y + p_v v_y + p_w w_y)j \\ & + (p_u u_z + p_v v_z + p_w w_z)k \end{aligned} \tag{1.13}$$

Thiết lập sự cân bằng các thành phần x, y, z của ^{A}p trong pt (1.13) với các thành phần tương ứng trong pt (1.11):

$$\begin{aligned} p_x &= u_x p_u + v_x p_v + w_x p_w \\ p_y &= u_y p_u + v_y p_v + w_y p_w \\ p_z &= u_z p_u + v_z p_v + w_z p_w \end{aligned} \tag{1.14}$$

Viết pt (1.14) ở dạng ma trận

$$^{A}P = {}^{A}R_B B_P \tag{1.15}$$

trong đó

$$^{A}R_B = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Ký tự A và ký tự B biểu thị bậc biến đổi. Phần tiếp theo có thể không sử dụng các ký tự này khi chỉ có hai khung quy chiếu và bậc biến đổi là rõ ràng.

Ma trận $^{A}R_B$ là ma trận quay của khung chuyển động B theo khung cố định A. Ma trận quay xác định chiều của B hoàn toàn theo A, biến đổi vector của điểm P bất kỳ từ khung chuyển động B đến khung cố định A. Từ định nghĩa trên có thể thấy các cột của ma trận quay biểu thị ba vector đơn vị chéo của các trục tọa độ chuyển động được xác định trong khung cố định. Do đó, ma trận quay là ma trận chéo. Các điều kiện về độ chéo là

$$\begin{aligned} u^2 &= 1 \\ v^2 &= 1 \\ w^2 &= 1 \end{aligned} \tag{1.17}$$

và

$$u^T v = 0$$
$$v^T w = 0$$
$$w^T u = 0 \qquad (1.18)$$

Do các điều kiện chéo nêu trên, chỉ có ba trong chín phần tử của ${}^A R_B$ là độc lập. Sử dụng các điều kiện chéo nêu trên, có thể thấy

$$u \times v = w$$
$$v \times w = u$$
$$w \times u = v \qquad (1.19)$$

và

$$\det({}^A R_B) = 1 \qquad (1.20)$$

Hơn nữa, do các điều kiện chéo, sự biến đổi nghịch đảo ma trận quay là bằng biến đổi

$${}^B R_A = {}^A R_B^{-1} = {}^A R_B^T \qquad (1.21)$$

Do các cột của ${}^A R_B$ biểu thị ba vector đơn vị của các trục tọa độ theo hệ tọa độ B trong hệ tọa độ A, các hàng của ${}^A R_B$ là ba vector đơn vị xác định dọc theo trục tọa độ của khung A trong khung B. Do đó, ma trận quay có thể được diễn dịch là tập hợp ba vector cột hoặc tập hợp ba vector hàng.

$${}^A R_B = \begin{bmatrix} {}^A u & {}^A v & {}^A w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B i^T \\ {}^B j^T \\ {}^B k^T \end{bmatrix} \qquad (1.22)$$

Định lý Euler. "Sự dịch chuyển tổng quát của vật thể rắn với một điểm cố định là *chuyển động quay* xung quanh một trục. Trục quay duy nhất này được gọi là *trục xoắn*". Nói chung, trục xoắn có thể được suy ra từ ma trận quay cho trước.

Phương trình (1.15) cung cấp sự biến đổi chéo vị trí điểm P trong khung B đối với khung A. Do khung B trùng với khung A tại vị trí ban đầu, có thể coi ${}^B p$ là vị trí thứ nhất ${}^A p$ là vị trí thứ hai của P trong vật rắn B. Do gốc tọa độ O là điểm tĩnh tại, trục xoắn đi qua điểm này. Hơn nữa, nếu P nằm trên trục quay, vector vị trí sẽ không bị ảnh hưởng từ sự quay, nghĩa là

$${}^B \tilde{p} = {}^A \tilde{p} \qquad (1.23)$$

Vị trí thứ hai của P được xác định theo sự biến đổi chéo được cho trên pt (1.15). Thay pt (1.23) vào (1.15)

$$({}^{A}R_{B} - I)\,{}^{A}\tilde{p} = 0 \qquad (1.24)$$

trong đó I là ma trận đồng nhất 3 x 3.

Phương trình (1.24) là trường hợp đặc biệt của bài toán tổng quát:

$$({}^{A}R_{B} - \lambda I)\,{}^{A}\tilde{p} = 0 \qquad (1.25)$$

trong đó λ là *giá trị đặc tính*. Phương trình (1.25) gồm ba phương trình tuyến tính đồng nhất với ba biến, $\tilde{p}_x$, $\tilde{p}_y$, và $\tilde{p}_z$. Điều kiện tương thích để tồn tại các nghiệm không tầm thường là định thức của các hệ số phải triệt tiêu, nghĩa là

$$\left|{}^{A}R_{B} - \lambda I\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.26)$$

trong đó a_{ij} là phần tử (i, j) của ${}^{A}R_{B}$

Phương trình (1.26) được gọi là *phương trình đặc tính*, và các giá trị của λ thỏa mãn điều kiện đặc tính. Nói chung, phương trình đặc tính, có ba gốc với ba vector đặc tính. Mở rộng pt (1.26), chẳng hạn theo cột thứ nhất của ${}^{A}R_{B}$ và áp dụng các pt (1.19), (1.20)

$$\lambda^3 - tr({}^{A}R_{B})\lambda^2 + tr({}^{A}R_{B})\lambda - 1 = 0 \qquad (1.27)$$

trong đó $tr({}^{A}R_{B}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

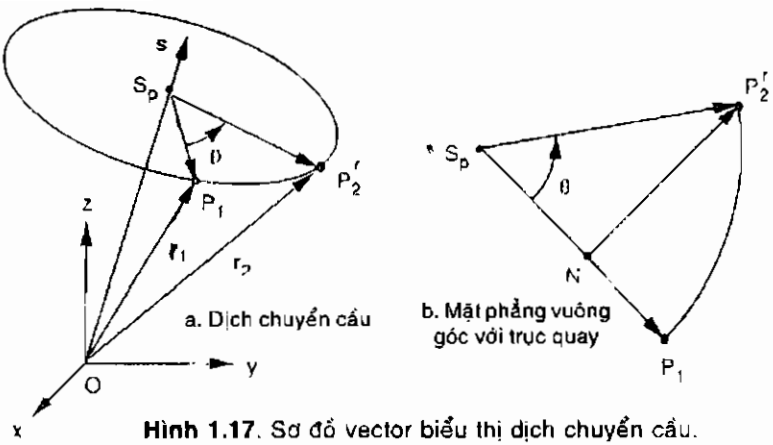
Giải pt (1.27) sẽ tính được

$$\lambda = 1.e^{i\theta}.e^{-i\theta}$$

trong đó

$$\theta = \cos^{-1}\frac{a_{11} + a_{22} + a_{23} - 1}{2} \qquad (1.28)$$

xác định góc quay quanh trục vít và $\cos^{-1}x$ là hàm arccosine. Vector đặc tính tương ứng giá trị $\lambda = 1$ xác định chiều của trục vít, do đó chiều của trục vít có thể nhận được bằng cách giải pt (1.24) theo các tỷ số $\tilde{p}_x / \tilde{p}_y / \tilde{p}_z$



Hình 1.17. Sơ đồ vector biểu thị dịch chuyển cầu.

Biểu diễn theo trục xoắn. Phần này sẽ xác định sự định hướng của vật rắn theo sự quay xung quanh trục xoắn. Từ Hình 1.17a có thể thấy, nếu khung chuyển động B quay theo góc θ quanh trục đi qua gốc tọa độ của khung A, vị trí thứ nhất của điểm P trên vật rắn B được ký hiệu theo vector $r_1 = OP_1$. Vị trí thứ hai được ký hiệu là $r_2 = OP_2^r$, và chiều quay được ký hiệu bằng vector đơn vị s (s_x, s_y, s_z), có thể nhận được:

$$\overline{S_pP_1} = r_1 - (r_1^T s)s \tag{1.29}$$

$$\overline{S_pP_2^r} = r_2 - (r_2^T s)s \tag{1.30}$$

Hình 1.17b minh họa mặt phẳng chứa điểm P_1 và P^r_2 vuông góc với trục quay. Giao điểm với mặt phẳng và trục quay là S_p, sử dụng các biểu thức $|S_pP_1| = |S_pP_2^r|$ và $s \times \overline{S_pP_1} = s \times r_1$ có thể nhận được

$$\overline{S_pN} = \overline{S_pP_1}c\theta \tag{1.31}$$

$$\overline{S_pP_2^r} = s \times r_1 s\theta \tag{1.32}$$

Với cθ là viết tắt của cosθ và sθ là viết tắt của sinθ. Để suy ra quan hệ giữa r_2 và r_1, cần biểu diễn $\overline{S_pP_2^r}$ theo tổng của hai vector

$$\overline{S_pP_2^r} = \overline{S_pN} + \overline{NP_2^r} \tag{1.33}$$

thay các pt (1.29) đến (1.32) vào (1.33)

$$r_2 - (r_2^T s)s = \left[r_1 - (r_1^T s)s\right]c\theta + s \times r_1 s\theta \tag{1.34}$$

thay giá trị $r_1^T s = r_2^T s$ vào pt (1.34)

$$r_2 = r_1 c\theta + s \times r_1 s\theta + s(r_1^T s)(1 - c\theta) \tag{1.35}$$

Phương trình (1.35) được gọi là công thức Rodrigues đối với dịch chuyển của của vật rắn. Bằng cách xét r_1 là ${}^Bp$ và r_2 là ${}^Ap$, pt (1.35) có thể được viết ở dạng ma trận

$$^A P = {}^A R_B \, {}^B P \tag{1.36}$$

trong đó các phần tử của ma trận quay là

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (s_x^2 - 1)(1 - c\theta) + 1,\\
a_{12} &= s_x s_y (1 - c\theta) - s_z s\theta,\\
a_{13} &= s_x s_z (1 - c\theta) + s_y s\theta,\\
a_{21} &= s_y s_x (1 - c\theta) + s_z s\theta,\\
a_{22} &= (s_y^2 - 1)(1 - c\theta) + 1,\\
a_{23} &= s_y s_z (1 - c\theta) - s_x s\theta,\\
a_{31} &= s_z s_x (1 - c\theta) - s_y s\theta,\\
a_{32} &= s_z s_y (1 - c\theta) + s_x s\theta,\\
a_{33} &= (s_z^2 - 1)(1 - c\theta) + 1.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Phương trình (1.37) được gọi là *biểu diễn trục xoắn* theo hướng của vật rắn. Biểu diễn này sử dụng bốn thông số gồm ba thông số liên quan với chiều của trục xoắn và một thông số liên quan đến góc quay. Tuy nhiên, chỉ hai trong ba thông số liên quan với chiều trục xoắn là độc lập do chúng phải thỏa mãn điều kiện vector đơn vị $s^T s = 1$

Nếu biết trục xoắn và góc quay, có thể tính được các phần tử của ma trận từ pt (1.37). Mặt khác, nếu biết ma trận quay có thể tính được trục xoắn và góc quay. Góc quay được xác định theo tổng các phần tử chéo của ma trận quay từ pt (1.37).

$$\theta = \cos^{-1}\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} \tag{1.38}$$

Chiều trục xoắn được xác định bằng cách tính hiệu giữa các cặp hai phần tử chéo đối nghịch

$$s_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{2s\theta}$$

$$s_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{2s\theta}$$

$$s_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{2s\theta} \qquad (1.39)$$

Từ các pt (1.38) và (1.39) có hai nghiệm đối với trục xoắn, nghiệm thứ nhất là âm so với nghiệm thứ hai. Trong thực tế, cả hai nghiệm đều biểu thị cùng một trục xoắn, do sự quay $-\theta$ quanh trục -s hoàn toàn tương tự sự quay $+\theta$ quanh trục s.

Biểu diễn theo góc Euler. Biểu diễn chiều theo hàm cosine có chín thông số và biểu diễn theo trục xoắn có bốn thông số. Do sự quay là chuyển động với ba bậc tự do, tập hợp ba thông số là đủ để xác định sự định hướng của vật rắn trong không gian. Trong thực tế có nhiều bộ ba thông số được dùng để xác định sự định hướng, tuy nhiên bộ ba phổ biến nhất là các góc Euler. Trong biểu diễn góc Euler, ba sự quay liên tiếp xung quanh các trục tọa độ của hệ tọa độ cố định hoặc hệ tọa độ chuyển động để định hướng vật rắn.

Để thuận tiện, có thể sử dụng ba ma trận quay cơ bản từ đó suy ra sự biểu diễn góc Euler theo tích của chúng. Khi vật rắn quay theo góc θ quanh trục z, $s_x = s_y = 0$ và $s_z = 1$, do đó ma trận quay, pt (1.37) trở thành

$$R(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.40)$$

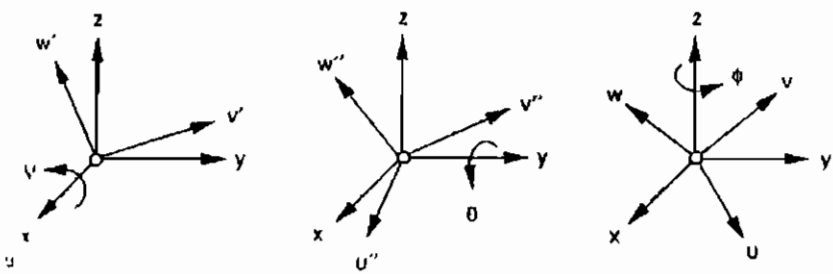
tương tự khi vật rắn quay xung quanh trục x, $s_y = s_z = 0$ và $s_x = 1$, pt (1.37) trở thành

$$R(x,\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\psi & -s\psi \\ 0 & s\psi & c\psi \end{bmatrix} \qquad (1.41)$$

khi vật rắn quay xung quanh trục y, pt (1.37) trở thành

$$R(y,\phi) = \begin{bmatrix} c\phi & 0 & s\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi & 0 & c\phi \end{bmatrix} \tag{1.42}$$

Các góc Roll-Pitch-Yaw. Trước hết cần xét ba sự quay liên tiếp của khung chuyển động B xung quanh các trục tọa độ của khung cố định A. Ban đầu khung B trùng với khung A, sau đó B quay quanh trục x theo góc ψ, trở thành hệ (u', v', w'), tiếp theo B quay quanh trục y với góc θ, tạo thành hệ (u", v", w") cuối cùng, quay theo góc ϕ quanh trục z, trở thành hệ (u, v, w) (Hình 1.18).



Hình 1.18. Các chuyển động quay liên tiếp quanh các trục tọa độ cố định.

Do cả ba sự quay đều xảy ra quanh các trục tọa độ của khung cố định, ma trận quay kết quả là tích của ba ma trận cơ bản.

$$R(\psi,\theta,\phi) = R(z,\phi)R(y,\theta)R(x,\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c\phi c\theta & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ s\phi c\theta & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

Sự quay quanh trục x được gọi là Roll, quanh trục y là Pitch, và quanh trục z là Yaw. Theo qui ước, sự định hướng của vật rắn theo các góc này được gọi là biểu diễn góc Roll-Pitch-Yaw. Do sự quay cuối cùng sẽ xác định hướng, thứ tự của các chuyển động quay không thể thay đổi một cách tùy ý.

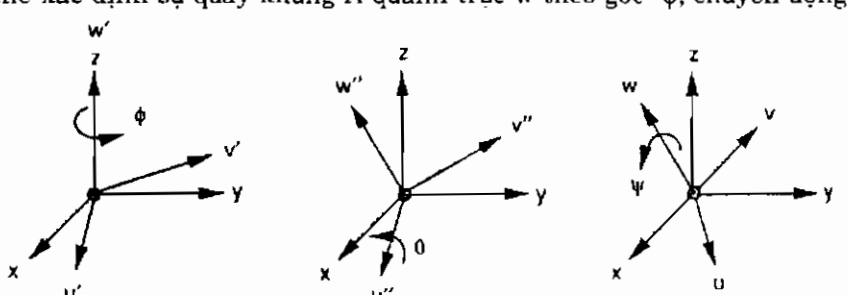
Với các góc Roll, Pitch, và Yaw cho trước có thể tính ma trận quay tổng quát từ pt (1.43). Mặt khác, với ma trận quay cho trước, có thể tính các góc Roll-Pitch-Yaw tương ứng

$$\theta = \sin^{-1}(-a_{31})$$
$$\psi = A\tan 2(a_{32}/c\theta . a_{33}/c\theta) \qquad (1.44)$$
$$\phi = A\tan 2(a_{21}/c\theta . a_{11}/c\theta)$$

với $c\theta \neq 0$, $\sin^{-1}x$ là hàm arcsine, Atan2(x, y) là hàm arctan hai biến nhưng chỉ có một nghiệm góc. Theo ma trận quay cho trước, nói chung có hai nghiệm về các góc Roll-Pitch-Yaw. Tuy nhiên, nếu $\theta = \pm 90^0$, nghiệm của phương trình (1.41) sẽ không còn, đối với trường hợp này chỉ tính tổng hoặc hiệu của ϕ và ψ.

Các góc Euler w-u-w. Phần này sẽ xét ba chuyển động quay liên tiếp của vật rắn xung quanh các trục tọa của khung chuyển động B. Ban đầu khung chuyển động B trùng với khung cố định A, sau đó B quay theo trục w với góc ϕ, chuyển động quay thứ hai theo góc θ quanh trục u', và sự quay thứ ba theo góc ψ quanh trục w" (Hình 1.19). Chú ý, mỗi chuyển động quay quanh trục phải có vị trí phụ thuộc vào các chuyển động quay trước đó. Chuyển động quay thứ nhất làm cho khung (u, v, w) chuyển sang vị trí (u', v', w'), chuyển động quay thứ hai làm cho khung (u', v', w') chuyển sang vị trí (u", v", w"), và chuyển động quay thứ ba làm cho khung này chuyển đến vị trí cuối (u, v, w). Ba lần quay liên tiếp này được gọi là các góc Euler w-u-w hoặc z-x-z.

Ma trận quay kết quả có thể suy ra từ tính [illegible] động học đảo, bằng cách xét định hướng khung A theo khung B. Bài toán động học đảo có thể xác định sự quay khung A quanh trục w theo góc -ϕ, chuyển động



Hình 1.19. Sự quay liên tiếp xung quanh các trục tọa độ chuyển động.

quay thứ hai theo góc -θ quanh trục u, và chuyển động quay thứ ba theo góc -ψ quanh trục w. Trong phép nghịch đảo động học, các trục tọa độ của khung B được coi là cố định, do đó ma trận quay tổng quát ${}^{B}R_{A}(-\phi,-\theta,-\psi)$ có thể được viết dưới dạng

$$ {}^{B}R_{A}(-\phi,-\theta,-\psi)={}^{B}R_{A}(w,-\psi){}^{B}R_{A}(u,-\theta){}^{B}R_{A}(w,-\phi) \qquad (1.45) $$

Do ${}^{A}R_{B}=\left[{}^{B}R_{A}\right]^{-1}$ và ${}^{B}R_{A}^{-1}(w,-\phi)={}^{B}R_{A}(w,\phi)$, có thể mở rộng pt (1.45) theo

$$ \begin{aligned} {}^{A}R_{B}(\phi,\theta,\psi) &= \left[{}^{B}R_{A}(-\phi,-\theta,-\psi)\right]^{-1} \\ &= R(w,\phi)R(u,\theta)R(w,\psi) \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & s\phi s\phi \\ s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & -c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (1.46) $$

Các chuyển động quay liên tiếp xung quanh các trục tọa độ quay của khung chuyển động là *các tích* ma trận. Nếu biết góc Euler w-u-w, có thể tính ma trận quay kết quả từ pt (1.46). Mặt khác, nếu biết ma trận quay có thể tính các góc Euler w-u-w

$$ \begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} a_{33} \\ \phi &= A\tan 2(a_{13}/s\theta, -a_{23}/s\theta) \\ \psi &= A\tan 2(a_{31}/s\theta, a_{32}/s\theta) \end{aligned} \qquad (1.47) $$

với $s\theta \neq 0$. Khi $\theta = 0$ hoặc 180^0, các nghiệm của pt (1.47) bị suy giảm. Đối với trường hợp này, chỉ tính tổng hoặc nghiệm của ϕ và ψ.

Các góc Euler w-v-w. Kiểu biểu diễn góc Euler này bao gồm chuyển động quay theo góc ϕ quanh trục w, tiếp theo là chuyển động quay theo góc θ quanh trục v, và cuối cùng chuyển động quay theo góc ψ quanh trục w. Ma trận kết quả là tích của ba ma trận quay cơ bản

$$ \begin{aligned} {}^{A}R_{B}(\phi,\theta,\psi) &= R(w,\phi)R(v,\theta)R(w,\psi) \\ &= \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (1.48) $$

với các góc Euler w-v-w cho trước có thể tính ma trận quay kết quả từ pt (1.48), ngược lại nếu biết ma trận quay, có thể tính các góc w-v-w

$$\theta = \cos^{-1} a_{33}$$
$$\phi = A\tan 2(a_{23}/s\theta, a_{13}/s\theta) \qquad (1.49)$$
$$\psi = A\tan 2(a_{32}/s\theta, -a_{31}/s\theta)$$

với $s\theta \neq 0$. Khi $\theta = 0$ hoặc 180^0, các nghiệm của pt (1.49) bị suy giảm. Đối với trường hợp này, chỉ tính tổng hoặc nghiệm của ϕ và ψ.

Xác định vị trí

Như đã đề cập, vị trí của vật rắn có thể được xác định theo vị trí của điểm gốc Q và định hướng của khung chuyển động theo khung cố định. Hình 1.14 minh họa vị trí của điểm P có thể được biểu diễn trong khung cố định A theo ${}^Ap = \overline{OP}$, cũng có thể được biểu diễn trong khung chuyển động B theo ${}^Bp = QP$. Để suy ra quan hệ giữa ${}^Ap$ và ${}^Bp$, cần thiết lập vector $\overline{OP}$ theo tổng của hai vector

$$\overline{OP} = \overline{OQ} + \overline{QP} \qquad (1.50)$$

trong đó $\overline{OQ} = {}^Aq$ là vị trí của Q theo khung cố định A. Nếu sự định hướng của khung chuyển động B theo khung cố định A được xác định theo ma trận quay ${}^AR_B$, phương trình (1.50) có thể được viết dưới dạng

$${}^Ap = {}^AR_B\,{}^Bp + {}^Aq \qquad (1.51)$$

Phương trình (1.51) là vị trí của điểm trong vật rắn tính theo vị trí điểm gốc Q và định hướng của khung chuyển động B theo khung cố định A.

Do giả thiết, ban đầu khung chuyển động trùng với khung cố định, có thể coi ${}^Bp$ là vị trí thứ nhất của điểm P và ${}^Ap$ là vị trí thứ hai của điểm này trong khung cố định A. Đại lượng thứ nhất trong vế phải của pt (1.51) biểu thị sự đóng góp do chuyển động quay của vật rắn xung quanh một trục, đại lượng thứ hai là sự đóng góp do chuyển động tịnh tiến theo chiều ${}^Aq$, có thể thấy sự dịch chuyển không gian tổng quát của vật rắn được xét theo chuyển động quay và tịnh tiến. Đây là định lý Chasles.

Các biến đổi đồng nhất

Phương trình (1.51) là biến đổi tổng quát của vector vị trí từ khung chuyển động sang khung cố định. Đại lượng thứ nhất ở vế phải của phương trình này là phần chuyển động quay và đại lượng thứ hai là do chuyển động tịnh tiến của khung chuyển động đối với khung cố định. Phương trình này chưa được thu gọn, do ma trận quay 3 x 3 không biểu thị chuyển động tịnh tiến. Để pt (1.51) ở dạng gọn hơn, cần sử dụng khái niệm về tọa độ đồng nhất và ma trận biến đổi đồng nhất.

Tọa độ đồng nhất

Gọi $p = [p_x, p_y, p_z]^T$ là vector vị trí của một điểm theo khung qui chiếu A trong không gian ba chiều. Các *tọa độ đồng nhất* của p được định nghĩa là:

$$\hat{p} \equiv [\rho p_x, \rho p_y, \rho p_z, \rho]^T \tag{1.52}$$

do đó, các tọa độ đồng nhất của điểm P trong khung A được biểu thị theo vector p trong không gian bốn chiều. Tọa độ thứ tư, ρ, là hệ số tỉ lệ khác 0. Nói chung, vector vị trí N chiều trở thành vector (N + 1) chiều trong hệ tọa độ đồng nhất. Khái niệm tọa độ đồng nhất là rất hữu ích để thực hiện các biến đổi ma trận, bao gồm biến đổi quay, tịnh tiến, lập tỉ lệ, và phối cảnh.

Từ định nghĩa nêu trên, có thể thấy vector ba chiều là từ các tọa độ đồng nhất bốn chiều bằng cách chia ba tọa độ đầu cho tọa độ thứ tư

$$p_x = \frac{\hat{p}_x}{\rho}, p_y = \frac{\hat{p}_y}{\rho}, \text{và } p_z = \frac{\hat{p}_z}{\rho} \tag{1.53}$$

Chú ý, các tọa độ đồng nhất p không phải là duy nhất do hệ số tỉ lệ ρ khác không bất kỳ đều trùng với vector ba chiều p. Đối với động học các cơ cấu và robot, để thuận tiện thường chọn hệ số này là 1. Khi hệ số tỉ lệ được coi là đơn vị, ba tọa độ đồng nhất biểu thị các tọa độ thực của vector ba chiều, do đó vector vị trí của một điểm sẽ có dạng

$$\hat{p} = [p_x, p_y, p_z, 1]^T \tag{1.54}$$

Ma trận biến đổi đồng nhất

Ma trận biến đổi đồng nhất là ma trận 4 x 4 được xác định để quy chiếu vector vị trí đồng nhất từ hệ tọa độ này sang hệ tọa độ khác. Ma trận này có thể được chia thành bốn ma trận nhỏ

$$ {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B}(3\times 3) & \vdots & {}^{A}q(3\times 1) \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \gamma(1\times 3) & \vdots & \rho(1\times 1) \end{bmatrix} \qquad (1.55) $$

Ma trận con 3 x 3, phía trên bên trái, ${}^{A}R_{B}$, ký hiệu định hướng của khung di động B theo khung quy chiếu A, ma trận con 3 x 1, phía trên bên phải, ${}^{A}q$, ký hiệu vị trí của gốc tọa độ khung di động so với khung cố định, ma trận con 1 x 3, phía dưới bên trái, γ, là biến đổi phối cảnh, và phần tử phía dưới bên phải, ρ, là hệ số tỉ lệ. Đối với động học của các cơ cấu và robot, hệ số tỉ lệ được xác lập là đơn vị, và ma trận biến đổi phối cảnh được xác lập là zero.

Sử dụng các tọa độ đồng nhất, pt (1.51) có thể được viết dưới dạng

$$ {}^{A}\hat{p} = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}\hat{p} \qquad (1.56) $$

trong đó

$$ {}^{A}T_{B} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B} & \vdots & {}^{A}q \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 000 & \vdots & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\hat{p} = [p_x, p_y, p_z, 1]^T $$

$$ {}^{B}\hat{p} = [p_u, p_v, p_w, 1]^T $$

Ví dụ, ma trận biến đổi đồng nhất đối với sự quay đơn giản xung quanh trục z được tính là

$$ {}^{A}T_{B}(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.57) $$

Ma trận biến đổi đối với chuyển động tuyến tính thuần là

$$
{}^{A}T_{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.58}
$$

Nói chung, pt (1.56) là sự biến đổi các tọa độ đồng nhất từ khung này đến khung khác. Khi biết ma trận biến đổi ${}^{A}T_{B}$, có thể định vị khung chuyển động B theo khung cố định A; và khi biết vị trí khung chuyển động B so với khung cố định A, có thể tìm được ma trận biến đổi ${}^{A}T_{B}$

Mặc dù ma trận biến đổi ${}^{A}T_{B}$ không phải là ma trận chéo, nhưng vẫn có biến đổi ngược. Nhân cả hai vế phương trình (1.51) với ${}^{A}R^{-1}_{B}$ và sử dụng ${}^{A}R^{-1}_{B} = {}^{A}R_{B}^{T}$, sẽ nhận được

$$
{}^{B}p = {}^{A}R_{B}^{T}\,{}^{A}p - {}^{A}R_{B}^{T}\,{}^{A}q \tag{1.59}
$$

Sử dụng các tọa độ đồng nhất, pt (1.59) có dạng

$$
{}^{B}\hat{p} = {}^{A}T_{B}^{-1}\,{}^{A}\hat{p} \tag{1.60}
$$

$$
{}^{A}T_{B}^{-1} = {}^{B}T_{A} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B}^{T} & \vdots & -{}^{A}R_{B}^{T}\,{}^{A}q \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 000 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1.61}
$$

Biến đổi đồng nhất phối hợp

Các ma trận biến đổi đồng nhất có thể được nhân với nhau để nhận được ma trận biến đổi phối hợp. Tuy nhiên, cần đặc biệt chú ý đến thứ tự nhân do các phép quay hữu hạn là không giao hoán. Bài toán trở nên phức tạp hơn, do vật rắn có thể quay xung quanh các trục tọa độ của khung qui chiếu cố định hoặc khung chuyển động. Các nguyên tắc sau đây thường được dùng để xác định ma trận biến đổi phối hợp:

1. Tại vị trí ban đầu, khung chuyển động A và khung cố định B là đồng nhất, do đó T = I là ma trận đồng nhất.
2. Phép quay và tịnh tiến xung quanh các trục tọa độ của khung cố định sẽ tạo ra phép nhân trước hai ma trận.
3. Phép quay và tịnh tiến xung quanh các trục tọa độ của khung chuyển động sẽ tạo ra phép nhân sau hai ma trận.

Cơ học cơ cấu chấp hành robot

Robot học là ngành khoa học nghiên cứu các công nghệ cơ bản liên quan đến lý thuyết và ứng dụng các hệ thống robot. Nghiên cứu này gồm cả lý thuyết và ứng dụng, có thể phân chia theo thiết kế cơ cấu chấp hành, cơ học cơ bản, qui hoạch và điều khiển quĩ đạo, lập trình, ... *Cơ học* là chuyên ngành cơ học về năng lượng và các lực, ảnh hưởng của chúng đối với chuyển động trong hệ thống cơ học. Việc nghiên cứu bao gồm động học, tĩnh học, và động lực học.

Động học

Động học nghiên cứu chuyển động nhưng không xét đến các lực và/hoặc các moment gây ra chuyển động. Động học chỉ xét vị trí, vận tốc, gia tốc, và các đạo hàm cấp cao của các biến vị trí theo thời gian hoặc các biến khác, do đó chỉ đề cập các tính chất hình học và thời gian của chuyển động. Các biến khớp nối của cơ cấu chấp hành liên quan đến vị trí và định hướng của đầu tác động theo các ràng buộc của các khớp đó. Các quan hệ động học này là tiêu điểm nghiên cứu động học các cơ cấu chấp hành robot. Nghiên cứu này có thể tiếp cận theo hai quan điểm, giải tích động học và tổng hợp động học, hai quan điểm này liên quan chặt chẽ với nhau.

Giải tích động học nghiên cứu về đạo hàm, vi phân, tích phân của các chuyển động tương đối. Có hai kiểu bài toán giải tích động học là động học thuận, và động học đảo. Trong lập trình cơ cấu chấp hành, tập hợp các vị trí và định hướng mong muốn, các đạo hàm thời gian của vị trí và định hướng của đầu tác động, được chuyên biệt trong không gian. Vấn đề là tìm mọi tập hợp khả dĩ của các biến khớp động là các đạo hàm thời gian tương ứng của chúng để đầu tác động đạt định hướng và vị trí mong muốn với các đặc tính chuyển động theo yêu cầu. Vấn đề này được gọi là *động học đảo*. Mặt khác, đôi khi các biến khớp động và các đạo hàm thời gian của chúng có thể nhận được từ các bộ cảm biến được lắp trong các khớp, từ đó có thể tìm mọi tập hợp khả dĩ về vị trí và định hướng của đầu tác động và các đạo hàm thời gian tương ứng của chúng. Điều này được gọi là *động học thuận*. Vấn đề động học thuận và động học đảo đều có thể được giải quyết bằng nhiều phương pháp giải tích, chẳng hạn giải tích vector hình học, đại số ma trận, ...

Tổng hợp động học là quá trình ngược của giải tích động học. Trong trường hợp này cần thiết kế cơ cấu chấp hành có các tính chất động học

mong muốn. Đặc biệt, với tập hợp các vị trí và định hướng của đầu chấp hành đã biết và các đạo hàm thời gian của chúng trong không gian, cần xác định các biến khớp động tương ứng, kiểu loại và dạng hình học của cơ cấu chấp hành. Nhiều nhà nghiên cứu tập trung sự tổng hợp động học với không gian làm việc theo các tiêu chuẩn tối ưu hóa. Vấn đề tổng hợp động học có thể được chia thành ba giai đoạn liên quan, tổng hợp kiểu loại, tổng hợp số, và tổng hợp chiều.

Tĩnh học

Tĩnh học nghiên các quan hệ lực tạo ra sự cân bằng giữa các thành phần khác nhau của cơ cấu chấp hành. Cơ cấu này có thể hoạt động do các lực phát sinh từ nhiều nguồn khác nhau, chẳng hạn trọng lực, lực ma sát, quán tính, lực do tải, ... Các lực này phải được xem xét cẩn thận trong giai đoạn thiết kế cơ cấu chấp hành robot. Về nguyên tắc, lực quán tính không được xét đến trong phân tích tĩnh học. Các lực cân bằng phụ thuộc vào *cấu hình* của cơ cấu chấp nhưng không phụ thuộc vào thời gian.

Động lực học

Động lực học nghiên cứu các lực và/hoặc moment cần thiết để gây ra chuyển động của hệ các vật thể. Nghiên cứu về lực quán tính là một trong các vấn đề chính. Động lực học cơ cấu chấp hành robot là vấn đề rất phức tạp. Nói chung, bộ tác động cuối được hướng dẫn theo đường dẫn cho trước với các đặc tính chuyển động theo yêu cầu. Tập hợp các chức năng lực và/hoặc moment được áp dụng tại các khớp động để tạo ra chuyển động đó. Các lực và moment này không chỉ phụ thuộc vào các thuộc tính không gian và thời gian của quĩ đạo cho trước mà còn phụ thuộc vào các tính chất khối lượng của các khâu, tải, các ngoại lực, ...

Động lực cơ cấu chấp hành robot có thể được xem xét theo hai quan điểm, giải tích động lực học và tổng hợp động lực học.

Giải tích động lực học nghiên cứu các phương trình chuyển động của cơ cấu cho trước. Có hai kiểu bài toán giải tích động lực học gồm động lực học thuận, và động lực học đảo. *Động lực học thuận* có thể được định nghĩa như sau: *"Cho một tập hợp các hàm moment và/hoặc lực khớp kích hoạt, hãy tính chuyển động của đầu tác động theo hàm thời gian"*. *Động lực học đảo* được định nghĩa như sau: *"Cho quĩ đạo của đầu tác động theo hàm thời gian, hãy tìm tập hợp các hàm lực và/hoặc moment*

khớp động tạo ra chuyển động đó". Hiệu suất tính toán của động lực học thuận không yêu cầu cao, do chủ yếu chỉ được dùng cho các mô phỏng cơ cấu chấp hành robot trên máy tính. Mặt khác, mô hình động lực đảo hiệu quả là rất quan trọng đối với sự điều khiển thời gian thực, dựa trên mô hình của cơ cấu chấp hành robot. Nhiều phương pháp giải tích, chẳng hạn các phương trình Newton-Euler, phương trình chuyển động Lagrange, ... có thể được áp dụng trong nghiên cứu giải tích động lực các cơ cấu chấp hành robot.

Tổng hợp động lực học là qui trình ngược của giải tích động lực, đặc biệt là khi thiết kế cơ cấu chấp hành robot với các đặc tính chuyển động động lực mong muốn. Bài toán tổng hợp động lực phức tạp hơn giải tích động lực và sẽ không trình bày trong tài liệu này, ở đây chỉ tập trung vào các vấn đề giải tích động lực, tĩnh, và động học đối với các cơ cấu chấp hành robot.

Tóm tắt

Chương này trình bày tóm tắt cơ sở và lịch sử phát triển của các cơ cấu chấp hành robot, khái quát về các khâu, khớp, chuỗi động học, và các cơ cấu. Các khái niệm về bậc tự do và các tiêu chuẩn vòng chuyển động của cơ cấu được giới thiệu cùng với các thành phần cơ bản của hệ thống robot. Các cơ cấu chấp hành robot được phân loại theo bậc tự do, cấu trúc động học, công nghệ truyền động, không gian làm việc, và các đặc tính chuyển động. Phần cuối Chương trình bày sự định hướng, vị trí và định vị vật rắn theo hệ tọa độ qui chiếu cố định, các khái niệm về tọa độ đồng nhất, biến đổi đồng nhất, biến đổi đồng nhất tổng hợp. Đây là các cơ sở cần thiết để nghiên cứu về cơ học được áp dụng trong các cơ cấu chấp hành robot.

Chương 2

PHÂN TÍCH VỊ TRÍ CỦA CƠ CẤU CHẤP HÀNH NỐI TIẾP

Giới thiệu

Cơ cấu chấp hành nối tiếp gồm nhiều khâu nối tiếp bằng nhiều kiểu khớp, thường là khớp quay và khớp lăng trụ. Một đầu cơ cấu chấp hành được gắn với nền và đầu kia chuyển động tự do trong không gian, do đó thường được gọi là *cơ cấu chấp hành vòng hở*. Khâu cố định được gọi là đế, và đầu tự do có gắn bộ kẹp hoặc tay máy được gọi là *bộ tác động cuối*.

Để robot thực hiện các tác vụ đặc biệt, trước hết phải xác lập vị trí của đầu tác động cuối so với đế. Bài toán này được gọi là *phân tích vị trí*. Có hai kiểu vấn đề giải tích vị trí, *vị trí thuận*, hoặc *động học thuận*, và *vị trí đảo* hoặc *động học đảo*. Đối với động học thuận, các biến khớp nối được biết, bài toán là tìm vị trí của đầu tác động. Đối với động học đảo, vị trí của đầu tác động được biết, vấn đề là tìm các biến khớp cần thiết để đưa đầu tác động đến vị trí mong muốn. Đối với cơ cấu chấp hành nối tiếp, động học thuận tương đối đơn giản, còn động học đảo rất khó. Mặt khác, đối với cơ cấu chấp hành song song, động học đảo tương đối đơn giản, còn động học thuận rất khó. Cần chú ý, đối với cơ cấu chấp hành có số bậc tự do thấp, đầu tác động không thể định vị tự do trong không gian, còn cơ cấu chấp hành có số bậc tự do cao, có thể có nhiều nghiệm động học đảo ứng với vị trí đầu tác động cho trước, tùy theo số bậc tự do cao hơn sáu.

Để giải quyết bài toán động học đảo, cần tìm nghiệm dạng khép kín, nghĩa là thu gọn vấn đề theo phương trình đại số về vị trí đầu tác động chỉ với một biến khớp nối. Theo phương pháp này, có thể tính mọi nghiệm khả dĩ. Để đạt được điều đó, có thể sử dụng nhiều phương pháp thiết lập công thức, thường là *phương pháp đại số vector*, *phương pháp hình học*, *phương pháp ma trận* 4 x 4, *phương pháp ma trận kép* 3 x 3, ...

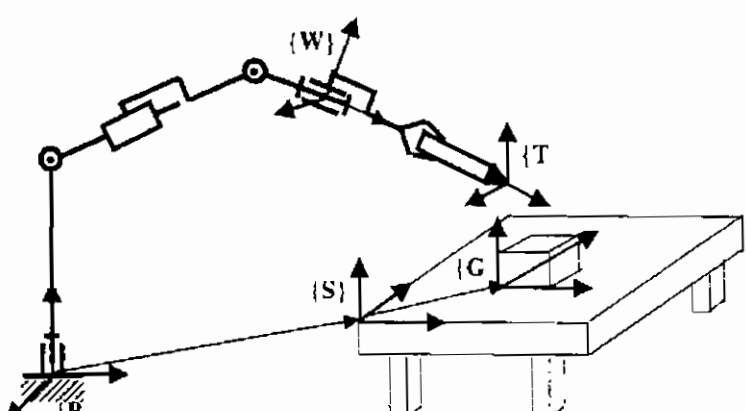
Số lượng nghiệm động học đảo khả dĩ tùy thuộc kiểu loại và vị trí của cơ cấu chấp hành robot. Nói chung, các nghiệm dạng khép kín có thể xác định đối với các cơ cấu chấp hành có dạng hình học đơn giản, chẳng hạn

ba trục khớp cắt nhau tại một điểm hoặc song song với nhau. Đối với cơ cấu chấp hành với dạng hình học tổng quát, bài toán động học đảo trở nên rất khó.

Trong Chương này, bạn đọc sẽ tập trung vào bài toán vị trí của cơ cấu chấp hành nối tiếp, sẽ giới thiệu hai phương pháp phổ biến, phương pháp dịch chuyển vít liên tiếp, và phương pháp ma trận 4 x 4 (Denavit và Hartenberg). Cả hai phương pháp đều có tính hệ thống và thích hợp trong phân tích cơ cấu chấp hành nối tiếp. Mặc dù phương pháp hình học được dùng phổ biến đối với các cơ cấu chấp hành có dạng hình học tương đối đơn giản và cơ cấu chấp hành song song, nhưng phương pháp này chỉ được trình bày tóm tắt.

Các thông số khâu và hệ thống tọa độ khâu

Nói chung, cơ cấu chấp hành nối tiếp n-dof có khâu đế và n khâu chuyển động được mắc nối tiếp bằng n khớp nhưng không tạo thành vòng kín. Chuyển động tương đối liên quan tới từng khớp có thể được điều khiển bằng bộ kích hoạt sao cho đầu tác động có thể định vị ở vị trí bất kỳ trong không gian làm việc. Ví dụ, robot (Hình 2.1) là cơ cấu chấp hành nối tiếp 5-dof, trong đó trục khớp thứ nhất hướng lên trên, trục khớp thứ hai vuông góc với trục thứ nhất và hơi lệch, trục thứ ba và thứ tư song song với trục thứ hai, còn trục khớp thứ năm cắt vuông góc với trục thứ tư.



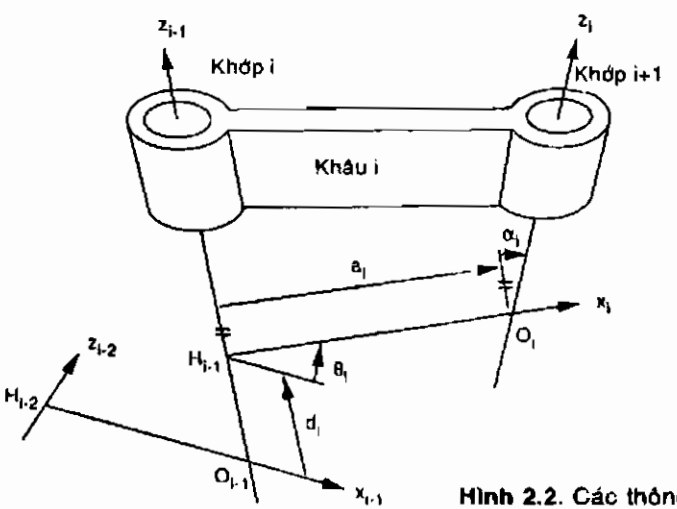
Hình 2.1. Khâu, khớp và hệ tọa độ của tay máy công nghiệp

Để xác định dạng hình học của các khâu, bắt đầu từ khâu đế, cần đánh số các khâu theo thứ tự từ 0 đến n và các khớp từ 1 đến n. Do đó, trừ khâu đế và khâu đầu tác động, mỗi khâu đều có hai khớp. Khâu 1 nối với khâu đế theo khớp 1, khâu 2 nối khâu 1 theo khớp 2, ... Khâu i có khớp i ở phía gần và khớp i+1 ở phía xa (Hình 2.2).

Theo qui ước của Denavit và Hartenberg, hệ tọa độ Decartes được gắn vào từng khâu của cơ cấu chấp hành. Trừ khâu đế và khâu đầu tác động, hệ tọa độ i gắn với khâu i theo các nguyên tắc sau:

- Trục z_i thẳng hàng với trục khớp thứ (i+1). Chiều dương của phép quay hoặc tịnh tiến có thể được chọn tùy ý.
- Trục x_i được xác định theo pháp tuyến chung giữa các trục khớp i và (i+1) và hướng từ trục khớp i đến trục khớp (i+1). Nếu hai trục khớp song song, trục x_i có thể được chọn vuông góc ở vị trí bất kỳ theo hai trục khớp đó. Nếu hai trục khớp cắt nhau, trục x_i có thể được chọn theo chiều vector qua tích $z_{i-1} \times z_i$ hoặc theo chiều ngược lại, và gốc tọa độ là giao điểm.
- Trục y_i được xác định theo qui tắc bàn tay phải.

Hệ tọa độ zero được gắn vào đế tại vị trí thuận tiện, trục z_0 thẳng hàng với trục khớp thứ nhất. Hơn nữa, còn có một hệ tọa độ gắn vào khâu đầu tác động, được gọi là hệ *tọa độ cuối*, hoặc hệ tọa độ đầu tác



Hình 2.2. Các thông số khâu.

động, được dùng để xác định vị trí của đầu này. Hệ tọa độ cuối có thể định vị ở điểm bất kỳ của đầu tác động nhưng trục x_n phải vuông góc với trục khớp cuối. Để thuận tiện, trục z_n thường được xác định theo chiều tiếp cận của bộ kẹp.

Gọi H_{i-1} là giao điểm của trục x_i và z_{i-1}, O_i là gốc của hệ tọa độ i, giao điểm giữa trục x_i và z_i (Hình 2.2). Bất kể cấu trúc vật liệu của các khâu, các thông số sau đây được xác định một cách duy nhất theo dạng hình học của các trục.

a_i: độ lệch giữa hai trục khớp kế nhau, $a_i = |H_{i-1} O_i|$

d_i: khoảng cách tịnh tiến giữa hai pháp tuyến tới của trục khớp, $d_i = O_{i-1}H_{i-1}$ là dương nếu vector $O_{i-1}H_{i-1}$ hướng theo chiều dương của z_{i-1}, là âm nếu theo chiều ngược lại

α_i: góc xoắn giữa hai trục khớp liên tiếp, là góc cần thiết để quay trục z_{i-1} thẳng hàng với trục z_i quanh trục x_i dương theo qui tắc bàn tay phải.

θ_i: góc khớp giữa hai pháp tuyến tới của trục khớp, là góc cần thiết để quay trục x_{i-1} thẳng hàng với trục x_i quanh trục z_{i-1} dương theo qui tắc bàn tay phải.

Đối với khớp quay, a_i, α_i, d_i là hằng, θ_i là biến, đo vị trí tương đối của khâu i so với khâu i-1. Đối với khớp lăng trụ, a_i, α_i, θ_i là hằng, d_i là biến, đo vị trí tương đối của khâu i so với khâu i-1. Để thuận tiện, θ_i của khớp quay và d_i của khớp lăng trụ được coi là các biến khớp, các thông số hằng, được gọi là các thông số khâu. Chú ý, biến khớp chỉ cung cấp vị trí tương đối giữa hai khâu liên tiếp, do đó không nên nhầm lẫn với sự chuyển vị. Sự chuyển vị là độ góc cần thiết để chuyển khâu từ vị trí này đến vị trí khác. Sử dụng các định nghĩa nêu trên , sự chuyển vị cần thiết để dịch chuyển khâu đến vị trí khác là bằng hiệu giữa hai giá trị liên tiếp của biến khớp.

Đối với khớp lăng trụ, chiều của trục khớp xác định chiều tịnh tiến tương đối giữa hai khâu. Khác với khớp quay, chỉ có chiều của trục khớp là quan trọng. Mặc dù vị trí khớp lăng trụ không ảnh hưởng sự chuyển vị tương đối, nhưng vị trí vật lý của khớp này được dùng để thiết lập các thông số khâu kế tiếp. Chú ý, nhiều hệ tọa độ có thể được xác định đối với cơ cấu chấp hành, do có nhiều lựa chọn khá dĩ về trục x và z dương. Qui trình chung để thiết lập hệ tọa độ Denavit-Hartenberg có thể tóm tắt như sau:

1. Bắt đầu từ khâu đế, đánh số các khâu và các khớp theo thứ tự. Đế được đánh số là khâu 0, khâu cuối cùng là đầu tác động. Trừ đế và khâu cuối cùng, mỗi khâu đều có hai khớp. Khớp i nối khâu i với khâu i - 1.

2. Vẽ các pháp tuyến chung giữa từng cặp trục khớp liên tiếp. Trừ trục khớp thứ nhất và cuối cùng, mỗi trục khớp đều có hai pháp tuyến tới chung, một với trục khớp (i-1) và một với trục khớp (i+1).

3. Thiết lập hệ tọa độ đế sao cho trục z_0 thẳng hàng với trục khớp thứ nhất, trục x_0 vuông góc với trục z_0, và trục y_0 được xác định theo qui tắc bàn tay phải.

4. Thiết lập hệ tọa độ đầu tác động n sao cho trục x_n vuông góc trục khớp cuối cùng, trục z_n thường được chọn theo chiều tiếp cận của đầu tác động.

5. Đặt hệ tọa độ Decartes cho đầu xa của tất cả các khâu khác như sau:

   - Trục z_i thẳng hàng với trục khớp (i+1).
   - Trục x_i dọc theo pháp tuyến chung giữa các trục khớp i và (i+1), hướng từ trục khớp i đến trục khớp (i+1). Nếu các trục khớp song song, trục x_i có thể lựa chọn tại điểm bất kỳ vuông góc với hai trục khớp. Nếu hai trục khớp cắt nhau, trục x_i sẽ được lựa chọn theo chiều vector qua tích $z_{i-1} \times z_i$, gốc tọa độ tại giao điểm.
   - Trục y_i được xác định theo qui tắc bàn tay phải.

6. Xác định các thông số khâu và các biến khớp, a_i, α_i, q_i, và d_i.

Có (n+1) hệ tọa độ cho cơ cấu chấp hành n-dof. Tuy nhiên, nếu có thêm các hệ tọa độ qui chiếu, chúng có thể liên hệ với một trong các hệ tọa độ nêu trên theo ma trận biến đổi. Chú ý, John Craig sử dụng qui ước khác, hệ tọa độ i được đặt ở đầu gần của khâu i, do đó tạo ra ma trận biến đổi đồng nhất khác.

Các ma trận biến đổi đồng nhất Denavit-Hartenberg

Khi có hệ tọa độ theo từng khâu của cơ cấu chấp hành, có thể thiết lập ma trận biến đổi 4 x 4 liên hệ với hai hệ tọa độ liên tiếp. Từ Hình 2.2 có thể thấy hệ tọa độ i có thể chuyển từ hệ tọa độ i-1 bằng các phép quay và tịnh tiến liên tiếp dưới đây:

1. Hệ tọa độ (i-1) tịnh tiến dọc trục z_{i-1} với khoảng cách d_i, điều này làm cho gốc O_{i-1} trùng với H_{i-1}, ma trận biến đổi tương ứng là:

$$T(z,d) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Hệ tọa độ (i-1) đã chuyển vị quay quanh trục z_{i-1} theo góc θ_i, làm cho trục x_{i-1} thẳng hàng với trục x_i, ma trận biến đổi tương ứng là:

$$T(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\phi_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Hệ tọa độ (i-1) đã chuyển vị tịnh tiến dọc trục x_i theo khoảng cách a_i, làm cho gốc O_{i-1} trùng với O_i, ma trận biến đổi tương ứng là:

$$T(x,a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Hệ tọa độ (i-1) đã chuyển vị quay quanh trục x_i theo góc α_i, làm cho hai hệ tọa đồ này trùng nhau, ma trận biến đổi tương ứng là:

$$T(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Các phép biến đổi nêu trên được coi là bốn biến đổi cơ bản về các trục tọa độ chuyển động, do đó ma trận biến đổi kết quả, ${}^{i-1}A_i$, là

$${}^{i-1}A_i = T(z,d)T(z,\theta)T(x,a)T(x,\alpha) \qquad (2.1)$$

Khai triển pt (2.1)

$$
{}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.2}
$$

Phương trình (2.2) được gọi là *ma trận biến đổi Denavit-Hartenberg (D-H)*. Ký hiệu i và i-1 cho biết các biến đổi được thực hiện từ hệ tọa độ i đến hệ tọa độ (i-1).

Gọi các tọa độ đồng nhất của vector vị trí của một điểm trong hệ tọa độ i là ${}^{i}p = [p_x, p_y, p_z, 1]^T$, các tọa độ đồng nhất của vector đơn vị trong hệ tọa độ i là ${}^{i}u = [u_x, u_y, u_z, 0]^T$, phép biến đổi vector vị trí và vector đơn vị từ hệ tọa độ i đến (i-1) có thể được viết như sau:

$$
{}^{i-1}p = {}^{i-1}A_i \, {}^{i}p \tag{2.3}
$$

$$
{}^{i-1}u = {}^{i-1}A_i \, {}^{i}u \tag{2.4}
$$

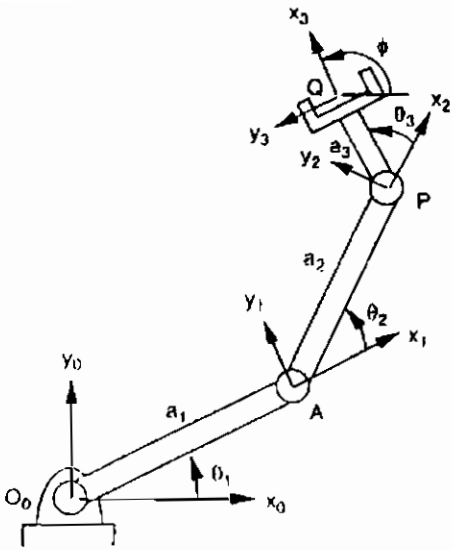
Mặc dù ma trận biến đổi A không phải là ma trận chéo, nhưng vẫn có phép biến đổi ngược

$$
{}^{i}A_{i-1} = ({}^{i-1}A_i)^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & -a_i \\ -c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & s\alpha_i & -d_i s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i & -d_i c\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5}
$$

Ví dụ 2.1. Cơ cấu chấp hành phẳng 3-dof. Hình 2.3 minh họa cơ cấu chấp hành phẳng 3-dof gồm ba khớp quay tại các điểm O_0, A, và P. Hệ tọa độ được đặt vào từng khâu. Hệ tọa độ (x_0, y_0, z_0) được đặt ở đế với gốc ở chốt xoay khớp thứ nhất, trục x hướng về bên phải. Do các trục khớp là song song với nhau, mọi góc xoay α_i và khoảng cách tịnh tiến d_i đều là zero.

Đối với các hệ tọa độ đã chọn, các thông số khâu được nêu trong Bảng 2.1. Các ma trận biến đổi D-H có thể nhận được bằng cách thay các thông số khâu D-H vào pt (2.2).

$$
{}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}
$$



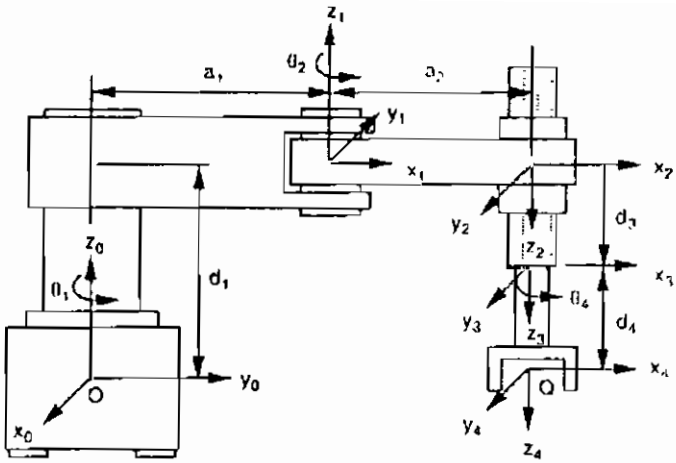
Hình 2.3. Cơ cấu chấp hành phẳng 3-dof.

$$
{}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}
$$

$$
{}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}
$$

Bảng 2.1. Thông số D-H của cơ cấu chấp hành 3-dof.

Khớp nối i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	a_1	0	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	0	a_3	0	θ_3



Hình 2.4. Sơ đồ tay máy SCARA

Ví dụ 2.2. Tay máy SCARA. Đây là kiểu cơ cấu chấp hành 4-dof rất quan trọng, được nhiều công ty chế tạo, gồm bốn trục khớp song song với nhau (Hình 2.4). Đối với các hệ tọa độ được thiết lập trên hình này, các thông số khâu tương ứng được liệt kê trên Bảng 2.2.

Thay các thông số khâu D-H vào pt.(2.2), sẽ nhận được ma trận biến đổi D-H.

$$ {}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9} $$

$$ {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.10} $$

$$ {}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.11} $$

$$
{}^{3}A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.12)
$$

Bảng 2.2. Thông số D-H của tay máy SCARA.

Khớp nối i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0	a_1	d_1	θ_1
2	π	a_2	0	θ_2
3	0	0	d_3	0
4	0	0	d_4	θ_4

Trong robot này, các biến khớp là θ_1, θ_2, θ_3, d_3, θ_4. Hai biến khớp đầu điều khiển tọa độ x và y, biến khớp thứ ba điều khiển tọa độ z, còn biến khớp thứ tư điều khiển định hướng của đầu tác động. Do robot này chỉ có bốn bậc tự do, sự định hướng của đầu tác động không thể chuyên biệt một cách tùy ý. Trục z_i luôn luôn hướng theo chiều âm của z_0. Mặc dù, tay máy SCARA chỉ có bốn bậc tự do, nhưng rất hữu dụng khi lắp ráp các linh kiện trên mặt phẳng, chẳng hạn bản mạch máy tính cá nhân.

Phương trình vòng kín

Trong nghiên cứu động học về cơ cấu chấp hành robot, cần tính đạo hàm phương trình đại số liên quan tới vị trí của đầu tác động và các biến khớp. Vị trí đầu tác động có thể được chuyên biệt theo ma trận biến đổi đồng nhất 4 x 4 như sau:

$$
{}^{0}A_n = \begin{bmatrix} u & v & w & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.13)
$$

trong đó ma trận con 3 x 1, phía trên bên phải, là vị trí của điểm qui chiếu Q, ma trận con 3 x 3, phía trên bên trái, là định hướng của đầu tác động. Định hướng của đầu này có thể được chuyên biệt theo các đại lượng của 3-dof Euler, hoặc các hàm cosine của ba trục tọa độ đầu tác động, u, v, w. Nếu các góc Euler w-u-w được sử dụng, các phần tử của ma trận con 3 x 3, phía trên bên trái, sẽ là

$$u_x = c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi,$$
$$u_y = c\phi c\psi + s\phi c\theta s\psi,$$
$$u_z = s\theta s\psi,$$
$$v_x = - c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi,$$
$$v_y = - s\phi c\psi + c\phi c\theta c\psi.$$
$$v_z = s\theta c\psi,$$
$$w_x = s\phi s\theta,$$
$$w_y = - c\phi s\theta,$$
$$w_z = c\theta. \qquad (2.14)$$

Nếu sử dụng các hàm cosine, u, v, và w là các vector đơn vị hướng theo ba trục tọa độ của hệ tọa độ tay máy và được biểu thị theo hệ tọa độ đế.

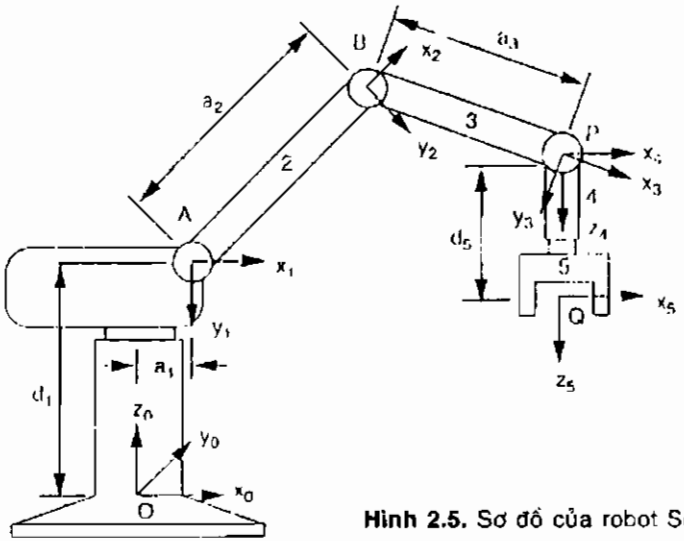
Từ dạng hình học của các khâu, ma trận biến đổi ${}^0A_n$ nêu trên có thể coi là kết quả của chuỗi các biến đổi tọa độ bắt đầu từ hệ tọa độ đế đến hệ tọa độ đầu tác động.

$${}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 \ldots {}^{n-1}A_n = {}^0A_n \qquad (2.15)$$

Phương trình (2.15) được gọi là phương trình vòng kín của cơ cấu chấp hành nối tiếp, gồm 16 phương trình vô hướng, trong đó có bốn phương trình quan trọng. Cân bằng ma trận con 3 x 1, phía trên bên phải, theo ba phương trình độc lập, sẽ xác định vị trí của đầu tác động. Cân bằng các phần tử ma trận con 3 x 3, phía trên bên trái, sẽ có chín phương trình xác định sự định hướng của đầu tác động. Tuy nhiên, chỉ ba trong chín phương trình định hướng là độc lập do các điều kiện ma trận chéo.

Phương trình vòng kín (pt (2.15)), có thể được dùng để giải các bài toán động học thuận hoặc đảo. Đối với động học thuận, các biến khớp được cho trước, cần tìm vị trí đầu tác động theo hệ tọa độ góc. Điều này có thể được thực hiện bằng cách nhân các ma trận D-H ở vế trái của phương trình. Đối với động học đảo, vị trí đầu tác động được cho trước, vấn đề là tìm các biến khớp cần thiết, đưa đầu tác động đến vị trí mong muốn, bài toán trở nên phi tuyến.

Ví dụ 2.3. *Robot Scorbot*. Hình 2.5 minh họa sơ đồ robot Scorbot, các trục khớp thứ hai, thứ ba, và thứ tư song song với nhau và hướng về mặt sơ đồ tại các điểm A, B, P. Trục khớp thứ nhất hướng lên trên, trục khớp thứ năm cắt vuông góc với trục khớp thứ tư. Bài toán là tìm ma trận biến đổi tổng quát của robot này.



Hình 2.5. Sơ đồ của robot Scorbot.

Sử dụng các hệ tọa độ được thiết lập trên Hình 2.5, các thông số khớp tương ứng được liệt kê trên Bảng 2.3. Thay các thông số khâu D-H vào pt (2.2), sẽ nhận được các ma trận biến đổi D-H.

$$^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & a_1s\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

Bảng 2.3. Thông số D-H của cơ cấu chấp hành 5-dof

Khớp nối i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$-\pi/2$	a_1	d_1	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	0	a_3	0	θ_3
4	$-p/2$	0	0	θ_4
5	0	0	d_5	θ_5

$$^{3}A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$^{4}A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Nhân các pt (2.17), (2.18), và (2.19)

$$^{1}A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_{234} & 0 & -s\theta_{234} & a_3c\theta_{23} + a_2c\theta_2 \\ s\theta_{234} & 0 & c\theta_{234} & a_3s\theta_{23} + a_2s\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

trong đó $c\theta_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$, $s\theta_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, $c\theta_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$, $s\theta_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$.

Chú ý, pt (2.21) là phép biến đổi từ hệ tọa độ thứ tư về hệ tọa độ thứ nhất. Có thể coi θ_2, θ_{24}, θ_{234} là các biến mới. Theo đó, ma trận con định hướng chỉ chứa một biến, θ_{234}, ma trận con vị trí chứa hai biến θ_2 và θ_{23}. Điều này đã được dùng để tìm nghiệm khép kín đối với cơ cấu chấp hành bất kỳ có ba trục khớp song song liên tiếp.

Nhân các pt (2.16), (2.21), và (2.20) sẽ nhận được các phần tử của ma trận biến đổi tổng quát $^{0}A_5$.

$$u_x = c\theta_1 c\theta_{234} c\theta_5 + s\theta_1 s\theta_5$$
$$u_y = s\theta_1 c\theta_{234} c\theta_5 - c\theta_1 s\theta_5$$
$$u_z = - s\theta_{234} c\theta_5$$
$$v_x = - c\theta_1 c\theta_{234} s\theta_5 + s\theta_1 c\theta_5$$
$$v_y = - s\theta_1 c\theta_{234} s\theta_5 - c\theta_1 c\theta_5$$
$$v_z = s\theta_{234} s\theta_5,$$
$$w_x = - c\theta_1 s\theta_{234}$$
$$w_y = - s\theta_1 s\theta_{234}$$
$$w_z = - c\theta_{234}$$
$$q_x = c\theta_1(a_1 + a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} - d_5 s\theta_{234})$$
$$q_y = s\theta_1(a_1 + a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} - d_5 s\theta_{234})$$
$$q_z = d_1 - a_2 s\theta_2 - a_3 s\theta_{23} - d_5 c\theta_{234} \qquad (2.22)$$

Do đây là cơ cấu chấp hành 5-dof, chỉ có thể chuyên biệt năm trong sáu thông số của đầu tác động. Nói chung, sự định vị cần thiết của một điểm và chiều của một đường trong đầu tác động (ví dụ, vị trí điểm Q và chiều trục x_5) được chuyên biệt. Các cơ cấu chấp hành 5-dof rất hữu dụng trong sơn phun, hàn điểm, ... trong đó chỉ cần xác định vị trí và chiều của một đường.

Các hệ tọa độ

Trong phần trước, trục z_0 của hệ tọa độ góc được chọn theo đường trùng với trục khớp thứ nhất, z_n của hệ tọa độ cuối được chọn theo chiều tiếp cận. Nếu có thêm hệ tọa độ ở đế với ma trận biến đổi A_0, và hệ tọa độ khác được chọn trong khung công cụ với ma trận biến đổi A_{tool}, phương trình vòng kín tổng quát có dạng

$$^{ref}A_{tool} = {}^{ref}A_0\, {}^{0}A_n\, {}^{n}A_{tool} \qquad (2.23)$$

trong đó A_0 và A_{tool} là các ma trận biến đổi hằng.

Phương pháp Denavit-Hartenberg

Mặc dù phương trình vòng kín, pt (2.15), có thể được dùng để giải bài toán động học đảo, nhưng trong thực tế ít khi được sử dụng theo dạng pt (2.15). Nói chung, nếu có ba trục khớp cắt nhau, có thể xử lý trước đối với

vị trí giao điểm, do đó sẽ tránh được các biến khớp liên quan với ba trục cắt nhau. Nếu có ba trục khớp song song, có thể kết hợp ba biến khớp như kiểu robot Scorbot. Cũng có thể nhân trước hoặc sau phương trình vòng lặp bằng cách đảo ma trận ${}^{i-1}A_i$ để có các phương trình vòng kín khác

$$({}^0A_1)^{-1}\,{}^0A_n = {}^1A_2\,{}^2A_3 \ldots {}^{n-1}A_n \qquad (2.24)$$

$$({}^1A_2)^{-1}\,({}^0A_1)^{-1}\,{}^0A_n = {}^2A_3\,{}^3A_4 \ldots {}^{n-1}A_n \qquad (2.25)$$

$$({}^2A_3)^{-1}({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,{}^0A_n = {}^3A_4\,{}^4A_5 \ldots {}^{n-1}A_n \qquad (2.26)$$

Một lý do để sắp xếp lại phương trình vòng kín là phân bố lại các biến chưa biết ở cả hai vế phương trình. Lý do thứ hai là tận dụng ưu thế của các điều kiện đặc biệt, chẳng hạn ba trục khớp cắt nhau liên tiếp, hoặc ba trục khớp song song liên tiếp. Trong nhiều trường hợp, phương trình này có thể được tách ra cho phép dễ dàng tính nghiệm.

Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành 3-dof phẳng

Đối với cơ cấu chấp hành 3-dof phẳng (Hình 2.3) ma trận biến đổi tổng quát có dạng

$${}^0A_3 = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 \qquad (2.27)$$

thay các pt (2.6) đến (2.8) vào (2.27)

$${}^0A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_{123} & -s\theta_{123} & 0 & a_1c\theta_1 + a_2c\theta_{12} + a_3c\theta_{123} \\ s\theta_{123} & c\theta_{123} & 0 & a_1s\theta_1 + a_2s\theta_{12} + a_3s\theta_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

a. Động học thuận. Vector vị trí của gốc Q biểu thị trong hệ tọa độ đầu tác động là ${}^3q = [0, 0, 0, 1]^T$, vector vị trí của Q trong hệ tọa độ gốc là ${}^0q = [q_x, q_y, q_z, 1]^T$, có thể phối hợp ${}^3q$ với ${}^0q$ theo các biến đổi sau

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1c\theta_1 + a_2c\theta_{12} + a_3c\theta_{123} \\ a_1s\theta_1 + a_2s\theta_{12} + a_3s\theta_{123} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

Khi biết θ_1, θ_2, θ_3, vị trí của điểm Q có thể được tính theo pt (2.29). Tương tự, vector vị trí của điểm bất kỳ của đầu tác động, ${}^1g = [g_u, g_v, 0, 1]^T$, được tính theo

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_3 \begin{bmatrix} g_u \\ g_v \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_u c\theta_{123} - g_v s\theta_{123} + a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123} \\ g_u s\theta_{123} + g_v c\theta_{123} + a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

từ pt (2.28) có thể kết luận góc định hướng của đầu tác động bằng $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

b. Động học đảo. Đối với bài toán động học đảo, vị trí của đầu tác động được cho trước, cần tìm các góc khớp θ_i, i = 1, 2, 3, cần thiết để đưa đầu tác động đến vị trí mong muốn. Đối với cơ cấu chấp hành phẳng ba góc, đầu tác động có thể được chuyên biệt theo các đại lượng vị trí điểm Q và góc định hướng ϕ của đầu tác động. Ma trận biến đổi tổng quát từ hệ tọa độ đầu tác động đến hệ tọa độ gốc, ${}^0A_3$, là

$${}^0A_3 = \begin{bmatrix} c\phi & -s\phi & 0 & q_x \\ s\phi & c\phi & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Các nghiệm động học đảo có thể nhận được bằng cách lấy cân bằng các phần tử của pt (2.28) với pt (2.31). Để tìm sự định hướng của đầu tác động cần cho các phần tử (1,1) và (2,1) của pt (2.28) bằng các phần tử tương ứng của pt (2.31).

$$c\theta_{123} = c\phi \quad (2.32)$$

$$s\theta_{123} = s\phi \quad (2.33)$$

Do đó

$$\theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi \quad (2.34)$$

Cho các phần tử (1,4) và (2,4) của pt (2.28) bằng các phần tử tương ứng của pt (2.31)

$$p_x = a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} \quad (2.35)$$

$$p_y = a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} \quad (2.36)$$

trong đó $p_x = q_x - a_3 c\phi$ và $p_y = q_y - a_3 s\phi$ là vector vị trí của điểm p tại trục khớp thứ ba (Hình 2.3). Chú ý, bằng cách sử dụng sự thay thế này, ϕ_3

sẽ không còn trong các pt (2.35) và (2.36). Từ Hình 2.3 có thể thấy khoảng cách từ điểm O đến điểm P là độc lập với θ_1, do đó có thể loại bỏ θ_1 bằng cách tính tổng các bình phương của pt (2.35) và (2.36).

$$p_x^2 + p_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c\theta_2 \tag{2.37}$$

Giải pt (2.37) đối với θ_2

$$\theta_2 = \cos^{-1} K \tag{2.38}$$

trong đó

$$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}$$

Phương trình (2.38), (1) sẽ có hai nghiệm thực nếu giá trị tuyệt đối của k < 1, (2) nghiệm kép nếu giá trị tuyệt đối của k > 1. Nói chung, nếu $\theta_2 = \theta_2$ là nghiệm, $\theta_2 = -\theta_2$ cũng là nghiệm, trong đó $\pi \geq \theta_2 \geq 0$, gọi $\theta_2 = \theta_2^-$ là nghiệm dưới, và $\theta_2 = -\theta_2^-$ là nghiệm trên. Nếu giá trị tuyệt đối của k = 1, tay máy có cấu hình xếp hoặc duỗi hoàn toàn. Nếu giá trị tuyệt đối của k > 1, vị trí là không với tới.

Ứng với từng giá trị θ_2, có thể tìm θ_1 bằng cách khai triển pt (2.35) và (2.36) như sau

$$(a_1 + a_2c\theta_2)c\theta_1 - (a_2s\theta_2)s\theta_1 = p_x \tag{2.39}$$

$$(a_2s\theta_2)c\theta_1 + (a_1 + a_2c\theta_2)s\theta_1 = p_y \tag{2.40}$$

Giải các pt (2.39) và (2.40) sẽ có

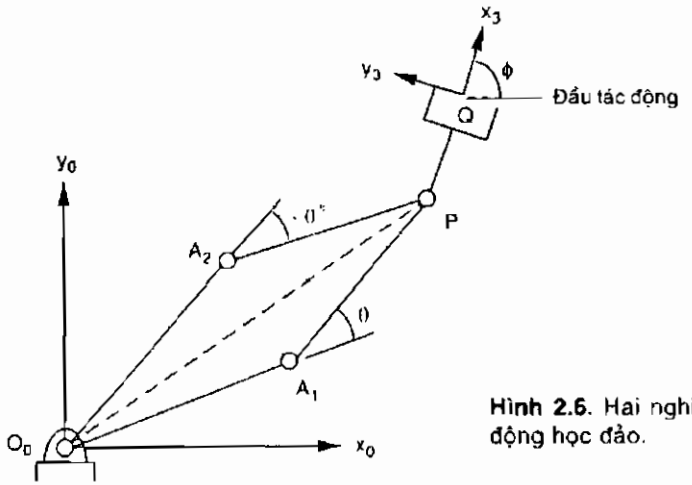
$$c\theta_1 = \frac{p_x(a_1 + a_2c\theta_2) + p_y a_2 s\theta_2}{\Delta}$$

$$s\theta_1 = \frac{-p_x a_2 s\theta_2 + p_y(a_1 + a_2c\theta_2)}{\Delta}$$

trong đó $\Delta = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c\theta_2$, ứng với từng θ_2 sẽ nhận được nghiệm θ_1 duy nhất

$$\theta_1 = A\tan 2(s\theta_1 . c\theta_1) \tag{2.41}$$

Trong chương trình máy tính có thể sử dụng hàm Atan2(x,y) để tìm nghiệm duy nhất của θ_1. Tuy nhiên, nghiệm này có thể là số thực hoặc



Hình 2.6. Hai nghiệm động học đảo.

phức. Nghiệm phức tương ứng vị trí đầu tác động cơ cấu chấp hành không với tới được. Khi biết θ_1 và θ_2, pt (2.34) có nghiệm duy nhất đối với θ_3. Do đó, ứng với vị trí đầu tác động cho trước, nói chung có hai nghiệm thực động học đảo, đối xứng qua đường nối các điểm O và P (Hình 2.6)

Phương pháp vector vòng. Mặc dù phương pháp D-H là công cụ rất mạnh, nhưng bài toán động học đảo vẫn có thể giải được bằng các phương pháp khác. Ví dụ, phương pháp vector vòng sẽ trở nên hiệu quả hơn để phân tích cơ cấu chấp hành phẳng 3-dof (Hình 2.3). Để thuận tiện, cơ cấu này được vẽ lại trên Hình 2.7.

Sử dụng đại số vector, vector vị trí của tâm xoay P có thể liên hệ với góc Q của đầu tác động theo các phương trình

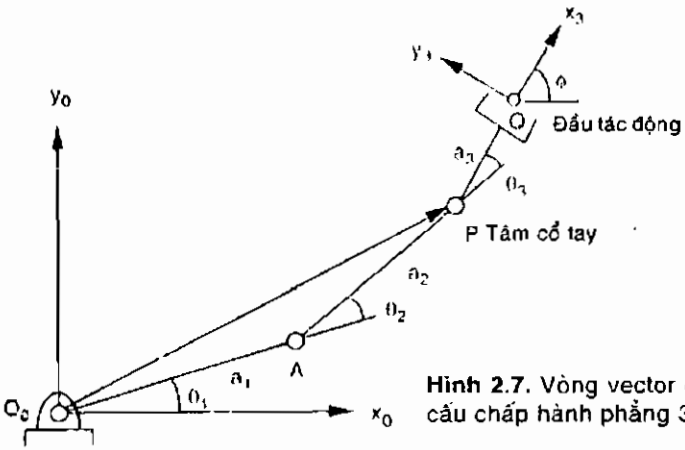
$$p_x = q_x - a_3 c\phi \tag{2.42}$$

$$p_y = q_y - a_3 s\phi \tag{2.43}$$

Từ Hình 2.7 có thể thấy góc định hướng ϕ liên hệ với các góc khớp theo phương trình

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \tag{2.44}$$

Có thể xác định phương trình vòng vector ảo như sau



Hình 2.7. Vòng vector của cơ cấu chấp hành phẳng 3-dof.

$$\overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OP} \tag{2.45}$$

Lấy các thành phần x và y của pt (2.45), sẽ có

$$p_x = a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} \tag{2.46}$$

$$p_y = a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} \tag{2.47}$$

Chú ý, việc sử dụng phương pháp vòng vector cho phép suy ra các pt (2.35) và (2.36) một cách đơn giản.

Phân tích vị trí của robot Scorbot

Đối với robot Scorbot (Hình 2.5), ma trận biến đổi tổng quát được xác định theo pt (2.22), cần xác định các bài toán động học thuận và đảo.

Động học thuận. Đối với bài toán động học thuận, đơn giản chỉ cần thay các góc khớp cho trước vào pt (2.22) để nhận được vị trí đầu tác động, (q_x, q_y, q_z), và định hướng theo các đại lượng của ba vector đơn vị, (u_x, u_y, u_z), (v_x, v_y, v_z), (w_x, w_y, w_z).

Động học đảo. Đối với bài toán động học đảo, chỉ có năm trong số 12 thông số liên quan đến vector vị trí của đầu tác động và ma trận quay là có thể chuyên biệt theo yêu cầu. Điều này là do cơ cấu chấp hành chỉ có năm bậc tự do. Vector vị trí q và vector tiếp cận w không thể chuyên biệt một cách đồng thời, do q và w chỉ phụ thuộc vào bốn bậc tự do của cơ cấu

chấp hành. Đối với ví dụ này sẽ giả thiết q và u được chuyên biệt, hai vector đơn vị còn lại, w và v, được xác định sau khi tìm các góc khớp.

Mặc dù pt (2.22) có thể được dùng để giải bài toán động học đảo, nhưng có thể sử dụng phương pháp nhân cả hai vế của phương trình vòng kín cho $({}^0A_1)^{-1}$, nghĩa là

$$({}^0A_1)^{-1}\,{}^0A_5 = {}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 \tag{2.48}$$

Cân bằng cột thứ nhất của pt (2.48)

$$u_x c\theta_1 + u_y s\theta_1 = c\theta_{234} c\theta_5 \tag{2.49}$$

$$-u_z = s\theta_{234} c\theta_5 \tag{2.50}$$

$$-u_x s\theta_1 + u_y c\theta_1 = -s\theta_5 \tag{2.51}$$

Tương tự, cân bằng cột thứ tư của pt (2.48)

$$q_x c\theta_1 + q_y s\theta_1 - a_1 = a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} - d_5 s\theta_{234} \tag{2.52}$$

$$-q_z + d_1 = a_2 s\theta_2 + a_3 s\theta_{23} + d_5 c\theta_{234} \tag{2.53}$$

$$-q_x s\theta_1 + q_y c\theta_1 = 0 \tag{2.54}$$

Góc khớp thứ nhất, θ_1, dễ dàng xác định từ pt (2.54)

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{q_y}{q_x} \tag{2.55}$$

Có hai nghiệm, nếu $\theta_1 = \theta_1^*$ là nghiệm, $\theta_1 = \pi + \theta_1^*$ cũng là nghiệm. Khi tìm được θ_1, có thể tính θ_5 từ pt (2.51)

$$\theta_5 = \sin^{-1}(u_x s\theta_1 - u_y c\theta_1) \tag{2.56}$$

Có hai nghiệm nếu $\theta_5 = \theta_5^*$ là nghiệm, $\theta_5 = \pi - \theta_5^*$ cũng là nghiệm.

Ứng với từng tập hợp nghiệm (θ_1, θ_5), pt (2.49) và (2.50) có nghiệm duy nhất θ_{234}:

$$\theta_{234} = A\tan 2[-u_z / c\theta_5, (u_x c\theta_1 + u_y s\theta_1)/c\theta_5] \tag{2.57}$$

Giải các pt (2.52) và (2.53) để tìm θ_2 và θ_3. Các phương trình này co thể được viết dưới dạng

$$a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} = k_1 \tag{2.58}$$

$$a_2 s\theta_2 + a_3 s\theta_{23} = k_2 \tag{2.59}$$

trong đó $k_1 = q_x c\theta_1 - q_y s\theta_1 - a_1 + d_5 s\theta_{234}$ và $k_2 = -q_z + d_1 - d_5 c\theta_{234}$

Tính tổng các bình phương pt (2.58) và (2.59)

$$a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c\theta_3 = k_1^2 + k_2^2 \tag{2.60}$$

Do đó

$$\theta_3 = \cos^{-1}\frac{k_1^2 + k_2^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \tag{2.61}$$

Có hai nghiệm θ_3, nghĩa là nếu $\theta_3 = \theta_3^*$ là nghiệm, $\theta_3 = -\theta_3^*$ cũng là nghiệm

Khi biết θ_3, có thể tìm θ_2 bằng cách khai triển pt (2.58) và (2.59)

$$(a_2 + a_3c\theta_3)c\theta_2 - (a_3s\theta_3)s\theta_2 = k_1 \tag{2.62}$$

$$(a_3s\theta_3)c\theta_2 + (a_2 + a_3c\theta_3)s\theta_2 = k_2 \tag{2.63}$$

Giải các pt (2.62) và (2.63)

$$c\theta_2 = \frac{k_1(a_2 + a_3c\theta_3) + k_2a_3s\theta_3}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c\theta_3}$$

$$s\theta_2 = \frac{-k_1a_3s\theta_3 + k_2(a_2 + a_3c\theta_3)}{a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3c\theta_3}$$

Ứng với từng tập hợp nghiệm (θ_1, θ_3, θ_5, θ_{234}) sẽ nhận được nghiệm duy nhất của θ_2

$$\theta_2 = A\tan 2(s\theta_2, c\theta_2) \tag{2.64}$$

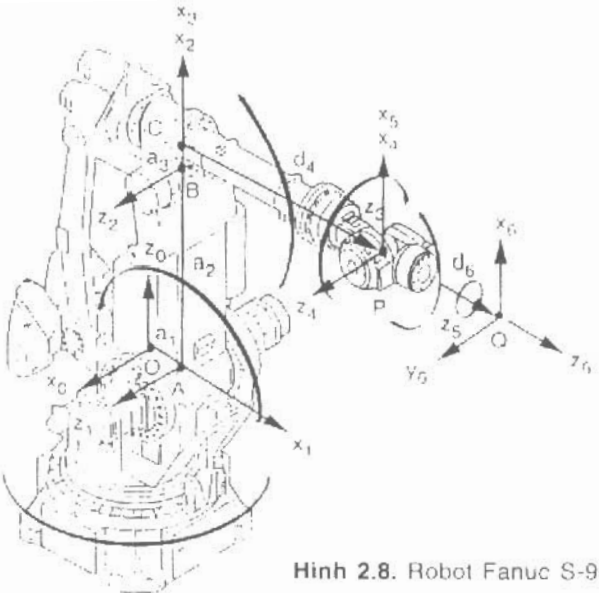
Cuối cùng, θ_4 được xác định theo

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \tag{2.65}$$

Ứng với từng vị trí của đầu tác động cho trước, có tối đa 8 nghiệm động học đảo.

Phân tích vị trí của robot Fanuc S-900W

Hình 2.8 minh họa cơ cấu chấp hành 6-dof, trục khớp thứ nhất hướng lên trên theo trục z_0, trục khớp thứ hai vuông góc với trục khớp thứ nhất có khoảng cách lệch nhỏ a_1 = OA, trục khớp thứ ba song song với trục khớp thứ hai và cách trục này theo a_2 = AB, và trục khớp thứ tư vuông



Hình 2.8. Robot Fanuc S-900W.

góc với trục khớp thứ ba, cách trục này theo a_3 = BC. Ngoài ra, ba trục khớp cuối cắt nhau và vuông góc với nhau theo thứ tự tại điểm P, cách điểm C một khoảng d_4. Robot này là nhóm cơ cấu chấp hành đặc biệt, với ba trục khớp cuối cắt nhau tại tâm xoay. Bài toán động học đối với cơ cấu chấp hành có thể được chia thành hai chuỗi nhỏ, một chuỗi liên quan đến ba khâu di động thứ nhất, và chuỗi thứ hai liên quan với ba khâu di động cuối. Nghĩa là, khi giải bài toán động học đầu, tâm cổ tay có thể được giải độc lập với phần định hướng, do đó làm giảm tính phức tạp của bài toán.

Bảng 2.4. Thông số D-H của Fanuc S-900W.

Khớp i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\pi/2$	a_1	0	θ_1
2	0	a_2	0	θ_2
3	$\pi/2$	a_3	0	θ_3
4	$-\pi/2$	0	d_4	θ_4
5	$\pi/2$	0	0	θ_5
6	0	0	d_6	θ_6

Chú ý, cơ cấu chấp hành này sử dụng cơ cấu bốn khâu bản lề để truyền động khớp thứ ba. Cơ cấu bốn khâu bản lề truyền chuyển động của động cơ thứ ba lắp ở phía trên khâu thứ ba. Trong phân tích tiếp theo, sẽ bỏ qua tác động của cơ cấu bốn khâu bán lề và coi cơ cấu chấp hành này là loại nối tiếp.

Sử dụng các hệ tọa độ được thiết lập trên Hình 2.8, các thông số khâu tương ứng được liệt kê trên Bảng 2.4. Thay các thông số khâu D-H vào pt (2.2), sẽ nhận được các ma trận biến đổi D-H.

$$ {}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.66} $$

$$ {}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.67} $$

$$ {}^{2}A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & a_3c\theta_3 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 & a_3s\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.68} $$

$$ {}^{3}A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.69} $$

$$ {}^{4}A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.70} $$

$$
{}^{5}A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.71}
$$

Vị trí đầu tác động được tính theo

$$
{}^{0}A_6 = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & q_x \\ u_y & v_y & w_y & q_y \\ u_z & v_z & w_z & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.72}
$$

Phương trình vòng kín được xác định theo hai bước. Bước thứ nhất, nhân các pt (2.66), (2.67) và (2.68)

$$
{}^{0}A_3 = {}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{23} & s\theta_1 & c\theta_1 s\theta_{23} & c\theta_1(a_1 + a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23}) \\ s\theta_1 c\theta_{23} & -c\theta_1 & s\theta_1 s\theta_{23} & s\theta_1(a_1 + a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23}) \\ s\theta_{23} & 0 & -c\theta_{23} & a_2 s\theta_2 + a_3 s\theta_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.73}
$$

Kế tiếp nhân các pt (2.69), (2.70) và (2.71)

$$
{}^{3}A_6 = {}^{3}A_4\,{}^{4}A_5\,{}^{5}A_6
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6 & -c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 - s\theta_4 c\theta_6 & c\theta_4 s\theta_5 & d_6 c\theta_4 s\theta_5) \\ s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6 & -s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6 & s\theta_4 s\theta_5 & d_6 s\theta_4 s\theta_5) \\ -s\theta_5 c\theta_6 & s\theta_5 s\theta_6 & c\theta_5 & d_4 + d_6 c\theta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.74}
$$

Phương trình ma trận biến đổi kết quả sẽ là

$$
{}^{0}A_6 = {}^{0}A_3\,{}^{3}A_6 \tag{2.75}
$$

trong đó ${}^{0}A_6$ là vị trí đầu tác động

Thay pt (2.73) và (2.74) vào (2.75) sẽ nhận được các phần tử của ${}^{0}A_6$

$$
u_x = c\theta_1[c\theta_{23}(c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6) - s\theta_{23} s\theta_5 c\theta_6] + s\theta_1(s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6)
$$

$$
u_y = c\theta_1[c\theta_{23}(c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6) - s\theta_{23} s\theta_5 c\theta_6] + s\theta_1(s\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 + c\theta_4 s\theta_6)
$$

$$u_z = s\theta_{23}(c\theta_4 c\theta_5 c\theta_6 - s\theta_4 s\theta_6) + c\theta_{23} s\theta_5 c\theta_6$$

$$v_x = c\theta_1[-c\theta_{23}(c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6) + s\theta_{23} s\theta_5 s\theta_6] + s\theta_1(-s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6)$$

$$v_y = s\theta_1[-c\theta_{23}(c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6) + s\theta_{23} s\theta_5 s\theta_6] - c\theta_1(-s\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + c\theta_4 c\theta_6)$$

$$v_z = -s\theta_{23}(c\theta_4 c\theta_5 s\theta_6 + s\theta_4 c\theta_6) - c\theta_{23} s\theta_5 s\theta_6$$

$$w_x = c\theta_1(c\theta_{23} c\theta_4 s\theta_5 + s\theta_{23} c\theta_5) + s\theta_1 s\theta_4 s\theta_5$$

$$w_y = s\theta_1(c\theta_{23} c\theta_4 s\theta_5 + s\theta_{23} c\theta_5) - c\theta_1 s\theta_4 s\theta_5$$

$$w_z = s\theta_{23} c\theta_4 s\theta_5 - c\theta_{23} c\theta_5$$

$$q_x = c\theta_1[a_1 + a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} + d_4 s\theta_{23} + d_6(c\theta_{23} c\theta_4 s\theta_5 + s\theta_{23} c\theta_5)] + d_6 s\theta_1 s\theta_4 s\theta_5$$

$$q_y = s\theta_1[a_1 + a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} + d_4 s\theta_{23} + d_6(c\theta_{23} c\theta_4 s\theta_5 + s\theta_{23} c\theta_5)] - d_6 c\theta_1 s\theta_4 s\theta_5$$

$$q_z = a_2 s\theta_2 + a_3 s\theta_{23} - d_4 c\theta_{23} + d_6(s\theta_{23} c\theta_4 s\theta_5 - c\theta_{23} c\theta_5)$$

Mặc dù các phương trình nêu trên có thể được dùng để giải bài toán động học đảo, nhưng chúng là phi tuyến và rất khó giải. Phần tiếp theo sẽ trình bày phương pháp giải hiệu quả bằng cách tách bài toán vị trí tâm xoay ra khỏi bài toán định hướng.

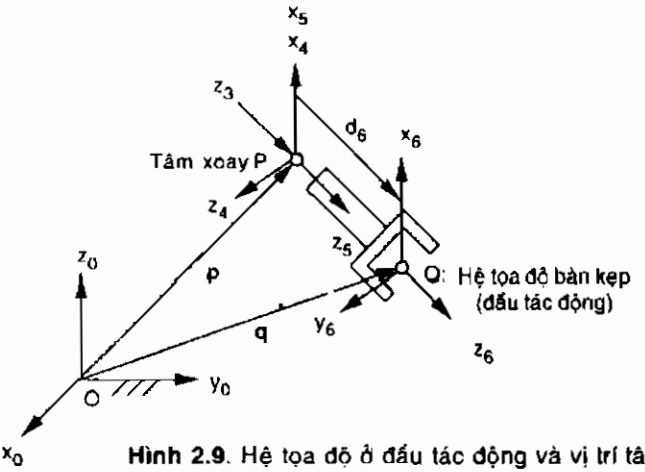
Vị trí tâm xoay. Chú ý ba trục khớp cuối cắt nhau tại điểm tâm xoay P (Hình 2.8), do đó các góc quay của ba khớp này không ảnh hưởng đến vị trí của P. Hình 2.9 minh họa hệ tọa độ đầu tác động (x_6, y_6, z_6), tâm xoay P, và quan hệ vector.

Vị trí tâm xoay theo hệ tọa độ đầu tác động sẽ là

$$^0p = \overline{OP} = [0, 0, -d_6, 1]^T \tag{2.76}$$

Vị trí tâm xoay theo hệ tọa độ gốc sẽ là

$$^0p = \overline{OP} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x - d_6 w_x \\ q_y - d_6 w_y \\ q_z - d_6 w_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$



Hình 2.9. Hệ tọa độ ở đầu tác động và vị trí tâm xoay.

Khi biết vị trí đầu tác động, có thể tìm được vị trí tâm xoay P theo hệ tọa độ gốc. Hơn nữa, từ Hình 2.8 có thể thấy vị trí tâm xoay P theo hệ tọa độ khâu 3 có dạng

$$^{3}p = \overline{CP} = [0,0,d_4,1]^T \tag{2.78}$$

Biến đổi ^{3}p về hệ tọa độ gốc

$$^{0}p = {}^{0}A_3\,{}^{3}p \tag{2.79}$$

Phương trình (2.79) gồm ba phương trình vô hướng với ba ẩn. Do đó vị trí và định hướng của bài toán động học đảo có thể được tách biệt.

Về lý thuyết, có thể giải pt (2.79) cho ba gốc khớp, nhân cả hai vế pt (2.79) với nghịch đảo của $^{0}A_1$, có thể nhận được

$$({}^{0}A_1)^{-1}\,{}^{0}p = {}^{0}A_3\,{}^{3}p \tag{2.80}$$

Thay các pt (2.66) đến (2.68) vào (2.80)

$$p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 - a_1 = a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} + d_4 s\theta_{23} \tag{2.81}$$

$$p_z = a_2 s\theta_2 + a_3 s\theta_{23} - d_4 c\theta_{23} \tag{2.82}$$

$$p_x s\theta_1 - p_y c\theta_1 = 0 \tag{2.83}$$

trong đó p_x, p_y và p_z được tính theo pt (2.77)

Giải pt (2.83) sẽ tìm được nghiệm đối với θ_1

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{p_y}{p_x} \tag{2.84}$$

θ_1 có hai nghiệm. Đặc biệt, nếu $\theta_1 = \theta_1^*$ là nghiệm, thì $\theta_1 = \theta_1^* + \pi$ cũng là nghiệm, với $\pi \geq \theta_1^* \geq 0$. Gọi $\theta_1 = \theta_1$ là nghiệm tầm với phía trước và $\theta_1 = \theta_1^* + \pi$ là nghiệm tầm với phía sau, do cơ cấu bốn khâu bản lề và các ràng buộc cơ học khác, nghiệm tầm với phía sau là không thể.

Quan sát cấu trúc động học có thể thấy khoảng cách giữa điểm A và tâm xoay P là độc lập với θ_1 và θ_2, nghĩa là hai biến này có thể được loại bỏ một cách đồng thời. Tính tổng các bình phương của các pt (2.81), (2.82), (2.83), sẽ nhận được

$$k_1 s\theta_3 + k_2 c\theta_3 = k_3 \tag{2.85}$$

trong đó $k_1 = 2a_2d_4$, $k_2 = 2a_2d_3$, và $k_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2p_xa_1c\theta_1 - 2p_ya_1s\theta_1 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_4^2$

Có thể chuyển pt (2.85) thành đa thức bằng cách sử dụng các đồng nhất thức lượng giác dưới đây

$$c\theta_3 = \frac{1-t_3^2}{1+t_3^2} \quad \text{và} \quad s\theta_3 = \frac{2t_3}{1+t_3^2}, \text{trong đó} \quad t_3 = \tan\frac{\theta_3}{2}$$

Thay các đồng nhất thức này vào pt (2.85)

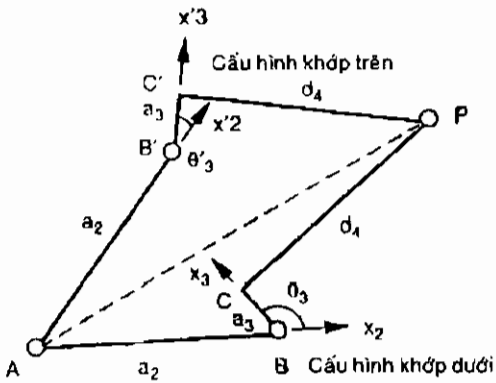
$$(k_3 + k_2)t_3^2 - 2k_1t_3 + (k_3 - k_2) = 0 \tag{2.86}$$

$$\frac{\theta_3}{2} = \tan^{-1}\frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}}{k_3 + k_2} \tag{2.87}$$

Phương trình (2.86), (1) có hai nghiệm thực nếu $k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 > 0$, (2) có nghiệm kép nếu $k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 = 0$, (3) không có nghiệm thực nếu $k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 < 0$. Khi pt (2.86) có nghiệm kép, tay máy có cấu hình duỗi hoặc co hoàn toàn. Mặt khác, nếu pt (2.86) không có nghiệm thực, vị trí là không thể với tới. Hình 2.10 minh họa hai cấu hình tay máy khác nhau, tương ứng hai nghiệm của θ_3.

Khi biết θ_1 và θ_3 có thể tìm được θ_2 bằng cách thay vào pt (2.81) và (2.82)

$$\mu_1 c\theta_2 + \nu_1 s\theta_2 = \gamma_1 \tag{2.88}$$



Hình 2.10. Hai cấu hình tay máy khác nhau.

$$\mu_2 c\theta_2 + \nu_2 s\theta_2 = \gamma_2 \tag{2.89}$$

trong đó

$$\mu_1 = a_2 + a_3 c\theta_3 + d_4 s\theta_3$$

$$\nu_1 = -a_3 s\theta_3 + d_4 c\theta_3$$

$$\gamma_1 = -p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 - a_1$$

$$\mu_2 = a_3 s\theta_3 - d_4 c\theta_3$$

$$\nu_2 = a_2 + a_3 c\theta_3 + d_4 s\theta_3$$

$$\gamma_2 = p_z$$

Do đó, có thể giải các pt (2.88) và (2.89) đối với $c\theta_2$ và $s\theta_2$, khi biết các giá trị này có thể tìm được giá trị θ_2 duy nhất

$$\theta_2 = A\tan 2(s\theta_2, c\theta_2) \tag{2.90}$$

Có thể kết luận với vị trí tâm xoay cho trước, về mặt toán học có tối đa bốn cấu hình tay máy, nhưng do các giới hạn cơ học, chỉ có hai cấu hình khả dĩ.

Định hướng đầu tác động. Khi tìm được θ_1, θ_2, θ_3, hoàn toàn có thể tìm được ${}^0A_3$. Các góc khớp còn lại có thể tìm được bằng cách nhân cả hai vế pt (2.75) với $({}^0A_3)^{-1}$

$${}^3A_6 = ({}^0A_3)^{-1}\,{}^0A_6 \tag{2.91}$$

Chú ý, các phần tử ở vế phải pt (2.91) đều biết, chỉ phần quay của pt (2.91) là cần thiết để tính toán ba góc khớp cuối. Các ma trận quay ${}^0R_3$ và ${}^3R_6$ là các ma trận con 3 x 3 phía trên của pt (2.73) và (2.74)

Cân bằng phần tử 3 x 3 của pt (2.91)

$$\theta_5 = \cos^{-1} r_{33} \tag{2.92}$$

trong đó $r_{33} = w_x c\theta_1 s\theta_{23} + w_y s\theta_1 s\theta_{23} - w_z c\theta_{23}$. Ứng với từng tập hợp nghiệm của θ_1, θ_2, và θ_3, pt (2.92) (1) có hai nghiệm thực nếu trị tuyệt đối $r_{33} < 1$, và (2) có $\theta_5 = 0$ hoặc π nếu trị tuyệt đối $r_{33} = 1$. Khi $\theta_5 = 0$ hoặc π, trục khớp thứ sáu, z_5, là đường trùng với trục khớp thứ tư, z_4, và tâm xoắn được coi là có cấu hình đặc biệt. Về mặt vật lý, không xuất hiện điều kiện trị tuyệt đối $r_{33} > 1$

Giả sử $s\theta_5 \neq 0$, có thể tìm nghiệm của θ_4 và θ_6. Lấy cân bằng phần tử 1 x 3 của pt (2.91)

$$c\theta_4 = \frac{w_x c\theta_1 c\theta_{23} + w_y s\theta_1 c\theta_{23} + w_z s\theta_{23}}{s\theta_5} \tag{2.93}$$

lấy cân bằng 2 x 3 của pt (2.91)

$$s\theta_4 = \frac{w_x s\theta_1 - w_y c\theta_1}{s\theta_5} \tag{2.94}$$

Ứng với từng tập hợp nghiệm θ_1, θ_2, θ_3 và θ_5, pt (2.93) và (2.94) có nghiệm duy nhất đối với θ_4

$$\theta_4 = A\tan 2(s\theta_4, c\theta_4) \tag{2.95}$$

Tương tự, lấy cân bằng phần tử 3 x 1 của pt (2.91)

$$c\theta_6 = -\frac{u_x c\theta_1 s\theta_{23} + u_y s\theta_1 s\theta_{23} - u_z c\theta_{23}}{s\theta_5} \tag{2.96}$$

Lấy cân bằng phần tử 3 x 2 của pt (2.91)

$$s\theta_6 = \frac{v_x c\theta_1 s\theta_{23} + v_y s\theta_1 s\theta_{23} - v_z c\theta_{23}}{s\theta_5} \tag{2.97}$$

Ứng với từng tập hợp nghiệm θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, và θ_5, pt (2.96) và (2.97) có nghiệm duy nhất đối với θ_6

$$\theta_6 = A\tan 2(s\theta_6, c\theta_6) \qquad (2.98)$$

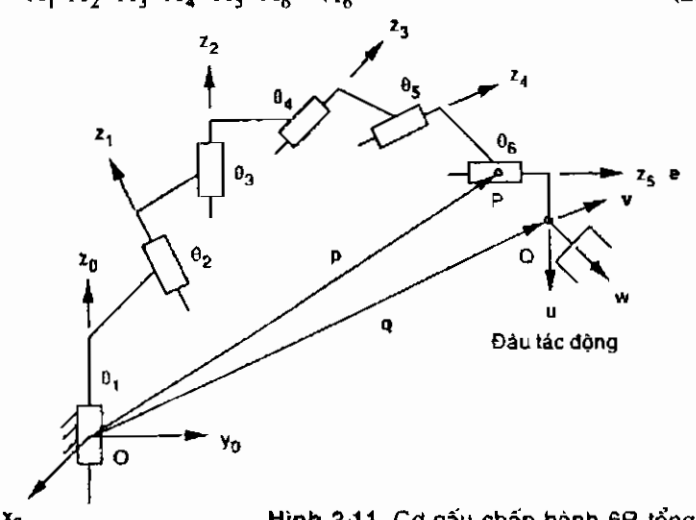
Có thể kết luận, ứng với từng tập hợp nghiệm của ba góc khớp thứ nhất, có hai cấu hình cổ tay xoắn khả dĩ. Do có bốn cấu hình tay máy khả dĩ phía trên, có thể có tám cấu hình cơ cấu chấp hành. Tuy nhiên, do các giới hạn cơ học, số cấu hình thực tế luôn luôn nhỏ hơn 8. Khi $s\theta_5 = 0$, các phương trình từ (2.93) đến (2.98) sẽ bị suy biến. Đối với điều kiện đặc biệt đó chỉ có thể tính tổng hoặc hiệu θ_4 và θ_6.

Giải pháp Tsai và Morgan

Trong phần này sẽ khái quát phương pháp giải Tsai và Morgan, cho phép rút gọn bài toán thành hệ bốn phương trình, sau đó sử dụng phương pháp số, được gọi là *phương pháp homotopy*, để tìm tất cả các nghiệm của bài toán động học đảo đối với cơ cấu chấp hành 6R tổng quát. Ngoài ra, còn có các nghiệm dạng khép kín đối với các cơ cấu chấp hành trong đó ba trục khớp liên tiếp cắt nhau tại một điểm hoặc song song với nhau.

Hình 2.11 minh họa cơ cấu chấp hành 6R tổng quát, điểm Q là gốc, và u,v,w là ba vector đơn vị chéo của hệ tọa độ đầu tác động. Sử dụng phương pháp Denavit-Hartenberg, phương trình vòng kín có thể viết dưới dạng:

$$^0A_1\,^1A_2\,^2A_3\,^3A_4\,^4A_5\,^5A_6 = {}^0A_6 \qquad (2.99)$$



Hình 2.11. Cơ cấu chấp hành 6R tổng quát.

Để thuận tiện, có thể dùng vector vị trí p của gốc tọa độ và vector đơn vị e của trục z_5 ở hệ tọa độ 5 theo Hình 2.11. Hai vector này có thể được biểu thị trong hệ tọa độ 5 ở dạng ${}^5p = [0,0,0,1]^T$ và ${}^5e = [0,0,1,0]^T$ hoặc trong hệ tọa độ gốc là $p={}^0p = [p_x, p_y, p_z, 1]^T$ và $e={}^0e = [e_x, e_y, e_z, 0]^T$. Do cả điểm P và vector e đều được gắn vào đầu tác động, p và e có thể được tính từ vị trí đầu tác động cho trước

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0A_6\,{}^6A_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_x a_6 - (v_x s\alpha_6 + w_x c\alpha_6)d_6 + q_x \\ -u_y a_6 - (v_y s\alpha_6 + w_y c\alpha_6)d_6 + q_y \\ -u_z a_6 - (v_z s\alpha_6 + w_z c\alpha_6)d_6 + q_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ 0 \end{bmatrix} = {}^0A_6\,{}^6A_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x s\alpha_6 + w_x c\alpha_6 \\ v_y s\alpha_6 + w_y c\alpha_6 \\ v_z s\alpha_6 + w_z c\alpha_6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.101}$$

Các pt (2.100) và (2.101) được hiểu là khi biết vị trí đầu tác động, có thể tìm được điểm P và chiều của trục z_5.

Sự biến đổi giữa ${}^5p$ và ${}^0p$, giữa ${}^5e$ và ${}^0e$ có thể được viết dưới dạng

$${}^0p={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5p \tag{2.102}$$

$${}^0e={}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5e \tag{2.103}$$

Để đơn giản, có thể nhân hai vế của pt (2.102) và (2.103) với $({}^0A_1\,{}^1A_2)^{-1}$, các phương trình kết quả có dạng

$${}^2p={}^2p' \tag{2.104}$$

$${}^2e={}^2e' \tag{2.105}$$

trong đó

$${}^2p={}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5p$$

$${}^2p'=({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,{}^0p$$

$${}^2e={}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5e$$

$${}^2e'=({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-1}\,{}^0e$$

là các vector vị trí của p và chiều của trục z_5 qui chiếu theo hệ tọa độ (x_2, y_2, z_2)

Các pt (2.104), (2.105) là tập hợp sáu phương trình vô hướng không có biến θ_6. Tuy nhiên, chỉ có hai trong ba phương trình vô hướng của pt (2.105) là độc lập, do các thành phần của e phải thỏa điều kiện vector đơn vị. Do đó, chỉ có năm phương trình độc lập với năm ẩn, $\theta_1, \dots \theta_5$. Các thành phần x và y là đa thức bậc hai với sine và cosine của năm góc khớp. Chú ý, bằng phương pháp này, θ_6 không xuất hiện trong hệ phương trình, do đó sẽ giảm tính phức tạp của bài toán. Phần kế tiếp sẽ loại bỏ θ_3 ra khỏi hệ phương trình nêu trên.

Loại bỏ θ_3. Trước hết cần chú ý, cả hai thành phần z của pt (2.104) và (2.105) đều không có biến θ_3. Khai triển các thành phần z của pt (2.104) và (2.105)

$$h_x s\alpha_2 s\theta_2 - h_y s\alpha_2 c\theta_2 - g_x s\alpha_3 s\theta_4 + g_y s\alpha_3 c\theta 4 = -h_z c\alpha_2 + d_2 c\alpha_2 + g_z c\alpha_3 + d_3 \quad (2.106)$$

$$n_x s\alpha_2 s\theta_2 - n_y s\alpha_2 c\theta_2 - m_x s\alpha_3 s\theta_4 + m_y s\alpha_3 c\theta 4 = -n_z c\alpha_2 + m_z c\alpha_3 \quad (2.107)$$

trong đó

$$g_x = a_5 c\theta_5 + a_4$$

$$g_y = -a_5 c\alpha_4 s\theta_5 + d_5 s\alpha_4$$

$$g_z = a_5 s\alpha_4 s\theta_5 + d_5 c\alpha_4 + d_4$$

$$h_x = p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 - a_1$$

$$h_y = -p_x c\alpha_1 s\theta_1 + p_y c\alpha_1 c\theta_1 + (p_z - d_1) s\alpha_1$$

$$h_z = p_x s\alpha_1 s\theta_1 - p_y s\alpha_1 c\theta_1 + (p_z - d_1) c\alpha_1$$

$$m_x = c\alpha_5 s\theta_5$$

$$m_y = c\alpha_4 s\alpha_5 c\theta_5 + s\alpha_4 c\alpha_5$$

$$m_z = -s\alpha_4 s\alpha_5 c\theta_5 + c\alpha_4 c\alpha_5$$

$$n_x = e_x c\theta_1 + e_y s\theta_1$$

$$n_y = -e_x c\alpha_1 s\theta_1 + e_y c\alpha_1 c\theta_1 + e_z s\alpha_1$$

$$n_z = e_x s\alpha_1 s\theta_1 - e_y s\alpha_1 c\theta_1 + e_z c\alpha_1$$

Phương trình thứ ba không có θ_3, nhận được bằng cách thực hiện phép nhân ${}^2p.{}^2c={}^2p'.{}^2c'$. Thay pt (2.104) và (2.105) vào tích này và đơn giản hóa

$$a_2n_ys\theta_2 + a_2n_xc\theta_2 + (a_3m_y + d_3m_xs\alpha_3)s\theta_4 + (a_3m_x - d_3m_ys\alpha_3)c\theta_4$$
$$= -a_1n_x - d_2n_y - a_4m_x - m_z(d_3c\alpha_3 + d_4) + k_1 \qquad (2.108)$$

trong đó $k_1 = -d_5c\alpha_5 + p_xe_x + p_ye_y + (p_z - d_1)e_z$

Phương trình thứ tư không có θ_3 nhận được bằng cách cân bằng tổng các bình phương của các thành phần x, y, và z ở cả hai vế pt (2.104). Khai triển $({}^2p)^2 = ({}^2p')^2$ sẽ nhận được

$$a_2h_ys\theta_2 + a_2h_xc\theta_2 + (a_3g_y + d_3g_xs\alpha_3)s\theta_4 + (a_3g_x - d_3g_ys\alpha_3)c\theta_4$$
$$= -a_1h_x - d_2h_y - a_4g_x - g_z(d_3c\alpha_3 + d_4) + k_2 \qquad (2.109)$$

trong đó

$$k_2 = 0.5[p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 - a_1^2 + a_2^2 + d_2^2 - a_3^2 - d_3^2 + a_4^2 + d_4^2 - a_5^2 - d_5^2]$$

Các phương trình từ (2.106) đến (2.109) là hệ bốn đa thức bậc hai với các sine và cosine của bốn góc khớp. Có thể coi $\sin\theta_i$ và $\cos\theta_i$ là hai biến độc lập, bổ sung các đồng nhất thức lượng giác theo các phương trình liên hợp sẽ có

$$s^2\theta_i + c^2\theta_i = 1, \quad \text{đối với } i = 1, 2, 4, 5 \qquad (2.110)$$

Theo phương pháp này, sẽ nhận được hệ tám đa thức bậc hai với 8 biến. Tsai và Morgan dùng phương pháp liên tục để giải hệ phương trình nêu trên, cho thấy robot 6R, 6-dof, tổng quát có tối đa 16 nghiệm có nghĩa.

Hệ phương trình sẽ được tách biệt khi ba trục khớp liên tiếp cắt nhau tại điểm chung hoặc song song với nhau. Đối với các dạng hình học đặc biệt này, có thể tìm được nghiệm khép kín. Phần tiếp theo sẽ minh họa sự tách nhóm phương trình bằng cách giải bài toán động học đảo đối với hai trường hợp đặc biệt được dùng nhiều trong robot công nghiệp.

Ba trục khớp cuối cắt nhau tại điểm chung. Khi ba trục khớp cuối cắt nhau tại điểm chung, $a_4 = a_5 = d_5 = 0$. Thay các giá trị này vào pt (2.106) và (2.109)

$$h_xs\theta_2 - h_yc\theta_2 = \mu_1 / s\alpha_2 \qquad (2.111)$$

$$h_y s\theta_2 + h_x c\theta_2 = \mu_1 / sa_2 \qquad (2.112)$$

với $s\alpha_2 \neq 0$ và $a_2 \neq 0$,

trong đó

$$\mu_1 = -h_z c\alpha_2 + d_2 c\alpha_2 + d_3 + d_4 c\alpha_3$$

$$\mu_2 = -a_1 h_x - d_2 h_z - d_3 d_4 c\alpha_3$$
$$+ 0.5[p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 - a_1^2 + a_2^2 + d_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2]$$

Các pt (2.111) và (2.112) chỉ chứa hai biến chưa biết, do đó hoàn toàn khác biệt với pt (2.107) và (2.108). Để loại bỏ θ_2, cần tính tổng các bình phương từ pt (2.111) và (2.112)

$$h_x^2 + h_y^2 = (\mu_1 / s\alpha_2)^2 + (\mu_2 / a_2)^2 \qquad (2.113)$$

Phương trình (2.113) chỉ chứa một biến θ_1, có thể đổi thành đa thức bậc bốn theo t_1 bằng cách thay $s\theta_1 = 2t_1/(1 + t_1^2)$ và $c\theta_1 = (1 - t_1^2)/(1 + t_1^2)$, trong đó $t_1 = tg(\theta_1/2)$. Do đó, đối với từng vị trí đầu tác động cho trước, có ít nhất bốn nghiệm thực đối với θ_1. Khi biết θ_1, nghiệm duy nhất của θ_2 có thể tìm được bằng cách giải đồng thời pt (2.111) và (2.112), sau đó áp dụng hàm arctg. Từ đó, nghiệm duy nhất của θ_3 có thể tìm được bằng cách giải hai phương trình vô hướng liên quan với các thành phần x và y của pt (2.104).

Ứng với từng tập hợp nghiệm (θ_1, θ_2, θ_3) có thể tìm được hai tập hợp (θ_4, θ_5, θ_6) bằng cách tham khảo ví dụ nêu trên. Từ đây có thể kết luận có tối đa tám tập hợp nghiệm khả dĩ (tương ứng tám cấu hình cơ cấu chấp hành).

Các trục khớp 2, 3, và 4 song song với nhau. Khi các trục khớp 2, 3, và 4 song song với nhau, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Hơn nữa, do các pháp tuyến chung giữa trục khớp 2 và 3 và giữa trục khớp 3 và 4 là liên hợp, có thể xác định hai pháp tuyến chung sao cho $d_2 = d_3 = 0$. Với các giá trị này, các pt (2.106) và (2.107) được rút gọn thành

$$s\alpha_4 s\theta_5 = \frac{h_z - d_5 c\alpha_4 - d_4}{a_5} \qquad (2.114)$$

$$s\alpha_4 c\theta_5 = \frac{-n_z + c\alpha_4 c\alpha_5}{s\alpha_5} \qquad (2.115)$$

với $a_5 \neq 0$ và $s\alpha_5 \neq 0$

Các pt (2.114) và (2.115) chỉ chứa hai ẩn và có thể tách biệt từ pt (2.108) và (2.109). Có thể loại bỏ θ_5 bằng cách tính tổng các bình phương của pt (2.114) và (2.115).

$$s^2\alpha_4 = \left(\frac{h_z - d_5 c\alpha_4 - d_4}{a_5}\right)^2 + \left(\frac{-n_z + c\alpha_4 c\alpha_5}{s\alpha_5}\right)^2 \qquad (2.116)$$

Phương trình (2.116) chỉ chứa một biến, θ_1, có thể khai triển thành đa thức bậc bốn theo t_1 bằng cách thay $s\theta_1 = 2t_1/(1+t_1^2)$ và $c\theta_1 = (1-t_1^2)/(1+t_1^2)$ với $t_1 = \tan(\theta_1/2)$. Đối với từng vị trí đầu tác động đã biết và định hướng của đầu tác động, có tối đa bốn nghiệm thực của θ_1. Khi biết θ_1, có thể tìm được nghiệm θ_5 duy nhất bằng cách giải đồng thời pt (2.114) và (2.115).

Khi $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, hai phương trình vô hướng ứng với các thành phần x và y của pt (2.105) sẽ rút gọn thành

$$m_x c\theta_{34} + m_y s\theta_{34} = n_x c\theta_2 + n_y s\theta_2 \qquad (2.117)$$

$$m_x s\theta_{34} - m_y c\theta_{34} = -n_x s\theta_2 + n_y c\theta_2 \qquad (2.118)$$

Các pt (2.117) và (2.118) chứa hai biến chưa biết, θ_{34} và θ_2. Có thể rút gọn hai phương trình này thành một phương trình một biến. Trừ pt (2.118) x $s\theta_2$ với pt (2.117) x $c\theta_2$, sẽ có :

$$m_x c\theta_{234} + m_y s\theta_{234} = n_x \qquad (2.119)$$

cộng pt (2.118) x $c\theta_2$ với (2.117) x $s\theta_2$ sẽ có

$$m_x s\theta_{234} - m_y c\theta_{234} = n_y \qquad (2.120)$$

Ứng với từng tập hợp θ_1 và θ_5 sẽ tìm được nghiệm duy nhất θ_{234} bằng cách giải pt (2.119) và (2.120).

Tương tự, hai phương trình vô hướng ứng với các thành phần x, y của pt (2.104) rút gọn thành

$$g_x c\theta_{34} + g_y s\theta_{34} + a_3 c\theta_3 = h_x c\theta_2 + h_y s\theta_2 - a_2 \quad (2.121)$$

$$g_x s\theta_{34} + g_y c\theta_{34} + a_3 s\theta_3 = -h_x s\theta_2 + h_y c\theta_2 \quad (2.122)$$

Trừ pt (2.122) x $s\theta_2$ với (2.121) x $c\theta_2$

$$g_x c\theta_{234} + g_y s\theta_{234} + a_3 c\theta_{23} = h_x - a_2 c\theta_2 \quad (2.123)$$

Cộng pt (2.122) x $c\theta_2$ với (2.121) x $s\theta_2$

$$g_x s\theta_{234} - g_y c\theta_{234} + a_3 s\theta_{23} = h_y - a_2 s\theta_2 \quad (2.124)$$

Tính tổng các bình phương của [pt (2.123) - h_x] và [pt (2.124) - h_y] sẽ có

$$2a_3(k_3 c\theta_{23} + k_4 s\theta_{23}) + k_5 = 0 \quad (2.125)$$

trong đó

$$k_3 = g_x c\theta_{234} + g_y s\theta_{234} - h_x$$

$$k_4 = g_x s\theta_{234} - g_y c\theta_{234} - h_y$$

$$k_5 = -a_2^2 + a_3^2 + k_3^2 + k_4^2$$

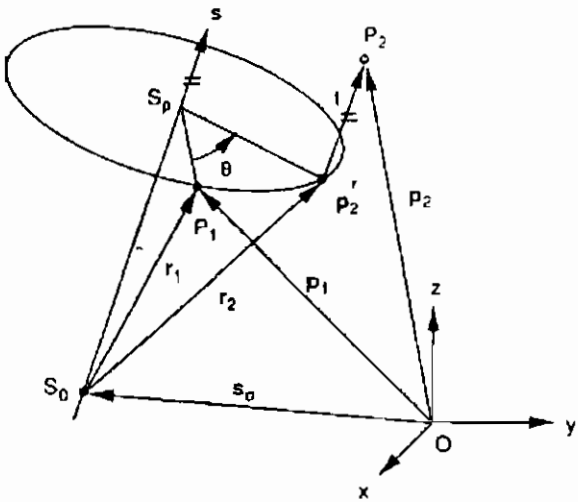
Ứng với từng tập hợp nghiệm (θ_1, θ_5, θ_{234}), pt (2.125) sẽ có hai nghiệm θ_{23}. Khi biết θ_{23}, các pt (2.123) và (2.124) có nghiệm θ_2 duy nhất. Ở đây sẽ có tối đa tám tập hợp nghiệm khả dĩ.

Phương pháp chuyển vị xoắn liên tiếp

Phần này sẽ nghiên cứu phương pháp giải tích dựa trên khái niệm *chuyển vị xoắn liên tiếp*. Trước hết cần tính ma trận biến đổi liên quan với chuyển vị xoắn liên tiếp, sau đó sẽ xét khái niệm về *độ xoắn kết quả* và áp dụng để phân tích vị trí các cơ cấu chấp hành nối tiếp.

Phép biến đổi dựa trên chuyển vị xoắn

Định lý *Chasles* cho biết sự chuyển vị không gian tổng quát của vật rắn bao gồm sự tịnh tiến và quay. Dạng tổng quát của định lý này cho biết bất kể cách thức vật rắn chuyển vị từ vị trí này đến vị trí khác, độ chuyển vị có thể được coi là phép quay và phép tịnh tiến theo trục. Sự kết hợp chuyển động quay và tịnh tiến được gọi là *chuyển vị xoắn*. Từ đó sẽ xác định phép biến đổi đồng nhất dựa trên khái niệm chuyển vị xoắn.



Hình 2.12. Sơ đồ vector của chuyển vị không gian.

Hình 2.12 minh họa điểm P dịch chuyển từ vị trí thứ nhất P_1 đến vị trí thứ hai P_2 theo phép quay với góc θ xung quanh trục xoắn và tiếp theo là phép tịnh tiến dọc trục này. Phép quay đưa P từ P_1 đến P_2^r và phép tịnh tiến đưa P từ P_2^r đến P_2. Trên Hình này, $s = [s_x, s_y, s_z]^T$ là vector đơn vị theo chiều trục xoắn, và $s_0 = [s_{0x}, s_{0y}, s_{0z}]^T$ là vector vị trí của điểm trên trục xoắn. Góc quay θ và khoảng cách tịnh tiến t được gọi là thông số xoắn. Trục xoắn cùng với các *thông số xoắn* sẽ xác định sự chuyển vị tổng quát của vật rắn. Chú ý, đối với sự chuyển vị tổng quát của vật rắn, trục xoắn không bắt buộc phải đi qua gốc tọa độ của khung cố định.

Phương trình chuyển vị do sự quay quanh một trục đi qua gốc tọa độ được trình bày trong Chương 1, do đó chỉ cần xét trường hợp trục xoắn không đi qua gốc tọa độ và sự tịnh tiến dọc theo trục xoắn. Từ Hình 2.12 có thể thấy

$$r_1 = p_1 - s_0 \tag{2.126}$$

$$r_2 = p_2 - s_0 - ts \tag{2.127}$$

Thay các pt (2.126) và (2.127) vào (1.35)

$$p_2 = s_0 + ts + (p_1 - s_0)c\theta + s \times (p_1 - s_0)s\theta + [(p_1 - s_0)^T s]s(1 - c\theta) \tag{2.128}$$

Phương trình (2.128) được gọi là *công thức Rodrigues* đối với chuyển vị không gian tổng quát của vật rắn. Khai triển pt (2.128), thay p_1 bằng ${}^{B}p$ và p_2 bằng ${}^{A}p$

$$ {}^{A}P = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}P + {}^{A}q \tag{2.129} $$

trong đó các phần tử của ma trận quay, a_{ij}, được tính theo pt (1.37), vị trí gốc tọa độ, ${}^{A}q$, của khung chuyển động được tính theo

$$ q_x = ts_x - s_{ox}(a_{11} - 1) - s_{oy}a_{12} - s_{oz}a_{13} $$

$$ q_y = ts_y - s_{ox}a_{21} - s_{oy}(a_{22} - 1) - s_{oz}a_{23} $$

$$ q_z = ts_z - s_{ox}a_{31} - s_{oy}a_{32} - s_{oz}(a_{33} - 1) \tag{2.130} $$

Phương trình (2.129) được viết theo biến đổi đồng nhất

$$ {}^{A}\hat{P} = A\,{}^{B}\hat{P} \tag{2.131} $$

trong đó A là ma trận biến đổi 4 x 4, với các phần tử như sau:

$$ a_{11} = (s_x^2 - 1)(1 - c\theta) + 1, $$

$$ a_{12} = s_x s_y (1 - c\theta) - s_z s\theta, $$

$$ a_{13} = s_x s_z (1 - c\theta) + s_y s\theta, $$

$$ a_{21} = s_y s_x (1 - c\theta) + s_z s\theta, $$

$$ a_{22} = (s_y^2 - 1)(1 - c\theta) + 1, $$

$$ a_{23} = s_y s_z (1 - c\theta) - s_x s\theta, $$

$$ a_{31} = s_z s_x (1 - c\theta) - s_y s\theta, $$

$$ a_{32} = s_z s_y (1 - c\theta) - s_x s\theta, $$

$$ a_{33} = (s_z^2 - 1)(1 - c\theta) + 1, $$

$$ a_{14} = ts_x - s_{ox}(a_{11} - 1) - s_{oy}a_{12} - s_{oz}a_{13}, $$

$$ a_{24} = ts_y - s_{ox}a_{21} - s_{oy}(a_{22} - 1) - s_{oz}a_{23}, $$

$$ a_{34} = ts_z - s_{ox}a_{31} - s_{oy}a_{32} - s_{oz}(a_{33} - 1), $$

$$a_{41} = 0,$$

$$a_{42} = 0,$$

$$a_{43} = 0,$$

$$a_{44} = 1. \qquad (2.132)$$

Ma trận con 3 x 3 phía trên bên trái của A là phép quay của vật rắn. Ma trận con 3 x 1 phía trên bên phải là sự tịnh tiến của gốc tọa độ Q (với $a_{14} = q_x$, $a_{24} = q_y$, $a_{34} = q_z$). Sự biểu diễn chuyển vị không gian đòi hỏi tám thông số, trong đó ba thông số là chiều của trục xoắn, ba thông số là vị trí trục xoắn, một thông số là góc quay và một là khoảng cách tịnh tiến. Tuy nhiên, chỉ hai trong ba thông số về chiều của trục xoắn là độc lập do phải thỏa mãn điều kiện vector đơn vị

$$s^T s = 1 \qquad (2.133)$$

Tương tự, chỉ hai trong ba thông số vị trí trục xoắn là độc lập, do S_0 có thể là điểm bất kỳ trên trục này. Để thuận tiện có thể chọn s_0 là pháp tuyến của trục xoắn.

$$s_0^T s = 0 \qquad (2.134)$$

Khi biết các thông số xoắn và trục xoắn, có thể tính các phần tử của ma trận biến đổi bằng pt (2.132). Mặt khác, khi biết sự chuyển dịch không gian của vật rắn theo ma trận quay, ${}^AR_B$, và vector tịnh tiến, ${}^Aq$, có thể tính trục xoắn và các thông số xoắn như sau. Góc quay được tính theo

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} \qquad (2.135)$$

Có hai nghiệm đối với θ, ngược dấu nhau. Khi biết góc quay, chiều trục xoắn được tính theo

$$s_x = \frac{a_{32} - a_{23}}{2s\theta}$$

$$s_y = \frac{a_{13} - a_{31}}{2s\theta}$$

$$s_z = \frac{a_{21} - a_{12}}{2s\theta} \qquad (2.136)$$

Khoảng cách tịnh tiến được tính theo

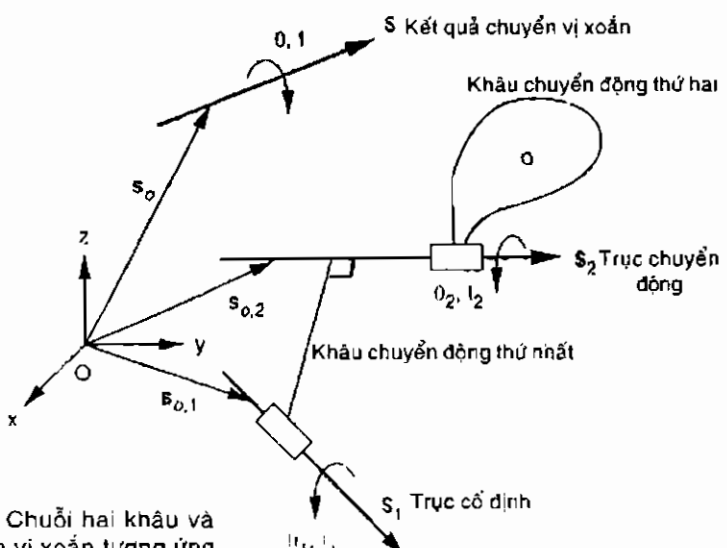
$$t = q^T s \tag{2.137}$$

và vị trí trục xoắn có thể được tính bằng cách giải hai trong ba phương trình của pt (2.130) cùng với pt (2.134). Do các phương trình này là tuyến tính, tồn tại một nghiệm tương ứng từng tập hợp nghiệm s, θ và t.

Từ phân tích nêu trên, có thể thấy có hai nghiệm xoắn, ngược dấu nhau. Trong thực tế, hai nghiệm này biểu thị cùng một trục xoắn, do sự quay -θ và tịnh tiến -t theo trục xoắn -(s, s_0) có cùng kết quả như kiểu quay +θ và tịnh tiến +t theo trục xoắn +(s, s_0).

Sự chuyển vị xoắn liên tiếp

Có thể áp dụng các khái niệm chuyển vị xoắn để phân tích động học các chuỗi vòng hở. Hình 2.13 minh họa vật rắn σ được điều khiển theo đế cố định với hai cặp động học $\$_1$ và $\$_2$. Cặp động học thứ nhất nối khâu chuyển động thứ nhất với đế cố định, và cặp động học thứ hai nối khâu chuyển động thứ hai (σ) với khâu thứ nhất. Trục cặp động học thứ nhất được gọi là *trục khớp cố định* và trục cặp động học thứ hai là *trục khớp chuyển động*.



Hình 2.13. Chuỗi hai khâu và các chuyển vị xoắn tương ứng.

Khi vật rắn quay hoặc tịnh tiến theo hai trục khớp này, có thể coi sự chuyển vị là kết quả của chuyển vị xoắn (θ_1, t_1) theo trục khớp cố định và tiếp theo là sự chuyển vị (θ_2, t_2) theo trục khớp di động, đồng thời có thể coi sự chuyển vị này là kết quả chuyển vị xoắn (θ_2, t_2) theo trục khớp di động và tiếp theo là chuyển vị (θ_1, t_1) theo trục khớp cố định. Cả hai chuyển vị xoắn này có thể xảy ra theo chuyển vị bất kỳ hoặc đồng thời khi tổng phép quay và/hoặc tịnh tiến quanh hai trục khớp đó là chính xác. Điều đó có nghĩa là thứ tự các biến khớp thay đổi giá trị của chúng là tùy ý.

Một vấn đề khó là khảo sát sự xoắn kết quả, $, khi chuyển vị xoắn $\$_1$ quanh trục khớp cố định và tiếp theo là chuyển vị xoắn $\$_2$ quanh trục khớp chuyển động. Điều này là do sự quay theo góc θ_1 quanh trục khớp cố định sẽ làm thay đổi trục khớp di động, $\$_2$, đến vị trí mới, và điều đó phải được xét đến đối với sự chuyển vị kế tiếp.

Sơ đồ tối ưu là quay vật rắn σ quanh trục khớp chuyển động sau đó quay quanh trục khớp cố định. Theo đó, vị trí ban đầu của trục khớp chuyển động có thể được dùng để tìm các ma trận biến đổi, và ma trận biến đổi kết quả có thể được tính bằng cách nhân trước hai chuyển vị xoắn liên tiếp.

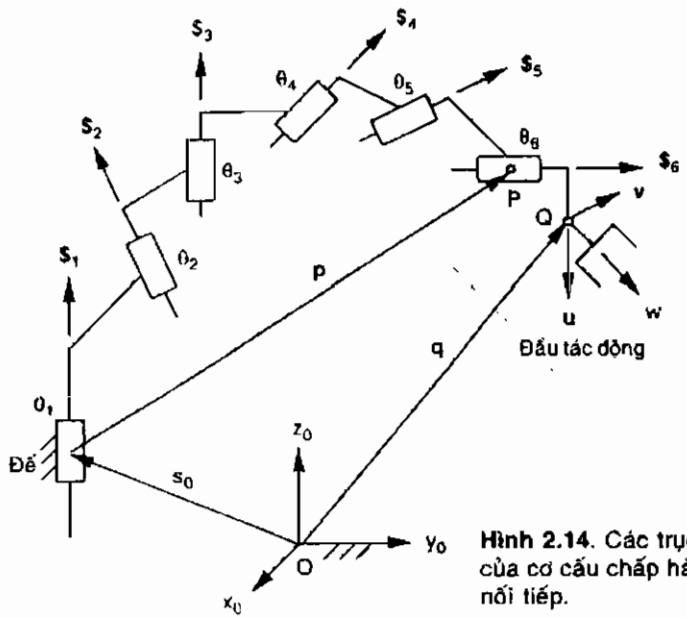
$$A_r = A_1 A_2 \tag{2.138}$$

trong đó A_1 và A_2 là các chuyển vị xoắn xung quanh vị trí ban đầu của trục khớp cố định và trục khớp chuyển động.

Không nên nhầm lẫn tính giao hoán về sự thay đổi các biến khớp trong chuỗi vòng hở với các phép quay hữu hạn xung quanh trục cố định không có tính giao hoán.

Điều nêu trên có thể được mở rộng cho cơ cấu chấp hành nối tiếp n-khâu (Hình 2.14). Trước hết cần xác định *vị trí quy chiếu* đối với cơ cấu chấp hành. Mặc dù vị trí quy chiếu có thể được chọn tùy ý, nhưng trong thực tế thường chọn tại vị trí sao cho dễ dàng xác định các tọa độ của tất cả các trục khớp, và vị trí mong muốn được gọi là *vị trí đích*. Theo đó, có thể xét cơ cấu chấp hành đang dịch chuyển từ vị trí quy chiếu đến vị trí mong muốn bằng chuỗi liên tiếp các chuyển vị xoắn hữu hạn xung quanh tất cả các trục khớp.

Vị trí quy chiếu. Vị trí quy chiếu của cơ cấu chấp hành được chuyên biệt theo các đại lượng của vị trí đầu tác động.



Hình 2.14. Các trục xoắn của cơ cấu chấp hành nối tiếp.

u_0, v_0, w_0, và q_0

cùng với chiều và sự định hướng của các trục khớp

s_i và s_{0i}, với i = 1,2, ...n.

Vị trí đích. Vị trí đích của cơ cấu chấp hành được chuyên biệt theo các đại lượng của vị trí đầu tác động mong muốn.

u, v, w, và q.

Phương trình vòng kín. Sự chuyển vị của đầu tác động từ vị trí quy chiếu đến vị trí đích có thể xét theo kết quả của n chuyển vị xoắn liên tiếp; nghĩa là, phép quay quanh trục khớp n, tiếp theo là quay quanh trục khớp n-1, ... Do mọi chuyển vị xoắn đều xảy ra quanh các trục khớp ở vị trí quy chiếu, chuyển vị xoắn kết quả sẽ nhận được bằng cách nhân trước các chuyển vị xoắn thành phần.

$$A_h = A_1 A_2 ... A_{n-1} A_n \qquad (2.139)$$

Sử dụng phương pháp chuyển vị xoắn liên tiếp, chỉ cần một hệ tọa độ cố định, và một hệ tọa độ đầu tác động. Các thông số xoắn được dùng

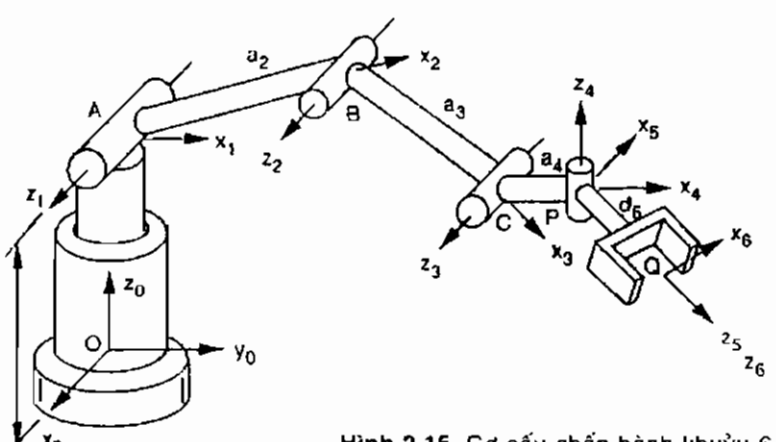
trong pt (2.132) là khác với các thông số Denavit-Hartenberg. Các biến khớp của chuyển vị xoắn là các góc quay thực và/hoặc các khoảng cách tịnh tiến cần thiết để đưa đầu tác động từ vị trí quy chiếu đến vị trí đích. Đặc biệt, đối với khớp quay, θ_i là biến và $t_i = 0$, còn đối với khớp lăng trụ, t_i là biến và $\theta_i = 0$.

Các thông số D-H không biểu thị góc quay hoặc khoảng cách tịnh tiến theo trục khớp. Để nhận được sự chuyển vị thực tế, cần trừ các biến khớp liên quan tới vị trí quy chiếu với các biến khớp ở vị trí đích. Một trong các ưu điểm của việc sử dụng các chuyển vị xoắn liên tiếp là vị trí quy chiếu có thể chọn tùy ý.

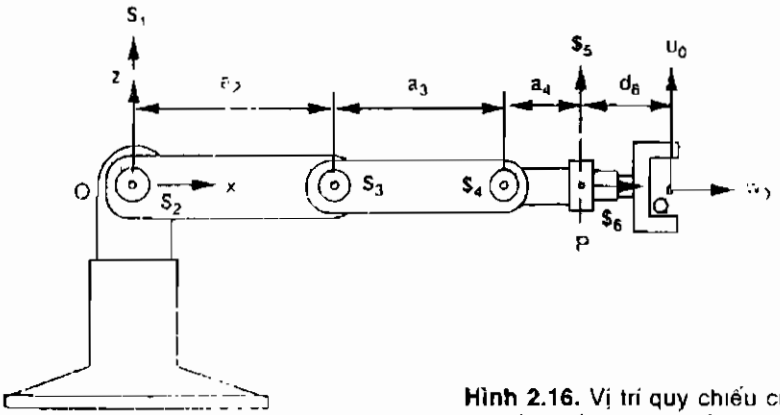
Đối với động học thuận, có thể tính pt (2.139) một cách trực tiếp bằng cách sử dụng các biến khớp cho trước. Đối với động học đảo, vế trái của pt (2.139) được cho trước, vấn đề là tìm các chuyển vị khớp cần thiết để đưa đầu tác động đến vị trí mong muốn.

Phân tích vị trí của cơ cấu chấp hành khuỷu

Hình 2.15 minh họa sơ đồ cơ cấu chấp hành khuỷu. Trong cơ cấu này, trục khớp thứ hai cắt vuông góc trục khớp thứ nhất, trục khớp thứ ba và thứ tư song song trục thứ hai, trục khớp thứ năm vuông góc trục khớp thứ tư và lệch với khoảng cách a_4, còn trục khớp thứ sáu cắt vuông góc trục khớp thứ năm. Phần này sẽ trình bày phương pháp chuyển vị xoắn liên tiếp để giải bài toán động học đảo cho cơ cấu chấp hành đó.



Hình 2.15. Cơ cấu chấp hành khuỷu 6-dof



Hình 2.16. Vị trí quy chiếu của cơ cấu chấp hành khuỷu

Vị trí quy chiếu. Trước hết cần xác định cấu hình quy chiếu để đo độ chuyển vị của cơ cấu chấp hành. Hình 2.16 minh họa cấu hình quy chiếu, trong đó trục khớp thứ nhất $\$_1$, hướng thẳng lên trên theo chiều dương của trục z, các trục khớp thứ hai, ba và bốn, $\$_2$, $\$_3$, và $\$_4$, vuông góc với mặt phẳng hình vẽ; trục khớp thứ năm $\$_5$, theo chiều dương của trục z; trục khớp thứ sáu $\$_6$ theo chiều dương của trục x. Hệ tọa độ đầu tác động ở điểm Q sao cho trục w_0 theo chiều dương trục x, trục u_0 theo chiều dương trục z. Tại vị trí qui chiếu này, các vị trí của trục xoắn theo hệ tọa độ qui chiếu cố định được liệt kê trên Bảng 2.5. Vị trí qui chiếu của đầu tác động là

$$u_0 = [0,0,1]^T,\ v_0 = [0,-1,0]^T,\ w_0 = [1,0,0]^T \text{ và}$$

$$p_0 = [a_2 + a_3 + a_4, 0, 0]^T$$

Bảng 2.5. Vị trí trục xoắn của cơ cấu chấp hành khuỷu

Khớp i	s_i	s_{0i}
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
2	(0, -1, 0)	(0, 0, 0)
3	(0, -1, 0)	(a2, 0, 0)
4	(0, -1, 0)	(a_2 + a_3, 0, 0)
5	(0, 0, 1)	(a_2 + a_3 + a_4, 0, 0)
6	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)

Vị trí đích. Vị trí đích của đầu tác động là

$$u = [u_x, u_y u_z]^T, \quad v = [v_x v_y v_z]^T, \quad w = [w_x, w_y, w_z]^T, \quad \text{và}$$

$$p = [p_x, p_y, p_z]^T$$

Các ma trận biến đổi. Thay các trục tọa độ vào pt (2.132) sẽ có các ma trận biến đổi xoắn:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad ({}^0A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & s\theta_1 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & -s\theta_3 & a_2(1-c\theta_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & c\theta_3 & -a_2 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & (a_2+a_3)(1-c\theta_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & -(a_2+a_3)s\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & (a_2+a_3+a_4)(1-c\theta_5) \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & -(a_2+a_3+a_4)s\theta_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 \\ 0 & s\theta_6 & c\theta_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Các tích ma trận $A_2A_3A_4$ và $A_1A_2A_3A_4$ được tính theo

$$A_2A_3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_{234} & 0 & -s\theta_{234} & a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23} - (a_2+a_3)c\theta_{234} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s\theta_{234} & 0 & c\theta_{234} & a_2s\theta_2 + a_3s\theta_{23} - (a_2+a_3)s\theta_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

$$A_1A_2A_3A_4$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1c\theta_{234} & s\theta_1 & -c\theta_1s\theta_{234} & c\theta_1\left[a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23} - (a_2+a_3)c\theta_{234}\right] \\ s\theta_1c\theta_{234} & c\theta_1 & -s\theta_1s\theta_{234} & s\theta_1\left[a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23} - (a_2+a_3)c\theta_{234}\right] \\ s\theta_{234} & 0 & c\theta_{234} & \left[a_2s\theta_2 + a_3s\theta_{23} - (a_2+a_3)s\theta_{234}\right] \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.141)

Động học đảo. Biến đổi của điểm tâm xoay P được tính theo

$$p = A_1A_2A_3A_4p_0 \quad (2.142)$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với A_1^{-1}, sẽ có

$$A_1^{-1}\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = A_2A_3A_4\begin{bmatrix} a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.143)$$

Thay A_1^{-1} và pt (2.140) vào (2.143)

$$p_xc\theta_1 + p_ys\theta_1 = a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23} + a_4c\theta_{234}. \quad (2.144)$$

$$-p_xs\theta_1 + p_yc\theta_1 = 0. \quad (2.145)$$

$$p_z = a_2s\theta_2 + a_3s\theta_{23} + a_4s\theta_{234} \quad (2.146)$$

Từ pt (2.145), dễ dàng tìm được hai nghiệm của θ_1

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{p_y}{p_x} \quad (2.147)$$

Đối với cơ cấu chấp hành này, không thể tách các phương trình vị trí và định hướng, cần phải xét đồng thời cả hai. Áp dụng ma trận biến đổi cho vector w

$$R_1^T w = R_2 R_3 R_4 R_5 w_0 \tag{2.148}$$

trong đó R_1 là ma trận con 3 x 3 phía trên bên trái của A_1. Khai triển pt (2.148)

$$w_x c\theta_1 + w_y s\theta_1 = c\theta_{234} c\theta_5 \tag{2.149}$$

$$-w_x s\theta_1 + w_y c\theta_1 = s\theta_5 \tag{2.150}$$

$$w_z = s\theta_{234} c\theta_5 \tag{2.151}$$

Ứng với từng nghiệm θ_1, pt (2.150) có hai nghiệm θ_5

$$\theta_5 = \sin^{-1}\left(-w_x s\theta_1 + w_y c\theta_1\right) \tag{2.152}$$

Nghĩa là, nếu $\theta_5 = \theta_5^*$ là nghiệm, thì $\theta_5 = \pi - \theta_5$ cũng là nghiệm. Khi biết θ_1 và θ_5, có thể tính $s\theta_{234}$ và $c\theta_{234}$, từ đó tìm được nghiệm θ_{234} duy nhất.

$$\theta_{234} = A\tan 2\left[w_z / c\theta_5, (w_x c\theta_1 + w_y s\theta_1) / c\theta_5\right] \tag{2.153}$$

Kế tiếp, cần giải các pt (2.144) và (2.146) để tìm nghiệm của θ_2 và θ_3. Để thuận tiện, các pt (2.144) và (2.146) được viết dưới dạng

$$a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} = k_1 \tag{2.154}$$

$$a_2 s\theta_2 + a_3 s\theta_{23} = k_2 \tag{2.155}$$

trong đó $k_1 = p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 - a_4 c\theta_{234}$, và $k_2 = p_z - a_4 s\theta_{234}$. Tính tổng các bình phương của pt (2.154) và (2.155)

$$a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 c\theta_3 = k_1^2 + k_2^2 \tag{2.156}$$

Do đó

$$\theta_3 = \cos^{-1} \frac{k_1^2 + k_2^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2 a_3} \tag{2.157}$$

Ứng với từng tập hợp nghiệm (θ_1, θ_5, θ_{234}) có tối đa hai nghiệm thực của θ_3. Nếu θ_3 là nghiệm, $\theta_3 = -\theta_3$ cũng là nghiệm. Khi biết θ_3, có thể tìm được θ_2 bằng cách giải đồng thời các pt (2.154) và (2.155). Cuối cùng, có thể tính θ_4 theo quan hệ $\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3$. Để tính θ_5, cần áp dụng phép biến đổi vector đơn vị u:

$$(R_1R_2R_3R_4)^T u = R_5R_6u_0 \tag{2.158}$$

Khai triển pt (2.158)

$$u_x c\theta_1 c\theta_{234} + u_y s\theta_1 c\theta_{234} + u_z s\theta_{234} = s\theta_5 s\theta_6 \tag{2.159}$$

$$-u_x s\theta_1 + u_y c\theta_1 = -c\theta_5 s\theta_6 \tag{2.160}$$

$$-u_x c\theta_1 s\theta_{234} - u_y s\theta_1 s\theta_{234} + u_z c\theta_{234} = c\theta_6 \tag{2.161}$$

Có thể giải pt (2.159) và (2.160) để tìm $s\theta_6$

$$s\theta_6 = s\theta_5(u_x c\theta_1 c\theta_{234} + u_y s\theta_1 c\theta_{234} + u_z s\theta_{234}) - c\theta_5(-u_x s\theta_1 + u_y c\theta_1) \tag{2.162}$$

Các pt (2.161) và (2.162) xác định nghiệm duy nhất cho θ_6

$$\theta_6 = A\tan 2(s\theta_6 \cdot c\theta_6) \tag{2.163}$$

Có thể kết luận có tối đa 8 nghiệm thực của bài toán động học đảo

Phân tích vị trí tay máy Stanford

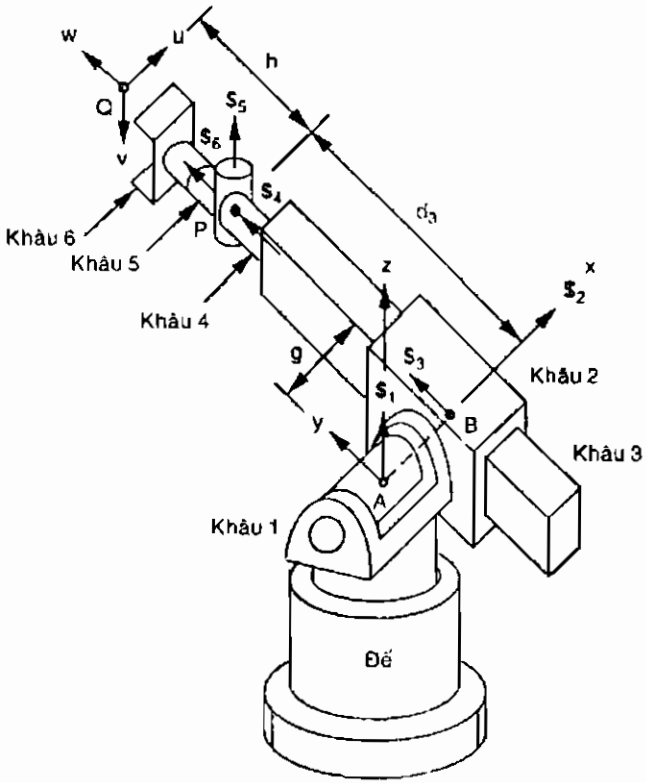
Hình 2.17 minh họa cơ cấu chấp hành 6-dof do đại học Stanford nghiên cứu. Trong cơ cấu chấp hành này, khớp thứ ba là khớp lăng trụ (hoặc cặp trượt), còn lại là các khớp quay. Trục khớp thứ nhất, $\$_1$, hướng lên theo chiều dương trục z. Trục khớp thứ hai, $\$_2$, cắt vuông góc trục khớp thứ nhất tại điểm A và hướng theo chiều dương trục x. Trục khớp thứ ba cắt vuông góc trục khớp thứ hai tại B và hướng theo chiều dương trục y. Trục khớp thứ tư thẳng hàng với trục khớp thứ ba. Hơn nữa, ba trục khớp cuối cắt vuông góc với nhau tại điểm tâm xoay P (Hình 2.17).

Vị trí qui chiếu. Vị trí qui chiếu được chọn tại điểm tâm xoắn P trùng với B. Tại điểm qui chiếu này, vị trí của các trục khớp theo hệ tọa độ cố định được liệt kê trong Bảng 2.6, với a là độ lệch giữa trục khớp thứ nhất và thứ ba. Vị trí qui chiếu của đầu tác động là:

$$u_0 = [1, 0, 0]^T, \quad v_0 = [0, 0, -1]^T, \quad w_0 = [0, 1, 0]^T, \quad \text{và}$$
$$q_0 = [g, h, 0]^T$$

Hơn nữa, vị trí qui chiếu của tâm xoắn P là

$$p_0 = [g, 0, 0]^T$$



Hình 2.17. Các trục xoắn trên cơ cấu chấp hành Stanford.

Bảng 2.6. Các vị trí trục xoắn của tay máy Stanford.

Khớp i	$s_i(s_x, s_y, s_z)$	$s_{oi}(s_{ox}, s_{oy}, s_{oz})$
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
2	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)
3	(0, 1, 0)	(g, 0, 0)
4	(0, 1, 0)	(g, 0, 0)
5	(0, 0, 1)	(g, 0, 0)
6	(0, 1, 0)	(g, 0, 0)

Vị trí đích. Vị trí đích của đầu tác động là

$$u = [u_x, u_y, u_z]^T, \quad v = [v_x, v_y, v_z]^T, \quad w = [w_x, w_y, w_z]^T, \quad \text{và}$$
$$q = [q_x, q_y, q_z]^T$$

Khi đó, vị trí đích của tâm xoắn là

$$p = q - hw \tag{2.164}$$

trong đó h là khoảng cách giữa các điểm P và Q

Trong phần tiếp theo sẽ liên hệ vị trí tâm P với ba biến khớp đầu, sau đó sẽ giải ba biến khớp cuối theo định hướng của đầu tác động.

Vị trí tâm xoay. Vị trí của tâm xoay chỉ phụ thuộc vào ba biến khớp ñaà, θ_1, θ_2, và d_3. Thay các hệ tọa độ của ba trục khớp này vào pt (2.132)

$$A_1A_2A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & -d_3 s\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 s\theta_2 & d_3 c\theta_1 c\theta_2 \\ 0 & s\theta_2 & c\theta_2 & d_3 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.165}$$

Vị trí đích của tâm xoay theo vị trí qui chiếu ban đầu sẽ là

$$p = A_1A_2A_3p_0 \tag{2.166}$$

Thay pt (2.165) vào (2.166)

$$p_x = gc\theta_1 - d_3 s\theta_1 c\theta_2 \tag{2.167}$$

$$p_y = gs\theta_1 - d_3 c\theta_1 c\theta_2 \tag{2.168}$$

$$p_z = d_3 s\theta_2 \tag{2.169}$$

Chú ý, khoảng cách giữa điểm A và tâm P (Hình 2.17) không phụ thuộc vào các biến khớp θ_1, và θ_2. Có thể loại bỏ cả θ_1, và θ_2 bằng các phép toán sau. Tính tổng các bình phương của pt (2.167), (2.168) và (2.169)

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = g^2 + d_3^2 \tag{2.170}$$

Do đó

$$d_3 = \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - g^2} \tag{2.171}$$

Phương trình (2.171) có (1) hai nghiệm thực nếu $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - g^2 > 0$, (2) một nghiệm kép nếu $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - g^2 = 0$, (3) không có nghiệm thực nếu $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - g^2 < 0$. Mặc dù có thể có hai giá trị d_3 thực, nhưng d_3 âm không có ý nghĩa vật lý do giới hạn cấu trúc cơ học của tay máy. Khi pt (2.171) có nghiệm kép, $d_3 = 0$, tâm xoay trùng với điểm B, cơ cấu chấp hành có cấu hình đặc biệt. Khi pt (2.171) không có nghiệm thực, tay máy không thể với tới điểm đích. Hơn nữa, nếu d_{max} là khoảng với cực đại của khớp lăng trụ, thì điểm đích sẽ không với tới nếu $d_3 > d_{max}$ dù pt (2.171) có hai nghiệm thực.

Khi biết d_3 có thể tìm θ_2 bằng cách giải pt (2.169)

$$\theta_2 = \sin^{-1}\frac{p_z}{d_3} \tag{2.172}$$

Ứng với mỗi giá trị d_3, pt (2.172) có tối đa hai nghiệm thực θ_2. Nói chung, nếu $\theta_2 = \theta_2^*$ là nghiệm, $\theta_2 = \pi - \theta_2^*$ cũng là nghiệm. Chú ý, $p_x^2 + p_y^2 - g^2 = 0$ là hình trụ bán kính g với z là trục dọc. Có thể thấy pt (2.172) có (1) hai nghiệm thực nếu điểm đích phía ngoài hình trụ này ($p_x^2 + p_y^2 - g^2 > 0$), (2) một nghiệm kép nếu điểm đích trên mặt trụ ($p_x^2 + p_y^2 - g^2 = 0$) và (3) không có nghiệm thực nếu điểm dich ở bên trong hình trụ ($p_x^2 + p_y^2 - g^2 < 0$). Khi điểm đích phía ngoài hình trụ, pt (2.171) cũng có hai nghiệm thực.

Khi biết d_3 và θ_2, có thể tìm $s\theta_1$ và $c\theta_1$ bằng cách giải hệ phương trình (2.167) và (2.168).

$$c\theta_1 = \frac{gp_x + d_3 p_y c\theta_2}{g^2 + d_3^2 c^2\theta_2} \tag{2.173}$$

$$s\theta_1 = \frac{gp_y - d_3 p_x c\theta_2}{g^2 + d_3^2 c^2\theta_2} \tag{2.174}$$

do đó, ứng với từng tập hợp nghiệm θ_2 và d_3, pt (2.173) và (2.174) có một nghiệm θ_1

$$\theta_1 = A\tan 2(s\theta_1 \cdot c\theta_1) \quad (2.175)$$

Ứng với từng vị trí đầu tác động cho trước, có tối đa bốn cấu hình tay máy

Định hướng đầu tác động. Định hướng đầu tác động chỉ phụ thuộc vào phần quay của các ma trận biến đổi A_i. Thay các tọa độ của ba trục khớp cuối vào pt (2.132)

$$R_4R_5R_6 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_4 & 0 & c\theta_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\theta_6 & 0 & s\theta_6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & 0 & c\theta_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 & -c\theta_4s\theta_5 & c\theta_4c\theta_5s\theta_6 + s\theta_4c\theta_6 \\ s\theta_5c\theta_6 & c\theta_5 & s\theta_5s\theta_6 \\ -s\theta_4c\theta_5c\theta_6 - c\theta_4s\theta_6 & s\theta_4s\theta_5 & -s\theta_4c\theta_5s\theta_6 + c\theta_4c\theta_6 \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

trong đó R_i là ma trận con 3 x 3 phía trên bên trái của A_i

Biến đổi vector w là

$$w = R_1R_2R_3R_4R_5R_6w_0 \quad (2.177)$$

Nhân cả hai vế của pt (2.177) với $(R_1R_2R_3)^{-1}$

$$R_3^TR_2^TR_1^Tw = R_4R_5R_6w_0 \quad (2.178)$$

Các đại lượng ở vế trái của pt (2.178) đều đã biết. Để thuận tiện, có thể ký hiệu ${}^3w \equiv R_3^TR_2^TR_1^Tw$. Khai triển pt (2.178)

$$-c\theta_4s\theta_5 = {}^3w_x \quad (2.179)$$

$$c\theta_5 = {}^3w_y \quad (2.180)$$

$$s\theta_4s\theta_5 = {}^3w_z \quad (2.181)$$

trong đó

$${}^3w_x = w_xc\theta_1 + w_ys\theta_1$$

$${}^3w_y = (-w_xs\theta_1 + w_yc\theta_1)c\theta_2 + w_zs\theta_2$$

$${}^3w_z = (w_xs\theta_1 - w_yc\theta_1)s\theta_2 + w_zc\theta_2$$

Chú ý vector w không phụ thuộc vào góc khớp thứ sáu. Để tìm θ_5, cần giải pt (2.180)

$$\theta_5 = \cos^{-1}({}^3w_y) \tag{2.182}$$

Phương trình (2.182) có hai nghiệm thực θ_5 nếu trị tuyệt đối ${}^3w_y < 1$, khi trị này bằng 1, pt (2.182) có $\theta_5 = 0$ hoặc π. Khi đó trục khớp thứ sáu thẳng hàng với trục khớp thứ tư, và tâm xoắn có cấu hình đặc biệt. Điều kiện trị tuyệt đối ${}^3w_y > 1$ không xảy ra do các giới hạn cơ học. Giả sử $s\theta_5 \neq 0$, có thể tính θ_4 từ pt (2.179) và (2.181)

$$\theta_4 = A\tan 2({}^3w_z / s\theta_5, -{}^3w_x / s\theta_5) \tag{2.183}$$

Cuối cùng, có thể tính θ_6 bằng cách biến đổi vector đơn vị u

$$u = R_1R_2R_3R_4R_5R_6u_0 \tag{2.184}$$

Nhân cả hai vế của pt (2.184) với $(R_1R_2R_3)^{-1}$

$$R_3^TR_2^TR_1^Tu = R_4R_5R_6u_0 \tag{2.185}$$

Để thuận tiện, có thể ký hiệu ${}^3u \equiv R_3^TR_2^TR_1^Tu$, khai triển pt (2.185) sẽ có

$${}^3u_x = c\theta_4c\theta_5c\theta_6 - s\theta_4s\theta_6 \tag{2.186}$$

$${}^3u_y = s\theta_5c\theta_6 \tag{2.187}$$

$${}^3u_z = -s\theta_4c\theta_5c\theta_6 - c\theta_4s\theta_6 \tag{2.188}$$

trong đó

$${}^3u_x = u_xc\theta_1 + u_ys\theta_1$$

$${}^3u_y = (-u_xs\theta_1 + u_yc\theta_1)c\theta_2 + u_zs\theta_2$$

$${}^3u_z = (u_xs\theta_1 - u_yc\theta_1)s\theta_2 + u_zc\theta_2$$

Nhân pt (2.186) với $s\theta_4$ và (2.188) với $c\theta_4$ và tính tổng

$$s\theta_4\,{}^3u_x + c\theta_4\,{}^3u_z = -s\theta_6 \tag{2.189}$$

từ pt (2.187) và (2.189) sẽ tìm được nghiệm θ_6 duy nhất.

$$\theta_6 = A\tan 2(-s\theta_4\,{}^3u_x - c\theta_4\,{}^3u_z, {}^3u_y / s\theta_5) \qquad (2.190)$$

Ứng với vị trí đầu tác động cho trước, có tối đa 8 nghiệm động học đảo, nhưng chỉ có 4 nghiệm là có ý nghĩa thực tế.

Tóm tắt

Chương này trình bày hai phương pháp giải bài toán động học đảo đối với các cơ cấu chấp hành nối tiếp. Thứ nhất, các thông số D-H được xác định, sau đó khai triển các ma trận biến đổi D-H để tìm các phương trình động học. Phương pháp D-H được minh họa để tính cơ cấu chấp hành phẳng 3-dof, robot Scorbot, và robot Fanuc S-900W, sau đó trình bày giải pháp Tsai và Morgan cho các trường hợp ba trục khớp cắt nhau và ba trục khớp song song. Thứ hai, trình bày khái niệm về chuyển vị xoắn liên tiếp và ứng dụng đối với bài toán động học đảo của các cơ cấu chấp hành nối tiếp. Động học đảo có thể được giải trực tiếp bằng cách áp dụng phương pháp chuyển vị xoắn liên tiếp. Hai ví dụ tính toán bằng phương pháp này được trình bày áp dụng cho cơ cấu chấp hành khuỷu và cơ cấu chấp hành Stanford.

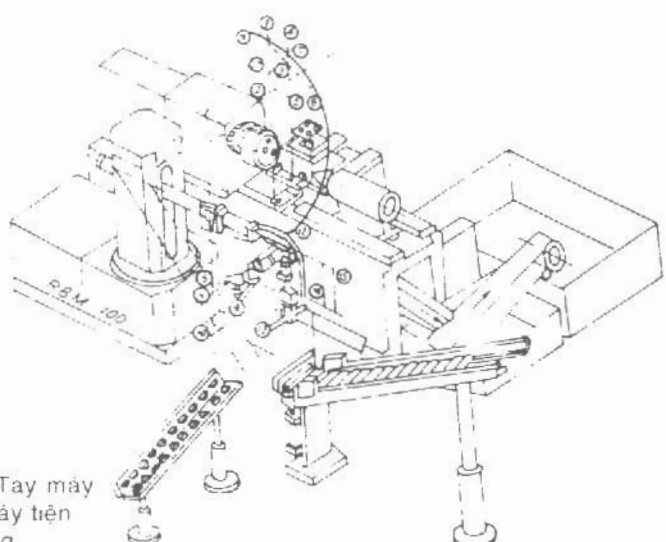
Chương 3

PHÂN TÍCH VỊ TRÍ CƠ CẤU CHẤP HÀNH SONG SONG

Giới thiệu

Trong Chương này, sẽ phân tích vị trí loại cơ cấu nhiều bậc tự do không gian, đó là cơ cấu chấp hành song song. Các cơ cấu song song được phân loại theo cơ cấu chấp hành phẳng, cầu, hoặc không gian, tương ứng với các đặc tính chuyển động của chúng. Kế tiếp là phân tích về động học thuận và ngược.

Hình 3.1 minh họa cơ cấu chấp hành song song gồm *bệ chuyển động* nối kết với *đế cố định* theo nhiều *nhánh* song song. Nói chung *số nhánh bằng số bậc tự do*, nghĩa là mỗi nhánh được điều khiển bằng một *cơ cấu tác động*; các cơ cấu tác động được gắn vào hoặc gần đế cố định. Vì lý do này, cơ cấu chấp hành song song đôi khi được gọi là *cơ cấu chấp hành có bệ*. Các cơ cấu tác động điều khiển tải ngoài, nên cơ cấu chấp hành song song thường có khả năng chịu tải lớn.



Hình 3-1. Tay máy phục vụ máy tiện bán tự động

Cơ cấu chấp hành song song có mặt trong nhiều ứng dụng, các bộ mô hình máy bay, các khung đỡ kiến trúc có khớp nối điều chỉnh, các máy khai thác mỏ ... Gần đây, chúng còn được phát triển thành *cụm gia công cơ khí nhiều bậc tự do* có độ chính xác cao, tốc độ cao (Hình 3.1).

Đa số *cơ cấu chấp hành song song 6 bậc tự do* có chứa *6 nhánh mở rộng*. Các cơ cấu chấp hành song song này có ưu điểm là độ cứng vững cao, quán tính thấp, và khả năng tải trọng lớn. Tuy nhiên, nhược điểm là không gian làm việc hữu dụng nhỏ và khó thiết kế.

Phân loại cấu trúc cơ cấu chấp hành song song

Cơ cấu chấp hành song song được gọi là *đối xứng* nếu thỏa các điều kiện sau:

1. Số lượng nhánh *bằng* số bậc tự do của bệ máy di động.
2. Kiểu loại và số lượng khớp trên tất cả nhánh được bố trí theo cấu hình đồng nhất.
3. Số lượng và vị trí các khớp động trong tất cả các nhánh đều như nhau.

Khi các điều kiện trên không thỏa, cơ cấu chấp hành được gọi là *không đối xứng*. Chương này đề cập đến ***cơ cấu chấp hành đối xứng***.

Có thể thấy, trong cơ cấu chấp hành đối xứng, số nhánh m *bằng* số bậc tự do F, đồng thời cũng *bằng* tổng số các vòng, L+1 (kể cả các vòng ngoại vi), nghĩa là

$$m = F = L + 1 \tag{3.1}$$

Độ liên kết, C_k, của một nhánh là các bậc tự do có quan hệ với tất cả các khớp trong nhánh đó:

$$\sum_{k=1}^{m} C_k = \sum_{i=1}^{j} f_i \tag{3-2}$$

với j là số khớp trong một cơ cấu. Thay pt (1.8) vào (3.2) và khử **L** bằng cách dùng pt (3.1):

$$\sum_{k=1}^{m} C_k = (\lambda + 1)F - \lambda \tag{3-3}$$

Hơn nữa, độ liên kết của mỗi nhánh không được lớn hơn thông số chuyển động và phải nhỏ hơn số bậc tự do của bệ di động:

$$\lambda \geq C_k \geq F \qquad (3.4)$$

Phương trình (3.3) và (3.4) được dùng để liệt kê và phân loại cơ cấu chấp hành song song. Cơ cấu song song có thể chia thành cơ cấu phẳng, cầu, không gian. Sau đây, sẽ xét chi tiết từng loại cơ cấu chấp hành trên.

Cơ cấu chấp hành song song phẳng

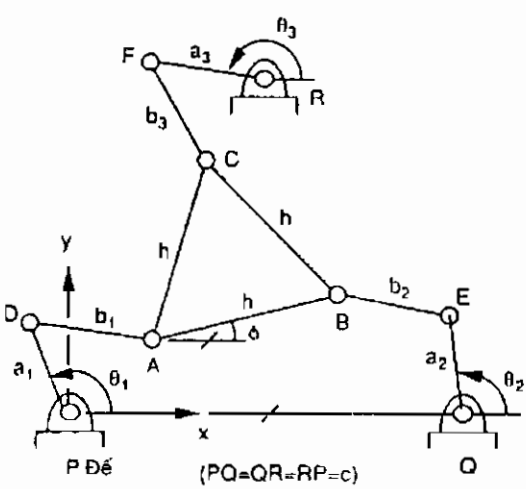
Đối với cơ cấu chấp hành song song 3 nhánh, 3 bậc tự do phẳng, $\lambda = 3$ và $m = F = 3$. Thay $\lambda = 3$ và $F = 3$ vào pt (3.3) ta được :

$$C_1 + C_2 + C_3 = 4F - 3 = 9 \qquad (3.5)$$

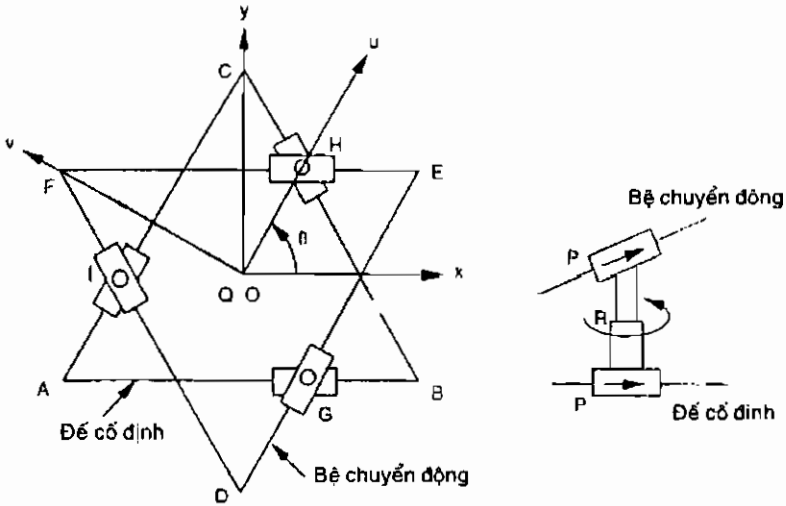
Đồng thời, pt (3.4) được rút gọn thành:

$$3 \geq C_k \geq 3 \qquad (3.6)$$

Từ đó, độ liên kết trên mỗi nhánh bằng 3, nghĩa là mỗi nhánh nên có 3 bậc tự do trong các khớp. Giả sử mỗi nhánh chứa 2 khâu và 3 khớp, mỗi khớp phải là *khớp 1 bậc tự do*. Sử dụng các khớp quay và lăng trụ theo cặp động học, sẽ có 7 cách bố trí nhánh RRR, RRP, RPR, PRR, RPP, PRP, PPR. Nếu cơ cấu chấp hành có 3 cấu trúc nhánh độc lập, thì chỉ có *7 cơ cấu chấp hành song song 3 bậc tự do phẳng* là khả thi.



Hình 3-2. Cơ cấu chấp hành song song 3RRR 3 bậc tự do phẳng



Hình 3-3. Cơ cấu chấp hành song song 3PRP, 3 bậc tự do phẳng

Hình 3.2 minh họa cơ cấu chấp hành song song 3 bậc tự do phẳng có cấu trúc nhánh 3RRR; Hình 3.3 minh họa cơ cấu chấp hành song song 3 bậc tự do phẳng có cấu trúc nhánh 3PRP, trong đó 3 *trục khớp quay* vuông góc với mặt phẳng chuyển động trong khi các *trục khớp lăng trụ* nằm trên mặt phẳng chuyển động.

Các cơ cấu chấp hành song song cầu

Các thông số chuyển động đối với cơ cấu cầu cũng bằng 3. Yêu cầu liên kết trong cơ cấu chấp hành song song cầu là đồng nhất với cơ cấu chấp hành song song phẳng. Trong cơ cấu chấp hành liên kết cầu, loại khớp được phép là khớp quay, tất cả các trục khớp phải giao nhau tại một điểm chung, đó là *tâm hình cầu*, cấu trúc nhánh duy nhất được phép là cấu trúc RRR. Cơ cấu chấp hành trên Hình 1.13 là cơ cấu chấp hành song song cầu 3RRR, 3 bậc tự do.

Chú ý, một khớp cầu có thể được lắp ở tâm của cơ cấu chấp hành song song cầu. Tuy nhiên, khớp cầu như thế chỉ có thể là khớp thụ động, vì các bộ tác động hiện hữu không thể truyền động cho khớp đó. Vì thế, nếu dùng một khớp cầu, cần có thêm ba nhánh để tác động song song bệ chuyển động. Trong trường hợp này, số nhánh, kể cả nhánh với khớp cầu thụ động có chiều dài zero, khác với số bậc tự do.

Cơ cấu chấp hành song song không gian

Đối với cơ cấu không gian, thay $\lambda = 6$ vào các pt (3.3) và (3.4):

$$\sum_{k}^{m} C_k = 7F - 6 \qquad (3.7)$$

và $$6 \geq C_k \geq F \qquad (3.8)$$

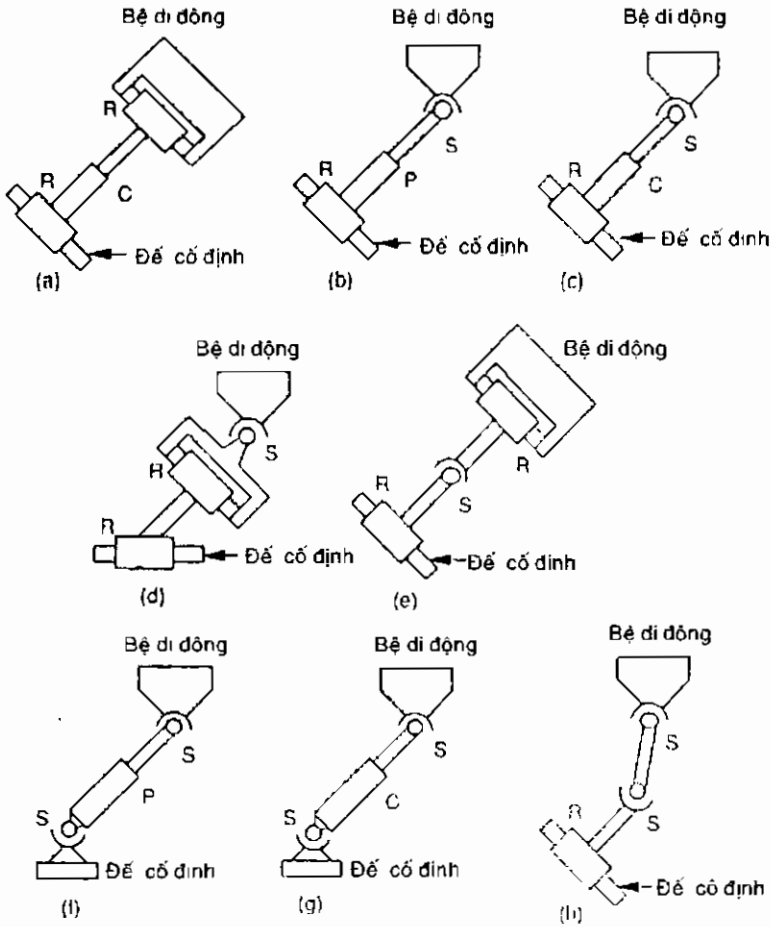
Giải đồng thời pt (3.7) và (3.8) với các số nguyên dương C_k, k = 1. 2. 3..., có thể phân loại cơ cấu chấp hành song song không gian ứng với số bậc tự do và độ liên kết được nêu trên Bảng 3.1.

Bảng 3.1: Phân loại cơ cấu chấp hành song song không gian.

Bậc tự do F	Số vòng L	Tổng các bậc tự do khớp $\sum_i f_i$	Độ liên kết C_k, k = 1, 2, 3, ...
2	1	8	4,4
			5,3 6,2
3	2	15	5,5,5
			6,5,4 6,6,3
4	3	22	6,6,5,5 6,6,6,4
5	4	29	6,6,6,5
6	5	36	6,6,6,6,6,6

Số khâu trong mỗi nhánh, có thể bằng tổng tất cả các bậc tự do khớp, và bằng độ liên kết theo yêu cầu. Số khâu cực đại khi tất cả khớp đều là khớp 1 bậc tự do. Trong thực tế, đó là điều mong muốn để sử dụng 2 khâu chính nối bệ di động với đế theo 3 khớp. Hình 3.4 minh hoạ vài cấu hình nhánh. Hình 3.4a là nhánh 4 bậc tự do. Hình 3.4b-e là nhánh 5 bậc tự do. Hình 3.4f-h là nhánh 6 bậc tự do. Chú ý, các Hình 3.4c,f,h có 1 bậc tự do thụ động trên mỗi nhánh, còn trên Hình 3.4g có 2 bậc tự do thụ động.

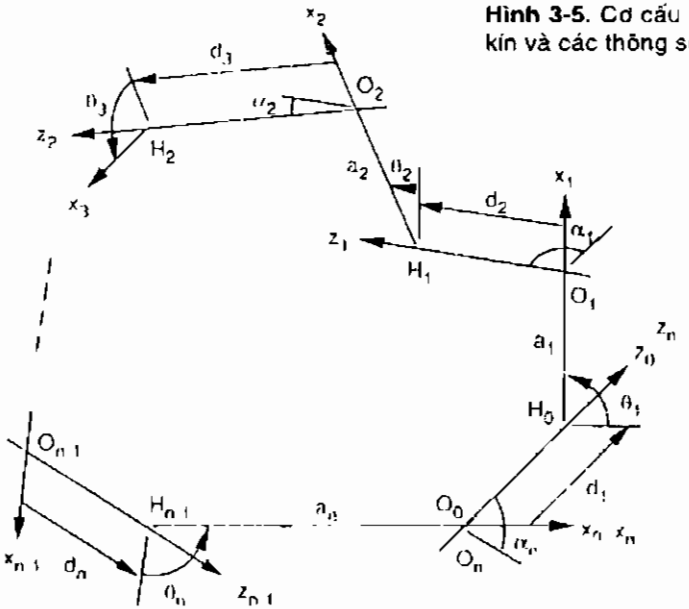
Nếu cần các nhánh có cấu trúc động học, các độ liên kết (4.4), (5,5,5) và (6,6,6,6,6,6) là các bố trí nhánh khả thi trong cơ cấu chấp hành song song 2, 3 và 6 bậc tự do.



Hình 3-4. Tám cấu hình nhánh khả dụng

So sánh phương pháp DENAVIT-HARTENBERG với phương pháp hình học

Phần này sẽ giới thiệu phương pháp phân tích ma trận. Để tiện phân tích, hệ tọa độ Descartes xác định cho từng khâu theo qui tắc Denavit-Hartenberg (Hình 3.5). Không như cơ cấu vận hành vòng hở, mọi hệ tọa độ trong cơ cấu vòng kín xác định hoàn toàn bằng liên kết hình học. Hệ tọa độ của liên kết cuối (thứ n) trùng với hệ tọa độ cơ bản (thứ zero).



Hình 3-5. Cơ cấu vòng kín và các thông số D-H

Sự chuyển đổi từ tọa độ thứ i đến thứ (i-1) được xác định theo pt (2.2). Khi chuyển đổi các tọa độ được thực hiện liên tiếp, các ma trận tương ứng được nhân lên. Khi chuyển đổi tất cả tọa độ, bắt đầu từ (x_0, y_0, z_0) đi theo chuỗi trở về tọa độ gốc (x_0, y_0, z_0), phép biến đổi ma trận cho kết quả :

$$^{0}A_1\,^{1}A_2 \ldots ^{n-2}A_{n-1}\,^{n-1}A_n = I \qquad (3.9)$$

Đây là ma trận đồng nhất 4×4, vì biến đổi này là biến đổi đồng nhất trở về tọa độ gốc.

Đối với cơ cấu đa vòng, phương trình vòng kín nêu trên ứng với từng vòng độc lập, từ đó sẽ tính được tập hợp tích các phương trình ràng buộc. Chú ý, khớp đa năng có thể được lập mô hình từ hai khớp xoắn, giao nhau, và khớp cầu có thể lập mô hình từ ba khớp xoắn giao nhau.

Phương pháp Denavit-Hartenberg rất tổng quát và trở nên phức tạp khi có nhiều vòng khép kín. Đối với cơ cấu vận hành song song, việc dùng phương pháp hình học sẽ thuận tiện hơn. Nói chung, phương trình vòng vectơ viết cho mỗi nhánh và các biến khớp thụ động được loại trừ trong các phương trình này.

Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành song song 3RRR phẳng

Hình 3.2 minh họa cơ cấu chấp hành song song 3 bậc tự do phẳng, ba điểm cố định P, Q, R xác định vị trí hình học của đế và ba điểm A, B, C xác định vị trí hình học bệ di động. Ba nhánh song song nối bệ tại 3 điểm A, B, C và nối đế tại 3 điểm P, Q, R bằng các khớp xoắn. Mỗi nhánh có 2 khâu nối nhau bằng 1 khớp xoắn. Cơ cấu này có 8 khâu và 9 khớp xoắn. Bậc tự do của cơ cấu được tính từ pt (1.4):

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i = 3(8 - 9 - 1) + 9 = 3$$

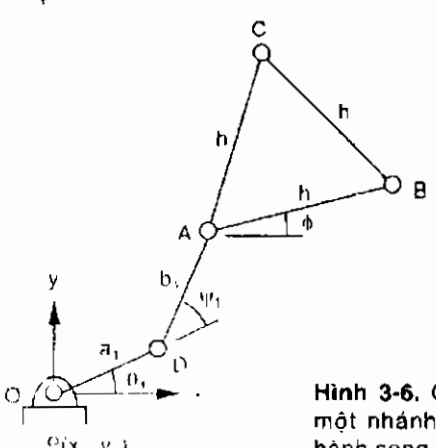
Cơ cấu này có 3 bậc tự do. Bệ chuyển động là khâu xuất và các khâu PD, QE, RF là khâu nhập. Các bộ tác động có thể được lắp trên đế cố định.

Hình học của cơ cấu chấp hành

Từ Hình 3.2, gốc tọa độ cố định đặt tại điểm P. Trục x hướng theo đường PQ và trục y là đường vuông góc với PQ. Giả sử bệ di động ABC và đế cố định PQR là 2 tam giác đều (AB = BC = AC = h *và* PQ = QR = RP = c). Hình 3.6 minh họa chiều dài các khâu và các góc khớp của nhánh i.

Vị trí bệ di động tại điểm A được xác định với góc định hướng ϕ. Tọa độ điểm B và điểm C xác định theo điểm A và góc ϕ như sau:

$$x_B = x_A + hc\phi$$
$$y_B = y_A + hs\phi \qquad (3.10)$$



Hình 3-6. Các góc khớp trên một nhánh của cơ cấu chấp hành song song phẳng 3RRR.

$$x_C = x_A + hc\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y_C = y_A + hs\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) \tag{3.11}$$

Xét hình học (Hình 3.6), phương trình vectơ vòng là:

$$\overline{OA} = \overline{OP} + \overline{PD} + \overline{DA} \tag{3.12}$$

biểu diễn phương trình này theo tọa độ cố định:

$$x_A = x_p + a_1c\theta_1 + b_1c(\theta_1 + \psi_1),$$

$$y_A = y_p + a_1s\theta_1 + b_1s(\theta_1 + \psi_1). \tag{3.13}$$

Vì P là điểm gốc tọa độ nên $x_p = y_p = 0$; Ψ_1 là góc khớp thụ động nên có thể loại bỏ khỏi phương trình trên. Pt (3.13) trở thành:

$$x_A - a_1c\theta_1 = b_1c(\theta_1 + \psi_1),$$

$$y_A - a_1s\theta_1 = b_1s(\theta_1 + \psi_1). \tag{3.14}$$

Tổng bình phương của pt (3.14):

$$x_A^2 + y_A^2 - 2x_Aa_1c\theta_1 - 2y_Aa_1s\theta_1 + a_1^2 - b_1^2 = 0. \tag{3.15}$$

Tương tự, hai phương trình của nhánh 2 và 3:

$$\begin{aligned} &x_A^2 + y_A^2 - 2x_Ax_Q - 2y_Ay_Q + x_Q^2 + y_Q^2 + h^2 + a_2^2 - b_2^2 + 2x_Ahc\phi \\ &\quad + 2y_Ahs\phi - 2x_Aa_2c\theta_2 - 2y_Aa_2s\theta_2 - 2a_2hc\phi c\theta_2 - 2x_Qhc\phi - 2y_Qhs\phi \\ &\quad + 2x_Qa_2c\theta_2 + 2y_Qa_2s\theta_2 - 2a_2hs\phi s\theta_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} &x_A^2 + y_A^2 - 2x_Ax_R - 2y_Ay_R + x_R^2 + y_R^2 + h^2 + a_3^2 - b_3^2 \\ &\quad + 2x_Ahc\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) + 2y_Ahs\left(\phi \frac{\pi}{3}\right) - 2x_Aa_3c\theta_3 \\ &\quad - 2y_Aa_3s\theta_3 - 2a_3hc\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right)c\theta_3 \\ &\quad - 2x_Rhc\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) - 2y_Rhs\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) + 2x_Ra_3c\theta_3 \\ &\quad + 2y_Ra_3s\theta_3 - 2a_3hs\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right)s\theta_3 = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Động học đảo

Với động học đảo, x_a, y_a và ϕ đã biết, cần tính các góc khớp θ_1, θ_2 và θ_3. Xét từng nhánh, đối với nhánh 1, có thể biến đổi pt (3.15) :

$$e_1 s\theta_1 + e_2 c\theta_1 + e_3 = 0 \tag{3.18}$$

với

$$e_1 = -2y_A a_1$$
$$e_2 = -2x_A a_1$$
$$e_3 = x_A^2 + y_A^2 + a_1^2 - b_1^2$$

thay các đồng nhất thức lượng giác:

$$s\theta_1 = \frac{2t_1}{1+t_1^2} \quad \text{và} \quad c\theta_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}, \quad \text{với} \quad t_i = \tan\frac{\theta_i}{2}$$

vào pt (3.18):

$$(e_3 - e_2)t_1^2 + 2e_1 t_1 + (e_3 + e_2) = 0 \tag{3.19}$$

giải pt (3.19) theo t_1:

$$\theta_1 = 2\tan^{-1}\frac{-e_1 \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2 - e_3^2}}{e_3 - e_2} \tag{3.20}$$

Tương ứng mỗi vị trí bệ cho trước, θ_1 có hai nghiệm, đó là hai cấu hình của nhánh 1. Khi pt (3.18) có nghiệm kép (số thực), hai khâu PD và DA có cấu hình duỗi thẳng hoặc co lại, là *cấu hình đơn*. Khi θ_1 không có nghiệm thực, vị trí bệ (chuyển động) là không thể đạt đến. Khi đã giải được θ_1, thay vào pt (3.13), sẽ tìm được ψ_1.

Giải tương tự với hai cấu hình nhánh song song còn lại. Kết quả sẽ là 8 hình thái cơ cấu vận hành có thể xảy ra tương ứng với vị trí đầu tác động cho trước.

Động học thuận

Với động học thuận, từ θ_1, θ_2, θ_3 cho trước, có thể tìm được vị trí (x_a, y_a) và góc định hướng ϕ của bệ chuyển động, bằng cách khử x_a và y_a từ các pt (3.15), (3.16), (3.17). Trước hết, biến đổi các pt (3.15), (3.16), (3.17) thành:

$$x_A^2 + y_A^2 + e_{11}x_A + e_{12}y_A + e_{13} = 0 \quad (3.21)$$

$$x_A^2 + y_A^2 + e_{21}x_A + e_{22}y_A + e_{23} = 0 \quad (3.22)$$

$$x_A^2 + y_A^2 + e_{31}x_A + e_{32}y_A + e_{33} = 0 \quad (3.23)$$

với :

$$e_{11} = -2a_1c\theta_1,$$

$$e_{12} = -2a_1s\theta_1,$$

$$e_{13} = a_1^2 - b_1^2,$$

$$e_{21} = -2x_Q + 2hc\phi - 2a_2c\theta_2,$$

$$e_{22} = -2y_Q + 2hs\phi - 2a_2s\theta_2,$$

$$e_{23} = x_Q^2 + y_Q^2 + h^2 + a_2^2 - b_2^2 - 2a_2hc\phi c\theta_2 - 2a_2hs\phi s\theta_2$$
$$- 2x_Qhc\phi - 2y_Qhs\phi + 2x_Qa_2c\theta_2 + 2y_Qa_2s\theta_2,$$

$$e_{31} = -2x_R + 2hc\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) - 2a_3c\theta_3,$$

$$e_{32} = -2y_R + 2hs\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) - 2a_3s\theta_3,$$

$$e_{33} = x_R^2 + y_R^2 + h^2 + a_3^2 - b_3^2 - 2a_3hc\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right)c\theta_3 - 2a_3hs\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right)s\theta_3$$
$$- 2x_Rhc\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) - 2y_Rhs\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) + 2x_Ra_3c\theta_3 + 2y_Ra_3s\theta_3.$$

Chú ý, e_{11}, e_{12}, e_{13} là các hằng; e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{31}, e_{32}, e_{33} là các hàm tuyến tính của $s\phi$ và $c\phi$.

Các pt (3.21), (3.22), (323) là hệ 3 pt phi tuyến với 3 ẩn số x_A, y_A và ϕ. Lấy pt (3.22) trừ cho (3.21) và (3.23) trừ cho (3.21):

$$e'_{11}x_A + e'_{12}y_A + e'_{13} = 0 \quad (3.24)$$

$$e'_{21}x_A + e'_{22}y_A + e'_{23} = 0 \quad (3.25)$$

với $e'_{11} = e_{11} - e_{21}$, $e'_{12} = e_{12} - e_{22}$, $e'_{13} = e_{13} - e_{23}$, $e'_{21} = e_{11} - e_{31}$, $e'_{22} = e_{12} - e_{32}$, và $e'_{23} = e_{13} - e_{33}$ là các hàm tuyến tính của sinϕ và cosϕ.

Các pt (3.21), (3.24), (3.25) tạo thành hệ phương trình. Giải pt (3.24) và (3.25) để tính x_A, y_A. Tiếp đó thay biểu thức kết quả vào pt (3.21), sẽ được đa thức bậc 4 theo sϕ và cϕ :

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + e_{11}\delta\delta_1 + e_{12}\delta\delta_2 + e_{13}\delta^2 = 0 \qquad (3.26)$$

với $\delta = e'_{11}e'_{22} - e'_{12}e'_{21}$,

$\delta_1 = e'_{12}e'_{23} - e'_{13}e'_{22}$,

$\delta_2 = e'_{13}e'_{21} - e'_{11}e'_{23}$.

Pt (3.26) có thể biến đổi thành đa thức bậc 8 bằng cách sử dụng các biểu thức lượng giác góc tang. Từ đó, ứng với mỗi tập hợp các góc khớp cho trước, sẽ có tối đa 8 cấu hình cơ cấu chấp hành.

Phân tích vị trí cơ cấu định hướng không gian

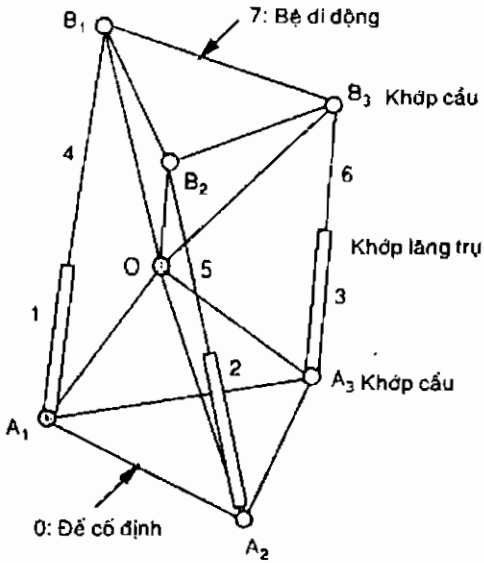
Phần này sẽ phân tích động học bệ định hướng 3 bậc tự do. Trước hết sẽ mô tả cấu trúc động học cơ cấu chấp hành, sau đó sẽ giải bài toán động học thuận và đảo.

Hình 3.7 minh họa cơ cấu chấp hành không gian song song có bệ chuyển động, đế cố định, và 3 nhánh. Bệ $OB_1B_2B_3$ và đế $OA_1A_2A_3$ có dạng khối tứ diện. Bệ nối trực tiếp với đế bằng khớp cầu tại điểm O. Ba nhánh nối bệ tại các điểm B_i và nối đế tại các điểm A_i bằng các khớp cầu. Mỗi nhánh có phần tử trên và phần tử dưới nối với nhau bằng khớp lăng trụ. Trục vít hoặc kích thuỷ lực được sử dụng để thay đổi chiều dài khớp lăng trụ, từ đó điều khiển hoạt động của bệ. Toàn bộ có 8 khâu nối với nhau bằng 7 khớp cầu và 3 khớp lăng trụ. Đây không phải là cơ cấu cầu, vì 3 nhánh và bệ chuyển động không có điểm tĩnh chung. Thực tế, các phần tử phía trên của 3 nhánh không có chuyển động cầu.

Thay $\lambda = 6$, $n = 8$, $j = 10$ và f_i ứng với mỗi khớp vào pt (1.4):

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i = 6(8 - 10 - 1) + (7 \times 3 + 3) = 6$$

Vì có một bậc tự do thụ động liên kết với từng nhánh, nên bệ chuyển động chỉ có 3 bậc tự do. Tuy chuyển động của toàn bộ cơ cấu không phải



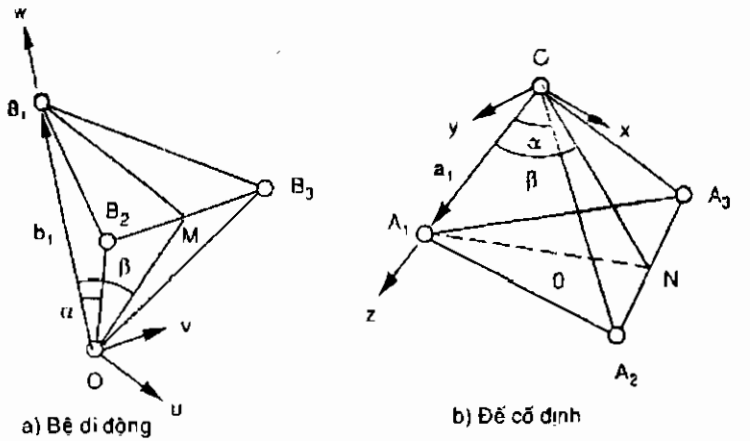
Hình 3-7. Bệ định hướng 3 bậc tự do

là chuyển động cầu, nhưng bệ chuyển động là dạng chuyển động cầu vì có điểm O cố định. Cơ cấu này được dùng làm thiết bị định hướng, bệ chuyển động là khâu xuất và ba khớp lăng trụ được dùng làm phương tiện nhập.

Hình học của cơ cấu

Hai hệ tọa độ Descartes $A(x,y,z)$ và $B(u,v,w)$ tương ứng được gắn vào đế và bệ (Hình 3.8). Gốc tọa độ A đặt tại điểm cố định O, trục z theo hướng OA_1, trục x nằm trên mặt phẳng OA_1A_2, và trục y được xác định theo quy tắc bàn tay phải. Tương tự, gốc tọa độ B đặt tại điểm O cố định, trục w theo hướng OB_1, trục u nằm trên mặt phẳng OB_1B_2, và trục v được xác định theo quy tắc bàn tay phải.

Biến đổi từ hệ tọa độ chuyển động B đến hệ tọa độ cố định A là ma trận ${}^{A}R_{B}$ 3×3 được xác định theo 3 góc Euler. Giả sử vị trí ban đầu của hệ tọa độ chuyển động B trùng với hệ tọa độ cố định A; vị trí cuối là quay góc ϕ quanh trục w, sau đó quay góc θ quanh trục u đã chuyển vị, và quay góc ψ quanh trục w đã chuyển vị. Ma trận quay kết quả là:



Hình 3-8. Hai hệ tọa độ của cơ cấu định hướng.

$$
{}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & s\phi s\theta \\ s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & -c\phi s\theta \\ s\theta s\psi & s\theta c\psi & c\theta \end{bmatrix} \tag{3.27}
$$

Vectơ vị trí điểm B_i ứng với hệ tọa độ B chuyển động:

$$
{}^{B}b_i = [b_{iu}, b_{iv}, b_{iw}]^T \tag{3.28}
$$

Vectơ vị trí điểm B_i tính theo hệ tọa độ A cố định:

$$
\begin{aligned}
b_i &= [b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}]^T = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}b_i \\
&= \begin{bmatrix} b_{iu}(c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi) - b_{iv}(c\phi s\psi + s\phi c\theta c\psi) + b_{iw}s\phi s\theta \\ b_{iu}(s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi) - b_{iv}(s\phi s\psi - c\phi c\theta c\psi) - b_{iw}c\phi s\theta \\ b_{iu}s\theta s\psi + b_{iv}s\theta c\psi + b_{iw}c\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Vectơ vị trí điểm A_i ứng với hệ tọa độ A cố định:

$$
a_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T \tag{3.30}
$$

Phương trình khép kín vòng nhánh *i*:

$$
d_i = b_i - a_i \tag{3.31}
$$

với $d_i = \overline{A_iB_i}$

Bình phương pt (3.31) sẽ là phương trình các ràng buộc ở nhánh i:

$$d_i^2 = a_i^2 + b_i^2 - 2a_i^T b_i \tag{3.32}$$

với d_i là chiều dài nhánh *i*. Thay các pt (3.29) và (3.30) vào (3.32):

$$e_{i1}c\phi + e_{i2}s\phi + e_{i3} = 0 \qquad \textit{với } i = 1, 2, 3. \tag{3.33}$$

trong đó:

$$e_{i1} = \lambda_{i1}c\psi + \lambda_{i2}s\psi + \lambda_{i3} \tag{3.34}$$

$$e_{i2} = \mu_{i1}c\psi + \mu_{i2}s\psi + \mu_{i3} \tag{3.35}$$

$$e_{i3} = \nu_{i1}c\psi + \nu_{i2}s\psi + \nu_{i3} \tag{3.36}$$

$$\lambda_{i1} = a_{iy}b_{iv}c\theta + a_{ix}b_{iu}$$

$$\lambda_{i2} = a_{iy}b_{iu}c\theta - a_{ix}b_{iv}$$

$$\lambda_{i3} = -a_{iy}b_{iw}s\theta$$

$$\mu_{i1} = -a_{ix}b_{iv}c\theta + a_{iy}b_{iu}$$

$$\mu_{i2} = -a_{ix}b_{iu}c\theta - a_{iy}b_{iv}$$

$$\mu_{i3} = a_{ix}b_{iw}s\theta$$

$$\nu_{i1} = a_{iz}b_{iv}s\theta$$

$$\nu_{i2} = a_{iz}b_{iu}s\theta$$

$$\nu_{i3} = a_{iz}b_{iw}c\theta - \frac{1}{2}\left(a_i^2 + b_i^2 - d_i^2\right)$$

Phương trình (3.32) hoặc (3.33) được viết ba lần, mỗi lần cho từng i =1, 2, và 3, sẽ có ba pt ràng buộc đối với bệ chuyển động.

Động học đảo

Với động học đảo, sự định hướng bệ chuyển động được biết trước, cần tìm chiều dài ba nhánh d_1, d_2 và d_3. Sự định hướng bệ được xác định theo các góc Euler: ϕ, θ, và ψ. Khi biết sự định hướng bệ chuyển động, vị trí các điểm B_i với i = 1, 2, 3 sẽ tính được từ pt (3.29). Từ đó, các chiều dài ba nhánh d_i, i =1, 2, 3, được tính từ pt (3.32):

$$d_i^2 = \pm\sqrt{a_i^2 + b_i^2 - 2a_i^T b_i} \quad \text{với } i = 1, 2, 3. \tag{3.37}$$

Nói chung, d_i có hai nghiệm nhưng chỉ nghiệm dương là phù hợp với điều kiện thực tế.

Động học thuận

Với động học thuận, chiều dài ba nhánh cho trước là d_1, d_2 và d_3, cần tìm định hướng bệ chuyển động. Pt (3.33) được viết ba lần để tìm ba phương trình lượng giác, giải để tìm ba biến ϕ, θ, và ψ. Đối với các hệ tọa độ được chọn $a_{1x} = a_{1y} = a_{2y} = 0$, $b_{1u} = b_{1v} = b_{2v} = 0$, $a_{1z} = l_1 = OA_1$, và $b_{1u} = l_2 = OB_1$. Pt (3.3) với i = 1 có kết quả:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{l_1^2 + l_2^2 - d_2^2}{2l_1 l_2} \tag{3.38}$$

Từ pt (3.38) tìm được hai nghiệm θ, nhưng chỉ thể hiện một định hướng của cơ cấu, nên chỉ tính là một nghiệm. Đây là vấn đề chung liên quan đến góc Euler định hướng của vật thể cứng rắn.

Sau khi tìm được θ, có thể viết pt (3.33) hai lần với i = 2 và 3, và tìm $c\theta$ và $s\theta$ như sau:

$$c\phi = \frac{e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}}{e_{21}e_{32} - e_{22}e_{31}} \tag{3.39}$$

$$s\phi = \frac{e_{23}e_{31} - e_{21}e_{33}}{e_{21}e_{32} - e_{22}e_{31}} \tag{3.40}$$

với $e_{21}e_{32} - e_{23}e_{31} \neq 0$. Khử ϕ bằng cách thay pt (3.39) và (3.40) vào đồng nhất thức lượng giác $c^2\phi + s^2\phi = 1$. Kết quả sẽ là:

$$(e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32})^2 + (e_{23}e_{31} - e_{21}e_{33})^2 - (e_{21}e_{32} - e_{22}e_{31})^2 = 0 \tag{3.41}$$

thay các pt (3.34) và (3.36) vào (3.41), sử dụng đồng nhất thức lượng giác:

$$c\psi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{và} \quad s\psi = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{với } t = tg(\psi/2)$$

sẽ có đa thức bậc 8 theo t :

$$k_0t^8 + k_1t^7 + ... + k_7t + k_8 = 0 \quad (3.42)$$

với k_i, i =0,1,2,..., 8, là các hàm của các thông số hình học a_i, b_i, các chiều dài nhánh d_i, và góc θ. Ứng với từng nghiệm θ, sẽ có tối đa 8 nghiệm ψ. Khi biết θ và ψ, pt (3.39) và (3.40) sẽ cho một giá trị đơn ϕ. Tóm lại, động học thuận bệ định hướng có tối đa tám hình thái khả thi.

Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành MARYLAND

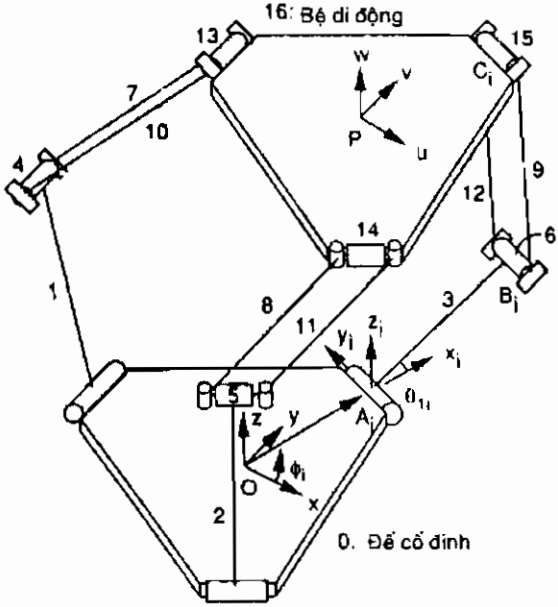
Phần này sẽ nghiên cứu cơ cấu vận hành song song 3 bậc tự do được thiết kế tại Đại học Maryland. Cơ cấu này chỉ sử dụng các khớp ràng buộc đầu ra (bệ chuyển động) theo chuyển động tuyến tính. Hình 3.9 là lược đồ cơ cấu chấp hành, đế cố định là khâu 0 và bệ chuyển động là khâu 16. Nối bệ với đế là ba nhánh đồng nhất. Mỗi nhánh gồm một tay đòn trên và một tay đòn dưới. Các tay đòn dưới là 3 khâu 1, 2, 3. Mỗi *tay đòn trên* là một hình bình hành 4 thanh phẳng, các khâu 4, 7, 10, 13 ở nhánh thứ nhất; 5, 8, 11,14 ở nhánh thứ hai; 6, 9, 12, 15 ở nhánh thứ ba. Trên mỗi nhánh, tại các điểm nối A, B, C là ba khớp xoắn song song. Ba trục khớp nối kết đế nằm trên một mặt phẳng; ba trục khớp nối bệ cũng nằm trên một mặt phẳng. Các trục khớp tại B và C vuông góc các trục khớp của hình bình hành 4 thanh. Toàn bộ có 17 khâu và 21 khớp xoắn. Theo phương trình bậc tự do:

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i = 6(17 - 21 - 1) + 21 = 9$$

Tuy nhiên,việc bố trí khâu và khớp sẽ làm thừa nhiều tác động cưỡng chế của khớp, nên cơ cấu hình thành chỉ có 3 bậc tự do. Nhờ vào hình bình hành 4 thanh và 3 khớp cuốn ngoài song song ở A, B, C, nhánh đơn nào cũng cưỡng chế được bệ quay theo trục bất kỳ. Từ đó, với cơ cấu biến đổi 3 bậc tự do, bệ chuyển động luôn có sự định hướng giống nhau ở mọi thời điểm. Đặc tính này hữu dụng trong nhiều ứng dụng, như thiết bị định vị x-y-z.

Hình học cơ cấu

Trên Hình 3.9, hệ tọa độ quy chiếu (x, y, z) gắn vào tâm O của đế cố định (trục x và trục y trên mặt phẳng cố định, trục z hướng lên trên). Hệ tọa độ (x_i y_i z_i) gắn vào điểm A_i của đế (trục x_i trên đường OA kéo dài, trục y_i trùng với trục khớp xoắn tại A_i, trục z_i song song với trục z). Góc ϕ_i (góc giữa trục x với trục x_i) là thông số không đổi trong thiết kế cơ cấu.



Hình 3-9. Cơ cấu chấp hành bệ chỉ có các bậc tự do tịnh tiến.

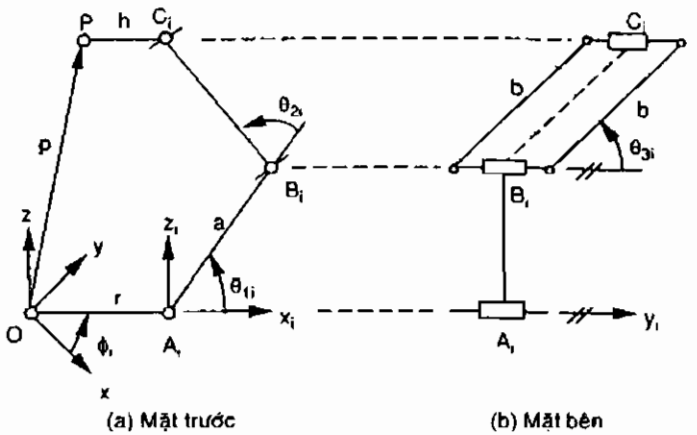
Hình 3.10 xác định các góc khớp trên nhánh i, với **p** là vectơ vị trí trọng tâm của bệ, θ_{1i} là góc đo từ trục x_i tới AB, θ_{2i} được xác định từ đường AB kéo dài tới giao tuyến của mặt phẳng hình bình hành và mặt phẳng $(x_i z_i)$, góc θ_{3i} được đo từ chiều y_i đến $\overline{B_iC_i}$. Toàn bộ có 9 góc khớp θ_{1i}, θ_{2i}, và θ_{3i}, với i = 1, 2, 3.

Với cơ cấu này, θ_{11},θ_{12}, θ_{13} được xét như các khớp được tác động, nối mọi cơ cấu đến đế cố định. Phương trình vòng kín trên mỗi nhánh là:

$$\overline{A_iB_i} + \overline{B_iC_i} = \overline{OP} + \overline{PC_i} - \overline{OA_i} \tag{3.43}$$

Biểu diễn pt (3.43) trong hệ tọa độ (x_i, y_i, z_i)

$$\begin{bmatrix} ac\theta_{1i} + bs\theta_{3i}c(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ bc\theta_{3i} \\ as\theta_{1i} + bs\theta_{3i}s(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{xi} \\ c_{yi} \\ c_{zi} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$



Hình 3-10. Các góc khớp

với

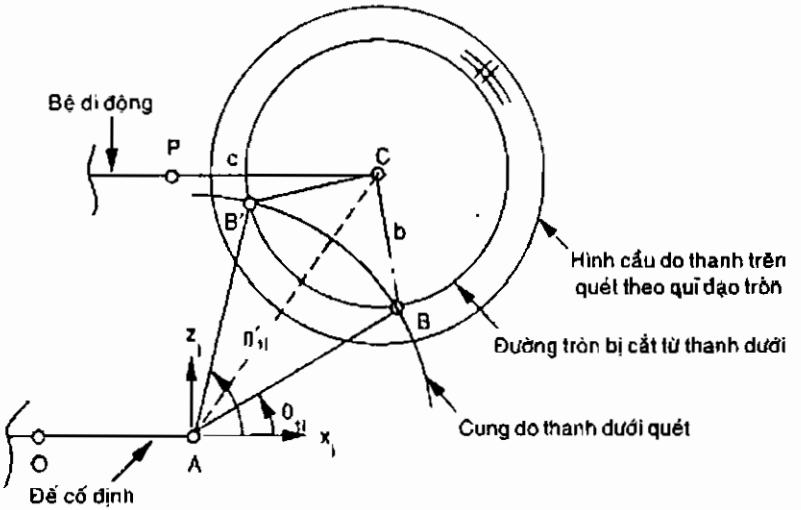
$$\begin{bmatrix} c_{xi} \\ c_{yi} \\ c_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi_i & s\phi_i & 0 \\ -s\phi_i & c\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h-r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

chỉ rõ vị trí điểm C_i liên quan đến khung tọa độ $(x_i\ y_i\ z_i)$, a và b là chiều dài các khâu $A_i B_i$ và $B_i C_i$, $\mathbf{p} = \left| p_x\ p_y\ p_z \right|^T$ là vector vị trí điểm P liên quan đến hệ tọa độ (x, y, z).

Động học đảo

Trong động học đảo, với vector vị trí **p** cho trước, cần tìm các góc khớp θ_{11}, θ_{12}, và θ_{13} cần thiết để chuyển động bệ đến vị trí mong muốn. Với **p** đã biết, vị trí C_i cũng biết. Xét bề mặt được tạo ra do toàn bộ khoảng chuyển động của C_iB_i theo điểm C. Đó là hình cầu tâm C_i. Khoảng chuyển động toàn phần của A_iB_i là vòng tròn tâm A_i trong mặt phẳng chuyển động $A_i B_i$. Nghiệm của bài toán động học đảo là giao tuyến giữa hình cầu và vòng tròn này (Hình 3.11). Có bốn trường hợp có thể xảy ra:

1. *Cách giải tổng quát* : vòng tròn xuyên qua cầu, cho hai nghiệm.
2. *Cách giải đơn*: vòng tròn tiếp xúc cầu, cho một nghiệm.



Hình 3-11. Hai nghiệm động học đảo của một nhánh

3. *Cách giải đơn*: vòng tròn nằm trên hình cầu, cho vô số nghiệm. Điều này không thể xảy ra, vì bệ chuyển động và bệ cố định không thể chiếm cùng mặt phẳng.

4. *Không có nghiệm thực:* vòng tròn và hình cầu không tiếp xúc hay cắt nhau.

Phương pháp đại số được dùng để giải pt (3.44). Giải phần tử thứ hai của pt (3.44) sẽ có hai nghiệm θ_{3i} :

$$\theta_{3i} = \cos^{-1}\frac{c_{yi}}{b} \qquad (3.46)$$

Sau khi biết θ_{3i}, phương trình θ_{2i} có một ẩn được xác định bằng cách tính tổng các bình phương c_{xi}, c_{yi}, c_{zi} của pt (3.44):

$$2ab\sin\theta_{3i}\cos\theta_{2i} + a^2 + b^2 = c_{xi}^2 + c_{yi}^2 + c_{zi}^2 \qquad (3.47)$$

từ đó: $$\theta_{2i} = \cos^{-1} k \qquad (3.48)$$

với $k = (c_{xi}^2 + c_{yi}^2 + c_{zi}^2 - a^2 - b^2)/(2ab\sin\theta_{3i})$. Ứng với từng nghiệm θ_{3i}, pt (3.48) có hai nghiệm θ_{2i}, do đó có bốn tập hợp nghiệm θ_{2i}, θ_{3i}.

Ứng với từng tập hợp nghiệm θ_{2i}, θ_{3i}, pt (3.44) có một nghiệm θ_{1i}. Tuy nhiên, bốn tập hợp nghiệm chỉ có hai giá trị θ_{1i} phân biệt. Hơn nữa, đối với từng nghiệm θ_{1i}, hai giá trị θ_{2i} có hiệu là π, với tổng của hai giá trị này là zero. Từ các quan hệ này và dạng hình học của nhánh, mỗi nhánh được coi là có cùng vị trí vật lý đối với từng θ_{1i}. Đối với từng nhánh với bốn tập hợp nghiệm, thực tế chỉ có hai vị trí phân biệt.

Giải động học đảo là khảo sát pt (3.48) và xét các trường hợp đặc biệt:

Nếu $|c_{yi}| < b$ *và* $|k| < 1$ hai nghiệm tương ứng với cấu hình theo vị trí đường tròn, do A_iB_i quét, cắt hình cầu, do C_iB_i quét.

Nếu $|c_{yi}| = b$ *và* $c_{xi}^2 + c_{zi}^2 = a^2$, vòng tròn và hình cầu tiếp xúc nhau, cơ cấu chấp hành ở một vị trí.

Nếu $|c_{yi}| > b$ vòng tròn và hình cầu không cắt nhau, không có nghiệm thực.

Động học thuận

Với các góc khớp ngõ vào đã biết $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}$, cần tìm vị trí bệ chuyển động. Đầu tiên, xét bề mặt gồm mọi vị trí P khả dĩ của nhánh i với θ_{1i} cho trước. Đây là mặt cầu tâm B'_i, cách B một đoạn h theo chiều C_iP. Sau đó xét cả ba nhánh. Điểm P phải đồng thời trên cả ba hình cầu được tạo ra do P quét với mỗi nhánh. Các điểm giao của ba hình cầu này là nghiệm động học thuận. Trường hợp tổng quát, có hai nghiệm, vì điểm giao của hai hình cầu là một vòng tròn, cắt vòng tròn thứ ba ở 2 điểm. Bốn trường hợp có thể xảy ra:

1. *Nghiệm tổng quát:* hai nghiệm là hai điểm giao chung của ba hình cầu.
2. *Nghiệm đơn:* Một hình cầu tiếp xúc tại một điểm với vòng tròn giao tuyến của hai hình cầu còn lại.
3. *Nghiệm đơn:* tâm của hai hình cầu bất kỳ trùng nhau, kết quả là vô số nghiệm. Đây là cấu hình cơ cấu chấp hành không khả thi trong thực tế, trừ trường hợp $q_{11} = q_{12} = q_{13} = p/2$ và $r = h$
4. *Vô nghiệm:* ba hình cầu không giao nhau.

Giải bằng đại số là viết và giải các phương trình ba hình cầu để xác định điểm giao nhau. Thay c_{xi}, c_{yi}, c_{zi} từ pt (3.45) vào (3.44):

$$\begin{bmatrix} bs\theta_{3i}c(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \\ bc\theta_{3i} \\ bs\theta_{3i}s(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi_i & s\phi_i & 0 \\ -s\phi_1 & c\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ac\theta_{1i}-r+h \\ 0 \\ -as\theta_{1i} \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Phương trình hình cầu quét bởi điểm P cho nhánh i là tổng bình phương ba thành phần pt (3.49):

$$b^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2(p_x c\phi_i + p_y s\phi_i)(ac\theta_{1i} + r - h)$$
$$- 2p_z as\theta_{1i} + (ac\theta_{1i} + r - h)^2 + a^2 s^2 \theta_{1i} \quad (3.50)$$

với i = 1, 2, 3

Mặt phẳng chứa vòng tròn giao tuyến của các hình cầu nhánh 1 và nhánh j được tính bằng cách lấy pt (3.50) với i = j trừ cho pt (3.50) với i = 1:

$$e_{1j}p_x + e_{2j}p_y + e_{3j}p_z + e_{4j} = 0 \qquad \text{với } j = 2, 3 \quad (3.51)$$

trong đó: $e_{1j} = 2c\phi_j(ac\theta_{1j} + r - h) - 2c\phi_1(ac\theta_{11} + r - h)$

$$e_{2j} = 2s\phi_j(ac\theta_{1j} + r - h) - 2s\phi_1(ac\theta_{11} + r - h)$$

$$e_{3j} = 2as\theta_{1j} - 2as\theta_{11}$$

$$e_{4j} = (ac\theta_{11} + r - h)^2 + a^2 s^2 \theta_{11} - (ac\theta_{1j} + r - h)^2 - a^2 s^2 \theta_{1j}$$

Phương trình (3.51) được viết hai lần với j = 2 và 3, cho kết quả hệ hai phương trình độc lập tuyến tính khi các tâm cầu không thẳng hàng. Hệ phương trình này xác định đường chứa điểm P nếu có các nghiệm thực. Giao điểm của đường này với một trong các hình cầu pt (3.50) là nghiệm bài toán động học thuận. Trường hợp này, cần giải pt (3.51) với p_y, p_z theo p_x, thay biểu thức kết quả vào pt (3.50) với i = 1:

$$k_0 p_x^2 + k_1 p_x + k_2 = 0 \quad (3.52)$$

Các hệ số của phương trình bậc hai là:

$$k_0 = 1 + \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{l_4^2}{l_2^2}$$

$$k_1 = \frac{2l_0 l_1}{l_2^2} + \frac{2l_3 l_4}{l_2^2} - 2l_5 c\phi_1 - \frac{2l_5 l_1}{l_2} s\phi_1 - \frac{2al_4}{l_2} s\theta_{11}$$

$$k_2 = l_5^2 - b^2 + \frac{l_0}{l_2^2} + \frac{l_3}{l_2^2} + a^2 s^2\theta_{11} - \frac{2l_0 l_5}{l_2} s\phi_1 - \frac{2al_3}{l_2} s\theta_{11}$$

trong đó:

$$l_0 = e_{32}e_{43} - e_{33}e_{42}$$

$$l_1 = e_{13}e_{32} - e_{12}e_{33}$$

$$l_2 = e_{22}e_{33} - e_{23}e_{32}$$

$$l_3 = e_{23}e_{42} - e_{22}e_{43}$$

$$l_4 = e_{12}e_{23} - e_{13}e_{22}$$

$$l_5 = ac\theta_{11} + r - h$$

với e_{12}, e_{13}, e_{22}, e_{23}, e_{32}, e_{33} và e_{43} được xác định theo pt (3.51).

Có thể có bốn trường hợp xảy ra:

1. *Nếu* $k_1^2 - 4k_0k_2 > 0$: hai nghiệm là hai điểm cắt của vòng tròn giao tuyến hai hình cầu cắt hình cầu thứ ba. Hai dạng cơ cấu chấp hành tạo hình ảnh đối xứng gương qua mặt phẳng xác định bởi các tâm của ba hình cầu.
2. *Nếu* $k_1^2 - 4k_0k_2 = 0$: vòng tròn giao tuyến của hai hình cầu tiếp xúc hình cầu còn lại tại một điểm, kết quả là một nghiệm thực.
3. *Nếu* $k_1^2 - 4k_0k_2 < 0$: ba hình cầu không cắt nhau, không có nghiệm thực.
4. *Nếu hệ pt (3.51) với j = 2 và 3 phụ thuộc tuyến tính:* các tâm cầu thẳng hàng, sẽ có vô số nghiệm nếu các tâm trùng nhau hoặc vô nghiệm nếu không trùng nhau.

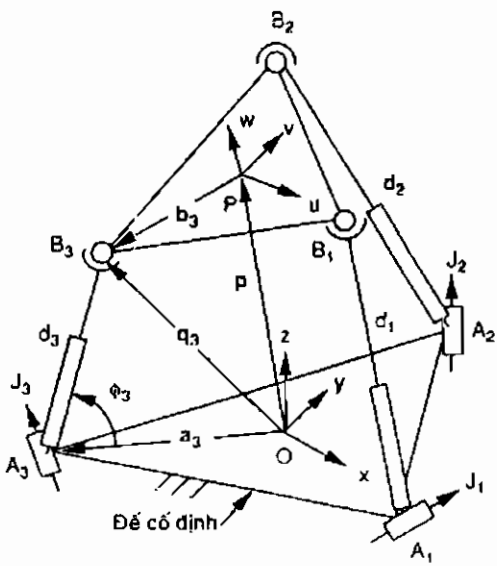
Khi biết p_x, các giá trị p_y, p_z tìm được bằng cách thay vào pt (3.51).

Tóm lại, cơ cấu chấp hành 3 bậc tự do tịnh tiến được xác định theo hệ phương trình. Các nghiệm được phân tích theo động học thuận và đảo. Nói chung, có hai dạng với động học thuận và hai dạng trong mỗi nhánh với động học đảo. Lượng giác được dùng trong cả hai động học thuận và đảo để làm sáng tỏ bản chất của loại cơ cấu chấp hành này.

Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành song song không gian 3 RPS

Hình 3.12 minh họa cơ cấu chấp hành song song 3RPS ba bậc tự do. Ba nhánh nối với bệ bằng các khớp cầu tại các điểm B_i, và nối với đế bằng các khớp quay tại các điểm A_i. Mỗi nhánh có phần trên và phần dưới, nối với nhau bằng khớp lăng trụ. Ba khớp lăng trụ này là ngõ vào cơ cấu chấp hành. Toàn bộ có 8 khâu, 3 khớp lăng trụ và 3 khớp cầu. Bậc tự do của cơ cấu là:

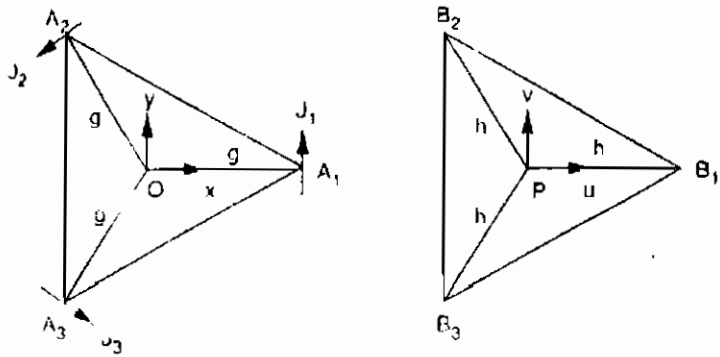
$$\mathbf{F} = \lambda(n - j - 1) + \sum_i f_i = 6(8 - 9 - 1) + (3 + 3 + 9) = 3 \qquad (3.53)$$



Hình 3-12. Cơ cấu chấp hành song song 3-dof, 3RPS

Hình học cơ cấu vận hành

Hai tọa độ Descartes A(x, y, z) và B(u, v, w) được gắn tương ứng vào đế cố định và bệ di động (Hình 3.13). Các điểm A_1, A_2, A_3 nằm trên mặt phẳng x-y; các điểm B_1, B_2, B_3 nằm trên mặt phẳng u-v. Trên Hình 3.13, gốc O hệ tọa độ cố định được định vị tại trọng tâm tam giác $A_1A_2A_3$ và



(a) Đế cố định (b) Bệ di động

Hình 3-13. Cơ cấu 3RPS song song.

trục x cùng chiều với OA_1. Tương tự, gốc P hệ tọa độ chuyển động tại trọng tâm tam giác $B_1B_2B_3$ và trục u cùng hướng với PB_1. Đây là hai tam giác đều với $OA_1 = OA_2 = OA_3 = g$ và $PB_1 = PB_2 = PB_3 = h$. Trục j_i của mỗi khớp quay nằm trên mặt phẳng x-y và vuông góc với vector OA_i.

Biến đổi từ bệ di động đến đế cố định được mô tả bằng vector vị trí **p** = OP và ma trận quay 3×3 là ${}^{A}R_{B}$. Gọi **u**, **v**, **w** là 3 vector đơn vị của 3 trục tọa độ u, v, w; ma trận quay biểu diễn theo cosine của **u**, **v**, **w** là:

$$ {}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \tag{3.54} $$

Chú ý, các phần tử của ma trận trên phải thoả các điều kiện trực giao:

$$ u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \tag{3.55} $$

$$ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1 \tag{3.56} $$

$$ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \tag{3.57} $$

$$ u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \tag{3.58} $$

$$ u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \tag{3.59} $$

$$ v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \tag{3.60} $$

Gọi $\mathbf{a}_i$ và ${}^B\mathbf{b}_i$ là vector vị trí điểm A_i và B_i trong hệ tọa độ A và B tương ứng. Tọa độ A_i và B_i được cho theo:

$$a_1 = [g,0,0]^T \tag{3.61}$$

$$a_2 = \left[-\frac{1}{2}g, \frac{\sqrt{3}}{2}g, 0\right]^T \tag{3.62}$$

$$a_3 = \left[-\frac{1}{2}g, -\frac{\sqrt{3}}{2}g, 0\right]^T \tag{3.63}$$

$${}^B B_1 = [h,0,0]^T \tag{3.64}$$

$${}^B B_2 = \left[-\frac{1}{2}h, \frac{\sqrt{3}}{2}h, 0\right]^T \tag{3.65}$$

$${}^B B_3 = \left[-\frac{1}{2}h, -\frac{\sqrt{3}}{2}h, 0\right]^T \tag{3.66}$$

Vector vị trí $\mathbf{q}_i$ của B_i ứng với hệ tọa độ cố định:

$$q_i = p + {}^A R_B \, {}^B b_i \tag{3.67}$$

Thay các pt (3.54) và (3.64) đến (3.66) vào (3.67):

$$q_1 = \begin{bmatrix} p_x + hu_x \\ p_y + hu_y \\ p_z + hu_z \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} p_x - \frac{1}{2}hu_x + \frac{\sqrt{3}}{2}hv_x \\ p_y - \frac{1}{2}hu_y + \frac{\sqrt{3}}{2}hv_y \\ p_z - \frac{1}{2}hu_z + \frac{\sqrt{3}}{2}hv_z \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

$$q_3 = \begin{bmatrix} p_x - \frac{1}{2}hu_x - \frac{\sqrt{3}}{2}hv_x \\ p_y - \frac{1}{2}hu_y - \frac{\sqrt{3}}{2}hv_y \\ p_z - \frac{1}{2}hu_z - \frac{\sqrt{3}}{2}hv_z \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

Các ràng buộc của khớp quay

Mỗi nhánh nối với bệ cố định tại điểm A_i bằng khớp quay, chuyển động bị ràng buộc theo một trong ba mặt phẳng:

$$q_{1y} = 0 \qquad \text{với } i = 1 \tag{3.71}$$

$$q_{2y} = -\sqrt{3}q_{2x} \qquad \text{với } i = 2 \tag{3.72}$$

$$q_{3y} = +\sqrt{3}q_{3x} \qquad \text{với } i = 3 \tag{3.73}$$

Thay thành phần y của $\mathbf{q}_i$ từ pt (3.68) đến (3.70) vào ba phương trình trên:

$$p_y + hu_y = 0 \tag{3.74}$$

$$p_y - \frac{1}{2}hu_y + \frac{\sqrt{3}}{2}hv_y = -\sqrt{3}\left(p_x - \frac{1}{2}hu_x + \frac{\sqrt{3}}{2}hv_x\right) \tag{3.75}$$

$$p_y - \frac{1}{2}hu_y - \frac{\sqrt{3}}{2}hv_y = \sqrt{3}\left(p_x - \frac{1}{2}hu_x - \frac{\sqrt{3}}{2}hv_x\right) \tag{3.76}$$

Lấy 2× (3.74) trừ cho tổng các pt (3.75) và (3.76):

$$v_x = u_y \tag{3.77}$$

Lấy pt (3.75) trừ cho (3.76):

$$p_x = \frac{1}{2}h(u_x - v_y) \tag{3.78}$$

Các pt (3.74), (3.77) và (3.78) là ba ràng buộc chuyển động đối với bệ di động.

Chiều dài nhánh i

Chiều dài một nhánh d_i (Hình 3.13) được tính theo:

$$d_i^2 = [q_i - a_i]^T [q_i - a_i] \qquad \text{với } i = 1, 2, 3 \qquad (3.79)$$

Thay các pt (3.61) đến (3.63) và (3.68) đến (3.70) vào (3.79):

$$d_1^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + 2h(p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) - 2gp_x - 2ghu_x + g^2 + h^2 \qquad (3.80)$$

$$d_2^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - h(p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) + \sqrt{3}h(p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z) + g(P_x - \sqrt{3}p_y) - \frac{1}{2}gh(u_x - \sqrt{3}u_y) + \frac{1}{2}gh(\sqrt{3}v_x - 3v_y) + g^2 + h^2 \qquad (3.81)$$

$$d_3^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - h(p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) - \sqrt{3}h(p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z) + g(P_x + \sqrt{3}p_y) - \frac{1}{2}gh(u_x + \sqrt{3}u_y) - \frac{1}{2}gh(\sqrt{3}v_x + 3v_y) + g^2 + h^2 \qquad (3.82)$$

Phương trình (3.80), (3.81), (3.82) liên hệ chiều dài nhánh với vị trí bệ chuyển động.

Động học đảo

Với vị trí bệ di động cho trước, cần tìm các chiều dài nhánh d_1, d_2, d_3. Cơ cấu chấp hành chỉ có ba bậc tự do, nên vị trí và định hướng phải được xác định ứng với các ràng buộc của khớp quay. Phương trình (3.77) là ràng buộc đối với sự định hướng bệ, còn các pt (3.74), (3.78) có thành phần x và y của **p** liên quan với sự định hướng bệ. Chỉ có 3 trong 12 thông số của ${}^{A}R_B$ và **p** là được xác định tùy ý. Trong trường hợp bất kỳ, thành phần z của **p** phải được xác định, vì không xuất hiện trong các phương trình ràng buộc, còn hai thông số khác được chọn từ vector vị trí **p** hoặc 3 vector đơn vị **u, v, w.** Khi 3 thông số được chọn, các thông số còn lại được xác định từ pt (3.74), (3.77), (3.78) và từ các điều kiện trực giao. Ba thành phần của **p** được chọn là những thông số độc lập, sẽ có 8 định hướng bệ tương ứng. Nếu các góc trục r, p từ các góc Euler r-p-w được chọn và p được chọn là thông số độc lập, có hai vị trí bệ tương ứng. Khi

biết vector vị trí và ma trận quay của bệ, chiều dài nhánh được tính trực tiếp từ pt (3.80), (3.81), (3.82).

Động học thuận

Với chiều dài các nhánh cho trước d_1, d_2, d_3, cần tìm vị trí bệ. Các pt (3.55), (3.56), (3.58), (3.74), (3.77), (3.78), và (3.80) tới (3.82) tạo nên hệ 9 phương trình đa thức có 9 ẩn: p_x, p_y, p_z, u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z. Các pt (3.55), (3.56), (3.58), (3.80), (3.81), (3.82) là các đa thức bậc hai; các pt (3.74), (3.77), (3.78) là các phương trình tuyến tính. Hai phương trình tuyến tính là kết quả tính toán từ các pt (3.80), (3.81), (3.82). Kết quả này cho một hệ mới gồm bốn đa thức bậc hai và năm phương trình tuyến tính. Số biến đổi Bezout là $2^4 = 16$, hệ phương trình có 16 nghiệm.

Sau đây xét các góc nghiêng ϕ_i của nhánh, xem như các biến trung gian, và cách sử dụng các góc này để rút gọn đa thức bậc 16. Xét ϕ_1 là góc đo từ A_1O đến A_1B_1 (Hình 3.12), vector vị trí điểm B ứng với hệ tọa độ cố định sẽ là:

$$q_1 = \begin{bmatrix} g - d_1 c\phi_1 \\ 0 \\ d_1 s\phi_1 \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(g - d_2 c\phi_2) \\ +\frac{\sqrt{3}}{2}(g - d_2 c\phi_2) \\ d_2 s\phi_2 \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

$$q_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(g - d_3 c\phi_3) \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}(g - d_3 c\phi_3) \\ d_3 s\phi_3 \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

Chiều dài nhánh đã biết và cơ cấu tương đương cơ cấu không gian 3RS có bậc tự do zero, nên vị trí và sự định hướng của cơ cấu được xác định theo $|B_iB_{i+1}| = \sqrt{3}h$; nghĩa là:

$$[q_i - q_{i+1}]^T [q_i - q_{i+1}] - 3h^2 = 0 \quad \text{với } i = 1, 2, 3 \text{ (modulo 3)} \quad (3.86)$$

Chú ý, ký hiệu nhỏ trong pt (3.86) tuần hoàn theo modulo 3 (nếu i =3 $\Leftrightarrow$ i+1=1). Thay pt (3.83) đến (3.85) vào (3.86):

$$e_{1i} c\phi_i c\phi_{i-1} + e_{2i} s\phi_i s\phi_{i+1} + e_{3i} c\phi_i + e_{4i} c\phi_{i+1} + e_{5i} = 0 \qquad (3.87)$$

trong đó i = 1, 2,3 (modulo 3), với:

$$e_{1i} = d_i d_{i+1}$$

$$e_{2i} = -2d_i d_{i+1}$$

$$e_{3i} = -3gd_i$$

$$e_{4i} = -3gd_{i+1}$$

$$e_{5i} = -3g^2 + d_i^2 + d_{i+1}^2 - 3h^2$$

Biến đổi pt (3.87) thành hệ phương trình đa thức để khử hai biến chưa biết. Thay các đồng nhất thức lượng giác:

$$s\phi_i = \frac{2t_i}{1+t_i^2} \quad \text{và} \quad c\phi_i = \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2} \quad \text{với} \quad t_i = \tan\frac{\phi_i}{2}$$

vào pt (3.87), sẽ được ba đa thức bậc 4 theo t_1, t_2, t_3:

$$\bar{e}_{1i} t_i^2 t_{i+1}^2 + \bar{e}_{2i} t_i^2 + \bar{e}_{3i} t_{i+1}^2 + \bar{e}_{4i} t_i t_{i+1} + \bar{e}_{5i} = 0 \qquad (3.88)$$

với i= 1,2,3 (modulo 3)

trong đó:

$$\bar{e}_{1i} = e_{1i} - e_{3i} - e_{4i} + e_{5i}$$

$$\bar{e}_{2i} = -e_{1i} - e_{3i} + e_{4i} + e_{5i}$$

$$\bar{e}_{3i} = -e_{1i} + e_{3i} - e_{4i} + e_{5i}$$

$$\bar{e}_{4i} = 4e_{2i}$$

$$\bar{e}_{5i} = e_{1i} + e_{3i} + e_{4i} + e_{5i}$$

Số Bezout 1- đồng nhất là $4^3 = 64$, số Bezout 3- đồng nhất là 16. Để chứng minh điều này, xếp các biến vào ba nhóm:

Nhóm 1: $|t_1|$ Nhóm 2: $|t_2|$ nhóm 3: $|t_3|$

Bậc của ba phương trình theo các biến của mỗi nhóm liệt kê trong Bảng 3.2, xét tích

$$\prod_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} d_{ij}\beta_j\right) = (2\beta_1 + 2\beta_2)(2\beta_2 + 2\beta_3)(2\beta_1 + 2\beta_3)$$

với d_{ij} lấy từ phần tử (i, j) trong Bảng 3.2. Mỗi nhóm chỉ có một biến, số Bezout 3-đồng nhất, được xác định bằng hệ số của số hạng $\beta_1\beta_2\beta_3$, là 16, hệ phương trình sẽ có tối đa 16 nghiệm.

Bảng 3-2: Bậc của phương trình

Phương trình	Nhóm 1	Nhóm 2	Nhóm 3
1. Phương trình (3.88) với i = 1	2	2	0
2. Phương trình (3.88) với i = 2	0	2	2
3. Phương trình (3.88) với i = 3	2	0	2

Sau đây sẽ áp dụng phương pháp tách khử Sylvester để rút gọn hệ phương trình về đa thức bậc 16.

(a) Khử t_3. Để khử t_3, pt (3.88) với i=2 và 3 được viết thành hai đa thức bậc 2:

$$At_3^2 + Bt_3 + C = 0 \qquad (3.89)$$

$$Dt_3^2 + Et_3 + F = 0 \qquad (3.90)$$

với A, B, C là đa thức bậc 2 theo t_2, có các hệ số suy ra từ pt (3.88) với i=2.

D, E, F là đa thức bậc 2 theo t_1, có các hệ số suy ra từ pt (3.88) với i=3

Nhân pt (3.89) với D và pt (3.90) với A, rồi trừ các kết quả:

$$(AE - BD)t_3 + (AF - CD) = 0 \qquad (3.91)$$

Nhân pt (3.89) với F và pt (3.90) với C, rồi trừ các kết quả:

$$(CD - AF)t_3 + (CE - BF) = 0 \qquad (3.92)$$

Các pt (3.91) và (3.92) là hệ hai phương trình tuyến tính theo t_3 và 1. Khử t_3 trong hệ pt này, định thức của ma trận hệ số bằng 0:

$$(AF-CD)^2+(AE-BD)(CE-BF)=0 \qquad (3.93)$$

(b) Khử t_2. Pt (3.93) được viết thành:

$$Lt_2^4+Mt_2^3+Nt_2^2+Pt_2+Q=0 \qquad (3.94)$$

L, M, N, P, Q là các đa thức bậc 4 theo t_1. Phương trình (3.88) với i=1 được viết thành:

$$Gt_2^2+Ht_2+I=0 \qquad (3.95)$$

với G, H, I là các đa thức bậc 2 theo t_1.

Nhân pt (3.94) với G và pt (3.95) với Lt_2^2, rồi trừ các kết quả:

$$(HL-GM)t_2^3+(IL-GN)t_2^2-GPt_2-GQ=0 \qquad (3.96)$$

Nhân pt (3.94) với Gt_2+H, và pt (3.95) với $Lt_2^3+Mt_2^2$, rồi trừ các kết quả:

$$(GN-LI)t_2^3+(GP+HN-MI)t_2^2+(GQ+HP)t_2+HQ=0 \qquad (3.97)$$

Nhân pt (3.95) với t_2:

$$Gt_2^3+Ht_2^2+It_2=0 \qquad (3.98)$$

Các pt từ (3.95) đến (3.98) là 4 phương trình tuyến tính đồng nhất theo 4 biến t_2^3, t_2^2, t_2 và 1. Khử bỏ các phần tử, còn lại:

$$\begin{bmatrix} HL-GM & IL-GN & -GP & -GQ \\ GN-LI & GP+HN-MI & GQ+HP & HQ \\ G & H & I & 0 \\ 0 & G & H & I \end{bmatrix}=0 \qquad (3.99)$$

Phương trình (3.99) có đa thức bậc 8 theo bình phương t_1. Từ đó, tối đa có 8 cặp nghiệm t_1, mỗi cặp là hai giá trị ngược dấu nhau.

(c) Vị trí bệ chuyển động. Khi tìm được ϕ_1, ϕ_2 và ϕ_3 có thể được tính bằng cách thay vào pt (3.95) và (3.89). Sau đó, tìm vector vị trí $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ bằng cách thay giá trị ϕ_i vào pt (3.83), (3.84), (3.85) tương ứng. Vì khớp cầu được đặt tại đỉnh tam giác cân, nên vector vị trí bệ **p** được tính theo công thức:

$$p=\frac{1}{3}(q_1+q_2+q_3) \qquad (3.100)$$

Định hướng bệ được tính theo các pt (3.74), (3.77), (3.78) và các điều kiện trực giao.

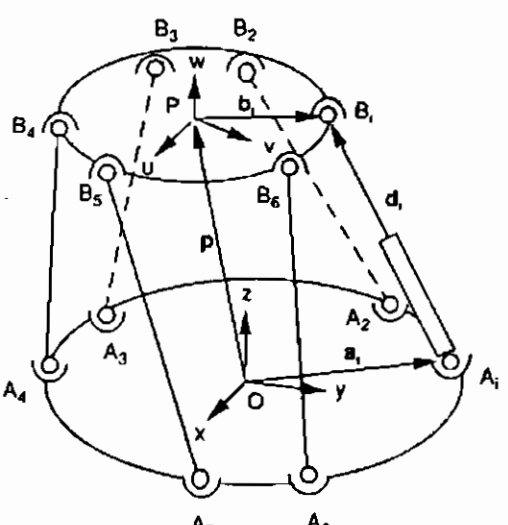
Tóm lại, có 16 nghiệm động học thuận, tạo thành 8 cặp vị trí cơ cấu chấp hành, trong mỗi cặp, một vị trí là đối xứng gương của vị trí kia qua mặt phẳng cố định $A_1A_2A_3$

Phân tích vị trí bệ STEWART- GOUGH tổng quát

Bệ Stewart - Gough là cơ cấu chấp hành song song 6 SPS, 6 bậc tự do (Hình 3.14). Sáu nhánh nối bệ di động với đế cố định bằng các khớp cầu tại các điểm B_i và A_i, với i=1,2,..., 6 tương ứng. Mỗi nhánh gồm phần trên và phần dưới nối với nhau bằng khớp lăng trụ. Trục vít hoặc kích thuỷ lực được dùng để thay đổi chiều dài khớp lăng trụ và do đó điều khiển vị trí bệ.

Trên Hình 3.14, các điểm A_i, với i= 1 đến 6, ở cùng mặt phẳng trên đế cố định. Tương tự, các điểm B_i, với i=1 đến 6, ở cùng mặt phẳng trên bệ di động. Tuy nhiên với bệ Stewart tổng quát, các điểm này không nhất thiết trên một mặt phẳng. Có 14 khâu nối với 6 khớp lăng trụ và 12 khớp cầu. Số bậc tự do của cơ cấu là

$$F = \lambda(n-j-1)+\sum_i f_i = 6(14-18-1)+(6+3\times 12) = 12 \qquad (3.101)$$



Hình 3.14: Cơ cấu chấp hành song song không gian 6SPS, 6 bậc tự do

Có 6 bậc tự do thụ động liên quan với 6 nhánh, nên bệ chỉ có 6 bậc tự do. Nhánh SPS có thể được thay thế bằng nhánh SPU mà không ảnh hưởng đến bậc tự do chung của cơ cấu.

Các nhánh nối với bệ và đế bằng các khớp cầu, nên không có moment uốn hoặc moment xoắn truyền đến các nhánh. Lực tác động trên mỗi nhánh truyền dọc theo trục nhánh. Do đó, các nhánh này là các thanh hình trụ rỗng để tạo cho cơ cấu chấp hành có trọng lượng nhẹ, độ cứng vững tốt, tốc độ cao.

Hình học cơ cấu

Hai hệ tọa độ Descartes A(x, y, z) và B(u, v, w) được gắn tương ứng vào đế cố định và bệ di động. Biến đổi từ bệ đến đế được mô tả bằng vector vị trí **p** của trọng tâm P và ma trận quay ${}^{A}R_{B}$ của bệ di động. Gọi **u**, **v**, **w** là 3 vector đơn vị trên 3 trục u, v, w trong hệ tọa độ chuyển động. Ma trận quay là:

$$ {}^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \tag{3.102} $$

Chú ý, các phần tử ma trận phải thỏa các điều kiện trực giao:

$$ u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \tag{3.103} $$

$$ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1 \tag{3.104} $$

$$ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 = 1 \tag{3.105} $$

$$ u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 0 \tag{3.106} $$

$$ u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \tag{3.107} $$

$$ v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \tag{3.108} $$

Gọi $\mathbf{a}_i = [a_{ix}, a_{iy}, a_{iz}]^T$ và ${}^{B}\mathbf{b}_i = [b_{iu}, b_{iv}, b_{iw}]^T$ là các vector vị trí điểm A_i và B_i trong hệ tọa độ A và B tương ứng. Phương trình vector-vòng với nhánh thứ i như sau:

$$ \overline{A_iB_i} = p + {}^{A}R_{B}\,{}^{B}b_i - a_i \tag{3.109} $$

Chiều dài nhánh thứ i được tính bằng cách lấy tích vector $A_i B_i$ với chính nó:

$$d_i^2 = \left[p + {}^A R_B {}^B b_i - a_i\right]^T \left[p + {}^A R_B {}^B b_i - a_i\right], \text{ với } i = 1, 2, ...6 \quad (3.110)$$

với d là chiều dài nhánh thứ i. Khai triển pt (3.110):

$$d_i^2 = p^T p + \left[{}^B b_i\right]^T \left[{}^B b_i\right] + a_i^T a_i + 2p^T \left[{}^A R_B {}^B b_i\right] - 2p^T a_i - 2\left[{}^A R_B {}^B b_i\right]^T a_i \quad (3.111)$$

Phương trình (3.111) được viết 6 lần, mỗi lần với i=1, 2,..., 6, cho 6 phương trình mô tả vị trí bệ chuyển động so với đế. Chú ý, ${}^B\mathbf{b}_i$ và $\mathbf{a}_i$ là các vector không đổi xác định bằng hình học.

Động học đảo

Biết vector vị trí **p** và ma trận quay ${}^A R_B$ của hệ tọa độ B ứng với A, tìm chiều dài nhánh d_i với i=1, 2,..., 6. Lấy căn bậc hai pt (3.111):

$$d_i = \pm\sqrt{p^T p + {}^B b_i^T {}^B b_i + a_i^T a_i + 2p^T {}^A R_B {}^B b_i - 2p^T a_i - 2\left[{}^A R_B {}^B b_i\right]^T a_i} \quad (3.112)$$

với i= 1, 2,..,6. Ứng với mỗi vị trí bệ, có hai nghiệm khả dĩ cho mỗi nhánh. Tuy nhiên, d_i chỉ lấy giá trị dương. Khi nghiệm d_i là số phức, vị trí bệ di động là không thể đạt được.

Động học thuận

Biết chiều dài nhánh d_i, với i=1, 2,...,6, tìm vector vị trí **p** và ma trận quay ${}^A R_B$ của bệ di động. Vector vị trí có 3 ẩn vô hướng, ma trận quay có 9 ẩn vô hướng. Tuy nhiên, 9 ẩn vô hướng của ma trận quay liên quan đến 6 điều kiện trực giao trong các pt (3.103) đến (3.108). Giả sử:

1. Gốc O của hệ tọa độ cố định đặt tại tâm khớp cầu cố định A_1
2. Gốc P của hệ tọa độ chuyển động tại tâm khớp cầu chuyển động B_1

Dựa vào các giả định trên: $a_{1x} = a_{1y} = a_{1z} = 0$ và $b_{1u} = b_{1v} = b_{1w} = 0$. Pt (3.111) với i =1 là:

$$d_1^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (3.113)$$

Khai triển pt (3.111) với i = 2, 3,..., 6; rồi trừ các phương trình kết quả với pt (3.113):

$$\begin{aligned}
&b_{iu}(p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) + b_{iv}(p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z) \\
&+ b_{iw}(p_x w_x + p_y w_y + p_z w_z) - a_{ix}p_x - a_{iy}p_y - a_{iz}p_z \\
&- b_{1u}(a_{ix}u_x + a_{iy}u_y + a_{iz}u_z) - b_{1v}(a_{ix}v_x + a_{iy}v_y + a_{iz}v_z) \\
&- b_{1w}(a_{ix}w_x + a_{iy}w_y + a_{iz}w_z) + k_i = 0 \qquad (3.114)
\end{aligned}$$

với $k_i = (a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + a_{iz}^2 + b_{iu}^2 + b_{iv}^2 + b_{iw}^2 + d_1^2 - d_i^2)/2$

Phương trình (3.113) và (3.114) với i = 2, 3,.., 6 cùng với 6 điều kiện trực giao sẽ có 12 phương trình với 12 ẩn số. Các phương trình này là phi tuyến và khó giải. Đây là các phương trình bậc hai, số Bezout 1-đồng nhất là $2^{12} = 4096$, gồm nhiều nghiệm.

Đối với các công thức 2-đồng nhất, có thể sắp xếp các biến vào 2 nhóm:

Nhóm 1: $[p_x, p_y, p_z]$; nhóm 2: $[u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z]$.

Bậc của 12 phương trình với các biến của mỗi nhóm được liệt kê trong Bảng 3.3. Xét tích:

$$\prod_{i=1}^{12}\left(\sum_{j=1}^{2} d_{ij}\beta_j\right) = (2\beta_1)(\beta_1 + \beta_2)^5(2\beta_2)^6$$

với d_{ij} lấy từ thành phần (i, j) trong Bảng 3.3.

Bảng 3.3 Bậc của 12 phương trình

Phương trình	Nhóm 1	Nhóm 2
1. Phương trình (3.113)	2	0
2. Phương trình (3.114), với i = 2	1	1
3. Phương trình (3.114), với i = 3	1	1
4. Phương trình (3.114), với i = 4	1	1
5. Phương trình (3.114), với i = 5	1	1
6. Phương trình (3.114), với i = 6	1	1
7. Phương trình (3.103)	0	2
8. Phương trình (3.104)	0	2
9. Phương trình (3.105)	0	2
10. Phương trình (3.106)	0	2

11. Phương trình (3.107)	0	2
12. Phương trình (3.108)	0	2

Vì nhóm thứ nhất có 3 biến số, nhóm thứ hai có 9 biến số, số Bezout 2-đồng nhất được cho theo số hạng $\beta_1^3 \beta_2^9$ trong đa thức trên và có giá trị 1280. Hệ phương trình có 1280 nghiệm. Mặc dù số Bezout -đồng nhất thấp hơn so với số Bezout 1-đồng nhất, nhưng vẫn gồm nhiều nghiệm. Raghavan áp dụng phương pháp hàm liên tục, tính được bệ Stewart Gough có 40 nghiệm động học thuận.

Phân tích vị trí bệ STEWART- GOUGH cận tổng quát

Phần này sẽ nghiên cứu cơ cấu cận tổng quát theo động học thuận. Các giả thiết cơ bản gồm:

1. Sáu khớp cầu trên bệ chuyển động nằm trên mặt phẳng u-v.
2. Sáu khớp cầu trên đế cố định nằm trên mặt phẳng x-y.

Theo các giả thiết đó $a_{iz} = b_{iw} = 0$ với i = 1 đến 6. Pt (3.114) được rút gọn thành dạng đơn giản hơn:

$$b_{iu}\xi_1 + b_{iv}\xi_2 - a_{ix}p_x - a_{iy}p_y - a_{ix}b_{iu}u_x - a_{iy}b_{iu}u_y$$
$$- a_{ix}b_{iv}v_x - a_{iy}b_{iv}v_y + k_1 = 0 \quad \text{với} \quad i = 2, 3, ...6 \tag{3.115}$$

với $k_1 = (a_{ix}^2 + a_{iy}^2 + b_{iu}^2 + b_{iv}^2 - d_i^2 + d_1^2)/2$, các biến ξ_1 và ξ_2 được xác định như sau:

$$\xi_1 = p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z \tag{3.116}$$

$$\xi_2 = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z \tag{3.117}$$

Vecctor đơn vị **w** không có trong pt (3.115), vì chỉ có 3 trong 6 điều kiện trực giao là cần để phân tích. Xem ξ_1 và ξ_2 là hai biến trung gian, nên hệ phương trình có 11 ẩn. Hệ phương trình gồm các pt (3.103), (3.104), (3.106), (3.113), (3.115) với i= 2 đến 6, (3.116), (3.117). Các biến là p_x, p_y, p_z, u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z, ξ_1, ξ_2. Pt (3.115), với i=2 đến 6, các phương trình còn lại là các đa thức bậc hai.

Rút gọn sáu phương trình đa thức theo ba ẩn u_x, u_y, và v_y. Xếp các pt (3.103), (3.104), (3.113) thành một nhóm, (3.106), (3.116), (3.117) thành nhóm khác như sau:

$$u_z^2 = 1 - u_x^2 - u_y^2 \quad (3.118)$$

$$v_z^2 = 1 - v_x^2 - v_y^2 \quad (3.119)$$

$$p_z^2 = d_1^2 - p_x^2 - p_y^2 \quad (3.120)$$

và

$$u_z v_z = -u_x v_x - u_y v_y \quad (3.121)$$

$$p_z u_z = \xi_1 - p_x u_x - p_y u_y \quad (3.122)$$

$$p_z v_z = \xi_2 - p_x v_x - p_y v_y \quad (3.123)$$

thay các pt từ (3.118) đến (3.123) vào 6 đồng nhất thức:

$$\left(u_z^2\right)\left(v_z^2\right) - (uv) = 0 \quad (3.124)$$

$$\left(p_z^2\right)\left(u_z^2\right) - (pu) = 0 \quad (3.125)$$

$$\left(p_z^2\right)\left(v_z^2\right) - (pv) = 0 \quad (3.126)$$

$$(u_z v_z)(p_z^2) - (p_z u_z)(p.v) = 0 \quad (3.127)$$

$$(p_z u_z)(v_z^2) - (u_z v_z)(p.v) = 0 \quad (3.128)$$

$$(p_z v_z)(u_z^2) - (u_z v_z)(p.u) = 0 \quad (3.129)$$

Sáu phương trình này không có các biến u_z, v_z, p_z.

Phương trình (3.115), với i =2,3,..., 6, gồm năm phương trình tuyến tính có 8 ẩn; giải được 5 ẩn theo ba ẩn còn lại. Ví dụ, ξ_1, ξ_2, p_x, p_y, v_x có thể thay bằng u_x, u_y, v_y như sau:

$$\xi_1 = e_{11}u_x + e_{12}u_y + e_{13}u_z + e_{14} \quad (3.130)$$

$$\xi_2 = e_{21}u_x + e_{22}u_y + e_{23}u_z + e_{24} \quad (3.131)$$

$$p_x = e_{31}u_x + e_{32}u_y + e_{33}v_y + e_{34} \quad (3.132)$$

$$p_y = e_{41}u_x + e_{42}u_y + e_{43}v_y + e_{44} \quad (3.133)$$

$$v_x = e_{51}u_x + e_{52}u_y + e_{53}v_y + e_{54} \quad (3.134)$$

với e_{ij} là hằng được tìm bằng cách giải pt (3.115) với i = 2, 3,..., 6.

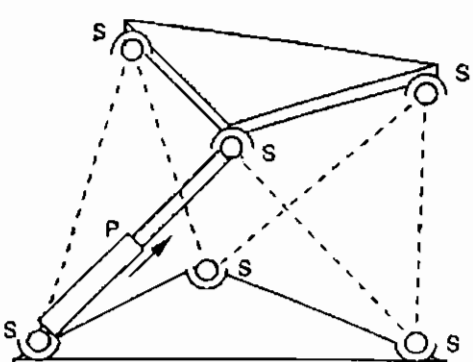
Thay các pt từ (3.130) đến (3.134) vào các pt từ (3.124) đến (3.129) sẽ được 6 đa thức bậc 4 với 3 ẩn u_x, u_y, v_y. Ba đa thức bất kỳ trong 6 đa thức được dùng để giải 3 ẩn. Số Beznut là 4^3 =64, nên hệ phương trình có 64 nghiệm. Sử dụng phương pháp Sylvester sẽ rút gọn 6 đa thức thành đa thức bậc 20 với một ẩn, tìm được tối đa 40 nghiệm khả dĩ.

Phân tích vị trí bệ STEWART- GOUGH 3-3

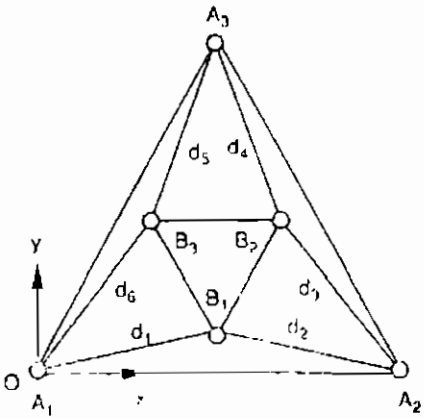
Bệ Stewart-Gough tổng quát có vấn đề chính là động học thuận không thể giải dạng kín, mặc dù tồn tại đến 40 nghiệm. Do đó cần đưa ra các cấu hình đặc biệt bệ Stewart-Gough. Loại này cũng gồm các khớp cầu đồng tâm tại bệ và đế. Hình 3.15 là bệ Stewart-Gough 3-3, trong đó có 6 nhánh dạng cặp đôi nối 3 điểm trên bệ và 3 điểm trên đế. Đây là cấu trúc đặc biệt để tìm các nghiệm động học thuận dạng kín.

Hình 3.16 nhìn từ đỉnh của bệ Stewart-Gough 3-3. Bệ chuyển động được ký hiệu bằng 3 cặp khớp cầu đồng tâm tại các điểm B_1, B_2, B_3. Đế cố định gồm 3 cặp khớp cầu đồng tâm tại 3 điểm A_1, A_2, A_3. Hệ tọa độ Descartes gắn vào đế cố định có gốc tại A_1, trục x hướng theo A_1A_2, trục z vuông góc với mặt phẳng tam giác A_1 A_2 A_3, trục y xác định theo qui tắc bàn tay phải.

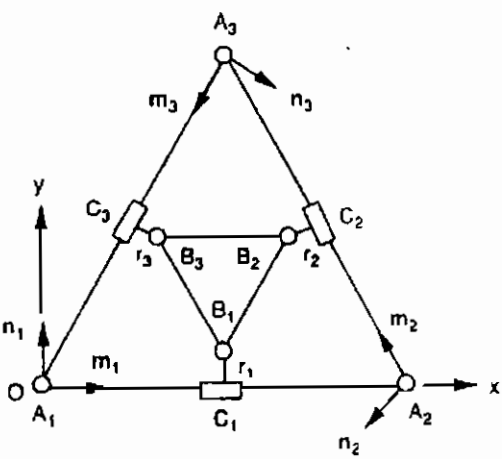
Trong động học thuận, chiều dài các nhánh đã biết, cần tìm vị trí bệ. Với các chiều dài nhánh đã cho, 3 tam giác A_1 A_2 B_1, A_2 A_3 B_2, A_3 A_1 B_3 được xác định đồng nhất. Quĩ tích của B_i ràng buộc trên vòng tròn có tâm và trực giao với đường A_i A_{i+1}. Ràng buộc này tương đương với cặp khớp RS (quay - cầu) đơn giản. Toàn bộ cơ cấu này tương đương động học với 3RS bậc tự do zero (Hình 3.17).



Hình 3-15. Bệ Stewart-Gough không gian.



Hình 3-16. Hình chiếu của bệ Stewart-Gough.



Hình 3-17. Cơ cấu không gian 3RS tương đương

Trước hết cần xác định tâm C_i và bán kính tương đương của vòng tròn qũi tích B_i. Sau đó, biểu diễn tọa độ điểm B_i theo góc ϕ_i với tam giác $A_iA_{i+1}B_i$ trên mặt phẳng đế:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i + r_i(\mathbf{n}_i c\phi_i + \mathbf{k} s\phi_i) \qquad \text{với } i=1,2,3 \qquad (3.135)$$

với $\mathbf{b}_i$ và $\mathbf{c}_i$ là các vector vị trí của B_i và C_i tương ứng.

$\mathbf{n}_i$ là vector đơn vị trên mặt phẳng đế và vuông góc với đường $A_i A_{i-1}$ (Hình 3.17).

$\mathbf{k}_i$ là vector đơn vị theo chiều dương của trục z.

Cuối cùng, cần thiết lập phương trình liên quan tới vòng kín của cơ cấu. Vì khoảng cách giữa B_i và B_{i+1} là hằng, nên:

$$[b_i - b_{i-1}]^T [b_i - b_{i+1}] = h_i^2 \qquad \text{với } i = 1, 2, 3 \qquad (3.136)$$

thay pt (3.135) vào (3.136):

$$e_{1i} c\phi_i c\phi_{i+1} + e_{2i} s\phi_i s\phi_{i+1} + e_{3i} c\phi_i + e_{4i} c\phi_{i-1} + e_{5i} = 0 \qquad (3.137)$$

với i=1,2,3 (modulo 3), trong đó:

$$e_{1i} = r_i r_{i-1} n_i^T n_{i-1}$$

$$e_{2i} = r_i r_{i+1}$$

$$e_{3i} = r_i n_i^T [c_{i+1} - c_i]$$

$$e_{4i} = -r_{i+1} n_{i+1}^T [c_{i-1} - c_i]$$

$$e_{5i} = \frac{h_i^2 - r_i^2 - r_{i+1}^2 - (c_{i+1} - c_i)^2}{2}$$

Phương trình (3.137) có dạng tương tự pt (3.87). Pt (3.137) có thể rút gọn thành đa thức bậc 8 với bình phương của một ẩn. Có 16 nghiệm động học thuận, tạo thành 8 dạng cặp cơ cấu chấp hành, trong mỗi cặp, một dạng là đối xứng gương của dạng kia qua mặt phẳng $A_1 A_2 A_3$.

Tóm tắt

Các cơ cấu chấp hành song song được phân loại theo cơ cấu phẳng, cầu, và không gian tùy theo các đặc tính chuyển động và độ nối kết. Có thể dùng phương pháp Denavit-Hartenberg để phân tích, nhưng phương pháp hình học thuận tiện hơn.

Động học thuận của cơ cấu phẳng 3-dof và bệ định hướng 3-dof được rút gọn thành đa thức bậc tám. Cơ cấu không gian chỉ với các bậc tự do tịnh tiến có hai nghiệm khi xét động học thuận và động học đảo. Động học thuận của cơ cấu 3-dof không gian với các đặc tính vị trí và định hướng có tối đa 8 cặp tư thế. Chương này còn xem xét khái quát động học bệ Stewart-Gough tổng quát và cận tổng quát. Cuối cùng, bệ Stewart-Gough 3-3 có tối đa 8 tư thế khả dĩ đối với động học thuận. Nói chung, các nghiệm động học thuận của cơ cấu song song tạo thành vài cặp tư thế, trong mỗi cặp, có một tư thế là đối xứng gương với tư thế kia qua mặt phẳng xác định.

Chương 4

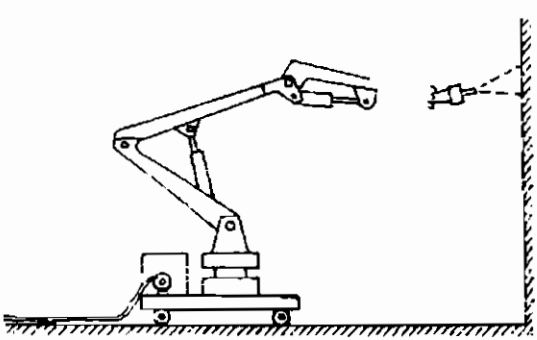
PHÂN TÍCH JACOBI TRONG CƠ CẤU CHẤP HÀNH NỐI TIẾP

Giới thiệu

Trong các Chương trước, đã xét quan hệ động học giữa vị trí bộ tác động cuối và các biến khớp dựa trên phân tích động học thuận và đảo. Kiến thức này cho phép xét vị trí bộ tác động cuối. Trong Chương này sẽ mở rộng nghiên cứu, xem xét vấn đề phân tích tốc độ của cơ cấu chấp hành nối tiếp.

Trong một số ứng dụng, như máy sơn phun (Hình 4.1), bộ tác động của cơ cấu chuyển động theo đường đi và vận tốc định trước. Vì thế, các chuyển động khớp cần phối hợp chính xác. Có hai kiểu xét vận tốc, bài toán thuận và bài toán đảo. Với *vận tốc thuận,* thường cho trước các vận tốc khớp ngõ vào, cần tìm trạng thái vận tốc bộ tác động cuối. Với *vận tốc đảo,* thường cho trước trạng thái vận tốc bộ tác động cuối, cần tìm vận tốc khớp ngõ vào.

Không gian vector giữa các biến khớp được gọi là *không gian khớp*. Không gian vector theo vị trí bộ tác động cuối được gọi là *không gian bộ tác động cuối*. Đối với các cơ cấu chấp hành, *ma trận Jacobi*, là ma trận biến đổi các vận tốc khớp trong không gian khớp, theo trạng thái vận tốc trong không gian bộ tác động cuối.



Hình 4-1.
Tay máy sơn phun

Ma trận Jacobi là *thành phần cơ bản* để xác định quỹ đạo hình học trong không gian bộ tác động cuối. Robot công nghiệp sử dụng *đại số tọa độ* để tránh nghịch đảo số trong ma trận Jacobi do giải tích nghịch trên cơ sở phi thức. Do đó, đại số hiệu suất được phát triển. Trạng thái vận tốc bộ tác động cuối có nhiều cách xác định khác nhau, chẳng hạn biến đổi Jacobi với phương pháp vi phân công thức.

Ma trận Jacobi còn hữu dụng trong nhiều ứng dụng khác. Trên một số cấu hình cơ cấu chấp hành, ma trận Jacobi có thể mất vài phần tử ngang. Đó là trạng thái đặc biệt. Với trạng thái đặc biệt, cơ cấu chấp hành nối tiếp có thể mất một số bậc tự do, còn cơ cấu chấp hành song song thu thêm số bậc tự do. Trong Chương này, trạng thái đặc biệt của cơ cấu chấp hành nối tiếp cũng được nghiên cứu.

Động học vi phân của vật rắn

Trước hết cần nghiên cứu động học vi phân của vật rắn, sau đó các tính chất động học này được áp dụng để lấy đạo hàm động học vi phân các khâu trong cơ cấu chấp hành và khai triển ma trận Jacobi. Do sẽ cần nhiều tọa độ quy chiếu, cần áp dụng các ký hiệu riêng để xác định hệ tọa độ chứa vector. Vector **p** có thể là hàm thời gian trong một hệ tọa độ quy chiếu, nhưng là hằng trong hệ quy chiếu khác. Do đó, nói chung, cần có hai hệ quy chiếu để xác định bản chất của vector, một hệ xác định sự thay đổi của vector được đo và một để biểu diễn vector đó. Ở đây sẽ dùng ký tự phía trên bên trong biểu thị hệ quy chiếu được dùng để đo vector và ký tự phía trên bên ngoài là hệ quy chiếu biểu diễn vector.

Ví dụ: ${}^{B}\mathbf{p}$ là vector vị trí của điểm P ứng với hệ tọa độ, ${}^{A}({}^{B}\mathbf{p})$ là ${}^{B}\mathbf{p}$ biểu thị trong hệ A. Vận tốc điểm P là đạo hàm của ${}^{B}\mathbf{p}$ theo thời gian:

$$ {}^{B}v_{p} = \frac{d\,{}^{B}p}{dt} \tag{4.1} $$

Sau khi lấy vi phân, vector đó được biểu diễn trong hệ tọa độ khác:

$$ {}^{A}\left({}^{B}v_{p}\right) = {}^{A}\left(\frac{d\,{}^{B}p}{dt}\right) \tag{4.2} $$

biểu thị vi phân được lấy ứng với hệ B, và vector được biểu diễn trong hệ A.

Khi hai ký hiệu hệ quy chiếu là đồng nhất, hoặc khi biết rõ đại lượng vector được đo, có thể bỏ qua ký hiệu phía trong. Ví dụ, ma trận quay ${}^{A}R_{B}$ dùng để biến đổi vector từ hệ tọa độ này sang hệ tọa độ khác:

$$ {}^{A}({}^{B}p) \equiv {}^{A}R_{B}\,{}^{B}p \tag{4.3} $$

Nếu không đề cập đến hệ quy chiếu, cần hiểu là đang sử dụng hệ cơ bản hoặc hệ quy chiếu bất kỳ. Chú ý, mọi vector trong một phương trình phải được biểu thị trong một hệ quy chiếu xác định.

Vận tốc góc của vật rắn

Vận tốc dài mô tả mức biến đổi vị trí một điểm trong không gian, *vector vận tốc góc* mô tả mức biến đổi hướng của vật rắn. Hình 4.2 minh họa hệ B quay theo hệ A với điểm O cố định. Sự định hướng hệ B so với hệ A biểu thị bằng ma trận quay ${}^{A}R_{B}$. Ma trận quay ${}^{A}R_{B}$ là chuẩn trực, nên biến đổi nghịch đảo của ${}^{A}R_{B}$ chính là hoán vị:

$$ {}^{A}R_{B}\,{}^{A}R_{B}^{T} = I \tag{4.4} $$

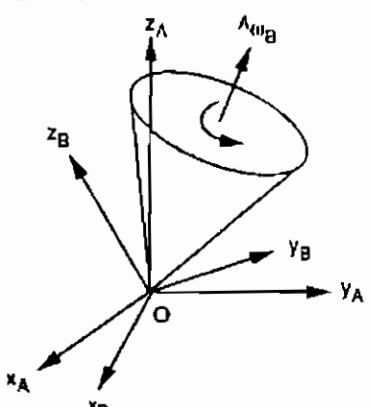
với I là ma trận đồng nhất 3×3.

Lấy đạo hàm pt (4.4) theo thời gian:

$$ {}^{A}\dot{R}_{B}\,{}^{A}R_{B}^{T} + {}^{A}R_{B}\,{}^{A}\dot{R}_{B}^{T} = 0 \tag{4.5} $$

thay ${}^{A}R^{T}_{B} = {}^{A}R^{-1}_{B}$ và ${}^{A}\dot{R}_{B} = ({}^{A}R^{-1}_{B})^{T}$ vào pt (4.5):

$$ ({}^{A}\dot{R}_{B}\,{}^{A}R_{B}^{-1}) + ({}^{A}\dot{R}_{B}\,{}^{A}R_{B}^{-1})^{T} = 0 \tag{4.6} $$



Hình 4-2. Sự quay tức thời của hệ B theo hệ A

${}^A\dot{R}_B\,{}^AR_B^{-1}$ là ma trận đối xứng 3 x 3. Nói chung, có thể định nghĩa ma trận đối xứng:

$$\Omega \equiv {}^A\dot{R}_B\,{}^AR_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

với ω_x, ω_y, ω_z là 3 thông số vận tốc góc độc lập của vật rắn. Phần kế tiếp sẽ chứng minh 3 đại lượng này là các thành phần vector vận tốc góc của B trong A.

Vector vị trí điểm P gắn trong hệ B và đo theo hệ A:

$${}^Ap = {}^AR_B\,{}^Bp \tag{4.8}$$

Chú ý, ${}^Bp$ là vector không đổi trong hệ B (vì P được gắn vào B). Vận tốc của P theo hệ A là đạo hàm của pt (4.8) theo thời gian:

$${}^Av_p = \frac{d}{dt}({}^AR_B\,{}^Bp) = {}^A\dot{R}_B\,{}^Bp \tag{4.9}$$

Tính ${}^Bp$ từ pt (4.8) và thay vào pt (4.9) :

$${}^Av_p = {}^A\dot{R}_B\,{}^AR_B^{-1}\,{}^Ap \tag{4.10}$$

Thay pt (4.7) vào pt (4.10):

$${}^Av_p = \Omega\,{}^Ap \tag{4.11}$$

Vấn đề đặt ra: có điểm bất kỳ nào trong B có vận tốc zero ở thời điểm đó không? Giả sử P là điểm có đặc tính đó:

$${}^Av_{\bar{p}} = \Omega\,{}^A\bar{p} = 0 \tag{4.12}$$

Phương trình (4.12) gồm 3 phương trình tuyến tính thuần nhất với 3 ẩn p_x, p_y, p_z. Điều kiện tương thích để tồn tại nghiệm không tầm thường là định thức của ma trận hệ số phải triệt tiêu ($|\Omega| = 0$). Vì Ω là ma trận đối xứng 3×3, nên điều kiện này thoả đúng:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix} = \omega_x\omega_y\omega_z - \omega_x\omega_y\omega_z = 0$$

Ở đây, chỉ có 2 trong 3 pt của (4.12) là độc lập. Giải pt (4.12) theo tỉ số $p_x:p_y:p_z$

$$\tilde{p}_x : \tilde{p}_y : \tilde{p}_z = \omega_x : \omega_y : \omega_z \tag{4.13}$$

Tồn tại vô hạn điểm dừng. Các điểm này nằm trên đường thẳng đi qua gốc tọa độ và song song với vector ${}^A\omega_B = | \omega_x, \omega_y, \omega_z |^T$. Vector ${}^A\omega_B$ là *vector vận tốc góc* và đường thẳng đó là *trục quay tức thời*. Pt (4.11) viết dưới dạng ký hiệu vector là:

$${}^A v_p = {}^A\omega_B \times {}^A p \tag{4.14}$$

Vận tốc tuyến tính của một điểm

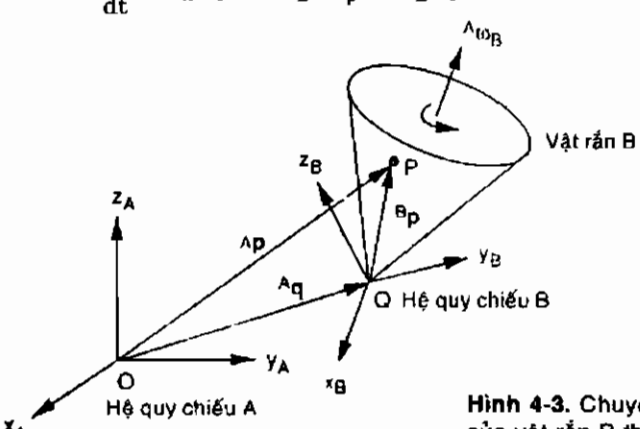
Hình 4.3 minh họa vật rắn B quay tức thời, và tịnh tiến theo hệ quy chiếu A. Vector vị trí điểm P, không nhất thiết phải cố định trong hệ B, quan hệ với hệ A theo phương trình:

$${}^A p = {}^A q + {}^A R_B \, {}^B p \tag{4.15}$$

với ${}^A q = \overline{OQ}$ là vector vị trí gốc Q của hệ B quy chiếu lên hệ A. Để tìm vận tốc điểm P, xét hệ B quay quy chiếu lên hệ A cố định:

Về cơ bản đây là trường hợp hệ B quay theo hệ A với Q cố định trong A. Lấy vi phân đại lượng thứ hai của pt (4.15) theo thời gian

$$\frac{d}{dt}({}^A R_B \, {}^B p) = {}^A R_B \, {}^B v_p + {}^A \dot{R}_B \, {}^B p \tag{4.16}$$



Hình 4-3. Chuyển động tức thời của vật rắn B theo hệ quy chiếu A.

với ${}^{B}v_p = \frac{d}{dt}{}^{B}p$ là vận tốc điểm P theo hệ B.

Nhân 2 vế pt (4.7) với ${}^{A}R_B$:

$$ {}^{A}\dot{R}_B = \Omega^{A}R_B \tag{4.17} $$

Thay pt (4.17) vào pt(4.16):

$$ \frac{d}{dt}({}^{A}R_B\,{}^{B}p) = {}^{A}R_B\,{}^{B}v_p + \Omega^{A}R_B\,{}^{B}p. \tag{4.18} $$

Phương trình (4.18) dưới dạng vector:

$$ \frac{d}{dt}({}^{A}R_B\,{}^{B}p) = {}^{A}R_B\,{}^{B}v_p + {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}R_B\,{}^{B}p). \tag{4.19} $$

Khi gốc Q của B chuyển động trong A, cần cộng thành phần vận tốc tuyến tính của Q trong A vào pt (4.19). Phương trình chuyển động tổng quát có dạng:

$$ {}^{A}v_p = {}^{A}v_q + {}^{A}R_B\,{}^{B}v_p + {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}R_B\,{}^{B}p). \tag{4.20} $$

với ${}^{A}v_q = {}^{A}\dot{q}$ là ký hiệu vận tốc của Q theo hệ quy chiếu A. Số hạng thứ nhất trong pt (4.20) là phần vận tốc tuyến tính của Q theo A, số hạng thứ hai là chuyển động điểm P quy chiếu với hệ B; số hạng thứ ba là sự quay của hệ B quy chiếu với hệ A.

Trường hợp đặc biệt: Nếu điểm P gắn với hệ quy chiếu chuyển động B, nghĩa là ${}^{B}v_p = 0$, pt (4.20) trở thành:

$$ {}^{A}v_p = {}^{A}v_q + {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}R_B\,{}^{B}p). \tag{4.21} $$

Mặc dầu pt (4.21) ứng với trường hợp Q là gốc của hệ tọa độ chuyển động, nhưng vẫn có thể suy ra hai điểm bất kỳ cố định trong hệ tọa độ chuyển động. Nói chung, nếu P và Q là hai điểm gắn vào vật rắn B, vận tốc của chúng quan hệ theo phương trình:

$$ {}^{A}v_p = {}^{A}v_q + {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}p - {}^{A}q). \tag{4.22} $$

Trục quay tức thời

Phần này xét chuyển động tức thời tổng quát của vật rắn, mô tả vi phân chuyển động quay quanh trục xác định và vi phân chuyển động tịnh tiến theo trục đó, để phân tích Jacobi cho cơ cấu vận hành nối tiếp.

Nói chung, chuyển động không gian của vật rắn, có bất kỳ điểm dừng nào trong B không? Nếu ${}^{B}\mathbf{p}$ là điểm dừng và ${}^{B}\mathbf{v}_p = 0$ thuần nhất, pt (4.21) trở thành:

$$ {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}R_B\, {}^{B}\tilde{p}) = -{}^{A}v_q. \tag{4.23} $$

Vì vận tốc góc ${}^{A}\omega_B$ được lấy từ ma trận vuông đối xứng Ω, nên ma trận các hệ số của pt (4.23) là dạng đơn. Nói chung, pt (4.21) không có nghiệm. Tuy nhiên, có thể tìm các điểm có vector vận tốc tuyến tính cùng hướng với vận tốc góc nghĩa là:

$$ {}^{A}v_{\tilde{p}} = \lambda\, {}^{A}\omega_B. \tag{4.24} $$

với λ là *bước*.

Thay pt (4.24) vào pt (4.21):

$$ {}^{A}v_q + {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}R_B\, {}^{B}\tilde{p}) = \lambda\, {}^{A}\omega_B \tag{4.25} $$

Nhân 2 vế pt (4.25) với ${}^{A}\omega_B$:

$$ \lambda = \frac{{}^{A}\omega_B . {}^{A}v_q}{{}^{A}\omega_B^2} \tag{4.26} $$

Biến đổi pt (4.25):

$$ {}^{A}\omega_B \times ({}^{A}R_B\, {}^{B}\tilde{p}) = -{}^{A}v'_q \tag{4.27} $$

với ${}^{A}v'_q = {}^{A}v_q - \lambda\, {}^{A}\omega_B$ trực giao với ${}^{A}\omega_B$, nghĩa là:

$$ {}^{A}\omega_B . {}^{A}v'_q = {}^{A}\omega_B . ({}^{A}v_q - \lambda\, {}^{A}\omega_B) = 0 \tag{4.28} $$

Có thể áp dụng đại số vector, các vector **a**, **b** và **c** (Hình 4.4) thỏa hai điều kiện sau:

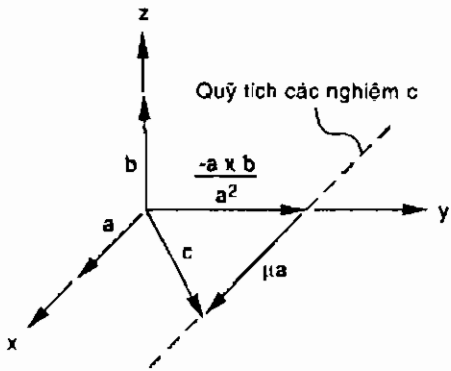
$$ \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} $$

$$ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 $$

Khi đó **c** có vô số nghiệm trên đường thẳng:

$$ \mathbf{c} = -\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a}^2} + \mu \mathbf{a} $$

với μ là *hằng vô hướng tùy ý*.



Hình 4-4.
Quan hệ vector

Từ đại số vector, tất cả các nghiệm của pt (4.27) và (4.28) là:

$$ {}^{A}R_{B}\,{}^{B}\tilde{p} = \frac{{}^{A}\omega_{B} \times {}^{A}\dot{v}_{q}}{{}^{A}\omega_{B}^{2}} + \mu\,{}^{A}\omega_{B}. \qquad (4.29) $$

Áp dụng pt (4.15), pt (4.29) trở thành:

$$ {}^{A}\tilde{p} = {}^{A}q + \frac{{}^{A}\omega_{B} \times {}^{A}\dot{v}_{q}}{{}^{A}\omega_{B}^{2}} + \mu\,{}^{A}\omega_{B}. \qquad (4.30) $$

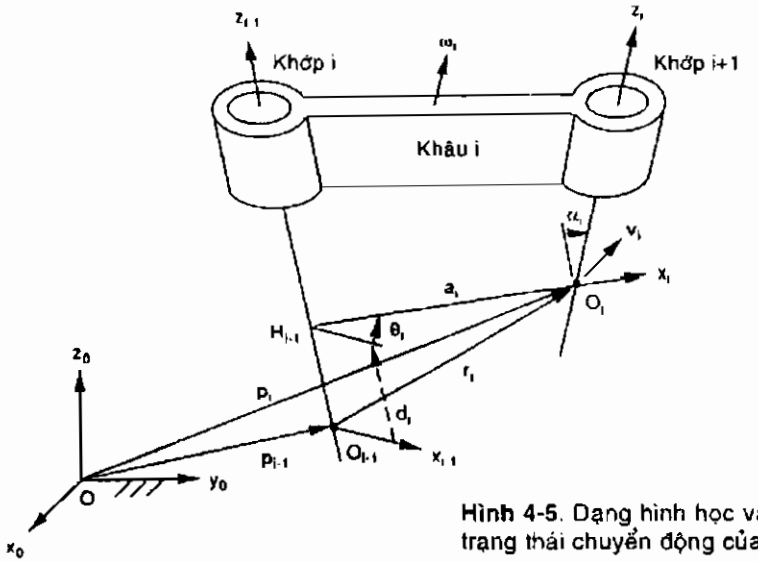
Phương trình (4.29) và (4.30) cho thấy quỹ tích các điểm có vận tốc tuyến tính tức thời cùng hướng với vector vận tốc góc là đường thẳng. Đó là đường song song với vector vận tốc góc, và được gọi là *trục quay tức thời*. Tóm lại, chuyển động không gian tổng quát của vật rắn gồm chuyển động quay vi phân và chuyển động tịnh tiến vi phân theo trục tương ứng.

Động học vi phân của cơ cấu chấp hành nối tiếp

Phần này sử dụng ma trận biến đổi D-H (Denavit-Hartenberg) để nghiên cứu động học vi phân trong cơ cấu chấp hành nối tiếp. Trước hết, xét chuyển động vi phân của khâu, sau đó áp dụng kết quả vào chuyển động vi phân của cơ cấu nối tiếp.

Ma trận biến đổi vi phân khâu

Hình 4.5 minh họa khâu i trong cơ cấu chấp hành.Theo qui ước D-H, hệ tọa độ Descartes (x_i, y_i, z_i) gắn vào biên cuối khâu i, và (x_0, y_0, z_0) là hệ



Hình 4-5. Dạng hình học và trạng thái chuyển động của khâu i.

tọa độ cố định. Vị trí khâu i được xác định theo vector vị trí $\mathbf{p}_i$ của điểm O_i và ma trận quay ${}^0R_i$ của khâu i ứng với hệ quy chiếu 0. Trạng thái vận tốc khâu i được xác định bằng vận tốc tuyến tính $\mathbf{v}_i$ của điểm gốc O_i, và vận tốc góc ω_i của khâu i liên hệ với hệ tọa độ quy chiếu cố định.

Ma trận biến đổi D-H thuận là pt (2.2) và đảo là pt (2.5). Lấy đạo hàm pt (2.2) theo thời gian:

$$ {}^{i-1}\dot{A}_i = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_i s\theta_i & -\dot{\theta}_i c\alpha_i c\theta_i & \dot{\theta}_i s\alpha_i c\theta_i & -\dot{\theta}_i a_i s\theta_i \\ \dot{\theta}_i c\theta_i & -\dot{\theta}_i c\alpha_i s\theta_i & \dot{\theta}_i s\alpha_i s\theta_i & \dot{\theta}_i a_i c\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & \dot{d}_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.31) $$

trong đó, θ_i và d_i là các biến. Với khớp xoay, $\dot{d}_i=0$; với khớp lăng trụ, $\dot{\theta}_i=0$. Nhân hai vế pt (4.31) với $({}^{i-1}A_i)^{-1}$:

$$ ({}^{i-1}\dot{A}_i)({}^{i-1}A_i)^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i\, {}^{i-1}Z_{i-1} & \vdots & \dot{d}_i\, {}^{i-1}z_{i-1} \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.32) $$

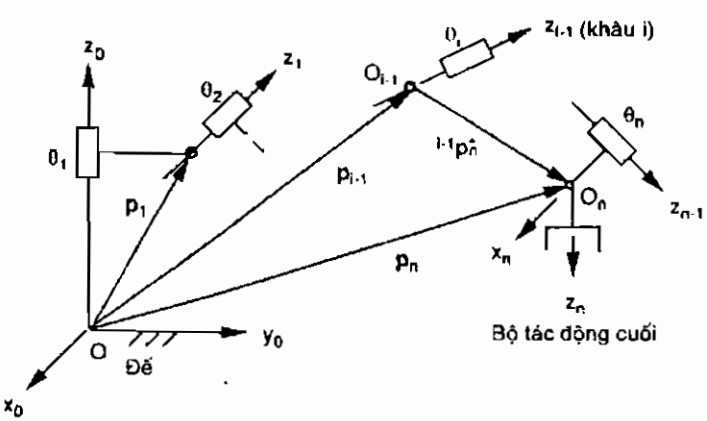
$$^{i-1}z_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

$$^{i-1}Z_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

Phương trình (4.33) biểu diễn vector đơn vị hướng theo trục z_{i-1}. Phương trình (3.34) biểu diễn ma trận đối xứng 3×3 không có phần tử zero, đó là vận tốc góc đơn vị của khâu i ứng với khâu i-1. Cả $^{i}z_{i-1}$ và $^{i-1}z_{i-1}$ đều được tính trong hệ tọa độ của khâu thứ (i-1). Ma trận con 3×3 phía trên bên trái trong pt (4.32) là vận tốc góc khâu i với khâu i-1, và cột thứ tư là vận tốc tuyến tính của một điểm gắn trong khâu i và trùng hợp tức thời với O_{i-1} ứng với khâu i-1.

Ma trận biến đổi vi phân toàn bộ cơ cấu

Hình 4.6 minh họa sơ đồ cơ cấu nối tiếp, trong đó $\mathbf{p}_n$ là vector vị trí điểm gốc của hệ tọa độ bộ tác động cuối, $\mathbf{p}_{i-1}$ là vector vị trí điểm gốc hệ tọa độ thứ (i-1) ứng với hệ quy chiếu cố định, $^{i-1}\mathbf{p}_n^{\wedge}$ là vector nối O_{i-1} đến O_n và được tính trong hệ quy chiếu cố định. Phương trình vòng kín của cơ cấu chấp hành nối tiếp n bậc tự do có dạng:



Hình 4-6. Các thông số khâu của cơ cấu chấp hành nối tiếp.

$$^{0}A_n = {}^{0}A_1\,{}^{1}A_2\,{}^{2}A_3 \ldots {}^{n-1}A_n \tag{4.35}$$

Lấy đạo hàm pt (4.35) theo thời gian:

$$^{0}\dot{A}_n = ({}^{0}\dot{A}_1\,{}^{1}A_2 \ldots {}^{n-1}A_n) + ({}^{0}A_1\,{}^{1}\dot{A}_2 \ldots {}^{n-1}A_n) + \ldots + ({}^{0}A_1\,{}^{1}A_2 \ldots {}^{n-1}\dot{A}_n). \tag{4.36}$$

Phương trình (4.36) chứa 12 phương trình vô hướng, có thể rút gọn thành hệ 6 phương trình độc lập bằng cách nhân pt (4.36) với $^{0}A_n^{-1}$:

$$^{0}\dot{A}_n\,{}^{0}A_n^{-1} = {}^{0}\dot{A}_1\,{}^{1}A_1^{-1} + {}^{0}A_1({}^{1}\dot{A}_2\,{}^{1}A_2^{-1})\,{}^{0}A_1^{-1} + ({}^{0}A_1\,{}^{1}A_2)({}^{2}\dot{A}_3\,{}^{2}A_3^{-1})({}^{0}A_1\,{}^{1}A_2)^{-1} + \cdots. \tag{4.37}$$

Ma trận $^{0}\dot{A}_n$ có thể phân tích thành hai ma trận con:

$$^{0}\dot{A}_n \equiv \begin{bmatrix} \dot{R}_n & v_n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

với $\dot{R}_n$ là định mức thay đổi của ma trận quay bộ tác động cuối và $\mathbf{v}_n = \dot{p}_n$ là vận tốc tuyến tính của điểm gốc hệ tọa độ tay máy.

Tương tự pt (4.32), tích ma trận trong pt (4.37) là:

$$^{0}\dot{A}_n\,{}^{0}A_n^{-1} = \begin{bmatrix} \Omega_n & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

$$^{i-1}\dot{A}_i({}^{i-1}A_i)^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i\,{}^{i-1}Z_{i-1} & \dot{d}_i\,{}^{i-1}z_{i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Chú ý, $\Omega_n = \dot{R}_n R_n^T$ là ma trận đối xứng 3×3 với các số hạng là vận tốc góc của bộ tác động cuối, $\mathbf{v}_n$ là vận tốc tuyến tính của một điểm trong bộ tác động cuối, trùng hợp tức thời với gốc hệ quy chiếu cố định. Để thuận tiện, có thể định nghĩa:

$$^{0}A_1\,{}^{1}A_2 \ldots {}^{i-2}A_{i-1} \equiv \begin{bmatrix} R_{i-1} & p_{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

với R_{i-1} và $\mathbf{p}_{i-1}$ là ma trận quay và vector vị trí điểm gốc hệ tọa độ thứ (i-1) theo hệ quy chiếu cố định. Thay các phương trình từ (4.39) đến (4.41) vào pt (4.37):

$$\begin{bmatrix} \Omega_n & v_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\begin{array}{c:c} \dot{\theta}_i (R_{i-1}{}^{i-1} Z_{i-1} R_{i-1}^T) & -\dot{\theta}_i (R_{i-1}{}^{i-1} Z_{i-1} R_{i-1}^T) p_{i-1} + \dot{d}_i R_{i-1}{}^{i-1} z_{i-1} \\ \hdashline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\begin{array}{c:c} \dot{\theta}_i Z_{i-1} & -\dot{\theta}_i Z_{i-1} p_{i-1} + \dot{d}_i z_{i-1} \\ \hdashline 0 & 0 \end{array} \right] \tag{4.42}$$

với

$$Z_{i-1} = R_{i-1}{}^{i-1} Z_{i-1} R_{i-1}^T \tag{4.43}$$

$$z_{i-1} = R_{i-1}{}^{i-1} z_{i-1} \tag{4.44}$$

Phương trình (4.42) chỉ có 6 phương trình độc lập. Các phần tử (3.2), (1.3), (2.1) tạo thành vector vận tốc góc ω_n của bộ tác động cuối, và cột cuối là vận tốc tuyến tính của điểm trong bộ tác động cuối trùng với gốc hệ tọa độ quy chiếu cố định. Pt (4.42) dưới dạng vector:

$$\omega_n = \sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i z_{i-1}, \tag{4.45}$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^{n} (-\dot{\theta}_i z_{i-1} \times p_{i-1} + \dot{d}_i z_{i-1}). \tag{4.46}$$

Phương trình (4.45) và (4.46) là các vận tốc góc các khâu. Bộ tác động cuối quay tức thời và chuyển dịch dọc theo mọi trục khớp, và hiệu ứng chuyển động tức thời theo từng trục khớp có thể được cộng tuyến tính. Chú ý, vận tốc $\mathbf{v}_n$ của điểm định vị tại gốc hệ tọa độ tay máy quan hệ với $\mathbf{v}_o$ theo biểu thức:

$$v_n = v_0 + \omega_n \times p_n \tag{4.47}$$

Tọa độ quay và hệ thống quay

Sự dịch chuyển vô hạn và hữu hạn của vật rắn có thể được biểu thị theo chuyển động quay xung quanh và tịnh tiến theo một trục. Chuyển động kết hợp này là *chuyển động quay vít*, và trục đơn vị là *trục quay*. Ti

số giữa tịnh tiến và quay là *bước* λ. Trong chuyển vị hữu hạn, $\lambda = d/\theta$ và trong chuyển vị vi phân: $\lambda = \dot{d}/\dot{\theta}$

Hệ tọa độ thể hiện sự quay này là *tọa độ quay vít*. Tọa độ quay đơn vị, $\hat{\$}$, được định nghĩa bằng cặp vector:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s + \lambda s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

Với **s** là vector đơn vị theo chiều trục quay và $\mathbf{s}_0$ là vector vị trí của điểm bất kỳ trên trục quay.

Vector $\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}$ là moment của trục quay theo gốc hệ tọa độ quy chiếu. Vì trục quay và moment tương ứng vuông góc với nhau, nên $\mathbf{s}.(\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s}) = 0$. Do đó chỉ có 5 trong 6 tọa độ là độc lập.

Đối với khớp quay: $\lambda = 0$, chuyển động quay đơn vị là:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \times s \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

Đối với khớp lăng trụ, $\lambda = \infty$, chuyển động quay đơn vị là:

$$\hat{\$} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

Trục quay và bước λ sẽ xác định sự quay vít. Nhưng độ chuyển vị chỉ xác định sau khi xác định biên độ hoặc cường độ của trục quay vít. Gọi $\dot{q}$ là cường độ chuyển động xoắn. Chuyển động quay được tính theo công thức:

$$S = \dot{q}\hat{\$} \tag{4.51}$$

trong đó $\dot{q} = \dot{\theta}$ đối với khớp quay và $\dot{q} = \dot{d}$ đối với khớp lăng trụ.

Từ đó, sáu tọa độ quay xác định *động học tức thời bậc nhất* của vật rắn. Ba tọa độ đầu của $ biểu diễn vận tốc góc, ba tọa độ cuối là vận tốc

tuyến tính của điểm gắn vào vật chuyển động và trùng khớp tức thời với hệ tọa độ quy chiếu cố định.

Có thể xét chuyển động của vật rắn đang quay tức thời với nhiều trục quay. Đây là hệ thống quay theo không gian 3 chiều. Hệ thống quay cho phép một vật rắn chuyển động tức thời theo 1 bậc tự do là sự quay đơn. Đó là *hệ thống quay bậc nhất* hay viết tắt là *hệ-1*.

Chuyển động vô hạn của vật rắn 2 bậc tự do có thể được coi là chuyển động kết hợp hai sự quay tức thời theo các bước tùy ý. Thực tế, đó là vật thể nối với đế cố định bằng 2 khớp và 1 khâu giữa. Hai trục khớp này được định vị tùy ý trong không gian. Với cường độ của 2 sự quay đã biết, vector vận tốc tức thời của mọi điểm trên vật thể có thể xác định dễ dàng, trạng thái vận tốc này có thể biểu diễn theo kết quả quay với bước và cường độ cho trước. Với chuyển động tức thời bất kỳ, tỉ số 2 cường độ xác định vị trí và bước của sự quay kết hợp, còn các cường độ thực xác định cường độ sự quay kết hợp. Hai trục của 2 sự quay này tạo một đường nối tiếp trong không gian được gọi là đường trụ vít. Hệ thống này là hệ thống bậc hai. Chuyển động của vật rắn với n bậc tự do, với $n \leq b$, là hệ thống bậc n.

Trong cơ cấu chấp hành nối tiếp, có thể xét chuyển động bộ tác động cuối khi quay tức thời quanh các trục khớp của chuỗi vòng hở. Các sự quay tức thời này được cộng tuyến tính để có chuyển động tổng hợp của bộ tác động cuối. Động học tức thời bậc nhất có thể viết theo phương trình:

$$\$_n = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \hat{\$}_i \tag{4.52}$$

với $\hat{\$}_i$ là sự quay đơn vị xác định theo các khớp của cơ cấu chấp hành.

Chú ý, đường trong không gian 3 chiều được biểu diễn bằng hệ tọa độ Plucker hay hệ tọa độ đường. Nếu tọa độ Plucker của đường là $[L, M, N, P, Q, R]^T$, các tọa độ Plucker liên quan với tọa độ quay theo phương trình:

$$\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \\ P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 - \lambda S_1 \\ S_5 - \lambda S_2 \\ S_6 - \lambda S_3 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành

Đặt $x_i = f_i(q_1, q_2, q_3 ... q_n)$ với i =1, 2, 3, ..., m là tập hợp m phương trình, mỗi hàm có n biến độc lập. Các đạo hàm theo thời gian của x_i viết theo hàm $\dot{q}_i$ như sau:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f_i}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n}\dot{q}_n \quad i = 1, 2, 3, ..., m \quad (4.54)$$

Phương trình (4.54) dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

dạng đơn giản:

$$\dot{x} = J\dot{q} \quad (4.56)$$

với $x = [x_1, x_2, ..., x_m]^T$ là vector m chiều, $q = [q_1, q_2, ..., q_n]^T$ là vector n chiều và J là ma trận $m \times n$ của đạo hàm riêng trong pt (4.55).

Ma trận Jacobi, được ký hiệu là J, là ma trận biến đổi tuyến tính, ánh xạ vector vận tốc n chiều $\dot{q}_i$ vào vector vận tốc n chiều $\dot{x}$. Các phần tử của **J** là các hệ số tác động của hàm vector **x**. Phần tử (i, j) của J mô tả cách biến đổi vi phân q_j tác động lên biến đổi vi phân x_i. Nói chung, vector **x** là hàm phi tuyến của **q**. Do đó, ma trận Jacobi là cấu hình phụ thuộc.

Với cơ cấu chấp hành robot, ma trận Jacobi là ma trận hệ số gồm tập các phương trình bất kỳ liên quan tới trạng thái vận tốc bộ tác động cuối và định mức khớp tác động. Định mức khớp xác định như sau:

$$\dot{q}_i = \begin{cases} \dot{\theta}_i & \text{khớp quay} \\ \dot{d}_i & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \quad (4.57)$$

Trạng thái vận tốc **x** của bộ tác động cuối được tính bằng nhiều cách, thông dụng là Jacobi quy ước và Jacobi trên cơ sở quay vít.

1. *Jacobi quy ước:* Trạng thái vận tốc bộ tác động cuối được tính theo vận tốc tuyến tính $\mathbf{v}_n$ và vận tốc góc ω_n của gốc tọa độ bộ tác động cuối:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n \\ \omega_n \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

2. *Jacobi quay vít:* Ma trận Jacobi được xác định theo vận tốc góc ω_n của bộ tác động cuối và vận tốc tuyến tính $\mathbf{v}_0$ của điểm quy chiếu trong bộ tác động cuối, trùng tức thời với gốc tọa độ quy chiếu, được tính theo biểu thức:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \omega_n \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

Chú ý, vận tốc bộ tác động cuối $\dot{\mathbf{x}}$, đối với Jacobi quay vít được xác định với các vector vận tốc góc và tuyến tính có thứ tự ngược so với Jacobi quy ước.

Nói chung, Jacobi là ma trận $m \times n$, với m là số bậc tự do của không gian bộ tác động cuối và n là số biến khớp tác động. Với cơ cấu chấp hành không gian 6 bậc tự do, m = n = 6, Jacobi là ma trận vuông 6×6. Với cơ cấu chấp hành có bậc tự do nhỏ hơn 6, trạng thái vận tốc bộ tác động cuối có thể chỉ có vector vận tốc góc, vector vận tốc tuyến tính, hoặc tổ hợp vài thành phần vận tốc góc và tuyến tính. Ví dụ, cơ cấu chấp hành phẳng có không gian hoạt động 2 chiều. Vector 3 thành phần $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \omega_z]^T$ là đủ để biểu diễn trạng thái vận tốc bộ tác động cuối. Từ đó, Jacobi giảm thành ma trận 3×3. Tương tự, đối với thiết bị định vị điểm, $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z]^T$, và đối với cơ cấu định hướng vật thể,: $\dot{\mathbf{x}} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$. Đối với cơ cấu chấp hành có bậc tự do dư, sẽ có n > 6. Ở đây chỉ xét các cơ cấu có bậc tự do không quá 6.

Ma trận Jacobi quy ước

Như đã đề cập, điểm bất kỳ trên bộ tác động cuối có thể được chọn để tìm trạng thái vận tốc của bộ tác động cuối. Lựa chọn thuận tiện là điểm gốc, O_n, của hệ tọa độ bộ tác đông cuối. Trạng thái vận tốc bộ tác động cuối được tính theo các tỷ suất khớp như sau:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n}[\dot{\theta}_1(z_{i-1} \times {}^{i-1}p_n^*) + z_{i-1}\dot{d}_i] \quad (4.60)$$

$$\omega_n = \sum_{i=1}^{n}\dot{\theta}_1 z_{i-1} \quad (4.61)$$

với $\dot{\theta}_i$ và $\dot{d}_i$ là tỷ suất quay và tịnh tiến theo trục khớp thứ i; z_{i-1} là vector đơn vị theo trục khớp thứ i; và ${}^{i-n}p^*_n$ là vector xác định từ gốc O_{i-1} của hệ tọa độ khớp thứ i-1 đến gốc của hệ tọa độ bộ tác động cuối (Hình 4.6). Chú ý, các vector trong pt (4.60), (4.61) được tính trong hệ tọa độ cố định (x_o, y_o, z_o).

Phương trình (4.60) và (4.61) viết dưới dạng ma trận:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J\dot{q} \quad (4.62)$$

trong đó: $J = [J_1, J_2, \ldots, J_n]$

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times {}^{i-1}p_n^* \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \quad \text{đối với khớp quay}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{đối với khớp lăng trụ}$$

Vế trái pt (4.62) là vector 6×1 gồm các phần tử của v_n và ω_n, vế phải là tích của ma trận Jacobi với vector các tỷ suất khớp. Vector các tỷ suất khớp gồm tất cả các tỷ suất khớp tác động. Cột thứ i trong ma trận Jacobi, j_i, là tác động của tỷ suất khớp thứ i lên trạng thái vận tốc bộ tác động cuối.

Phương trình (4.62) dùng để tính ma trận Jacobi, xác định chiều và vị trí mỗi trục khớp theo các phép tính ma trận sau:

$$z_{i-1} = {}^0R_{i-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$${}^{i-1}p_n^* = {}^0R_{i-1}\,{}^{i-1}r_i + {}^ip_n^* \quad (4.64)$$

với $\quad {}^{i-1}r_i = \begin{bmatrix} a_i c\theta_i \\ a_i s\theta_i \\ d_i \end{bmatrix}$

là vector $\overline{O_{i-1}O_i}$ biểu diễn trong hệ tọa độ khâu thứ i-1, còn ${}^{i-1}\mathbf{p}^*_i$ là vector $\overline{O_{i-1}O_n}$ biểu diễn trong hệ tọa độ cố định. Khi biết ma trận Jacobi, vận tốc bộ tác động cuối được tính từ pt (4.62) với tỷ suất khớp bất kỳ cho trước. Nếu biết vận tốc bộ tác động cuối, biến đổi ngược pt (4.62) sẽ tìm được tỷ suất khớp.

Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do

Trên Hình 4.7, cơ cấu này có hai khớp quay với hai trục; hệ tọa độ gắn vào mỗi khâu theo qui ước D-H . Hệ tọa độ (x_o , y_o) gắn vào đế tại điểm O, trục x_0 hướng sang phải.

Áp dụng pt (4.63) và (4.64) để tính các vector sau:

$$z_0 = z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

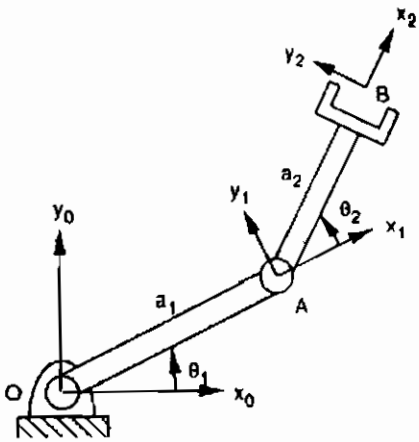
$${}^1p_2^* = \begin{bmatrix} a_2 c\theta_{12} \\ a_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0p_2^* = \begin{bmatrix} a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} \\ a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

với $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$. Chú ý, các biểu thức trên được tính theo hình học các khâu không sử dụng ma trận biến đổi D-H. Thay các biểu thức trên vào pt (4.62):

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 - a_2 s\theta_{12} & -a_2 s\theta_{12} \\ a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} & a_2 c\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \qquad (4.65)$$

từ đó ma trận Jacobi là:



Hình 4-7. Cơ cấu chấp hành phẳng 2R, 2-dof.

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 - a_2 s\theta_{12} & -a_2 s\theta_{12} \\ a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} & a_2 c\theta_{12} \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành phẳng 3 bậc tự do

Xét ma trận Jacobi quy ước trong cơ cấu chấp hành phẳng 3 bậc tự do (Hình 2.3), từ các pt (4.63), (4.64) với i = 1, 2, 3 có thể tính các vector:

$$z_0 = z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2p_3^* = \begin{bmatrix} a_3 c\theta_{123} \\ a_3 s\theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1p_3^* = \begin{bmatrix} a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123} \\ a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0p_3^* = \begin{bmatrix} a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123} \\ a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

trong đó, $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$ và $\theta_{123} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

Thay các biểu thức trên vào pt (4.32):

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

với

$$J = \begin{bmatrix} -(a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123}) & -(a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123}) & -a_3 s\theta_{123} \\ (a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) & (a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) & a_3 c\theta_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Chú ý: nếu điểm quy chiếu được chọn tại gốc hệ tọa độ (x_2, y_2), ma trận Jacobi có dạng:

$$J = \begin{bmatrix} -(a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12}) & -(a_2 s\theta_{12}) & 0 \\ (a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12}) & (a_2 c\theta_{12}) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

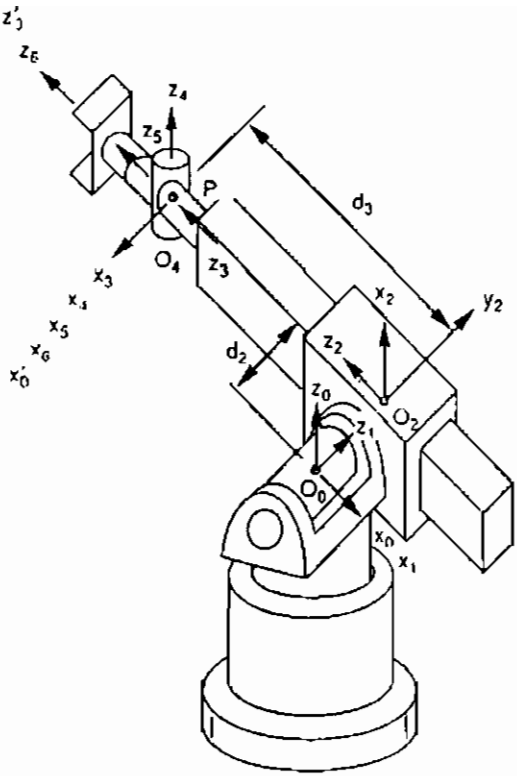
Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành Stanford

Hình 4.8 minh họa sơ đồ tay máy Stanford đã trình bày trong Chương 2. Để đơn giản hóa sự phân tích, gốc tọa độ cố định được đặt tại giao điểm của hai trục khớp đầu; gốc hệ tọa độ (x_6, y_6, z_6) đặt tại giao điểm ba trục khớp cuối.

Các thông số khâu D-H được liệt kê trong Bảng 4.1; ma trận biến đổi D-H là:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & 0 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 4-8. Tay máy Stanford.

$$ {}^{4}A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^{5}A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Chiều $\mathbf{z}_{i-1}$ của các trục khớp được tính theo pt (4.63):

$$ \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.69} $$

Bảng 4-1. Các thông số khâu D-H của tay máy Stanford.

Khớp i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	-90^0	0	0	θ_1 (biến)
2	90^0	0	d_2 (hằng)	θ_2 (biến)
3	0^0	0	d_3 (hằng)	-90^0 (biến)
4	-90^0	0	0	θ_4 (biến)
5	90^0	0	0	θ_5 (biến)
6	0^0	0	0	θ_6 (biến)

$$z_1 = {}^0R_1\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-s\theta_1\\c\theta_1\\0\end{bmatrix} \tag{4.70}$$

$$z_2 = z_3 = {}^0R_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c\theta_1 s\theta_2\\s\theta_1 s\theta_2\\c\theta_2\end{bmatrix} \tag{4.71}$$

$$z_4 = {}^0R_4\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-s\theta_1 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_2 c\theta_4\\c\theta_1 s\theta_4 + s\theta_1 c\theta_2 c\theta_4\\-s\theta_2 c\theta_4\end{bmatrix} \tag{4.72}$$

$$z_5 = {}^0R_5\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s\theta_1 c\theta_4 s\theta_5 + c\theta_1 c\theta_2 s\theta_4 s\theta_5 + c\theta_1 s\theta_2 c\theta_5\\-c\theta_1 c\theta_4 s\theta_5 + s\theta_1 c\theta_2 s\theta_4 s\theta_5 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_5\\-s\theta_2 s\theta_4 s\theta_5 + c\theta_2 c\theta_5\end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Áp dụng pt (4.64), sẽ tìm được các vector vị trí ${}^{i-1}p_6^*$:

$${}^3p_6^* = {}^4p_6^* = {}^5p_6^* = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{4.74}$$

$${}^2p_6^* = \begin{bmatrix}d_3 c\theta_1 s\theta_2\\d_3 s\theta_1 s\theta_2\\d_3 c\theta_2\end{bmatrix} \tag{4.75}$$

$$
{}^{1}p_6^* = \begin{bmatrix} d_3c\theta_1s\theta_2 - d_2s\theta_1 \\ d_3s\theta_1s\theta_2 + d_2c\theta_1 \\ d_3c\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.76}
$$

$$
{}^{0}p_6^* = \begin{bmatrix} d_3c\theta_1s\theta_2 - d_2s\theta_1 \\ d_3s\theta_1s\theta_2 + d_2c\theta_1 \\ d_3c\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.77}
$$

Tìm ma trận Jacobi bằng cách áp dụng pt (4.62) cột theo cột:

$$
\begin{bmatrix} v_{6x} \\ v_{6y} \\ v_{6z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}
$$

trong đó ma trận Jacobi là:

$$
J = \begin{bmatrix} -d_3s\theta_1s\theta_2 - d_2c\theta_1 & d_3c\theta_1c\theta_2 & c\theta_1s\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_3c\theta_1s\theta_2 - d_2s\theta_1 & d_3s\theta_1c\theta_2 & s\theta_1s\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_3s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta_1 & 0 & c\theta_1s\theta_2 & j_{45} & j_{46} \\ 0 & c\theta_1 & 0 & s\theta_1s\theta_2 & j_{55} & j_{56} \\ 1 & 0 & 0 & c\theta_2 & j_{65} & j_{66} \end{bmatrix} \tag{4.78}
$$

với j_{45}, j_{55}, j_{65} là các thành phần x, y, z của vector đơn vị z_4 ; và j_{46}, j_{56}, j_{66} là các thành phần của z_5 .

Các trục 4, 5, 6 đồng qui tại một điểm, nên tất cả thành phần trong ma trận con 3×3 phía trên bên phải là bằng zero.

Ma trận Jacobi quay vít

Trong phần trước, gốc của hệ tọa độ tay máy được chọn làm điểm quy chiếu. Để tính ma trận Jacobi quay vít, việc chọn gốc hệ tọa độ cố định làm điểm quy chiếu sẽ thuận tiện hơn, các tọa độ quay vít có thể được dùng để lập công thức ma trận này. Gọi v_u là vận tốc một điểm trên bộ

tác động cuối của cơ cấu nối tiếp, trùng tức thời với gốc hệ quy chiếu cố định. Áp dụng pt (4.52) để tính vector vận tốc bộ tác động cuối:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \omega_n \\ v_0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \hat{\$}_i \tag{4.79}$$

với sự quay đơn vị được xác định theo pt (4.49), hoặc pt (4.50).

Trên pt (4.79), ma trận Jacobi đơn giản là tập hợp các sự quay đơn vị liên hệ với các trục khớp. Các tọa độ của các khớp quay đơn vị là các phần tử cột của ma trận Jacobi:

$$J = \left[\hat{\$}_1, \hat{\$}_2, \ldots, \hat{\$}_n\right] \tag{4.80}$$

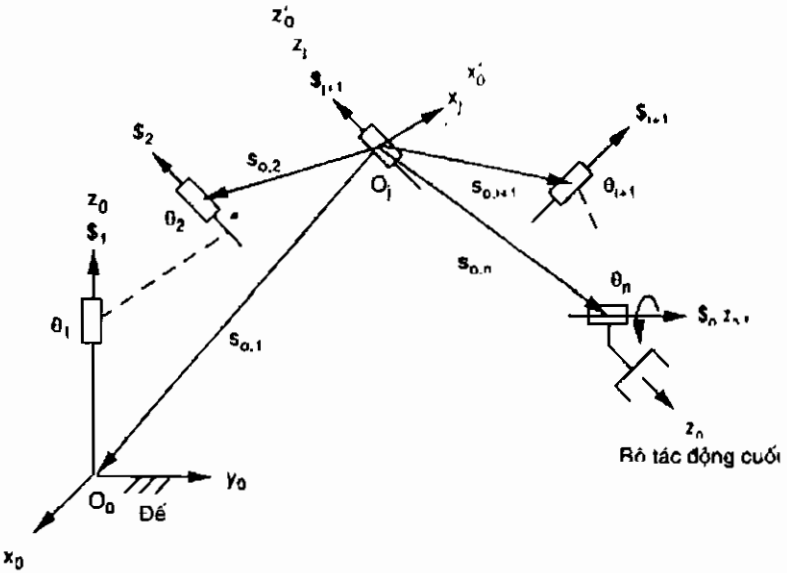
Để tính ma trận Jacobi, trước hết cần xác định chiều và vị trí các trục khớp ứng với hệ quy chiếu bằng cách xét hình học của cơ cấu. Nếu các hệ tọa độ khớp (x_o, y_o, z_o) đến (x_6, y_6, z_6) được thiết lập theo qui ước D-H, $\mathbf{s}_i$ và $\mathbf{s}_{0i}$ được lấy từ cột thứ ba và thứ tư của ${}^0A_{i-1}$.

Chú ý, các tọa độ quay khớp có thể được xác định trong hệ quy chiếu bất kỳ. Ma trận Jacobi có thể được đơn giản hóa nếu hệ quy chiếu được chọn tại điểm trùng hợp tức thời với một trong các hệ tọa độ khâu trung gian, thường là khâu 3 hoặc 4. Nếu hình học khâu gồm các trục khớp đồng qui, cần chọn gốc hệ quy chiếu tức thời tại điểm đồng qui đó. Nếu hình học khâu gồm các trục khớp song song, các trục tọa độ hệ quy chiếu tức thời thẳng hàng với các trục song song này.

Xét hệ quy chiếu tức thời (x'_o, y'_o, z'_o) trùng với hệ tọa độ khâu (x_j, y_j, z_j) (Hình 4.9). Chiều và vị trí các trục khớp theo hệ quy chiếu (x'_o, y'_o, z'_o) được cho tương ứng theo cột thứ ba và thứ tư của ${}^jA_i$:

$$\begin{bmatrix} s_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix} = {}^jA_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

$$\begin{bmatrix} s_{0,i+1} \\ 1 \end{bmatrix} = {}^jA_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.82}$$



Hình 4-9. Các tọa độ quay vít theo hệ quy chiếu tức thời.

Các tọa độ quay nêu trên được tính bằng cách sử dụng các công thức đệ qui:

1. *Điều kiện ban đầu.* Bắt đầu với $s_{j+1} = [0,0,1]^T$ và $s_{0,j+1} = [0,0,0]^T$
2. *Tính toán thuận.* Với i = j+1, j +2, đến n-1, tính được:

$$s_{i+1} = ({}^jR_i)({}^iz_i)$$

$$s_{0,i+1} = s_{0,i} + ({}^jR_i)({}^ir_i)$$

$${}^jR_{i+1} = ({}^jR_i)({}^jR'_{i+1}) \qquad (4.83)$$

3. *Tính toán ngược.* Với i= j-1, j-2, đến 0, tính được:

$$s_{i+1} = ({}^jR_i)({}^iz_i)$$

$$s_{0,i+1} = s_{0,i+2} - ({}^jR_{i-1})({}^{i-1}r_{i-1})$$

$${}^jR_{i-1} = ({}^jR_i)({}^iR_{i-1}) \qquad (4.84)$$

với ${}^{i-1}R_i$ là ma trận quay của khâu i ứng với khâu i-1, ${}^{i}R_{i-1} = ({}^{i-1}R_i)^T$.

$$ {}^{i}z_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

là vector đơn vị trên trục z_i và được biểu diễn trong hệ tọa độ khâu thứ i.

$$ {}^{i}r_i = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i s\alpha_i \\ d_i c\alpha_i \end{bmatrix} $$

là vector vị trí xác định từ O_{i-1} đến O_i và được biểu diễn trong hệ tọa độ khâu thứ i.

Tập hợp các sự quay đơn vị tính từ các công thức đệ qui nêu trên:

$$ \begin{bmatrix} {}^{j}\omega_n \\ {}^{j}v_0 \end{bmatrix} = {}^{J}J\dot{q} \qquad (4.85) $$

ký hiệu j trong pt (4.85) cho biết trạng thái vận tốc bộ tác động cuối được biểu diễn trong hệ quy chiếu trùng hợp tức thời với hệ tọa độ khâu thứ j. Nếu biết các tỷ suất khớp, pt (4.85) được dùng để tính trạng thái vận tốc bộ tác động cuối. Nếu biết trạng thái vận tốc bộ tác động cuối, cần biến đổi ngược pt (4.85) để tính các tỷ suất khớp. Sau đây là các ví dụ minh họa.

Ma trận Jacobi quay vít của cơ cấu chấp hành Stanford

Xét hệ quy chiếu tức thời (x'_0, y'_0, z'_0) trùng với hệ tọa độ khâu (x_3, y_3, z_3) (Hình 4.8). Điều kiện ban đầu với j = 3 là $s_4 = [0, 0, 1]^T$ và $s_{0,4} = [0, 0, 0]^T$

Áp dụng pt (4.83), sẽ tìm được chiều và vị trí trục khớp thứ năm và thứ sáu.

Với i=4:

$$ s_5 = {}^{3}R_4\, {}^{4}z_4 = \begin{bmatrix} -s\theta_4 \\ c\theta_4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.86) $$

$$s_{0,5} = s_{0,4} + {}^3R_4\,{}^4r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

$${}^3R_5 = {}^3R_4\,{}^4R_5 = \begin{bmatrix} c\theta_4 c\theta_5 & -s\theta_4 & c\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 c\theta_5 & c\theta_4 & s\theta_4 s\theta_5 \\ -s\theta_5 & 0 & c\theta_5 \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

Với i=5:

$$s_6 = {}^3R_5\,{}^5z_5 = \begin{bmatrix} c\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 s\theta_5 \\ c\theta_5 \end{bmatrix} \tag{4.89}$$

$$s_{0,6} = s_{0,5} + {}^3R_5\,{}^5r_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.90}$$

Áp dụng pt (4.84), tìm được chiều và vị trí trục khớp thứ nhất, thứ hai và thứ ba.

Với i=2:

$$s_3 = {}^3R_2\,{}^2z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

$$s_{0,3} = s_{0,4} - {}^3R_3\,{}^3r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_3 \end{bmatrix} \tag{4.92}$$

$${}^3R_1 = {}^3R_2\,{}^2R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.93}$$

Với i=1:

$$s_2 = {}^3R_1\,{}^1z_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

$$s_{0,2} = s_{0,3} - {}^3R_2\,{}^2r_2 = \begin{bmatrix} d_2 \\ 0 \\ -d_3 \end{bmatrix} \tag{4.95}$$

$${}^3R_0 = {}^3R_1\,{}^1R_0 = \begin{bmatrix} s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 \\ c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_2 \\ c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.96}$$

Với i=0:

$$s_1 = {}^3R_0\,{}^0z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.97}$$

$$s_{0,1} = s_{0,2} - {}^3R_1\,{}^1r_1 = \begin{bmatrix} d_2 \\ 0 \\ -d_3 \end{bmatrix} \tag{4.98}$$

Áp dụng pt (4.49) và (4.50), cột theo cột, sẽ tính được ma trận Jacobi:

$${}^3J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -s\theta_4 & c\theta_4 s\theta_5 \\ -s\theta_2 & 0 & 0 & 0 & c\theta_4 & s\theta_4 s\theta_5 \\ c\theta_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & c\theta_5 \\ -d_3 s\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 c\theta_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 s\theta_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.99}$$

Ma trận Jacobi được đơn giản hóa rõ rệt khi biểu diễn trong hệ quy chiếu tức thời. Thay pt (4.99) vào (4.85):

$$\begin{aligned}
{}^3\omega_x &= -\dot\theta_2 - \dot\theta_5 s\theta_4 + \dot\theta_6 c\theta_4 s\theta_5 \\
{}^3\omega_y &= -\dot\theta_1 s\theta_2 + \dot\theta_5 c\theta_4 + \dot\theta_6 s\theta_4 s\theta_5 \\
{}^3\omega_z &= \dot\theta_1 c\theta_2 + \dot\theta_4 + \dot\theta_6 c\theta_5 \\
{}^3v_{ox} &= -\dot\theta_1 d_3 s\theta_2 \\
{}^3v_{oy} &= -\dot\theta_1 d_2 c\theta_2 + \dot\theta_2 d_3 \\
{}^3v_{oz} &= -\dot\theta_1 d_2 s\theta_2 + \dot d_3
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Biến đổi ngược pt (4.100):

$$\dot{\theta}_1 = \frac{{}^3v_{ox}}{d_3 s\theta_2}$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{{}^3v_{oy} + \dot{\theta}_1 d_2 c\theta_2}{d_3}$$

$$\dot{d}_3 = {}^3v_{oz} + \dot{\theta}_1 d_2 s\theta_2$$

$$\dot{\theta}_5 = -{}^3\omega_x s\theta_4 + {}^3\omega_y c\theta_4 + \dot{\theta}_1 s\theta_2 c\theta_4 - \dot{\theta}_2 s\theta_4$$

$$\dot{\theta}_6 = \frac{{}^3\omega_x c\theta_4 + {}^3\omega_y s\theta_4 + \dot{\theta}_1 s\theta_2 s\theta_4 + \dot{\theta}_2 c\theta_4}{s\theta_5}$$

$$\dot{\theta}_4 = {}^3\omega_z - \dot{\theta}_1 c\theta_2 - \dot{\theta}_6 c\theta_5 \qquad (4.101)$$

Từ đó, nếu biết các tỷ suất khớp $\dot{q} = \left[\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{d}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6\right]$, trạng thái vận tốc bộ tác động cuối ${}^3\omega_n$ và ${}^3\mathbf{v}_o$ được tính trực tiếp từ pt (4.100). Nếu biết trạng thái vận tốc bộ tác động cuối, các tỷ suất khớp có thể tìm được từ pt (4.101) mà không cần thông qua nghịch đảo số của ma trận Jacobi.

Ma trận Jacobi quay vít của cơ cấu chấp hành khuỷu

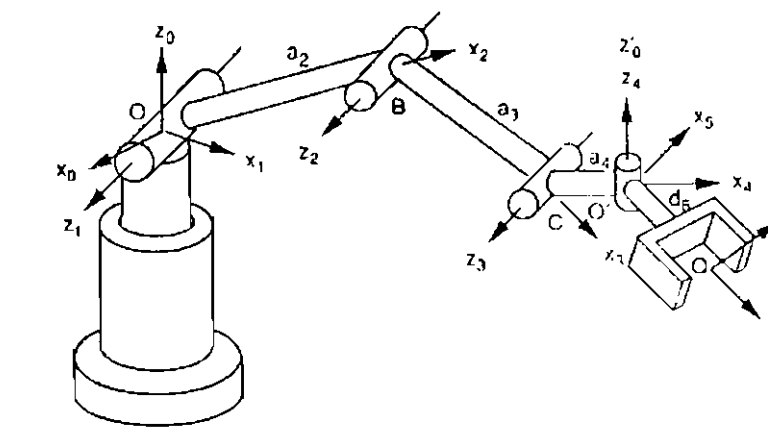
Hình 4.10 minh họa sơ đồ cơ cấu chấp hành khuỷu đã xét ở Chương 2, cần tìm ma trận Jacobi của cơ cấu này. Các hệ tọa độ được cho trên Hình, các thông số khâu D-H được cho trong Bảng 4.2 , từ đó các ma trận biến đổi D-H là:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_3 c\theta_3 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & a_3 s\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 & a_4 c\theta_4 \\ s\theta_4 & 0 & c\theta_4 & a_4 s\theta_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bảng 4-2. Các thông số khâu của cơ cấu chấp hành khuỷu

Khớp i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\pi/2$	0	0	biến
2	0	a_2	0	biến
3	0	a_3	0	biến
4	$-\pi/2$	a_4	0	biến
5	$\pi/2$	0	0	biến
6	0	0	d_5	biến



Hình 4-10. Cơ cấu chấp hành khuỷu.

$$^4A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & 0 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ^5A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hệ quy chiếu tức thời (x'_0, y'_0, z'_0) thẳng hàng với hệ tọa độ khâu (x_4, y_4, z_4) (Hình 4.10). Điều kiện ban đầu với j = 4 là $s_5 = [0, 0, 1]^T$ và $s_{0,5} = [0, 0, 1]^T$

Áp dụng pt (4.83), sẽ tìm được chiều và vị trí trục khớp thứ sáu:

Với i = 5:

$$s_6 = {}^4R_5\,{}^5z_5 = \begin{bmatrix} s\theta_5 \\ -c\theta_5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

$$s_{0.6} = s_{0.5} + {}^4R_5\,{}^5r_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.103}$$

Áp dụng pt (4.84), sẽ tìm được chiều và vị trí các trục khớp thứ nhất, thứ hai và thứ ba:

Với i=3:

$$s_4 = {}^4R_3\,{}^3z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.104}$$

$$s_{0.4} = s_{0.5} - {}^4R_4\,{}^4r_4 = \begin{bmatrix} -a_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.105}$$

$${}^4R_2 = {}^4R_3\,{}^3R_2 = \begin{bmatrix} c\theta_{34} & s\theta_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s\theta_{34} & c\theta_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.106}$$

Với i=2:

$$s_3 = {}^4R_2\,{}^2z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.107}$$

$$s_{0.3} = s_{0.4} - {}^4R_3\,{}^3r_3 = \begin{bmatrix} -a_3c\theta_4 - a_4 \\ 0 \\ a_3s\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.108}$$

$${}^4R_1 = {}^4R_2\,{}^2R_1 = \begin{bmatrix} c\theta_{234} & s\theta_{234} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -s\theta_{234} & c\theta_{234} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.109}$$

Với i=1:

$$s_2 = {}^4R_1\,{}^1z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.110}$$

$$s_{0,2} = s_{0,3} - {}^4R_2\,{}^2r_2 = \begin{bmatrix} -a_2c\theta_{34} - a_3c\theta_4 - a_4 \\ 0 \\ a_2s\theta_{34} + a_3s\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.111}$$

$${}^4R_0 = {}^4R_1\,{}^1R_0 = \begin{bmatrix} c\theta_1c\theta_{234} & s\theta_1c\theta_{234} & s\theta_{234} \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ -c\theta_1s\theta_{234} & -s\theta_1s\theta_{234} & c\theta_{234} \end{bmatrix} \tag{4.112}$$

Với i=0:

$$s_1 = {}^4R_0\,{}^0z_0 = \begin{bmatrix} s\theta_{234} \\ 0 \\ c\theta_{234} \end{bmatrix} \tag{4.113}$$

$$s_{0,1} = s_{0,2} - {}^4R_1\,{}^1r_1 = \begin{bmatrix} -a_2c\theta_{34} - a_3c\theta_4 - a_4 \\ 0 \\ a_2s\theta_{34} + a_3s\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.114}$$

Áp dụng pt (4.49) để tính ma trận Jacobi, cột theo cột:

$${}^4J = \begin{bmatrix} s\theta_{234} & 0 & 0 & 0 & 0 & s\theta_5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -c\theta_5 \\ c\theta_{234} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2s\theta_{34} + a_3s\theta_4 & a_3s\theta_4 & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2c\theta_{34} + a_3c\theta_4 + a_4 & a_3c\theta_4 + a_4 & a_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.115}$$

trong đó $x_{51} = a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23} + a_4c\theta_{234}$. Phương trình (4.115) liên hệ các tỷ suất khớp với trạng thái vận tốc của bộ tác động cuối. Số 4 trong ${}^4J$ biểu thị sự quay khớp, $\$_i$, i=1, 2, ..., n được biểu diễn trong hệ quy chiếu trùng tức thời với hệ tọa độ khâu thứ 4. Thay pt (4.115) vào (4.85):

$$
\begin{aligned}
{}^4\omega_x &= \dot{\theta}_1 s\theta_{234} + \dot{\theta}_6 s\theta_5 \\
{}^4\omega_y &= -\dot{\theta}_{234} - \dot{\theta}_6 c\theta_5 \\
{}^4\omega_z &= \dot{\theta}_1 c\theta_{234} + \dot{\theta}_5 \\
{}^4v_{ox} &= \dot{\theta}_2 a_2 s\theta_{34} + \dot{\theta}_{23} a_3 s\theta_4 \\
{}^4v_{oy} &= \dot{\theta}_1 (a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} + a_4 c\theta_{234}) \\
{}^4v_{oz} &= \dot{\theta}_2 a_2 c\theta_{34} + \dot{\theta}_{23} a_3 c\theta_4 + \dot{\theta}_{234} a_4
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

Nếu cho trước các tỷ suất khớp, trạng thái vận tốc bộ tác động cuối được tính trực tiếp từ pt (4.116). Nếu cho trước trạng thái vận tốc bộ tác động cuối, các tỷ suất khớp được xác định theo chuỗi thứ tự bằng biến đổi nghịch đảo:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{{}^4v_{oy}}{a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} + a_4 c\theta_{234}}$$

$$\dot{\theta}_5 = {}^4\omega_z - \dot{\theta}_1 c\theta_{234}$$

$$\dot{\theta}_6 = \frac{{}^4\omega_x - \dot{\theta}_1 s\theta_{234}}{s\theta_5}$$

$$\dot{\theta}_{234} = -{}^4\omega_y - \dot{\theta}_6 c\theta_5$$

$$\dot{\theta}_{23} = \frac{s\theta_{34}({}^4v_{oz} - a_4\dot{\theta}_{234}) - c\theta_{34}\,{}^4v_{oz}}{a_3 s\theta_3}$$

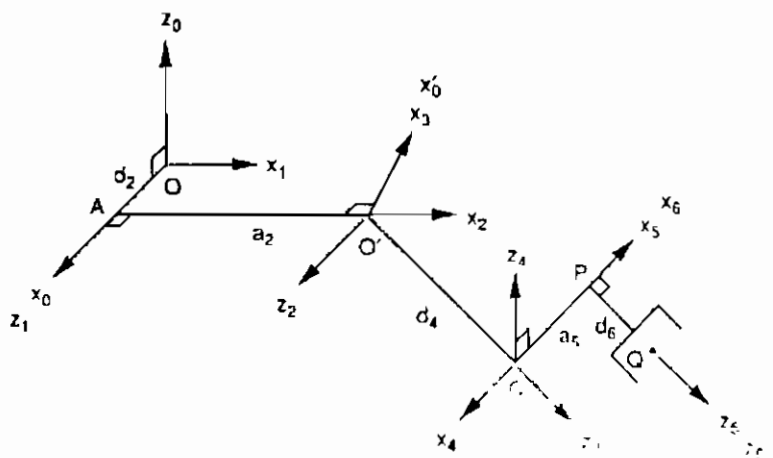
$$\dot{\theta}_2 = \frac{c\theta_4\,{}^4v_{ox} - s\theta_4({}^4v_{oz} - a_4\dot{\theta}_{234})}{a_2 s\theta_3}$$

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_{23} - \dot{\theta}_2$$

$$\dot{\theta}_4 = \dot{\theta}_{234} - \dot{\theta}_{23} \tag{4.117}$$

Ma trận Jacobi quay vít của cơ cấu chấp hành 6R cận tổng quát

Trong các ví dụ trước, có thể lấy giải tích ngược các ma trận Jacobi từ sự bố trí hình học đặc biệt của các khâu. Sự phức tạp của ma trận Jacobi tăng khi dạng hình học của cơ cấu trở nên tổng quát hơn. Tuy nhiên, để đơn giản hóa, có thể chọn hệ tọa độ quy chiếu thích hợp. Trong ví dụ này, để minh họa điều đó, sẽ xét ma trận quay vít của cơ cấu chấp hành 6R, 6 bậc tự do cận tổng quát (Hình 4.11).



Hình 4-11. Cơ cấu chấp hành cận tổng quát.

Trong cơ cấu này, trục khớp thứ nhất và thứ hai trực giao, trục khớp thứ hai và ba song song; trục khớp thứ ba và tư trực giao; trục khớp thứ tư và năm trực giao; trục khớp thứ năm và sáu trực giao và cách nhau bằng khoảng cách a_5. Các thông số khâu D-H được liệt kê trong Bảng 4.3.

Bảng 4-3. Các thông số khâu của cơ cấu cận tổng quát.

Khớp i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\pi/2$	0	0	biến
2	0	a_2	d_2	biến
3	$\pi/2$	0	0	biến
4	$\pi/2$	0	d_4	biến
5	$\pi/2$	a_5	0	biến
6	0	0	d_6	biến

Các ma trận biến đổi D-H có dạng:

$$ {}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2A_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & 0 & s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & 0 & -c\theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & s\theta_4 & 0 \\ s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^4A_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & s\theta_5 & a_5c\theta_2 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 & a_5s\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5A_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ s\theta_6 & c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Đặt hệ quy chiếu tức thời (x'_o, y'_o, z'_o) thẳng hàng với hệ tọa độ khâu (x_3, y_3, z_3). Điều kiện ban đầu với j=3 là $s_4 = [0,0,1]^T$ và $s_{0,4} = [0,0,0]^T$.

Áp dụng pt (4.83), có thể tính chiều và vị trí trục khớp thứ năm và sáu:

Với i=4:

$$ s_5 = {}^3R_4\,{}^4z_4 = \begin{bmatrix} s\theta_4 \\ -c\theta_4 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.118} $$

$$ s_{0,5} = s_{0,4} + {}^3R_4\,{}^4r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \end{bmatrix} \tag{4.119} $$

$$ {}^3R_5 = {}^3R_4\,{}^4R_5 = \begin{bmatrix} c\theta_4c\theta_5 & s\theta_4 & c\theta_4s\theta_5 \\ s\theta_4c\theta_5 & -c\theta_4 & s\theta_4s\theta_5 \\ s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 \end{bmatrix} \tag{4.120} $$

Với i=5:

$$s_6 = {}^3R_5\,{}^5z_5 = \begin{bmatrix} c\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 s\theta_5 \\ -c\theta_5 \end{bmatrix} \tag{4.121}$$

$$s_{0,6} = s_{0,5} + {}^3R_5\,{}^5r_5 = \begin{bmatrix} a_5 c\theta_4 c\theta_5 \\ a_5 s\theta_4 c\theta_5 \\ d_4 + a_5 s\theta_5 \end{bmatrix} \tag{4.122}$$

Áp dụng pt (4.84), chiều và vị trí trục khớp thứ nhất, hai và ba là:

Với i=2:

$$s_3 = {}^3R_2\,{}^2z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.123}$$

$$s_{0,3} = s_{0,4} - {}^3R_3\,{}^3r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.124}$$

$${}^3R_1 = {}^3R_2\,{}^2R_1 = \begin{bmatrix} c\theta_{23} & s\theta_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s\theta_{23} & -c\theta_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.125}$$

Với i=1:

$$s_2 = {}^3R_1\,{}^1z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.126}$$

$$s_{0,2} = s_{0,3} - {}^3R_2\,{}^2r_2 = \begin{bmatrix} -a_2 c\theta_3 \\ -d_2 \\ -a_2 s\theta_3 \end{bmatrix} \tag{4.127}$$

$${}^3R_0 = {}^3R_1\,{}^1R_0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{23} & s\theta_1 c\theta_{23} & s\theta_{23} \\ s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 \\ c\theta_1 s\theta_{23} & s\theta_1 s\theta_{23} & -c\theta_{23} \end{bmatrix} \tag{4.128}$$

Với i=0:

$$s_1 = {}^3R_0\,{}^0z_0 = \begin{bmatrix} s\theta_{23} \\ 0 \\ -c\theta_{23} \end{bmatrix} \tag{4.129}$$

$$s_{0,1} = s_{0,2} - {}^3R_1\,{}^1r_1 = \begin{bmatrix} -a_2c\theta_3 \\ -d_2 \\ -a_2s\theta_3 \end{bmatrix} \tag{4.130}$$

Áp dụng pt (4.49), (4.50) để tính ma trận Jacobi cột theo cột, sẽ có kết quả:

$${}^3J = \begin{bmatrix} s\theta_{23} & 0 & 0 & 0 & s\theta_4 & c\theta_4 s\theta_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -c\theta_4 & s\theta_4 s\theta_5 \\ -c\theta_{23} & 0 & 0 & 1 & 0 & -c\theta_5 \\ d_2c\theta_{23} & a_2s\theta_3 & 0 & 0 & d_4c\theta_4 & -s\theta_4(a_5 + d_4s\theta_5) \\ -a_2c\theta_2 & 0 & 0 & 0 & d_4s\theta_4 & c\theta_4(a_5 + d_4s\theta_5) \\ d_2s\theta_{23} & -a_2c\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.131}$$

Ma trận Jacobi đủ đơn giản để thực hiện giải tích ngược.

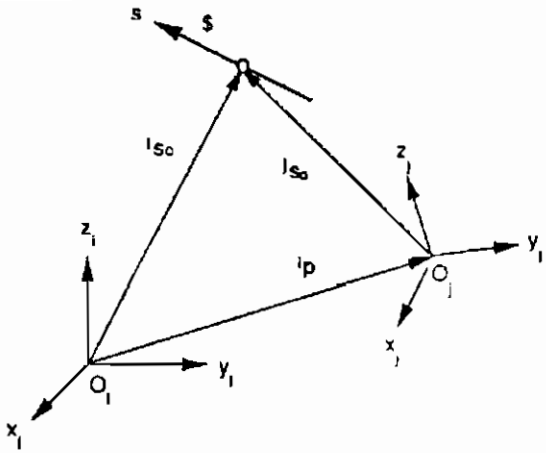
Biến đổi tọa độ quay vít

Phần trước đã trình bày ma trận Jacobi có thể được đơn giản hóa khi sử dụng hệ quy chiếu trùng với hệ tọa độ khâu trung gian trong cơ cấu. Tuy nhiên, trong thực tế, trạng thái vận tốc bộ tác động cuối thường được quy chiếu trong hệ cố định (x_o, y_o, z_o). Do đó, cần biến đổi trạng thái vận tốc từ hệ quy chiếu cố định sang hệ quy chiếu tức thời, để có thể tính các tỷ suất khớp.

Trên Hình 4.12, (x_i, y_i, z_i) và (x_j, y_j, z_j) là hai hệ quy chiếu. Vị trí O_j liên hệ với hệ (x_i, y_i, z_i) theo ${}^ip = [p_x, p_y, p_z]^T$ và định hướng của hệ (x_j, y_j, z_j) liên hệ với hệ tọa độ (x_i, y_i, z_i) được mô tả bằng ma trận quay ${}^iR_j$. Sự quay vít \$ liên hệ với hệ tọa độ (x_i, y_i, z_i) theo ${}^i\$$ và với hệ (x_j, y_j, z_j) theo ${}^j\$$.

Từ định nghĩa quay vít:

$${}^i\$ = \begin{bmatrix} {}^is \\ {}^is_0 \times {}^is + \lambda\,{}^is \end{bmatrix} \tag{4.132}$$



Hình 4-12. Biến đổi tọa độ quay vít

$$^j\$ = \begin{bmatrix} ^js \\ ^js_0 \times {}^js + \lambda {}^js \end{bmatrix} \tag{4.133}$$

Vector đường và vector moment của 2 sự quay quan hệ với nhau theo phép biến đổi:

$$^is = {}^iR_j\,{}^js \tag{4.134}$$

$$^is_0 = {}^ip + {}^iR_j\,{}^js_0 \tag{4.135}$$

Từ đó:

$$^is_0 \times {}^is = ({}^ip + {}^iR_j\,{}^js_0) \times {}^is = {}^ip \times ({}^iR_j\,{}^js) + {}^iR_j({}^js_0 \times {}^js) \tag{4.136}$$

Thay pt (4.134) đến (4.136) vào (4.132):

$$^i\$ = \begin{bmatrix} ^iR_j\,{}^js \\ ^iR_j({}^js_0 \times {}^js) + {}^ip \times ({}^iR_j\,{}^js) + \lambda\,{}^iR_j\,{}^js \end{bmatrix} \tag{4.137}$$

Phương trình (4.137) viết dưới dạng ma trận:

$$^i\$ = {}^i\tilde{T}_j\,{}^j\$ \tag{4.138}$$

trong đó:

$$
{}^{i}\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} {}^{i}R_j & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ {}^{i}W_j\,{}^{i}R_j & \vdots & {}^{i}R_j \end{bmatrix} \tag{4.139}
$$

là ma trận 6×6, và

$$
{}^{i}W_j = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \tag{4.140}
$$

là ma trận đối xứng 3×3 biểu diễn vector O_iO_j trong hệ tọa độ thứ i.

Do ${}^{i}W_j$ đối xứng và ${}^{i}R_j$ vuông, nên ma trận nghịch đảo là:

$$
{}^{i}\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} {}^{i}R_j^T & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ {}^{i}R_j^T\,{}^{i}W_j^T & \vdots & {}^{i}R_j^T \end{bmatrix} \tag{4.141}
$$

Nếu biết sự quay trong khung thứ j, có thể tính biểu thức sự quay đó trong hệ tọa độ thứ i bằng cách áp dụng pt (4.139), và ngược lại sử dụng pt (4.141).

Về phương diện hình học, 6 cột của ${}^{i}\tilde{T}_j$ trong pt (4.139) thể hiện 3 sự quay chuẩn hoá của bước zero theo chiều dài và 3 sự quay chuẩn hoá của bước vô hạn song song theo các trục tọa độ của hệ (x_j, y_j, z_j) và biểu thức trong hệ (x_i, y_i, z_i). Sáu sự quay chuẩn hoá này, có biểu thức trong hệ (x_j, y_j, z_j), là:

$$
\begin{aligned}
\hat{\$}_1 &= [1,0,0,0,0,0]^T \\
\hat{\$}_2 &= [0,1,0,0,0,0]^T \\
\hat{\$}_3 &= [0,0,1,0,0,0]^T \\
\hat{\$}_4 &= [0,0,0,1,0,0]^T \\
\hat{\$}_5 &= [0,0,0,0,1,0]^T \\
\hat{\$}_6 &= [0,0,0,0,0,1]^T
\end{aligned} \tag{4.142}
$$

Sự diễn dịch hình học nêu trên đôi khi rất hữu dụng để lấy đạo hàm ma trận biến đổi, ngoài ra còn được sử dụng để kiểm tra giá trị phép phân tích đạo hàm của $\tilde{T}$

Ví dụ 4.1 *Cơ cấu chấp hành Stanford.* Xét cơ cấu Stanford (Hình 4.8) để minh họa các nguyên lý nêu trên. Sử dụng các thông số khâu D-H đã nêu trong phần trước, có thể tính ma trận tích ${}^0A_3$:

$$
{}^0A_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 & d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\ -c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\ 0 & -s\theta_2 & c\theta_2 & d_3 c\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.143}
$$

Từ đó, ma trận quay ${}^0R_3$ là:

$$
{}^0R_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 \\ -c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.144}
$$

Vector vị trí của điểm O_3 ứng với hệ quy chiếu cố định (x_o, y_o, z_o) là:

$$
{}^0p_3 = {}^0A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1 \\ d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1 \\ d_3 c\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.145}
$$

Thay các pt (4.144) và (4.145) vào (4.139):

$$
{}^0\tilde{T}_3 = \begin{bmatrix} s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 c\theta_1 c\theta_2 & -d_3 s\theta_1 - d_2 c\theta_1 s\theta_2 & d_2 c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 \\ d_3 s\theta_1 c\theta_2 & d_3 c\theta_1 - d_2 s\theta_1 s\theta_2 & d_2 s\theta_1 c\theta_2 & -c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 \\ -d_3 s\theta_2 & -d_2 c\theta_2 & -d_2 s\theta_2 & 0 & -s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix} \tag{4.146}
$$

Biến đổi ngược có dạng:

$$
{}^{3}\tilde{T}_0 =
\begin{bmatrix}
s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\
c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\
d_3 c\theta_1 c\theta_2 & d_3 s\theta_1 c\theta_2 & -d_3 s\theta_2 & s\theta_1 & -c\theta_1 & 0 \\
-d_3 s\theta_1 - d_2 c\theta_1 s\theta_2 & d_3 c\theta_1 - d_2 s\theta_1 s\theta_2 & -d_2 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_2 \\
d_2 c\theta_1 c\theta_2 & d_2 s\theta_1 c\theta_2 & -d_2 s\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_2
\end{bmatrix}
\tag{4.147}
$$

Trong bài toán hoạch định đường dẫn, trạng thái vận tốc bộ tác động cuối thường được xác định bằng vector vận tốc góc (ω_x, ω_y, ω_z) và vector vận tốc một điểm trong bộ tác động cuối (v_{ox}, v_{oy}, v_{oz}), trùng tức thời với gốc tọa độ cố định O_o. Sáu thành phần này là các tọa độ của sự quay vít khi bộ tác động cuối đang quay tức thời. Cho nên, sáu thành phần này quan hệ với các thành phần của trạng thái vận tốc trong hệ tọa độ chuyển động thứ ba theo phép biến đổi sau:

$$
\begin{bmatrix}
{}^{3}\omega_x \\ {}^{3}\omega_y \\ {}^{3}\omega_z \\ {}^{3}v_{ox} \\ {}^{3}v_{oy} \\ {}^{3}v_{oz}
\end{bmatrix}
= {}^{3}T_0
\begin{bmatrix}
\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_{ox} \\ v_{oy} \\ v_{oz}
\end{bmatrix}
\tag{4.148}
$$

Khi trạng thái vận tốc được biến đổi trong hệ quy chiếu tức thời, bài toán vận tốc đảo (nghĩa là biết trạng thái vận tốc, tìm tỷ suất khớp) được giải theo biến đổi:

$$
\begin{bmatrix}
\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6
\end{bmatrix}
= {}^{3}T_0
\begin{bmatrix}
{}^{3}\omega_x \\ {}^{3}\omega_y \\ {}^{3}\omega_z \\ {}^{3}v_{ox} \\ {}^{3}v_{oy} \\ {}^{3}v_{oz}
\end{bmatrix}
\tag{4.149}
$$

Ví dụ 4.2. *Cơ cấu chấp hành khuỷu.* Ví dụ này sẽ xét cơ cấu khuỷu (Hình 4.10). Sử dụng các thông số khâu D-H ở phần trước, ma trận tích ${}^0A_4$ có dạng:

$$
{}^0A_4 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{234} & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_{234} & c\theta_1(a_4 c\theta_{234} + a_3 c\theta_{23} + a_2 c\theta_2) \\ s\theta_1 c\theta_{234} & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_{234} & s\theta_1(a_4 c\theta_{234} + a_3 c\theta_{23} + a_2 c\theta_2) \\ s\theta_{234} & 0 & c\theta_{234} & a_4 s\theta_{234} + a_3 s\theta_{23} + a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.150}
$$

Từ đó, ma trận quay ${}^0R_4$ là:

$$
{}^0R_4 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{234} & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_{234} \\ s\theta_1 c\theta_{234} & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_{234} \\ s\theta_{234} & 0 & c\theta_{234} \end{bmatrix} \tag{4.151}
$$

Vector vị trí điểm O_4 ứng với hệ quy chiếu cố định (x_o, y_o, z_o) là:

$$
{}^0p_4 = {}^0A_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_1(a_4 c\theta_{234} + a_3 c\theta_{23} + a_2 c\theta_2) \\ s\theta_1(a_4 c\theta_{234} + a_3 c\theta_{23} + a_2 c\theta_2) \\ a_4 s\theta_{234} + a_3 s\theta_{23} + a_2 c\theta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.152}
$$

Thay các pt (4.151) và (4.152) vào (4.139):

$$
{}^0\tilde{T}_4 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{234} & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_{234} & 0 & 0 & 0 \\ s\theta_1 c\theta_{234} & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_{234} & 0 & 0 & 0 \\ s\theta_{234} & 0 & c\theta_{234} & 0 & 0 & 0 \\ x_1 s\theta_1 & -x_2 c\theta_1 & x_4 s\theta_1 & c\theta_1 c\theta_{234} & -s\theta_1 & -c\theta_1 s\theta_{234} \\ -x_1 c\theta_1 & -x_2 s\theta_1 & -x_4 c\theta_1 & s\theta_1 c\theta_{234} & c\theta_1 & -s\theta_1 s\theta_{234} \\ 0 & x_3 & 0 & s\theta_{234} & 0 & c\theta_{234} \end{bmatrix} \tag{4.153}
$$

với $x_1 = a_3 s\theta_4 + a_2 s\theta_{34}$, $x_2 = a_4 s\theta_{234} + a_3 s\theta_{23} + a_2 s\theta_2$, $x_3 = a_4 c\theta_{234} + a_3 c\theta_{23} + a_2 c\theta_2$, và $x_4 = a_4 + a_3 c\theta_4 + a_2 c\theta_{34}$. Biến đổi ngược có dạng:

$$
{}^{4}\tilde{T}_0 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_{234} & s\theta_1 c\theta_{234} & s\theta_{234} & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c\theta_1 s\theta_{234} & -s\theta_1 s\theta_{234} & c\theta_{234} & 0 & 0 & 0 \\ x_1 s\theta_1 & -x_1 c\theta_1 & 0 & c\theta_1 c\theta_{234} & s\theta_1 c\theta_{234} & s\theta_{234} \\ -x_2 c\theta_1 & -x_2 s\theta_1 & x_3 & -s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ x_4 s\theta_1 & -x_4 c\theta_1 & 0 & -c\theta_1 s\theta_{234} & -s\theta_1 s\theta_{234} & c\theta_{234} \end{bmatrix} \tag{4.154}
$$

Từ đó, trạng thái vận tốc bộ tác động cuối trong hệ quy chiếu cố định có quan hệ với hệ tọa độ chuyển động thứ tư theo phép biến đổi ma trận:

$$
\begin{bmatrix} {}^{4}\omega_x \\ {}^{4}\omega_y \\ {}^{4}\omega_z \\ {}^{4}v_{ox} \\ {}^{4}v_{oy} \\ {}^{4}v_{oz} \end{bmatrix} = {}^{4}\tilde{T}_0 \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ v_{ox} \\ v_{oy} \\ v_{oz} \end{bmatrix} \tag{4.155}
$$

Tương tự cơ cấu Stanford, bài toán vận tốc ngược được xét theo biểu thức:

$$
\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} = {}^{4}J^{-1} \begin{bmatrix} {}^{4}\omega_x \\ {}^{4}\omega_y \\ {}^{4}\omega_z \\ {}^{4}v_{ox} \\ {}^{4}v_{oy} \\ {}^{4}v_{oz} \end{bmatrix} \tag{4.156}
$$

Quan hệ giữa hai phương pháp

Vector vận tốc ω và $\mathbf{v}$ sử dụng theo phương pháp quy ước được biểu diễn trong hệ quy chiếu cố định, còn ${}^{j}\omega_n$ và ${}^{j}v_0$ sử dụng phương pháp các tọa độ quay vít được biểu diễn trong hệ quy chiếu tức thời. Hai trạng thái vận tốc này liên hệ với nhau theo phép biến đổi sau:

$$\omega_n = {}^0R_j\,{}^j\omega_n \tag{4.157}$$

$$v_n = {}^0R_j({}^jv_0 + {}^j\omega_n \times {}^jp_n) \tag{4.158}$$

với

$$\begin{bmatrix} {}^jp_n \\ 1 \end{bmatrix} = {}^jA_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

là vector vị trí của gốc hệ tọa độ bộ tác động cuối ứng với hệ tọa độ khâu thứ j.

Số điều kiện

Ma trận Jacobi, J, biến đổi tỷ suất khớp trong không gian n chiều thành vận tốc bộ tác động cuối trong không gian m chiều. Trong Jacobi quy ước, 3 phần tử thứ nhất của $\dot{x}$ có thứ nguyên chiều dài trên đơn vị thời gian. Trong khi 3 thành phần cuối của $\dot{x}$ có thứ nguyên radian trên đơn vị thời gian. Tuy nhiên, tùy theo loại khớp trong cơ cấu, các phần tử của $\dot{q}$ có thể không có thứ nguyên như trên. Do đó các thành phần ma trận Jacobi không cần có cùng các thứ nguyên. Ví dụ, nếu tất cả các khớp là loại quay, 3 hàng đầu của ma trận Jacobi, J, có thứ nguyên chiều dài, trong khi 3 hàng cuối không có thứ nguyên. Từ đó, nên thận trọng khi thực hiện ma trận này.

Với cơ cấu chỉ có một loại khớp và một kiểu công việc, hoặc định vị điểm hoặc định hướng vật thể, không gồm cả hai, ma trận Jacobi có thể được đặc trưng bằng đại lượng được gọi là *số điều kiện, c*. Số điều kiện của ma trận A là:

$$c = \|A\|\,\|A^{-1}\| \tag{4.159}$$

trong đó chuẩn của A được xác định là:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Nói cách khác, chuẩn của A giới hạn lũy thừa tăng của ma trận:

$$\|Ax\| \le \|A\|\,\|x\| \qquad \text{với tất cả các vector } \mathbf{x} \tag{4.160}$$

Trong đó, đẳng thức chỉ xảy ra khi ít nhất một vector **x** khác không. Trường hợp A là ma trận xác định dương, số trạng thái của A là tỉ số giữa giá trị hữu hạn lớn nhất và nhỏ nhất của A.

Số điều kiện của ma trận Jacobi phụ thuộc vào chiều dài khâu và cấu hình cơ cấu vận hành. Khi bộ tác động cuối chuyển động từ vị trí này đến vị trí khác, số điều kiện có các giá trị khác nhau. *Số điều kiện nhỏ nhất* của ma trận bất kỳ là 1. Các điểm trong không gian làm việc của cơ cấu có số điều kiện của ma trận Jacobi bằng 1 được gọi là *các điểm đẳng hướng*. Tùy theo chiều dài khâu, cơ cấu chấp hành có thể có hoặc không có các điểm đẳng hướng trong không gian cơ cấu đó.

Phương pháp thứ hai là so sánh các tỷ suất khớp cần thiết để tạo ra vận tốc đơn vị ở bộ tác động cuối theo mọi hướng. Để đạt được điều này, cần xác định vector vận tốc bộ tác động cuối trên mặt cầu đơn vị

$$\dot{x}^T\dot{x} = 1 \tag{4.161}$$

và so sánh các tỷ suất khớp tương ứng trong không gian khớp n-chiều. Thay pt (4.56) vào (4.161):

$$\dot{q}^T j^T j\dot{q} = 1 \tag{4.162}$$

Phương trình (4.162) biểu diễn ellipsoid trong không gian khớp n-chiều. Tích J^TJ là bán xác định dương đối xứng, nên các vector của chúng trực giao. Các trục chính của ellipsoid trùng với các vector của J^TJ, và chiều dài các trục chính bằng nghịch đảo căn bậc 2 giá trị của J^TJ.

Ma trận Jacobi là cấu hình phụ thuộc, ellipsoid cũng là cấu hình phụ thuộc. Bộ tác động cuối chuyển động từ vị trí này đến vị trí khác, hình dạng và sự định hướng của ellipsoid phụ thuộc cũng thay đổi tương ứng. Ellipsoid vận tốc càng gần với hình cầu, các đặc tính của phép biến đổi càng chính xác. Phép biến đổi này được gọi là đẳng hướng khi các trục chính có mọi chiều dài bằng nhau. Tại điểm đẳng hướng, hình cầu đơn vị trong không gian m chiều của bộ tác động cuối quy chiếu lên hình cầu trong không gian khớp n chiều. Mặt khác, tại điểm đơn, một hoặc nhiều trục chính trở nên dài vô hạn và ellipsoid suy biến thành hình trụ. Trong điều kiện đó, bộ tác động cuối không thể chuyển động theo một số hướng.

Ví dụ 4.3: *Cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do* Xét cơ cấu trên Hình 4.7 . Đặt $a_1 = \sqrt{2}m$ và $a_2 = 1m$. Ma trận Jacobi, pt (4.66), trở thành:

$$J = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}s\theta_1 - s\theta_{12} & -s\theta_{12} \\ \sqrt{2}c\theta_1 + c\theta_{12} & c\theta_{12} \end{bmatrix} \quad m \tag{4.163}$$

Tích ma trận J^TJ là:

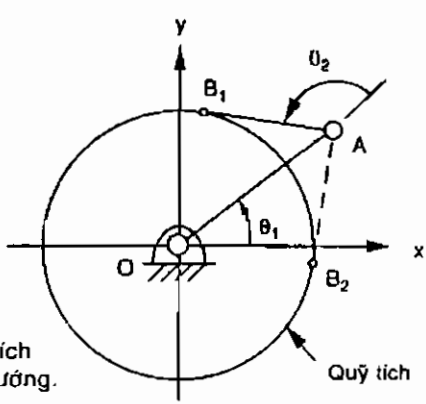
$$J^TJ = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}c\theta_2 + 3 & \sqrt{2}c\theta_2 + 1 \\ \sqrt{2}c\theta_2 + 1 & 1 \end{bmatrix} \quad m^2 \tag{4.164}$$

Chú ý, J^TJ đối xứng và độc lập với θ_1. Giá trị của J^TJ là $\lambda_1 = (2-\sqrt{2})(-c\theta_2 + 1)$ và $\lambda_2 = (2+\sqrt{2})(c\theta_2 + 1)$ tương ứng. Đặc biệt, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ đối với cấu hình $\theta_2 = 3\pi/4$ hoặc $\theta_2 = 5\pi/4$. Có thể thấy cơ cấu chấp hành có số điều kiện là đơn vị khi cơ cấu là một trong hai cấu hình trên. Vì số điều kiện độc lập với θ_1, nên tất cả các điểm quét bởi cơ cấu với $\theta_2 = 3\pi/4$ hoặc $\theta_3 = 5\pi/4$ sẽ tạo thành quỹ tích các điểm đẳng hướng (Hình 4.13).

Giả sử $\theta_2 = \pi/2$, tích ma trận J^TJ sẽ là:

$$J^TJ = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.165}$$

Giá trị của J^TJ là $\lambda_1 = 2-\sqrt{2} = 0.5858$ và $\lambda_2 = 2+\sqrt{2} = 3.4142$. Các vector tương ứng, chuẩn hoá với chiều dài đơn vị, là (-0.3827, 0.9238) và (0.9238, 0.3827). Hai vector này nghiêng theo góc 22,5° tương ứng với các trục θ_2 và θ_1, và thẳng hàng với các trục chính của elip.



Hình 4-13. Quỹ tích các điểm đẳng hướng.

Thay pt (4.165) vào (4.162):

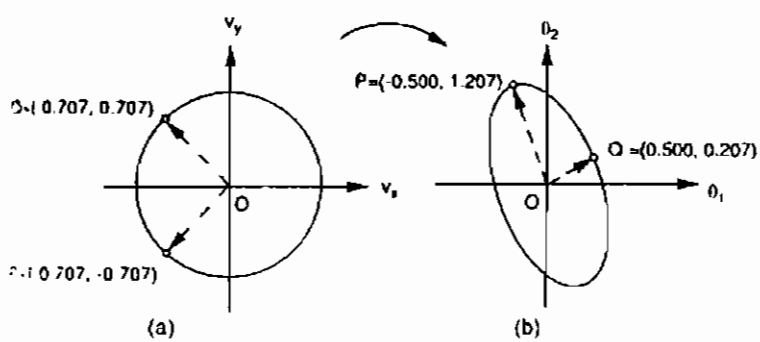
$$3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 = \frac{(0.3827\dot{\theta}_1 - 0.9238\dot{\theta}_2)^2}{1.3065^2} + \frac{(0.9238\dot{\theta}_1 + 0.3827\dot{\theta}_2)^2}{0.5412^2} = 1 \tag{4.166}$$

Phương trình (4.166) biểu diễn hình elip (Hình 4.14b). Các tỷ suất khớp cần thiết để tạo vận tốc đơn vị cho bộ tác động cuối là $(\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2)$ = (-0.500, 1.207) rad/s dọc theo trục chính, và (0.500, 0.207) dọc theo trục phụ.

Có thể giả thiết $\dot{\theta}_1$ =0, ma trận Jacobi có dạng:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.167}$$

Từ đó, các vận tốc bộ tác động cuối tương ứng là (v_x,v_y) = (0.707,-0.707) m/s dọc theo trục chính, và (-0.707, 0.707) m/s dọc theo trục phụ (Hình 4.14a). Chú ý, để tạo cùng tốc độ bộ tác động cuối dọc theo các trục chính, cần phải có tỷ suất khớp lớn nhất, trong khi vận tốc kia cần có tỷ suất khớp nhỏ nhất.



Hình 4-14. Ellipsoid vận tốc

Phân tích cấu hình đặc biệt

Trong cơ cấu chấp hành, ma trận Jacobi, J, biến đổi tỷ suất khớp thành trạng thái vận tốc bộ tác động cuối. Nếu biết tỷ suất khớp, có thể tính trực tiếp trạng thái vận tốc bộ tác động cuối của cơ cấu. Tuy nhiên,

trong bài toán quy hoạch quỹ đạo, các vận tốc bộ tác động cuối thường được cho dọc theo hành trình mong muốn trong không gian bộ tác động cuối, và các vận tốc này phải được biến đổi thành các tỷ suất khớp trong không gian khớp. Điều này đòi hỏi tính toán theo phép biến đổi đảo pt (4.56):

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{x} \tag{4.168}$$

Ma trận đảo J^{-1} được tính từ ma trận J (theo phép biến đổi ma trận). Phương trình (4.168) được dùng để tính tỷ suất khớp cần thiết khi biết vận tốc bộ tác động cuối. Các tỷ suất khớp này phụ thuộc vào điều kiện ma trận Jacobi. Với một số cấu hình xác định, ma trận Jacobi có thể suy biến hạng (nghĩa là giảm số hàng hay cột độc lập tuyến tính). Khi cơ cấu chấp hành tiến tới cấu hình này, ma trận Jacobi suy biến hạng và có thể không nghịch đảo được. Khi đó, nghiệm của pt (4.168) là các tỷ suất khớp vô hạn.

Cơ cấu chấp hành có *cấu hình đặc biệt* khi ma trận Jacobi suy biến hạng. Về vật lý, điều này bao hàm sự quay tức thời qua không gian n chiều của ma trận Jacobi trở nên độc lập tuyến tính. Do đó, ở cấu hình đặc biệt, cơ cấu chấp hành nối tiếp có thể mất một hay nhiều bậc tự do và không có khả năng chuyển động theo một số hướng trong không gian bộ tác động cuối.

Cấu hình đặc biệt được tính bằng cách xác lập định thức của ma trận Jacobi bằng zero. Nói chung, kết quả sẽ là một phương trình đại số. Đối với cơ cấu chấp hành nối tiếp, điều kiện đặc biệt là hàm của các biến khớp trung gian, không phải là các biến khớp đầu và cuối. Điều này là do sự hiện diện của trạng thái đặc biệt chỉ phụ thuộc vào các vị trí tương đối của các trục khớp. Sự quay của toàn bộ cơ cấu quanh trục thứ nhất không thay đổi các vị trí tương đối của các trục khớp. Tương tự, sự quay của bộ tác động quanh trục cuối không ảnh hưởng đến vị trí của các trục khớp khác. Do đó, các biến khớp đầu và cuối không xuất hiện trong định thức của ma trận Jacobi.

Có hai loại trạng thái đặc biệt trong cơ cấu nối tiếp, *biên* và *bên trong*. Trạng thái biên đặc biệt xảy ra khi bộ tác động cuối ở trên mặt biên không gian làm việc, và thường xảy ra khi cơ cấu có cấu hình hoàn toàn duỗi thẳng hoặc hoàn toàn gập lại, hay khi một trong các bộ tác động với tới giới hạn cơ cấu. Trạng thái bên trong đặc biệt xảy ra bên trong biên không gian làm việc. Nhiều tình huống có thể dẫn đến trạng

thái này. Ví dụ, khi hai hay nhiều trục khớp thẳng hàng, tác dụng quay có thể bị khử do sự quay tương hỗ quanh trục khớp khác, lúc đó bộ tác động cuối dừng trong khi các khớp trung gian của cơ cấu vẫn chuyển động trong không gian. Trạng thái này còn xảy ra khi bốn khớp quay song song với một khớp khác hoặc giao nhau tại một điểm chung. Theo hình học cơ cấu chấp hành, nhận diện trạng thái bên trong đặc biệt rất phức tạp. Về cơ bản, điều này xảy ra khi sự quay của hai hoặc nhiều trục khớp trở thành độc lập tuyến tính. Trạng thái đặc biệt biên không quan trọng lắm, vì có thể bố trí cơ cấu vận hành cách xa biên không gian hoạt động đặc biệt này. Trạng thái đặc biệt bên trong rắc rối hơn, vì khó dự đoán trong qui trình hoạch định hành trình. Các ví dụ sau minh họa ý nghĩa vật lý trạng thái đặc biệt biên và trạng thái đặc biệt bên trong.

Cấu hình đặc biệt của cơ cấu chấp hành phẳng 3 bậc tự do

Xét cơ cấu phẳng 3 bậc tự do trên Hình 2.3. Để nhận diện cấu hình trạng thái đặc biệt, cần lập phương trình định thức của ma trận Jacobi. Cho pt (4.67) bằng zero:

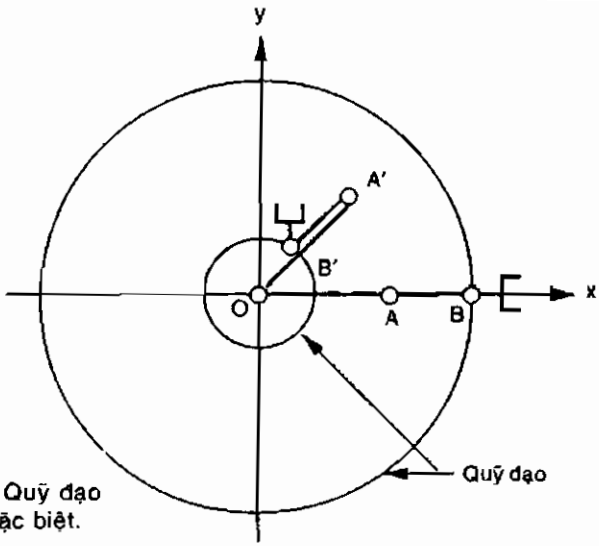
$$\det(J) = \begin{vmatrix} -(a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123}) & -(a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123}) & -a_3 s\theta_{123} \\ (a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) & (a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) & a_3 c\theta_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_2 s\theta_2 = 0 \qquad (4.169)$$

Chú ý, các góc khớp θ_1 và θ_3 không xuất hiện trong pt (4.169). Để rõ hơn, giả sử cơ cấu có cấu hình đặc biệt khi $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$. Trạng thái $\theta_2 = 0$ ứng với cấu hình duỗi thẳng. Trạng thái $\theta_2 = \pi$ ứng với cấu hình xếp gập (Hình 4.15). Trường hợp này, cơ cấu bị mất 1 bậc tự do. Bộ tác động cuối chỉ chuyển động dọc theo hướng tiếp tuyến của tay đòn. Chuyển động hướng tâm không xảy ra. Đây là ví dụ tiêu biểu về trạng thái đặc biệt biên trong không gian hoạt động.

Cấu hình đặc biệt cơ cấu chấp hành Stanford

Xét cấu hình đặc biệt của cơ cấu này (Hình 4.8), cho định thức ma trận Jacobi quay vít trong pt (4.99) bằng zero:



Hình 4-15. Quỹ đạo các điểm đặc biệt.

$$\det({}^3J) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -s\theta_4 & c\theta_4 s\theta_5 \\ -s\theta_2 & 0 & 0 & 0 & c\theta_4 & s\theta_4 s\theta_5 \\ c\theta_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & c\theta_5 \\ -d_3 s\theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 c\theta_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 s\theta_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -d_3^2 s\theta_2 s\theta_5 = 0 \tag{4.170}$$

Biên không gian hoạt động của trọng tâm khớp P xác định bởi giới hạn trên và dưới của khoảng trượt cực đại d_3 dọc theo khớp lăng trụ. Giả sử $d_3 \neq 0$, cơ cấu chấp hành sẽ mất:

(1) 1 bậc tự do nếu $s\theta_2 = 0$ hoặc $s\theta_5 = 0$.

(2) 2 bậc tự do nếu $s\theta_2 = 0$ và $s\theta_5 = 0$ xảy ra đồng thời.

(3) 3 bậc tự do nếu điều kiện (2) xảy ra tại biên không gian hoạt động.

Điều kiện $s\theta_2 = 0$ khi $\theta_2 = 0$ hoặc π. Trong điều kiện này, tay đòn sẽ hướng lên hoặc xuống, vị trí tâm xoay bị giới hạn trên mặt trụ có bán kính d_2. Đó là trạng thái đặc biệt biên không gian hoạt động.

Điều kiện $s\theta_5 = 0$ khi $\theta_5 = 0$ hoặc π. Trường hợp này, trục khớp thứ sáu thẳng hàng với khớp thứ tư. Do đó, sự quay bất kỳ quanh khớp thứ tư có thể bị khử do sự quay ngược ở khớp thứ sáu, đầu tác động có thể tự chuyển động không ảnh hưởng đến hướng của bộ tác động cuối.

Về toán học, trạng thái đặc biệt khác xảy ra ở $d_3 = 0$. Khi đó, sự quay bất kỳ quanh trục khớp thứ 2 (z_1) không ảnh hưởng đến vận tốc tuyến tính của tâm xoay. Trong thực tế, giá trị cực tiểu của d_3 được xác định bằng cấu trúc vật lý của tay đòn robot.

Cấu hình đặc biệt của cơ cấu khuỷu

Xét trạng thái đặc biệt cơ cấu chấp hành khuỷu (Hình 4.10). Cho định thức của ma trận quay với pt (4.115) bằng zero:

$$\det({}^4J) = \begin{vmatrix} s\theta_{234} & 0 & 0 & 0 & 0 & s\theta_5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -c\theta_5 \\ c\theta_{234} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 s\theta_{34} + a_3 s\theta_4 & a_3 s\theta_4 & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 c\theta_{34} + a_3 c\theta_4 + a_4 & a_3 c\theta_4 + a_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a_2 a_3 x_{51} s\theta_3 s\theta_5 = 0 \qquad (4.171)$$

Với $x_{51} = a_2 c\theta_2 + a_3 c\theta_{23} + a_4 c\theta_{234}$

Giả sử $a_2 \neq 0$ và $a_3 \neq 0$. Trạng thái đặc biệt xảy ra khi ít nhất một trong ba hệ số $s\theta_3$, $s\theta_5$ và x_{51} là bằng không. Cơ cấu sẽ mất:

(1) 1 bậc tự do nếu $s\theta_3$, $s\theta_5$ hoặc x_{51} bằng không.

(2) 2 bậc tự do nếu bất kỳ 2 trong số $s\theta_3$, $s\theta_5$, và x_{51} đồng thời bằng không.

(3) 3 bậc tự do nếu tất cả $s\theta_3$, $s\theta_5$ và x_{51} đều bằng không.

Cơ cấu không thể mất nhiều hơn 3 bậc tự do.

Điều kiện $s\theta_3 = 0$ khi $\theta_3 = 0$ hoặc π. Trong trường hợp này, khâu thứ và 3 có cấu hình duỗi thẳng hoặc xếp gập. Đây là trạng thái đặc biệt biên không gian làm việc.

Điều kiện $s\theta_5 = 0$ khi $\theta_5 = 0$ hoặc π. Trường hợp này, trục khớp thứ 6

song song với các trục khớp thứ 2, 3 và 4, và cơ cấu mất 1 bậc tự do. Đây là trường hợp đặc biệt nội tại xảy ra bên trong không gian hoạt động.

Điều kiện $x_{51} = a_2c\theta_2 + a_3c\theta_{23} + a_4c\theta_{234} = 0$ được thoả khi tâm khớp O_5 được đưa ngược về gốc tọa độ khâu thứ nhất (x_1, y_1, z_1). Sự quay bất kỳ quanh trục khớp thứ hai sẽ không ảnh hưởng đến vị trí tâm khớp. Vì các trục khớp thứ nhất và hai giao nhau, sự quay bất kỳ quanh trục khớp thứ nhất cũng không ảnh hưởng lên vị trí tâm khớp.

Tóm tắt

Chương này nghiên cứu động học vi phân của các cơ cấu chấp hành nối tiếp. Phần đầu xét động học vi phân của vật rắn. Các ma trận vi phân của phép biến đổi và khái niệm chuyển động quay vít được dùng để phân tích động học các cơ cấu chấp hành nối tiếp, từ đó xét ma trận Jacobi. Phương pháp đệ quy được dùng để lấy đạo hàm ma trận Jacobi trên cơ sở quay vít. Ma trận Jacobi có thể được đơn giản hóa rõ rệt bằng cách biểu diễn sự quay vít trong hệ tọa độ quy chiếu được chọn một cách hợp lý. Để dễ dàng phân tích vận tốc với bài toán quy hoạch quỹ đạo, có thể dùng ma trận biến đổi 6 x 6. Phần cuối giới thiệu các trạng thái đặc biệt của cơ cấu chấp hành nối tiếp, trạng thái này độc lập với các biến khớp đầu và cuối.

Chương 5

PHÂN TÍCH JACOBI CƠ CẤU CHẤP HÀNH SONG SONG

Giới thiệu

Phân tích Jacobi cơ cấu chấp hành song song khó hơn cơ cấu chấp hành nối tiếp, vì có nhiều khâu tạo thành các vòng kín. Giới hạn quan trọng của cơ cấu chấp hành song song là trong không gian làm việc có thể tồn tại cấu hình đặc biệt, cơ cấu tăng thêm một hoặc nhiều bậc tự do, làm mất hoàn toàn sự cứng vững của cơ cấu. Tính chất này đã thu hút nhiều nhà nghiên cứu quan tâm, nhiều nghiên cứu cơ cấu vòng kín ở trạng thái đặc biệt này, đề xuất chia ma trận Jacobi thành hai ma trận, một theo động học thuận và một theo động học đảo. Tùy theo ma trận ở trạng thái đặc biệt, cơ cấu vòng kín có cấu hình trạng thái đặc biệt động học thuận, động học đảo hoặc cả hai.

Trong Chương này sẽ trình bày hai phương pháp phân tích, thứ nhất sử dụng các phương trình vòng vector vận tốc, thứ hai áp dụng lý thuyết quay vít thuận nghịch.

Ma trận Jacobi

Cơ cấu vận hành song song thường gồm bệ chuyển động và đế cố định nối với nhau bằng nhiều nhánh. Bệ chuyển động hoạt động như bộ tác động cuối của cơ cấu. Do cấu trúc vòng kín, nên tất cả khớp không thể điều khiển một cách độc lập. Một số khớp được khiển bằng bộ tác động, số khác là loại khớp thụ động. Nói chung, số khớp hoạt động bằng số bậc tự do của cơ cấu.

Vector **q** là biến khớp tác động và vector **x** đặc trưng vị trí bệ chuyển động. Các ràng buộc động học tác động lên các nhánh được viết dưới dạng tổng quát:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{q}) = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

với **f** là hàm ẩn n chiều theo **q** và **x**; **0** là vector zero n chiều.

Lấy vi phân pt (5.1) theo thời gian, sẽ tính được quan hệ giữa các tỷ suất khớp đầu vào và vận tốc đầu ra bộ tác động cuối:

$$J_x\dot{x} = J_q\dot{q} \tag{5.2}$$

với:

$$J_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{và} \qquad J_q = \frac{\partial f}{\partial q}$$

Đạo hàm nêu trên dẫn đến hai ma trận Jacobi phân biệt. Từ đó, ma trận Jacobi, J, tổng quát có dạng:

$$\dot{q} = J\dot{x} \tag{5.3}$$

với $J = J_q^{-1}J_x$

Chú ý, ma trận Jacobi ở pt (5.3) đối với cơ cấu chấp hành song song tương ứng với Jacobi nghịch đảo trong cơ cấu chấp hành nối tiếp.

Các điều kiện đặc biệt

Với sự tồn tại hai ma trận Jacobi, cơ cấu chấp hành song song có cấu hình đặc biệt khi J_x, J_y hoặc cả hai ở trạng thái đặc biệt, do đó có thể tìm được ba kiểu trạng thái đặc biệt.

Trạng thái đặc biệt động học đảo

Trạng thái này xảy ra khi định thức của J_q tiến đến zero:

$$\det(J_q) = 0 \tag{5.4}$$

Khi J có dạng đặc biệt và không gian zero của J không rỗng, tồn tại các vector $\dot{q}$ khác zero dẫn đến kết quả các vector $\dot{x}$ bằng zero. Chuyển động vi phân bệ di động theo một số chiều không thể thực hiện. Từ đó, cơ cấu chấp hành mất một số bậc tự do. Mặt khác, tại các cấu hình đặc biệt động học đảo, cơ cấu chấp hành kháng lại lực hoặc moment ở một số chiều theo lực hoặc moment bộ tác động là zero. Trạng thái đặc biệt động học đảo thường xảy ra ở biên không gian hoạt động, nơi các nhánh vi phân của nghiệm động học đảo đồng quy. Điều này tương tự với cơ cấu chấp hành nối tiếp.

Trạng thái đặc biệt động học thuận

Trạng thái đặc biệt động học thuận xảy ra khi định thức của J_x bằng zero:

$$\det(J_x) = 0 \tag{5.5}$$

Giả thiết trong trạng thái đó, không gian zero của J_x không rỗng, tồn tại các vector $\dot{x}$ khác zero, cho kết quả vector $\dot{q}$ bằng zero. Trong trường hợp này, bệ di động có thể có chuyển động vi phân theo một số hướng, còn mọi bộ tác động đều bị khoá. Từ đó, bệ di động tăng thêm một số bậc tự do. Điều này trái với cơ cấu nối tiếp bị mất một số bậc tự do. Mặt khác, ở cấu hình đặc biệt động học thuận, cơ cấu không thể kháng lại lực hoặc moment theo một số chiều. Trạng thái động học thuận thường xảy ra ở nơi các nhánh vi phân của các nghiệm động học thuận gặp nhau.

Trạng thái đặc biệt hỗn hợp

Trạng thái đặc biệt hỗn hợp xảy ra khi cả hai định thức của J_x và q_x đều bằng zero. Nói chung , loại này chỉ xảy ra trong cơ cấu có cấu trúc đặc biệt. Ở cấu hình đặc biệt hỗn hợp, pt (5.1) sẽ suy thoái. Bệ di động có thể chuyển động vi phân trong khi mọi bộ tác động đều bị khoá. Mặt khác, bệ di động có thể đứng yên trong khi các bộ tác động có một số chuyển động vi phân.

Jacobi quy ước

Phần này giới thiệu phương pháp phân tích theo quy ước. Dù phương pháp tọa độ quay vít và đại số chuyển động rất hữu dụng, nhưng khi áp dụng vào cơ cấu song song thường bị trở ngại do có nhiều khớp thụ động. Do đó, phương pháp vòng vector vận tốc thông thường có chiều hướng thuận lợi hơn.

Nói chung, vector vận tốc của một điểm được tính từ hai chiều vòng kín khác nhau. Mỗi vòng kín gồm đế cố định, bệ di động và mọi khâu trong một nhánh. Các tỷ suất khớp thụ động trong mỗi nhánh bị khử bởi tích phương trình vòng vector vận tốc 1 bậc tự do với vector tương ứng trực giao với mọi vector của các tỷ suất khớp thụ động. Sau đó, các phương trình kết quả được gộp vào ma trận Jacobi.

Để dễ hiểu, có thể định nghĩa trạng thái vận tốc bộ tác động cuối là vector 6 chiều với vận tốc tuyến tính của một điểm, và vận tốc góc của bệ di động:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ \omega_p \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Sau đây là các ví dụ minh họa phương pháp này.

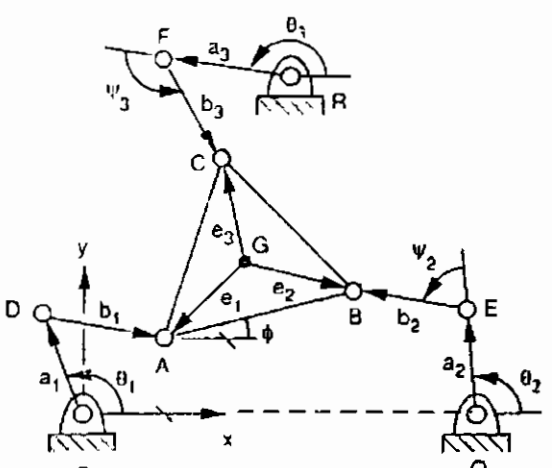
Jacobi của cơ cấu song song phẳng 3 RRR

Trước hết lấy vi phân ma trận Jacobi và các điều kiện đặc biệt của cơ cấu chấp hành phẳng 3RRR đã đề cập trong Chương 3. Sơ đồ phân tích cơ cấu này được nêu trên Hình 5.1. Các điểm chuyển động A, B, C xác định bệ di động và các điểm P, Q, R xác định đế cố định. Điểm G trên bệ di động, a_i và b_i là hai vector khâu chuyển động thứ nhất và thứ hai trên nhánh thứ i, θ_i và ψ_i là hai góc định hướng của a_i và b_i so với trục x. Trong cơ cấu này, vector đầu vào là $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ và vector đầu ra là $\mathbf{x} = [x_g, y_g, \phi]^T$

Phương trình vòng kín được viết cho mỗi nhánh. Ví dụ với nhánh thứ nhất:

$$\overline{PG} + \overline{GA} = \overline{PD} + \overline{DA} \tag{5.7}$$

Đây là cơ cấu phẳng, các vector vận tốc góc của mọi khâu hướng theo chiều z dương. Phương trình vòng vector vận tốc được xác định bằng cách lấy đạo hàm pt (5.7) theo thời gian:



Hình 5-1. Sơ đồ cơ cấu chấp hành 3RRR phẳng.

$$\mathbf{v}_g + \dot{\phi}(\mathbf{k} \times \mathbf{c}_i) = \dot{\theta}_1(\mathbf{k} \times \mathbf{a}_1) + (\dot{\theta}_i + \dot{\psi}_i)(\mathbf{k} \times \mathbf{b}_i) \tag{5.8}$$

với $\mathbf{v}_g$ là vận tốc điểm G, $\mathbf{k}$ là vector đơn vị theo chiều z dương. Do ψ_i là biến thụ động, cần loại bỏ khỏi pt (5.8). Để đạt được điều này, nhân hai vế pt (5.8) với $\mathbf{b}_i$:

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}_g + \dot{\phi}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{b}_i) = \dot{\theta}_i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \tag{5.9}$$

Phương trình (5.9) được viết ba lần theo i = 1, 2, 3, thu được ba phương trình vô hướng và sắp xếp theo ma trận:

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \tag{5.10}$$

với

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} b_{1x} & b_{1y} & e_{1x}b_{1y} - e_{1y}b_{1x} \\ b_{2x} & b_{2y} & e_{2x}b_{2y} - e_{2y}b_{2x} \\ b_{3x} & b_{3y} & e_{3x}b_{3y} - e_{3y}b_{3x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x} \end{bmatrix}$$

và $\dot{\mathbf{x}} = [v_{gx}, v_{gy}, \phi]^T$

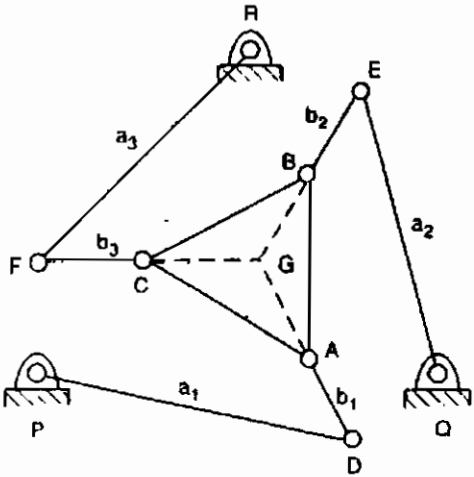
$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T$

Sau đây là lý nghĩa vật lý của từng loại trạng thái đặc biệt.

(a) Trạng thái đặc biệt động học đảo. Trạng thái này xảy ra khi một trong các phần tử chéo của $\mathbf{J}_q$ triệt tiêu, nghĩa là:

$$a_{ix}b_{iy} - a_{iy}b_{ix} = 0 \qquad \text{với } i = 1, 2, \text{ hoặc } 3 \tag{5.11}$$

Vế trái pt (5.11) là độ lớn của $\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i$. Trạng thái động học đảo xuất hiện khi nhánh bất kỳ đang ở cấu hình hoàn toàn duỗi thẳng hoặc xếp gập. Cơ cấu mất 1, 2, hoặc 3 bậc tự do tùy theo 1, 2, hoặc 3 nhánh đang ở cấu hình hoàn toàn duỗi thẳng hoặc xếp gập. Ở trạng thái động học đảo, sự quay vi phân của khâu đầu vào đang duỗi thẳng hoặc xếp gập, không tác động đến chuyển động bệ đầu ra.

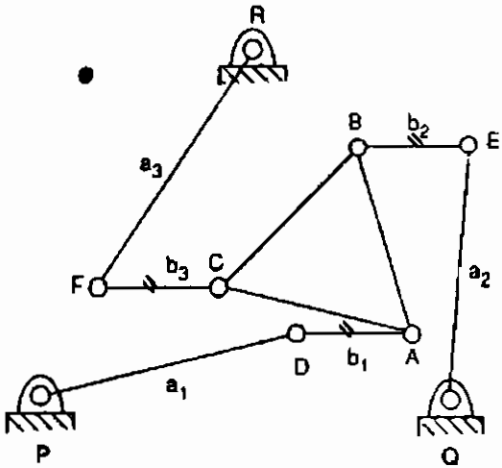


Hình 5-2. Trạng thái đặc biệt động học thuận của cơ cấu chấp hành song song phẳng

(b) Trạng thái động học thuận. Trạng thái động học thuận xảy ra khi định thức của J_x tiến tới 0. Tuy khó nhận diện mọi trạng thái đặc biệt động học thuận khả dĩ, nhưng có thể tìm được hai cấu hình đặc biệt bằng cách xét ma trận J_x .Chú ý, cột cuối của J_x là độ lớn của tích vector chéo $\mathbf{e}_i \times \mathbf{b}_i$ với i =1, 2, 3. Đối với tất cả các nhánh, khi $\mathbf{b}_i$ thẳng hàng với $\mathbf{e}_i$, ba phần tử này bị triệt tiêu. Vì G là một điểm tùy ý trên bệ di động, trạng thái đặc biệt động học thuận xảy ra khi ba vector $\mathbf{b}_i$ (với i = 1, 2, 3) giao nhau tại điểm chung. Hình 5.2 minh họa kiểu cấu hình đó. Với cấu hình này, điểm G trên bệ di động chuyển động vi phân trong khi các bộ tác động bị khoá. Do đó, bệ di động tăng thêm 1 bậc tự do và không thể kháng lại moment bất kỳ từ bên ngoài.

Cột thứ nhất và thứ hai của J_x biểu thị thành phần x và y của vector $\mathbf{b}_i$ (i= 1, 2, 3). Khi 3 vector $\mathbf{b}_i$ (i=1,2,3) cùng chiều, hai cột này trở nên độc lập tuyến tính. Như vậy, trạng thái đặc biệt động học thuận xảy ra khi 3 vector $\mathbf{b}_i$ (i=1,2,3) song song (Hình 5.3). Tại cấu hình này, bệ di động chuyển động tịnh tiến theo chiều vuông góc với vector $\mathbf{b}_i$ trong khi tất cả các bộ tác động đều bị khoá. Các bộ tác động không thể kháng được lực bất kỳ tác dụng lên bệ di động theo chiều đó.

(c) Cấu hình đặc biệt hỗn hợp. Loại cấu hình này xảy ra khi cả hai định thức của J_x và J_q đều bằng 0. Như đã đề cập, loại này không những phụ thuộc cấu hình mà còn phụ thuộc cấu trúc. Các cấu trúc dưới đây có thể có cấu hình đặc biệt hỗn hợp.



Hình 5-3. Trạng thái đặc biệt động học thuận thứ hai của cơ cấu song song phẳng

Cấu trúc 1:

$$PQ = QR = RP, \quad AB = BA = CA, \quad a_i = PQ/\sqrt{3}$$

$$\text{và } b_i = e_i \qquad \text{với } i=1,2,3.$$

Loại cơ cấu này có thể được định vị trong cấu hình trong đó các trục quay D,E,F hội tụ tại trọng tâm tam giác đế. Do các tỉ lệ độ dài khâu đặc biệt, trọng tâm bệ di động cũng trùng với trọng tâm tam giác đế. Do đó, bệ di động có thể quay quanh tâm đó và các bộ tác động bị khoá. Mặt khác, bệ di động có thể dừng ở $\phi = 0$, trong khi các khâu ngõ vào có thể quay theo các trục quay tương ứng. Điều này là do các phần tử của J_q và cột cuối của J_x đều bằng 0.

Cấu trúc 2:

$$PQ = QR = RP = AB = BC = CA$$

$$\text{và } a_i = b_i \qquad \text{với } i=1,2, \text{ và } 3.$$

Loại cơ cấu này có thể định vị trong cấu hình ba trục xoay chuyển động A, B, C trùng với ba trục xoay cố định P, Q, R. Vì thế, ba khâu đầu vào có thể quay tùy ý còn bệ di động bị khoá. Hơn nữa, với các bộ tác động bị khoá ở $\theta_1 = -150^0$, $\theta_2 = -30^0$, và $\theta_3 = 90^0$, bệ di động có thể quay quanh trọng tâm.

Ma trận Jacobi của cơ cấu định hướng không gian

Trong ví dụ này, sẽ nghiên cứu ma trận Jacobi và các điều kiện đặc biệt của cơ cấu định hướng không gian (Hình 3.7). Cơ cấu chỉ có 3 bậc tự do, nên vector ngõ vào được viết là $\dot{q} = [\dot{d}_1, \dot{d}_2, \dot{d}_3]^T$ và vector ngõ ra được viết theo vận tốc góc của bệ di động $\dot{x} = \omega_B = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$.

Từ Hình 3.7,phương trình vòng kín của nhánh thứ i là:

$$\overline{OB_i} = \overline{OA_i} + \overline{A_iB_i} \tag{5.12}$$

Lấy đạo hàm pt (5.12) theo thời gian, sẽ tìm được phương trình vòng vector vận tốc:

$$\omega_B \times b_i = d_i\omega_i \times s_i + \dot{d}_i s_i \qquad \text{với i=1,2,3} \tag{5.13}$$

trong đó $\mathbf{b}_i$ là vector OB_i, s_i là vector đơn vị hướng theo A_iB_i, ω_i là vận tốc góc của nhánh i ứng với hệ quy chiếu cố định.

Để khử ω_i, cần nhân 2 vế pt (5.15) với s_i:

$$(b_i \times s_i)\cdot\omega_B = \dot{d}_i \qquad \text{với i = 1, 2, 3} \tag{5.14}$$

Phương trình (5.14) được viết ba lần với i=1,2,3; đó là ba phương trình vô hướng sắp xếp theo ma trận:

$$J_x\omega_B = J_q\dot{q} \tag{5.15}$$

trong đó:

$$J_x = \begin{bmatrix} (b_1 \times s_1)^T \\ (b_2 \times s_2)^T \\ (b_3 \times s_3)^T \end{bmatrix}$$

$J_q = I$ (ma trận thuần nhất 3×3)

Chú ý, mỗi hàng của J_x biểu thị vector pháp tuyến với mặt phẳng tam giác A_iOB_i, đó là vector n_i:

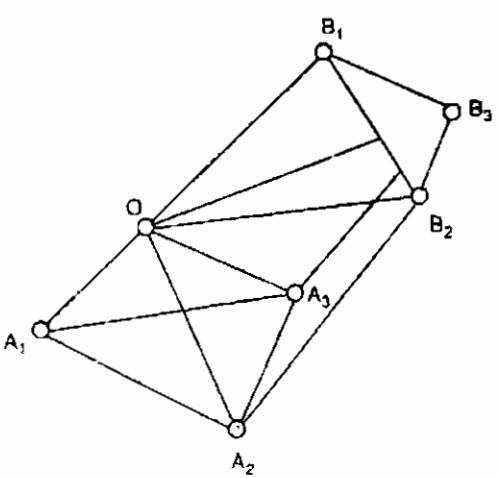
$$n_i = b_i \times s_i \tag{5.16}$$

Sau đây là ý nghĩa vật lý của ba kiểu trạng thái đặc biệt.

(a) Trạng thái đặc biệt động học đảo. Vì J_q là ma trận đồng nhất, nên không có trạng thái đặc biệt động học đảo trong không gian hoạt động của cơ cấu chấp hành. Tuy nhiên, các trạng thái này có thể xảy ra ở biên không gian hoạt động khi một hoặc vài nhánh ở vị trí hoàn toàn duỗi thẳng hoặc xếp gấp lại.

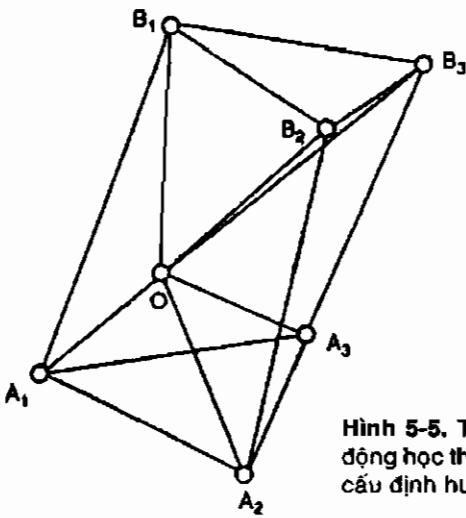
(b) Trạng thái đặc biệt động học thuận. Xét các ràng buộc động học ở nhánh i. Từ pt (5.14), phạm vi độ giãn dài d_i của nhánh i góp phần vào sự quay bệ di động theo trục qua gốc O và hướng theo chiều vector n_i. Khi bộ tác động thứ i bị khoá, sự quay bệ di động theo trục này bị chặn lại, nhưng có thể vẫn quay theo hai trục OA_i và OB_i. Để ba bộ tác động tuyến tính giữ cố định hoàn toàn bệ di động, ba vector n_i ứng với i=1,2,3 phải xác định và trong không gian quay ba chiều của bộ tác động cuối. Định thức của J_x tiến tới O và cơ cấu tăng thêm 1 bậc tự do, khi 3 vector này trở nên tuyến tính độc lập hoặc khi một trong ba vector này bị triệt tiêu. Có thể xác định ba trạng thái đặc biệt động học thuận.

Trường hợp 1. Một trong ba vector, $\mathbf{n}_i$, bị triệt tiêu. Để đạt điều kiện này, ba điểm A_i, O, và B_i phải thẳng hàng. Lúc đó, cơ cấu tăng thêm 1 bậc tự do. Khi tất cả các bộ tác động bị khóa, bệ di động quay theo giao tuyến của hai mặt phẳng tam giác A_jOB_j và A_kOB_k (với $i \neq j \neq k$). Hình 5.4 minh họa cấu hình đặc biệt này, trong đó các điểm A_1, O, B_1 thẳng hàng.



Hình 5-4. Trạng thái đặc biệt động học thuận của cơ cấu định hướng

Trường hợp 2. Hai trong ba vector là $\mathbf{n}_i$ và $\mathbf{n}_j$ phụ thuộc tuyến tính. Khi hai mặt phẳng tam giác A_iOB_i và A_jOB_j trùng nhau, cơ cấu tăng thêm 1 bậc tự do. Lúc đó, tất cả các bộ tác động bị khoá, bệ di động vẫn chuyển động theo giao tuyến giữa hai mặt phẳng tam giác A_iOB_i và A_kOB_k với $k \neq j$. Hình 5.5 minh họa cấu hình đặc biệt này, với hai mặt tam giác A_1OB_1 và A_2OB_2 nằm trên cùng mặt phẳng.



Hình 5-5. Trạng thái đặc biệt động học thuận thứ hai của cơ cấu định hướng

Trường hợp 3. Ba vector $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ $\mathbf{n}_3$ phụ thuộc tuyến tính. Trường hợp này xảy ra khi ba mặt phẳng tam giác A_1OB_1, A_2OB_2 và A_3OB_3 có cùng giao tuyến. Nói cách khác, khi ba vector pháp tuyến $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ và $\mathbf{n}_3$ nằm trên một mặt phẳng, một trong ba vector là tổng tuyến tính hai vector kia. Lúc đó, tất cả các bộ tác động bị khoá, bệ di động vẫn chuyển động vi phân theo giao tuyến của ba mặt phẳng.Ví dụ, nếu khối tứ diện chuyển động $OB_1B_2B_3$ có dạng hình học tương tự khối tứ diện cố định $OA_1A_2A_3$, trạng thái đặc biệt xảy ra khi khối tứ diện chuyển động ở ngay trên đỉnh khối tứ diện cố định.

(c) Trạng thái đặc biệt hỗn hợp. Trạng thái này không xảy ra trong không gian làm việc của cơ cấu, chỉ có thể xảy ra ở biên không gian làm việc khi thỏa đồng thời ba điều kiện:

(1) Tứ diện $OA_1A_2A_3$ tương tự tứ diện $OB_1B_2B_3$.

(2) Ba mặt phẳng tam giác A_iOB_i với i =1, 2, 3 có cùng giao tuyến.

(3) Một trong ba nhánh vươn xa cực đại.

Ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành của Đại học Maryland

Từ cơ cấu chấp hành Maryland (Hình 3.9), sẽ khai triển ma trận Jacobi và khảo sát một số cấu hình đặc biệt. Cơ cấu này chỉ có 3 bậc tự do tịnh tiến. Từ Hình 3.10, phương trình vòng kín nhánh i là:

$$\overline{OP} + \overline{PC_i} = \overline{OA_i} + \overline{A_iB_i} + \overline{B_iC_i} \tag{5.17}$$

Lấy vi phân pt (5.17) theo thời gian:

$$v_p = \omega_{1i} \times a_i + \omega_{2i} \times b_i \tag{5.18}$$

với v_p là vận tốc tuyến tính của bệ di động, $a_i = A_iB_i$, $b_i = B_iC_i$, ω_{ji} là vận tốc góc khâu j của nhánh i. Khâu A_iB_i là nhánh thứ nhất và khâu B_iC_i là nhánh thứ hai.

Trong đó, vector đầu vào là $\dot{q} = [\dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}]^T$ và vector đầu ra là $v_p = [v_{px}, v_{py}, v_{pz}]^T$. Tất cả các tỷ suất khớp khác đều là biến thụ động. Để khử chúng, cần nhân hai vế pt (5.18) với b_{ii}:

$$b_i \cdot v_p = \omega_{1i} \cdot (a_i \times b_i) \tag{5.19}$$

Biểu diễn các vector trong pt (5.19) theo hệ tọa độ (x_i, y_i, z_i):

$$^{i}a_i = a\begin{bmatrix} c\theta_{1i} \\ 0 \\ s\theta_{1i} \end{bmatrix}, \quad ^{i}b_i = b\begin{bmatrix} s\theta_{3i}c(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \\ c\theta_{3i} \\ s\theta_{3i}s(\theta_{1i}+\theta_{2i}) \end{bmatrix}, \quad ^{i}\omega_{1i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_{1i} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{i}v_p = \begin{bmatrix} v_{px}c\phi_i + v_{py}s\phi_i \\ -v_{px}s\phi_i + v_{py}c\phi_i \\ v_{pz} \end{bmatrix}$$

Thay các biểu thức trên vào pt (5.19) và rút gọn:

$$J_{ix}v_{px} + J_{iy}v_{py} + J_{iz}v_{pz} = as\theta_{2i}s\theta_{3i}\dot{\theta}_{1i} \tag{5.20}$$

với

$$J_{ix} = c(\theta_{1i} + \theta_{2i})s\theta_{3i}c\phi_i - c\theta_{3i}s\phi_i$$

$$J_{iy} = c(\theta_{1i} + \theta_{2i})s\theta_{3i}s\phi_i + c\theta_{3i}c\phi_i$$

$$J_{iz} = s(\theta_{1i} + \theta_{2i})s\theta_{3i}$$

Chú ý, $j_i = [j_{ix}, j_{iy}, j_{iz}]^T$ là vector đơn vị có hướng từ B_i đến C_i và được tính trong hệ tọa độ cố định (x,y,z).

Phương trình (5.20) được viết ba lần theo i = 1, 2, 3, sẽ có ba phương trình vô hướng, được tổ hợp theo ma trận:

$$J_x v_p = J_q \dot{q} \tag{5.21}$$

với

$$J_x = \begin{bmatrix} j_{1x} & j_{1y} & j_{1z} \\ j_{2x} & j_{2y} & j_{2z} \\ j_{3x} & j_{3y} & j_{3z} \end{bmatrix}$$

$$J_q = a\begin{bmatrix} s\theta_{21}s\theta_{31} & 0 & 0 \\ 0 & s\theta_{22}s\theta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & s\theta_{23}s\theta_{33} \end{bmatrix}$$

Trạng thái đặc biệt động học đảo. Từ pt (5.21), trạng thái đặc biệt động học đảo xảy ra khi thỏa một trong các điều kiện sau:

$$\theta_{2i} = 0 \quad \text{hoặc } \pi \tag{5.22}$$

$$\theta_{3i} = 0 \quad \text{hoặc } \pi \tag{5.23}$$

trong đó i =1, 2, 3. Về mặt vật lý, trạng thái thỏa pt (5.22) khi khớp nối nhánh trên và khâu vào ở trên một mặt phẳng. Trạng thái (5.23) xảy ra khi tất cả các khâu của cơ cấu bốn-khâu bản lề chứa nhánh trên là đồng tuyến tính.

Trạng thái đặc biệt động học thuận. Trạng thái này xảy ra khi det $(J_x) = 0$. Tuy khó giải tất cả các trạng thái đặc biệt khả dĩ, nhưng nhiều trạng thái cơ cấu thoả đúng điều kiện này được nhận diện theo cách sau. Mỗi hàng của J_x đều biểu thị một vector đơn vị, j_i, có chiều theo hướng khâu kép B_iC_i của cơ cấu bốn-khâu bản lề. J_x có trạng thái đặc biệt khi ba vector đơn vị trở nên phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là:

$$\mu_1 j_1 + \mu_2 j_2 + \mu_3 j_3 = 0 \tag{5.24}$$

đối với vài giá trị thực μ_1, μ_2, μ_3, không phải tất cả các giá trị μ đều bằng zero.

Cấu hình thứ nhất thỏa pt (5.24) là khi cả ba vector đơn vị, j_i, với i=1, 2, 3 đều nằm trên mặt phẳng. Ví dụ, khi ba cơ cấu bốn-khâu bản lề cùng trên mặt phẳng song song với mặt phẳng xy, thành phần z của pt (5.24) bằng zero. Do đó, luôn luôn tìm được các giá trị μ_1, μ_2, μ_3 khác zero. Trạng thái này là:

$$s(\theta_{11}+\theta_{21})s\theta_{31} = s(\theta_{12}+\theta_{22})s\theta_{32} = s(\theta_{13}+\theta_{23})s\theta_{33} = 0 \quad (5.25)$$

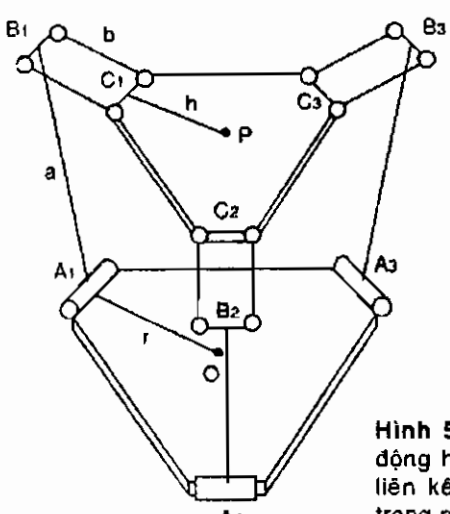
Phương trình (5.25) cho thấy cơ cấu chấp hành ở trạng thái đặc biệt động học thuận khi tất cả các nhánh bố trí theo điều kiện:

$\theta_{1i} + \theta_{2i} = 0$ hoặc π

hoặc $\theta_{3i} = 0$ hoặc π

với mọi i = 1,2 ,3. Điều kiện $\theta_{3i} = 0$ hoặc π là trạng thái động học đặc biệt hỗn hợp.

Sự diễn dịch hình học của điều kiện này là cơ cấu chấp hành có trạng thái đặc biệt động học thuận khi các cơ cấu bốn-khâu bản lề của cả ba nhánh có cùng mặt phẳng bệ di động. Khi đó, các bộ tác động không thể



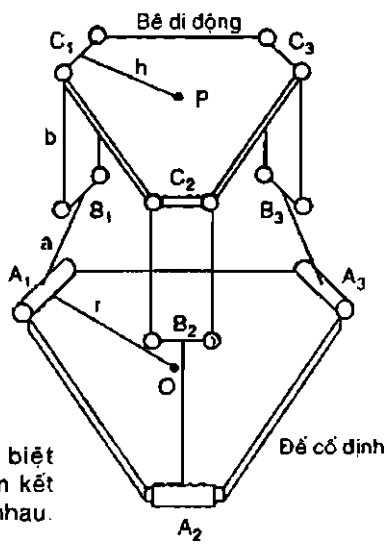
Hình 5-6. Cấu hình đặc biệt động học thuận trong đó mọi liên kết nhánh phía trên đều trong mặt phẳng bệ di động

chịu lực bất kỳ tác dụng lên bệ di động theo chiều z. Hình 5.6 minh họa kiểu cấu hình này, điều đó chỉ xảy ra nếu a+r = b+ h.

Cấu hình thứ hai thoả pt (5.24) là khi hai liên kết bất kỳ ở nhánh trên song song với nhau, nghĩa là:

$$j_i = \pm j_k \qquad \text{với } i \neq k \tag{5.26}$$

Hình 5.7 minh họa loại cấu hình đặc biệt này, cơ cấu chấp hành không thể chịu lực bất kỳ tác dụng lên mặt phẳng bệ di động. Chú ý, cả ba liên kết nhánh phía trên song song với nhau, nhưng chỉ cần hai trong ba liên kết này song song.



Hình 5-7. Cấu hình đặc biệt động học thuận khi hai liên kết nhánh trên song song với nhau.

Trạng thái đặc biệt hỗn hợp. Trạng thái này xảy ra khi đồng thời thoả hai điều kiện sau:

(1) Dạng hình học bệ di động đồng nhất với đế cố định.

(2) Cả ba khâu ngõ vào đều vuông góc với đế cố định ($A_iB_i \perp O_iA_i$ với i=1, 2, 3).

Bệ di động lúc đó nhận thêm 2 bậc tự do trong khi các khâu đầu vào hoàn toàn bị khoá, điểm P có thể được định vị bất kỳ trên bề mặt cầu có

tâm cách phía trên tâm đế cố định một đoạn a. Mặt khác, bệ di động đứng yên, trong khi các khâu đầu vào có thể quay vi phân.

Ma trận Jacobi của tay máy Stewart-Gough

Xét ma trận Jacobi và các điều kiện đặc biệt của tay máy Stewart-Gough (Hình 3.14). Vector ngõ vào là $\dot{q} = [\dot{d}_1, \dot{d}_2, ..., \dot{d}_6]^T$, vector ngõ ra được xác định theo vận tốc trọng tâm P và vận tốc góc bệ di động:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v_p \\ \omega_B \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Để có ma trận Jacobi, cần tính phương trình vòng kín vận tốc cho từng nhánh. Từ Hình 3.14, phương trình vòng kín nhánh i là:

$$\overline{OP} + \overline{PB_i} = \overline{OA_i} + \overline{A_iB_i} \tag{5.28}$$

Lấy vi phân pt (5.28) theo thời gian:

$$v_p + \omega_B \times b_i = d_i\omega_i \times s_i + \dot{d}_i s_i \tag{5.29}$$

với b_i và s_i là ký hiệu vector PB_i và vector đơn vị dọc theo A_iB_i; ω_i là vận tốc góc nhánh i trong hệ tọa độ cố định A. Để khử ω_i, cần nhân hai vế pt (5.29) với s_i:

$$s_i \cdot v_p + (b_i \times s_i) \cdot \omega_B = \dot{d}_i \tag{5.30}$$

Phương trình (5.30) được viết sáu lần, với i=1 đến 6, đó là sáu phương trình vô hướng, tổ hợp thành ma trận:

$$J_x\dot{x} = J_q\dot{q} \tag{5.31}$$

trong đó

$$J_x = \begin{bmatrix} s_1^T & (b_1 \times s_1)^T \\ s_2^T & (b_2 \times s_2)^T \\ \vdots & \vdots \\ s_6^T & (b_6 \times s_6)^T \end{bmatrix}$$

$J_q = I$ (ma trận thuần nhất 6×6)

Đặt $n_i = b_i \times s_i$ (5.32)

Khi đó n_i là vector trực giao với mặt phẳng chứa các điểm A_i, B_i, P. Sau đây là ý nghĩa vật lý của ba kiểu trạng thái đặc biệt.

Trạng thái đặc biệt động học đảo. Kiểu trạng thái này không xảy ra bên trong không gian làm việc của cơ cấu chấp hành vì J_q là ma trận thuần nhất. Trạng thái đặc biệt động học đảo có thể xảy ra ở biên không gian làm việc, khi đó, một hay nhiều nhánh duỗi thẳng hoặc xếp gập lại.

Trạng thái đặc biệt động học thuận. Kiểu trạng thái này rất khó giải. Tuy không thể tìm được mọi trạng thái đặc biệt, nhưng có thể nhận dạng một số bằng cách khảo sát ma trận J_x. Ví dụ, khi bệ di động hạ xuống sát đỉnh đế cố định, $n_i = 0$, thuần nhất, với i =1 đến 6. Cơ cấu chấp hành nhận thêm 3 bậc tự do. Nghĩa là bệ di động quay vi phân theo trục bất kỳ trên mặt phẳng xy, và cũng có thể tịnh tiến vi phân dọc theo trục z.

Trạng thái đặc biệt động học thuận khác xảy ra khi hình học cơ cấu chấp hành thỏa các điều kiện sau:

1. Bệ di động và đế cố định đồng nhất với nhau.
2. Các chiều dài nhánh bằng nhau.
3. Tất cả các nhánh song song với nhau.

Khi đáp ứng các điều kiện nêu trên, bệ di động tăng thêm 2 bậc tự do tịnh tiến, có thể định vị bất kỳ trên mặt cầu có bán kính bằng chiều dài nhánh và có tâm ở tâm hình học đế cố định. Sự định hướng bệ di động không đổi trong toàn bộ chuyển động này. Có vô số cấu hình như thế khi thoả điều kiện $d_1 = d_2 = ... = d_6$. Chú ý, trạng thái đặc biệt hỗn hợp không xảy ra bên trong không gian làm việc của cơ cấu, vì J_q là ma trận thuần nhất.

Quay vít thuận nghịch

Khái niệm vít xoắn được dùng để xác định các chuyển vị vô hạn và hữu hạn của vật rắn trong không gian ba chiều. Đối với tĩnh học, cũng có thể dùng khái niệm tương tự. Hệ thống lực và ngẫu lực bất kỳ tác động lên vật rắn có thể rút gọn thành ngẫu lực và hợp lực quanh điểm cần xét. Nói chung vector hợp lực và ngẫu lực không đồng tuyến tính. Tuy nhiên, có thể chứng minh sự tồn tại một trục duy nhất, theo đó hệ lực và ngẫu lực có thể rút gọn thành hợp lực, *f*, tác động dọc trục đó, và ngẫu lực, c, quanh trục đó. Phối hợp ngẫu lực và lực này được gọi là *liên kết xoắn vít*. Trục duy nhất này được gọi là *trục xoắn vít* hoặc *trục quay vít* của hệ lực

và ngẫu lực. Tương tự sự quay xoắn, *bước xoắn vít* được định nghĩa là tỷ số giữa ngẫu lực và hợp lực ($\lambda_r = c/f$).

Xoắn vít đơn vị, $\hat{\$}_r$, được định nghĩa trong hệ tọa độ quy chiếu theo cặp vector:

$$\hat{\$}_r = \begin{bmatrix} s_r \\ s_{ro} \times s_r + \lambda_r s_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{r1} \\ S_{r2} \\ S_{r3} \\ S_{r4} \\ S_{r5} \\ S_{r6} \end{bmatrix} \tag{5.33}$$

với s_r là vector đơn vị hướng theo chiều trục quay vít, s_{ro} là vector vị trí của điểm bất kỳ trên trục quay vít, vector $s_{ro} \times s_r$ là moment của trục quay vít tại gốc hệ quy chiếu. Đối với thuần lực, $\lambda_r = 0$, sự xoắn vít đơn vị được rút gọn thành:

$$\hat{\$}_r = \begin{bmatrix} s_r \\ s_{ro} \times s_r \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

Đối với thuần moment, $\lambda_r = \infty$:

$$\hat{\$}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ s_r \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

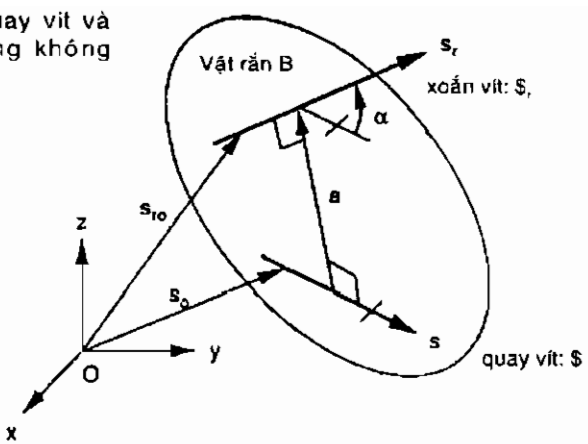
Theo định nghĩa nêu trên, sự xoắn vít với cường độ ρ được viết dưới dạng:

$$\$_r = \rho \hat{\$}_r \tag{5.36}$$

Có thể thấy ba thành phần đầu của xoắn vít là hợp lực, f, ba thành phần cuối là moment tổng do tác dụng của lực f và ngẫu lực c tại điểm gốc hệ quy chiếu.

Nếu sự xoắn vít tác động lên vật rắn sao cho không phát sinh công khi vật rắn thực hiện sự quay vít vô cùng nhỏ, hai xoắn vít này được coi là *xoắn vít thuận nghịch*. Hình 5.8 minh họa vật rắn được tác động theo xoắn vít $\$_r = \rho \hat{\$}_r$ trong khi thực hiện quay vít vô cùng nhỏ $\$ = q\hat{\$}$. Ba

Hình 5-8. Quay vít và xoắn vít trong không gian ba chiều



thành phần đầu của quay vít biểu thị vận tốc góc và ba thành phần cuối là vận tốc tuyến tính của điểm trùng hợp tức thời với gốc tọa độ của hệ quy chiếu. Do đó công ảo được thực hiện giữa xoắn vít và quay vít có dạng:

$$\delta W = \rho\dot{q}[s\cdot(s_{r0}\times s_r + \lambda_r s_r) + s_r\cdot(s_0\times s + \lambda s)]$$
$$= \rho\dot{q}(\lambda+\lambda_r)(s\cdot s_r) + s_r\cdot(s_0\times s) + s\cdot(s_{r0}\times s_r)] \qquad (5.37)$$

Từ hình học các đường liên hệ với hai sự quay này:

$$s\cdot s_r = c\alpha \qquad (5.38)$$

$$s_r\cdot(s_0\times s) + s\cdot(s_{r0}\times s_r) = -a\cdot(s\times s_r) = -as\alpha \qquad (5.39)$$

với a là vector dọc theo đường vuông góc chung có chiều từ $ đến $_r$; α là góc quay vít giữa các trục $ và $_r$. Thay các pt (5.38) và (5.39) vào (5.37):

$$\delta W = \rho\dot{q}[(\lambda+\lambda_r)c\alpha - as\alpha] \qquad (5.40)$$

Theo định nghĩa, công ảo do hai sự quay thuận nghịch bằng zero; ρ và $\dot{q}$ khác 0, nên điều kiện thuận nghịch là:

$$\eta \equiv (\lambda+\lambda_r)c\alpha - as\alpha = 0 \qquad (5.41)$$

Đại lượng η là hệ số ảo giữa quay vít $_r$ và xoắn vít $. Chú ý, hệ số ảo độc lập với các cường độ quay. Nếu η=0, bất kể các cường độ quay vít và xoắn vít, sự xoắn vít không sinh công khi vật rắn thực hiện sự quay vít vô

cùng bé. Do hệ số ảo đối xứng theo λ và λ_r, nên $ và $ có thể thay thế cho nhau mà không ảnh hưởng đến các tính chất thuận nghịch.

Để thuận tiện, có thể định nghĩa ma trận T của quay vít:

$$\$^T = [S_4 S_5 S_6 S_1 S_2 S_3]$$

sao cho tích tổng quát hóa của $\$_r$ và $ có dạng:

$$\$_r^T \$ = S_1 S_{r4} + S_2 S_{r5} + S_3 S_{r6} + S_4 S_{r1} + S_5 S_{r2} + S_6 S_{r3}$$

Từ đó, điều kiện thuận nghịch là:

$$\delta W = \$_r^T \$ = 0 \qquad (5.42)$$

Phương trình (5.41) hoặc (5.42) đưa ra một ràng buộc hình học đối với hai quay vít thuận nghịch. Do sự quay vít đơn vị đòi hỏi năm thông số độc lập để xác định vị trí và bước, sẽ có vô hạn bậc bốn (∞^4) các quay vít thuận nghịch với quay vít cho trước. Do đó mọi quay vít thuận nghịch đối với một quay vít tạo thành hệ thống - 5 trong không gian ba chiều. Về lý thuyết, năm quay vít bất kỳ từ hệ thống - 5 có thể được dùng như các "xoắn vít" để ràng buộc vật rắn theo chuyển động đơn - bậc - tự do. Tương tự, sẽ có vô hạn bậc ba (∞^3) các quay vít thuận nghịch với vô hạn đơn bậc (∞) các quay vít liên quan với hệ thống - 2, và các quay vít thuận nghịch này tạo thành hệ thống - 4. Bốn quay vít được chọn bất kỳ từ hệ thống - 4 có thể được dùng như các "xoắn vít" để ràng buộc vật rắn theo chuyển động 2-dof. Hệ thống - 3 và hệ thống thuận nghịch tương ứng đều chứa vô hạn bậc hai (∞^2) các quay vít.

Nói chung, điều kiện về thuận nghịch sẽ thỏa nếu điểm tác dụng xoắn vít là tĩnh tại trong khi vật rắn thực hiện sự quay vít tức thời xung quanh một trục. Đối với xoắn vít có bước zero (chỉ có lực) điều kiện này sẽ thỏa nếu điểm tiếp xúc hoàn toàn không chuyển động hoặc chuyển động theo chiều vuông góc với lực tác dụng.

Phần kế tiếp sẽ nghiên cứu các hệ thống quay vít thuận nghịch liên quan với các cặp động học thường dùng và các chuỗi có thể được dùng để hướng dẫn triển khai các ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành song song.

Các quay vít thuận nghịch của vài cặp động học

Khớp quay. Đối với khớp quay, sự quay vít đơn vị là sự quay có bước zero dọc theo trục khớp. Các quay vít thuận nghịch tạo thành hệ - 5. Các

quay vít thuận nghịch bước zero nằm trên mọi mặt phẳng chứa trục khớp quay.

Khớp lăng trụ. Với khớp lăng trụ, sự quay vít đơn vị có bước vô hạn (∞) chuyển động dọc theo chiều trượt. Các quay vít thuận nghịch tạo thành hệ - 5, và tất cả các quay vít thuận nghịch bước zero nằm trên mọi mặt phẳng vuông góc với trục khớp lăng trụ.

Khớp cầu. Các quay vít đơn vị tạo thành hệ thống - 3 có bước zero đi qua tâm khớp cầu. Các quay vít thuận nghịch cũng tạo thành hệ - 3 bước zero đi qua tâm cầu.

Khớp đa cardan. Các quay vít đơn vị tạo thành hệ - 2 có bước zero. Đó là chùm tia phẳng từ tâm khớp cardan và nằm trên mặt phẳng chứa 2 trục quay. Các quay vít thuận nghịch tạo thành hệ - 4. Tất cả các quay vít thuận nghịch bước zero đi qua tâm khớp cardan hoặc trên mặt phẳng chứa các trục khớp cardan. Đồng thời, cũng tồn tại quay vít thuận nghịch bước ∞ đi qua tâm khớp cardan và vuông góc với cả hai trục khớp.

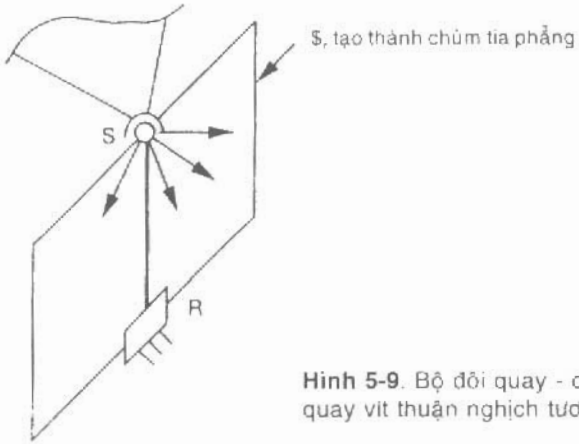
Các quay vít của chuỗi động học

Các quay vít thuận nghịch liên quan với chuỗi động học có thể được xác định bằng giao cắt của các hệ quay vít thuận nghịch liên hệ với các khớp của chuỗi động học.

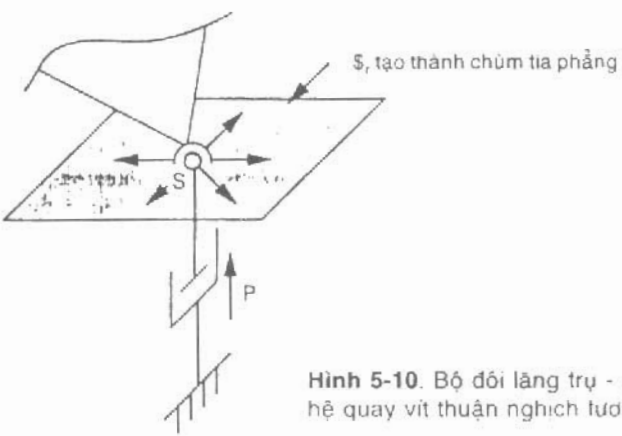
Bộ đôi cardan-cầu. Các quay vít khớp liên quan với bộ đôi này tạo ra hệ - 5. Do đó quay vít thuận nghịch là hệ - 1. Do có khớp cầu và khớp cardan, quay vít thuận nghịch là loại bước zero đi qua các tâm hai khớp đó.

Bộ đôi quay-cầu: Các quay vít khớp liên quan với bộ đôi này tạo ra hệ - 4. Các quay vít thuận nghịch tạo thành hệ - 2. Do có khớp cầu, mọi quay vít thuận nghịch đều là bước zero, đi qua tâm khớp cầu. Do có khớp quay, các quay vít thuận nghịch phải trên mặt phẳng chứa trục khớp quay. Do đó mọi quay vít thuận nghịch đều là bước zero tạo thành chùm tia phẳng (Hình 5.9).

Bộ đôi lăng trụ-cầu: Các quay vít khớp liên quan với bộ đôi này tạo ra hệ - 4. Các quay vít thuận nghịch tạo thành hệ - 2. Do có khớp cầu, mọi quay vít thuận nghịch đều là bước zero, đi qua tâm khớp cầu. Hơn nữa, do có khớp lăng trụ, các quay vít thuận nghịch phải trên mặt phẳng vuông góc với trục khớp lăng trụ. Do đó mọi quay vít thuận nghịch đều là bước zero tạo thành chùm tia phẳng (Hình 5.10).



Hình 5-9. Bộ đôi quay - cầu và hệ quay vít thuận nghịch tương ứng.



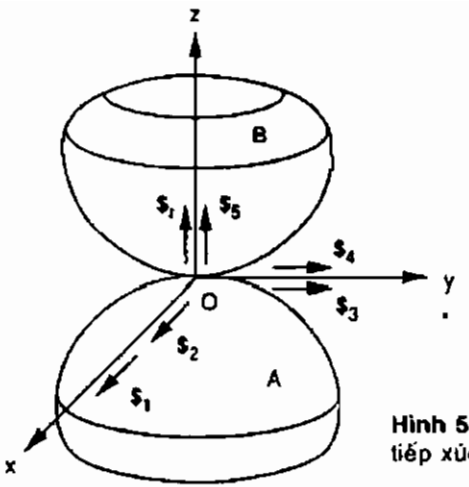
Hình 5-10. Bộ đôi lăng trụ - cầu và hệ quay vít thuận nghịch tương ứng

Cặp tiếp xúc bề mặt. Hình 5.11 minh họa vật rắn B tiếp xúc vật rắn A tại điểm O, tại đó hai bề mặt tiếp xúc lăn và trượt tự do với nhau. Cần xét các quay vít liên quan với cặp tiếp xúc này và quay vít thuận nghịch.

Vật rắn B có 5 bậc tự do, và chuyển động tức thời được mô tả bởi tổ hợp tuyến tính năm quay vít đơn vị:

$$\hat{\$}_1 = [1,0,0,0,0,0]^T$$

$$\hat{\$}_2 = [0,0,0,1,0,0]^T$$



Hình 5-11. Hai vật rắn tiếp xúc tại một điểm

$$\hat{\$}_3 = [0,1,0,0,0,0]^T$$

$$\hat{\$}_4 = [0,0,0,0,1,0]^T$$

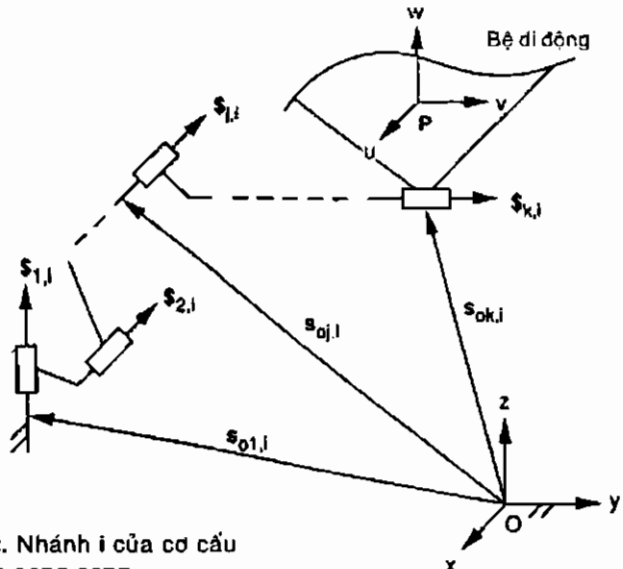
$$\hat{\$}_5 = [0,0,1,0,0,0]^T \tag{5.43}$$

Do các quay vít liên quan với cặp tiếp xúc tạo thành hệ - 5, chỉ tồn tại sự quay vít thuận nghịch duy nhất. Vì $\hat{\$}_1$, $\hat{\$}_3$, $\hat{\$}_5$ là ba quay vít bước zero giao nhau, sự quay vít thuận nghịch có bước zero đi qua điểm tiếp xúc. Hơn nữa, do có hai quay vít bước vô hạn (∞) là $\hat{\$}_2$, $\hat{\$}_4$, quay vít thuận nghịch phải vuông góc với cả hai trục x và y. Từ đó, sự quay vít thuận nghịch là:

$$\hat{\$}_r = [0,0,0,0,0,1]^T \tag{5.44}$$

Ma trận Jacobi quay vít

Cơ cấu chấp hành song song thường gồm m nhánh. Mỗi nhánh gồm các khâu nối với nhiều khớp khác nhau. Trên mỗi nhánh, một hay nhiều khớp là loại khớp tác động (được các bộ tác động điều khiển), số còn lại là khớp thụ động. Hình 5.12 minh họa các quay vít khớp trên một nhánh. Khớp trụ có thể thay bằng khớp quay và khớp lăng trụ đồng trục. Khớp



Hình 5-12. Nhánh i của cơ cấu chấp hành song song.

cầu có thể thay bằng ba khớp quay giao nhau không đồng phẳng. Do đó, có thể nghiên cứu mỗi nhánh theo chuỗi vòng hở ℓ khớp nối bệ với đế. Theo cách này, sự xoắn tức thời, $\$_p$, của bệ di động có thể biểu thị theo tổ hợp tuyến tính ℓ sự xoắn tức thời:

$$\$_p = \sum_{j=1}^{i} \dot{q}_{j,i} \hat{\$}_{j,i} \qquad \text{với } i = 1, 2, ..., m \qquad (5.45)$$

với $\dot{q}_{j,i}$ là cường độ và $\hat{\$}_{j,i}$ là quay vít đơn vị ứng với khớp j trong nhánh i. Sự xoắn bộ tác động cuối là:

$$\$_p = \begin{bmatrix} \omega_n \\ v_0 \end{bmatrix} \qquad (5.46)$$

Phương trình (5.45) chứa nhiều quay vít khớp thụ động, được khử bằng cách áp dụng lý thuyết quay vít thuận nghịch. Giả sử trên mỗi nhánh có g khớp tác động, có g quay vít đơn vị $\$_{r_{j,i}}$ với j = 1,2, ..., g, mỗi quay này đều thuận nghịch với mọi quay vít khớp thụ động trên nhánh i. Thực hiện tích trực giao hai vế pt (5.45) với từng quay vít thuận nghịch, sẽ có g phương trình được viết dưới dạng ma trận:

$$J_{x,i}\$_p = J_{q,i}\dot{q}_i \tag{5.47}$$

với

$$J_{x,i} = \begin{bmatrix} \hat{\$}^T_{r1,i} \\ \hat{\$}^T_{r2,i} \\ \vdots \\ \hat{\$}^T_{rg,i} \end{bmatrix}$$

$$J_{q,i} = \begin{bmatrix} \hat{\$}^T_{r1,i}\hat{\$}_{1,i} & \hat{\$}^T_{r1,i}\hat{\$}_{2,i} & \cdots & \hat{\$}^T_{r1,i}\hat{\$}_{g,i} \\ \hat{\$}^T_{r2,i}\hat{\$}_{1,i} & \hat{\$}^T_{r2,i}\hat{\$}_{2,i} & \cdots & \hat{\$}^T_{r2,i}\hat{\$}_{g,i} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{\$}^T_{rg,i}\hat{\$}_{1,i} & \hat{\$}^T_{rg,i}\hat{\$}_{2,i} & \cdots & \hat{\$}^T_{rg,i}\hat{\$}_{g,i} \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_i = [\dot{q}_{1,i},\ldots,\dot{q}_{g,i}]^T$$

Phương trình (5.47) được viết m lần, mỗi lần cho một nhánh, tạo thành n= m×g phương trình tuyến tính, được tổ hợp dưới dạng:

$$J_x\$_p = J_q\dot{q} \tag{5.48}$$

với

$$J_x = \begin{bmatrix} J_{x,1} \\ J_{x,2} \\ \vdots \\ J_{x,3} \end{bmatrix}$$

$$J_q = \begin{bmatrix} [J_{q,1}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [J_{q,2}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [J_{q,m}] \end{bmatrix}$$

$$\dot{q} = [\dot{q}_{1,1},\ldots,\dot{q}_{g,1},\dot{q}_{1,2},\ldots,\dot{q}_{g,2},\ldots,\dot{q}_{g,m}]^T$$

Chú ý, mỗi hàng trong J_x biểu diễn hoán vị của quay vít thuận nghịch.

Các sự xoắn liên quan với mọi khớp của nhánh tạo thành hệ ℓ độc lập tuyến tính. Gọi d là chiều không gian chuyển động (d=6 đối với chuyển

động không gian, d=3 đối với chuyển động phẳng và cầu). Nếu ℓ = d, sẽ không có sự thuận nghịch quay vít đối với hệ - ℓ xoắn. Nếu ℓ < d, có (d-ℓ) quay vít độc lập tuyến tính tạo thành hệ - (d-ℓ). Mỗi quay vít trong hệ - (d-ℓ) đều là thuận nghịch đối với hệ - ℓ xoắn. Đối với nhánh có k khớp không tác động, tồn tại (d-k) quay vít độc lập tuyến tính tạo thành hệ - (d-k). Mỗi quay vít trong hệ - (d-k) đều là thuận nghịch với từng quay vít không tác động của nhánh đó. Rõ ràng, hệ - (d-k) chứa hệ - (d-ℓ). Quay vít bất kỳ được lấy từ hệ - (d-k) nhưng không thuộc hệ - (d-ℓ), có thể được dùng làm quay vít thuận nghịch, $\$_{rj,i}$ để lập ma trận Jacobi. Do đó, có nhiều quay vít thuận nghịch có thể được chọn. Hơn nữa, nếu mỗi quay vít thuận nghịch được chọn là thuận nghịch cho mọi quay vít, trừ các quay vít khớp tác động, $J_{q,i}$ được rút gọn thành:

$$J_{q,i} = \begin{bmatrix} \hat{\$}^T_{r1,1}\hat{\$}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\$}^T_{r2,1}\hat{\$}_{2,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\$}^T_{rg,1}\hat{S}_{g,1} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

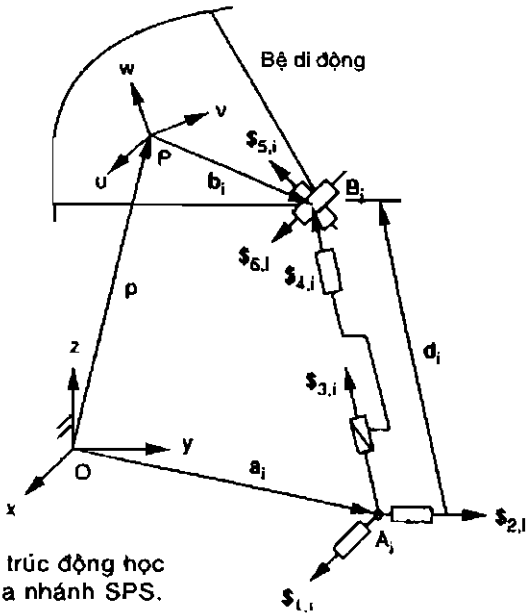
Do đó, J_q trở thành ma trận chéo, và các phần tử khác zero được cho bởi các tích trực giao các quay vít khớp tác động với các quay vít thuận nghịch tương ứng.

Ma trận Jacobi quay vít của bệ Stewart-Gough

Đối với bệ Stewt-Gough (Hình 3.14), có thể áp dụng khái niệm quay vít thuận nghịch để tìm ma trận Jacobi. Hình 5.13 minh họa chuỗi động học tương đương của nhánh SPS. Trong đó, khớp cầu phía dưới được thay bằng hai quay vít đơn vị giao nhau, $\$_1$ và $\$_2$, khớp cầu phía trên được thay bằng ba quay vít đơn vị giao nhau, $\$_4$, $\$_5$, $\$_6$. Khớp lăng trụ là $\$_3$. Do đó bậc tự do thụ động giữa cặp S-S bị khử.

Như Chương 3 đã đề cập, hai hệ tọa độ vuông góc A(x,y,z) và B(u,v,w) gắn tương ứng vào đế cố định và bệ di động. Hệ quy chiếu tức thời C(x',y',z') có gốc đặt tại điểm P và các trục x',y',z' song song với các trục x,y,z. Có thể tính biểu thức mọi quay vít khớp trong hệ quy chiếu tức thời đó.

Có sáu quay vít khớp trên mỗi nhánh, khớp thứ ba là khớp tác động duy nhất, còn lại là năm khớp thụ động. Sự quay vít khớp tác động có bước vô hạn. Gọi $s_{j,i}$ là vector đơn vị dọc theo trục khớp j trong nhánh i. Sáu quay vít khớp đơn vị của nhánh là:



Hình 5-13. Cấu trúc động học tương đương của nhánh SPS.

$$\hat{\$}_{1,i} = \begin{bmatrix} s_{1,i} \\ (b_i - d_i) \times s_{1,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{2,i} = \begin{bmatrix} s_{2,i} \\ (b_i - d_i) \times s_{2,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{3,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_{3,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{4,i} = \begin{bmatrix} s_{4,i} \\ b_i \times s_{4,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{5,i} = \begin{bmatrix} s_{5,i} \\ b_i \times s_{5,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{6,i} = \begin{bmatrix} s_{6,i} \\ b_i \times s_{6,i} \end{bmatrix}$$

với $b_i = \overline{PB_i}$, $d_i = \overline{A_iB_i} = d_i s_{3,i}$, và $s_{3i} = s_{4i}$

Coi mỗi nhánh là chuỗi vòng hở, sự xoắn tức thời của bệ di động được tính theo quay vít khớp là:

$$\$_p = \dot{\theta}_{1,i}\hat{\$}_{1,i} + \dot{\theta}_{2,i}\hat{\$}_{2,i} + \dot{d}_i\hat{\$}_{3,i} + \dot{\theta}_{4,i}\hat{\$}_{4,i} + \dot{\theta}_{5,i}\hat{\$}_{5,i} + \dot{\theta}_{6,i}\hat{\$}_{6,i} \quad (5.50)$$

Do các trục của mọi khớp thụ động trên mỗi nhánh cắt đường đi qua điểm A_i và B_i, quay vít duy nhất là thuận nghịch với mọi quay vít *khớp thụ động* là:

$$\hat{\$}_{r3,i} = \begin{bmatrix} s_{3i} \\ b_i \times s_{3,i} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

lấy tích trực giao hai vế pt (5.50) với (5.51):

$$\hat{\$}_{r3,i}^T \$_p = \dot{d}_i \qquad \text{với } i=1,2,\ldots,6 \quad (5.52)$$

Viết pt (5.52) sáu lần, mỗi lần một nhánh:

$$J_x\dot{x} = J_q\dot{q} \quad (5.53)$$

với

$$J_x = \begin{bmatrix} (b_1 \times s_{3,1})^T & s_{3,1}^T \\ (b_2 \times s_{3,2})^T & s_{3,2}^T \\ \vdots & \vdots \\ (b_6 \times s_{3,6})^T & s_{3,6}^T \end{bmatrix}$$

$J_q = I$ (ma trận thuần nhất 6×6)

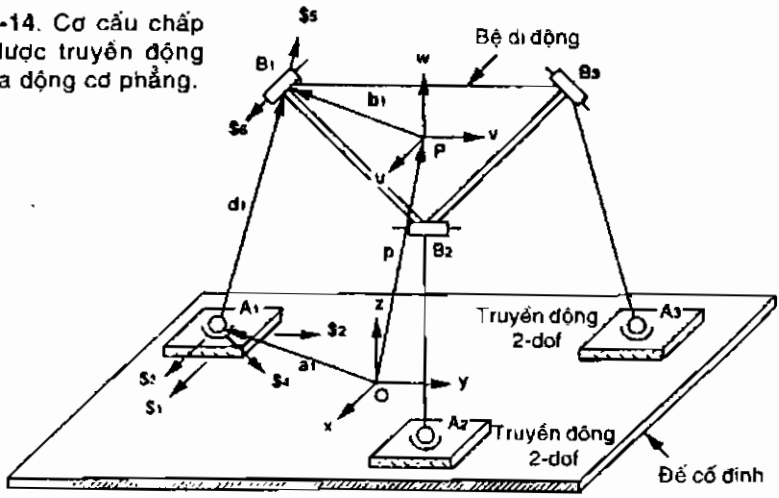
$$\dot{x} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_{px}, v_{py}, v_{pz}]^T$$

$$\dot{q} = [\dot{d}_1, \dot{d}_2, \dot{d}_3, \dot{d}_4, \dot{d}_5, \dot{d}_6]^T$$

Chú ý, $s_{3,i}$ là vector đơn vị tương tự s_i trong các pt (5.29), (5.31). Khi ba cột đầu và cuối của J_x đổi chỗ cho nhau, ma trận Jacobi quay vít trở thành ma trận Jacobi qui ước. Kết quả này hoàn toàn như phương pháp vòng vector vận tốc qui ước.

Ma trận Jacobi quay vít của cơ cấu chấp hành có ba động cơ phẳng

Hình 5.14 minh họa cơ cấu chấp hành song song 6 bậc tự do. Cơ cấu này gồm bệ di động, đế cố định và ba nhánh A_iB_i, với i=1,2,3. Đầu trên mỗi nhánh nối với bệ di động bằng khớp quay. Đầu dưới mỗi nhánh nối với bộ điều khiển hai bậc tự do phẳng bằng khớp cầu. Các trục khớp quay ở B_1, B_2 và B_3 nằm trên mặt phẳng $(B_1B_2B_3)$. Chuyển động cơ cấu chấp hành được điều khiển theo chuyển động ba động cơ phẳng trên mặt phẳng xy đế cố định. Ở đây, sẽ tìm ma trận Jacobi của cơ cấu bằng khái niệm quay vít thuận nghịch.



Hình 5-14. Cơ cấu chấp hành được truyền động bằng ba động cơ phẳng.

Trên Hình 5.14, hai hệ tọa độ vuông góc A(x,y,z) và B(u,v,w) được gắn tương ứng vào đế cố định và bệ di động. Gốc của hệ tọa độ quy chiếu (u,v,w) đặt tại trọng tâm P bệ di động, các trục u và v nằm trên mặt phẳng $B_1B_2B_3$. Vị trí bệ di động quan hệ với đế cố định theo ma trận quay ${}^{A}R_{B}$ và vector vị trí trọng tâm p.

Hình 5.14 còn biểu thị nhánh tương đương, trong đó khớp cầu được thay bằng ba khớp quay giao nhau không đồng phẳng $\$_{3,i}$, $\$_{4,i}$, $\$_{5,i}$. Trục của $\$_{3,i}$ thẳng hàng với trục x, trục của $\$_{5,i}$ thẳng với trục dọc của nhánh, trục của $\$_{4,i}$ vuông góc với $\$_{3,i}$ và $\$_{5,i}$. Sự quay vít khớp thứ nhất, $\$_{1,i}$ dọc theo chiều x, sự quay vít khớp thứ hai, $\$_{2,i}$ dọc theo trục y, sự quay vít

khớp thứ sáu $\$_{6,i}$ nằm trên mặt phẳng uv. Tóm lại, có sáu sự quay vít khớp trên nhánh tương đương. Hai khớp đầu là hai khớp lăng trụ tác động, bốn khớp còn lại là loại *khớp quay thụ động*.

Để tiện phân tích, cần xác định hệ quy chiếu tức thời C(x', y', z') có gốc tại P, và các trục x', y', z' song song với các trục x, y, z của hệ tọa độ cố định. Có thể biểu diễn mọi quay vít khớp đơn vị theo hệ quy chiếu tức thời:

$$\hat{\$}_{1,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_{1,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{2,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_{2,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{3,i} = \begin{bmatrix} s_{3,i} \\ (b_i - d_i) \times s_{3,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{4,i} = \begin{bmatrix} s_{4,i} \\ (b_i - d_i) \times s_{4,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{5,i} = \begin{bmatrix} s_{5,i} \\ (b_i \times s_{5,i} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\$}_{6,i} = \begin{bmatrix} s_{6,i} \\ (b_i \times s_{6,i} \end{bmatrix}$$

với $s_{1,i} = s_{3,i} = [1,0,0]^T$, $s_{2,i} = [0,1,0]^T$, $a_i = \overline{OA_i}$, $b_i = \overline{PB_i}$
$d_i = \overline{A_iB_i}$, $s_{5,i} = d_i / d_i$, và $s_{4,i} = s_{5,i} \times s_{3,i}$

Xét mỗi nhánh theo chuỗi vòng hở và biểu diễn sự xoắn tức thời $\$_p$ của bệ di động theo các quay vít khớp:

$$\$_p = v_{x,i}\hat{\$}_{1,i} + v_{y,i}\hat{\$}_{2,i} + \dot{\theta}_{3,i}\hat{\$}_{3,i} + \cdots + \dot{\theta}_{6,i}\hat{\$}_{6,i} \quad \text{với } i = 1, 2, 3 \qquad (5.54)$$

với $v_{x,i}$ và $v_{y,i}$ là vận tốc tuyến tính của động cơ phẳng theo chiều x và y; $\theta_{3,i}, \ldots, \theta_{6,i}$ là các tỷ suất khớp thụ động.

Do có khớp cầu ở dưới nhánh và khớp quay ở trên nhánh, mọi quay vít là thuận nghịch với quay vít khớp thụ động sẽ tạo thành chùm phẳng.

Đặc biệt, mọi quay vít thuận nghịch đều có bước zero đi qua A_i và trên mặt phẳng H_i chứa điểm A_i và trục của $\$_{6,i}$.

Theo lý thuyết, hai quay vít bất kỳ lấy từ hệ thuận nghịch chứa trong H_i có thể được dùng để tính ma trận Jacobi. Có lẽ phương pháp trực tiếp nhất là chọn hai quay vít thuận nghịch, mỗi quay vít đó là thuận nghịch với mọi quay vít khớp, ngoại trừ một trong hai quay vít bước vô hạn (∞), là $\$_{1,i}$ và $\$_{2,i}$

Gọi $n_i = [n_{x,i}, n_{y,i}, n_{z,i}]^T$ là vector đơn vị xác định bởi tích chéo sau:

$$n_i = s_{5,i} \times s_{6,i} \tag{5.55}$$

Sự quay vít là thuận nghịch với mọi quay vít, ngoại trừ $\$_{1,i}$ nhận được từ giao tuyến giữa mặt phẳng H_i với mặt phẳng qua A_i và song song với mặt phẳng xz:

$$\dot{\$}_{r1,i} = \begin{bmatrix} s_{r1,i} \\ (b_i - d_i) \times s_{r1,i} \end{bmatrix} \text{ với } \dot{\$}_{r1,i} = \frac{[n_{z,i} \quad 0 \quad -n_{x,i}]^T}{\sqrt{1-n_{y,i}^2}} \tag{5.56}$$

Tương tự, quay vít là thuận nghịch với mọi quay vít, ngoại trừ $\$_{2,i}$ nhận được từ giao tuyến giữa mặt phẳng H_i với mặt phẳng qua A_i và song song với mặt phẳng yz:

$$\dot{\$}_{r2,i} = \begin{bmatrix} s_{r2,i} \\ (b_i - d_i) \times s_{r2,i} \end{bmatrix} \text{ với } \dot{\$}_{r2,i} = \frac{[0 \quad n_{z,i} \quad -n_{y,i}]^T}{\sqrt{1-n_{x,i}^2}} \tag{5.57}$$

Lấy tích trực giao hai vế pt (5.54) với lần lượt (5.56) và (5.57), kết quả sẽ là các phương trình theo dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} ((b_i - d_i) \times s_{r1,i})^T & s_{r1,i}^T \\ ((b_i - d_i) \times s_{r2,i})^T & s_{r2,i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_p \\ v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{n_{z,i}}{\sqrt{1-n_{y,i}^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{n_{z,i}}{\sqrt{1-n_{x,i}^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x,i} \\ v_{y,i} \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

Viết pt (5.58) ba lần, mỗi lần cho một nhánh:

$$J_x \dot{x} = J_q \dot{q} \tag{5.59}$$

với

$$J_x = \begin{bmatrix} ((b_1 - d_1)\times s_{r1,1})^T & s_{r1,1}^T \\ ((b_1 - d_1)\times s_{r2,1})^T & s_{r2,1}^T \\ ((b_2 - d_2)\times s_{r1,2})^T & s_{r1,2}^T \\ ((b_2 - d_2)\times s_{r2,2})^T & s_{r2,2}^T \\ ((b_3 - d_3)\times s_{r1,3})^T & s_{r1,3}^T \\ ((b_3 - d_3)\times s_{r2,3})^T & s_{r2,3}^T \end{bmatrix}$$

$$J_q = \begin{bmatrix} \frac{n_{z,1}}{\sqrt{1-n_{y,1}^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_{z,1}}{\sqrt{1-n_{x,1}^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_{z,2}}{\sqrt{1-n_{y,2}^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_{z,2}}{\sqrt{1-n_{x,2}^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n_{z,3}}{\sqrt{1-n_{y,3}^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{n_{z,3}}{\sqrt{1-n_{x,3}^2}} \end{bmatrix}.$$

$$\dot{x} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_{px}, v_{py}, v_{pz}]^T$$

$$\dot{q} = [v_{x,1}, v_{y,1}, v_{x,2}, v_{y,2}, v_{x,3}, v_{y,3}]^T$$

Tuy khó nhận dạng tất cả các cấu hình đặc biệt khá dĩ của cơ cấu chấp hành này, nhưng có thể tìm được một số bằng cách xét các ma trận J_q và J_x.

Trạng thái đặc biệt động học đảo. Chú ý, các phần tử khác zero của J_q là tỷ lệ với các thành phần z của ba vector đơn vị n_i, với i=1,2,3. Trạng thái đặc biệt động học đảo xảy ra khi $n_{z,i} = 0$, với i=1,2,3. Về mặt vật lý, khi một nhánh có chiều theo trục z, cơ cấu mất 2 bậc tự do. Trong điều kiện đó chuyển động vi phân động cơ phẳng theo trục x hoặc y không ảnh hưởng đến vận tốc bệ di động. Nếu đồng thời hai hoặc ba nhánh có chiều theo trục z: 4 hoặc 6 bậc tự do sẽ bị mất.

Trạng thái đặc biệt động học thuận. Trạng thái này xảy ra khi $n_{x,i} = n_{y,i} = 0$ với tất cả các nhánh. Trong điều kiện đó, cột thứ 6 của J_x bằng 0, và cơ cấu nhận thêm 1 bậc tự do. Điều này ứng với cấu hình trong đó bệ di động và ba nhánh nằm trên mặt phẳng xy. Bệ di động đang tịnh tiến vô cùng bé dọc theo trục z, trong khi mọi bộ tác động đều bị khoá.

Trạng thái đặc biệt động học thuận thứ hai xảy ra khi ba điều kiện sau thỏa đồng thời: (1) tam giác $B_1B_2B_3$ là tam giác cân. (2) chiều dài cả ba nhánh bằng nhau. (3) A_1, A_2, A_3 ở ngay phía dưới trọng tâm bệ di động. Khi thỏa các điều kiện này, cột thứ ba của J_x tiến tới 0, cột thứ nhất và năm trở nên phụ thuộc tuyến tính, cột thứ hai và bốn cũng phụ thuộc tuyến tính. Như vậy, cơ cấu chấp hành nhận thêm ba bậc tự do quay.

Trạng thái động học thuận thứ ba xảy ra khi $n_{z,i} = 0$ với i=1,2,3. Khi cả ba nhánh hoàn toàn hướng theo chiều z, cột thứ tư và năm của J_x đều bằng 0. Bệ di động tịnh tiến vô cùng bé theo chiều bất kỳ song song với mặt phẳng xy. Cơ cấu nhận thêm 2 bậc tự do. Thực ra, đây là trạng thái đặc biệt hỗn hợp, vì lúc này cơ cấu cũng đang ở trong trạng thái đặc biệt động học đảo.

Tóm tắt

Chương này nghiên cứu ma trận Jacobi và các điều kiện đặc biệt của cơ cấu chấp hành song song, xem xét cả ma trận Jacobi quy ước và ma trận dựa trên sự quay vít. Phương pháp vector-vòng vận tốc được dùng để tìm ma trận Jacobi quy ước, khái niệm quay vít thuận nghịch được dùng để xác định ma trận Jacobi dựa trên sự quay vít. Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành song song có thể được chia thành hai ma trận theo động học thuận và đảo. Tùy theo dạng ma trận, các điều kiện đặc biệt của cơ cấu chấp hành song song có thể được chia thành ba loại. Với cấu hình đặc biệt động học đảo, cơ cấu bị mất 1 hoặc vài bậc tự do, còn với cấu hình đặc biệt động học thuận, cơ cấu có thêm 1 hoặc vài bậc tự do. Cấu hình đặc biệt hỗn hợp xãy ra khi các cấu hình đặc biệt động học thuận và đảo xãy ra đồng thời. Nói chung, loại cấu hình này không chỉ phụ thuộc vào cấu hình của cơ cấu chấp hành mà còn phụ thuộc cấu trúc động học. Sự phân loại và ý nghĩa vật lý của mỗi kiểu cấu hình đặc biệt được minh họa qua các ví dụ.

Chương 6

TĨNH HỌC VÀ PHÂN TÍCH ĐỘ CỨNG VỮNG

Giới thiệu

Khi cơ cấu chấp hành thực hiện công việc đã định, bộ tác động cuối sẽ tác động lực và moment lên môi trường ngoài tại điểm tiếp xúc. Lực và moment này được tạo ra do các bộ tác động thiết lập tại những điểm nối kết khác nhau. Lực thường được hiểu là lực và moment. Trong cơ cấu nối tiếp, các lực bộ tác động truyền qua chuỗi vòng hở đến điểm tiếp xúc. Trong cơ cấu song song, lực bộ tác động truyền qua nhiều đường dẫn song song đến bộ tác động cuối.

Phân tích lực tĩnh học rất quan trọng trong việc xác định khả năng truyền lực qua các khớp khác nhau trong cơ cấu. Việc xác định kích cỡ khâu, hệ thống khớp và chọn bộ tác động thích hợp đều cần áp dụng phân tích lực tĩnh học.

Chương này sẽ khai triển các phương pháp tĩnh học về các lực tác động lên cơ cấu chấp hành và biến đổi chúng giữa các hệ tọa độ. Tập trung nghiên cứu vào phép biến đổi lực và moment giữa không gian bộ tác động và không gian bộ phận chấp hành. Lực ngõ vào bộ tác động quan hệ với lực ngõ ra bộ phận chấp hành theo phép biến đổi ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành. Phương pháp biểu đồ vật thể tự do được giới thiệu để lấy đạo hàm các phản lực tại các khớp. Phản lực khớp rất quan trọng đối với việc xác định kích cỡ khớp và bộ tác động khi thiết kế. Phân tích độ cứng vững được thực hiện sau khi phân tích tĩnh học. Lực ngõ ra bộ tác động cuối quan hệ với độ biến dạng theo ma trận, được gọi là ma trận độ cứng vững. Cả hai cơ cấu nối tiếp và song song đều được nghiên cứu.

Tĩnh học cơ cấu chấp hành nối tiếp

Phần này bắt đầu từ các phương trình cơ bản chi phối sự cân bằng khâu. Sau đó, áp dụng các phương trình này để phân tích tĩnh học cơ cấu chấp hành nối tiếp. Khái niệm moment ngẫu lực khớp tương đương và phép biến đổi giữa lực bộ tác động cuối và moment khớp tương đương đều được nghiên cứu.

Sự cân bằng lực và moment khâu

Trong cơ cấu nối tiếp, mỗi khâu nối với một hoặc hai khâu khác bởi các khớp. Hình 6.1 minh họa lực và moment tác động lên khâu i nối với khâu i-1 bởi khớp i và với khâu i+1 bởi khớp i+1. Các lực tác động lên khâu i+1 bởi khâu i trong khớp i+1 được tính thành hợp lực $f_{i+1,i}$ và moment tổng $n_{i+1,i}$ tại điểm gốc O_i của hệ tọa độ khâu (x_i, y_i, z_i). Tương tự, các lực tác động lên khâu i bởi khâu i-1 trong khớp i được đổi thành hợp lực $f_{i,i-1}$ và moment tổng $n_{i,i-1}$ tại gốc O_{i-1} của hệ tọa độ khâu (x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}). Phần này sẽ dùng các ký hiệu sau:

$f_{i+1,i}$: hợp lực tác động lên khâu i+1 bởi khâu i tại O_i, $f_{i,i+1} = -f_{i+1,i}$

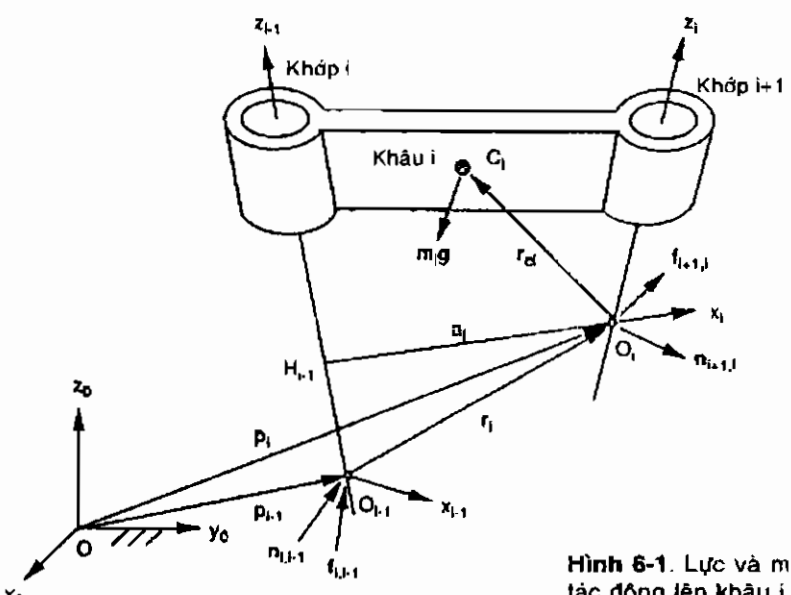
g : gia tốc trọng lực (gia tốc trọng trường)

m_i : khối lượng khâu i

$n_{i+1,i}$: moment tổng tác động lên khâu i+1 bởi khâu i tại điểm O_i: $n_{i,i+1} = -n_{i+1,i}$

r_{ci}: vector vị trí trọng tâm khâu i theo hệ tọa độ khâu thứ i ($r_{ci} = O_iC_i$)

r_i : vector vị trí điểm O_i theo hệ tọa độ khâu thứ i-1 ($r_i = O_{i-1}O_i$).



Hình 6-1. Lực và moment tác động lên khâu i.

Trước hết cần xét sự cân bằng lực. Hình 6.1 minh họa 3 lực tác động lên khâu i gồm $f_{i,i-1}$, $-f_{i+1,i}$ và $m_i g$. Phương trình cân bằng lực là:

$$f_{i,i-1} - f_{i+1,i} + m_i g = 0 \qquad (6.1)$$

Xét sự cân bằng moment tại gốc O_i. Hình 6.1 minh họa hai moment tác động lên khâu i: $n_{i,i-1}$ và $-n_{i+1,i}$. Hai lực $m_i g$ và $f_{i,i-1}$ tạo các moment tại điểm O_i. Cộng các moment này:

$$n_{i,i-1} - n_{i+1,i} - r_i \times f_{i,i-1} + r_{ci} \times m_i g = 0 \qquad (6.2)$$

Với $f_{i+1,i}$ và $n_{i+1,i}$ là phản lực và moment giữa khâu i và khâu i-1. Với i = 0, $f_{1,0}$ và $n_{1,0}$ là lực và moment tác động lên khâu chuyển động thứ nhất từ khâu cơ bản. Với i = n, $f_{n+1,n}$ và $n_{n+1,n}$ là lực và moment tác động lên môi trường bởi bộ tác động cuối. Môi trường lúc này được giả định là khâu bổ sung, ký hiệu là (n+1).

Các phương trình (6.1) và (6.2) được viết n lần, cho từng khâu chuyển động, i=1,2,....,n , tạo thành 2n phương trình với 2(n+1) phản lực và moment. Để có nghiệm duy nhất, cần chuyên biệt hai phản lực và moment. Khi cơ cấu thực thi công việc đã định, bộ tác động cuối sẽ tác dụng lực hoặc moment vào môi trường. Mặt khác, khi cơ cấu mang một vật, trọng lượng vật là tải của bộ tác động cuối. Từ đó, có thể biết lực và moment bộ tác động cuối, $f_{n+1,n}$ và $n_{n+1,n}$. Các phương trình (6.1) và (6.2) được giải để tìm các phản lực và moment còn lại.

Để thuận tiện, thường tổ hợp lực và moment theo vector 6 chiều:

$$F_{i,i-1} = \begin{bmatrix} f_{i,i-1} \\ n_{i,i-1} \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

Vector $F_{i,i-1}$ biểu thị sự quay xoắn quanh điểm O_{i-1}.

Phương pháp đệ qui

Ở đây sẽ áp dụng phương pháp tính theo trình tự ngược (từ bộ tác động cuối ngược về khâu cơ bản) để phân tích lực tĩnh học cơ cấu chấp hành nối tiếp. Phương pháp này tính phản lực và moment của khớp tuần tự mỗi khâu một lần, không cần giải đồng thời 2n phương trình vector.

Phương trình (6.1), (6.2) có thể viết dưới dạng đệ qui:

$$f_{i,i-1} = f_{i+1,i} - m_i g \qquad (6.4)$$

$$n_{i,i-1} = n_{i+1,i} + r_i \times f_{i,i-1} - r_{ci} \times m_i g \quad (6.5)$$

Các vector trong pt (6.4), (6.5) được tính trong hệ tọa độ cố định. Tuy nhiên, nói chung vector vị trí r_{ci} được xác định trong hệ tọa độ khâu thứ i, và vevtơ r_i được tính theo các thông số D-H trong hệ tọa độ khâu thứ i:

$$^{i}r_i = \begin{bmatrix} a_i \\ d_i s\alpha_i \\ d_i c\alpha_i \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Do đó, cả $^{i}r_{ci}$ và $^{i}r_i$ đều phải được biến đổi vào hệ tọa độ cố định trước khi thay vào pt (6.4), (6.5). Điều này được thực hiện bằng phép biến đổi:

$$r_{ci} = {}^{0}R_i \, {}^{i}r_{ci} \quad (6.7)$$

$$r_i = {}^{0}R_i \, {}^{i}r_i \quad (6.8)$$

Áp dụng các pt (6.4), (6.5) để tính lần lượt các phản lực khớp, bắt đầu từ khâu bộ tác động cuối, mỗi khâu một lần, và chấm dứt tại khâu cơ bản. Với i=n, lực và moment ngõ ra bộ phận cuối $f_{n+1,n}$, $n_{n+1,n}$ đã biết trước (từ trọng lượng tải), và thay vào pt (6.4), (6.5) để tính phản lực $f_{n,n-1}$ và moment $n_{n,n-1}$ tại khớp thứ n. Kế tiếp, với i=n-1, thay kết quả $f_{n,n-1}$ và $n_{n,n-1}$ vào pt (6.4), (6.5), tính được $f_{n-1,n-2}$ và $n_{n-1,n-2}$ tại khớp thứ n-1. Trình tự tiếp tục, với i=n-2, n-3,..., 1, sẽ tìm được tất cả các phản lực khớp (gồm lực và moment) trong hệ tọa độ cố định.

Phương pháp thứ hai là tính phản lực khớp theo từng hệ tọa độ khâu. Các phương trình (6.4), (6.5) viết trong hệ tọa độ khâu thứ i là:

$$^{i}f_{i,i-1} = {}^{i}f_{i+1,i} - m_i \, {}^{i}g \quad (6.9)$$

$$^{i}n_{i,i-1} = {}^{i}n_{i+1,i} + {}^{i}r_i \times {}^{i}f_{i,i-1} - {}^{i}r_{ci} \times m_i \, {}^{i}g \quad (6.10)$$

Sau đó biến đổi phản lực đã tính trong hệ tọa độ khâu thứ i vào hệ tọa độ khâu thứ i-1 theo phép biến đổi:

$$^{i-1}f_{i,i-1} = {}^{i-1}R_i + {}^{i}f_{i,i-1} \quad (6.11)$$

$$^{i-1}n_{i,i-1} = {}^{i-1}R_i + {}^{i}n_{i,i-1} \quad (6.12)$$

Chú ý, ^{i}g trong pt (6.9), (6.10) là gia tốc trọng lực tính trong hệ tọa độ khâu thứ i. Vì g được xác định trong hệ tọa độ cố định, nên phải được

biến đổi vào hệ tọa độ khâu, trước khi thay vào pt (6.9), (6.10). Điều này được thực hiện bằng công thức đệ quy. Với i=0, ${}^{0}g = g$ đã biết. Với i=1 đến n, cần tính tuần tự theo công thức:

$$ {}^{i}g = {}^{i}R_{i-1} + {}^{i-1}g \qquad (6.13) $$

Nếu lực và moment ngõ ra bộ tác động cuối được xác định trong hệ tọa độ cố định, có thể biến đổi vào hệ tọa độ bộ tác động cuối như sau:

$$ {}^{n}f_{n+1,n} = {}^{n}R_{0}\,{}^{0}f_{n+1,n} \qquad (6.14) $$

$$ {}^{n}n_{n+1,n} = {}^{n}R_{0}\,{}^{0}n_{n-1,n} \qquad (6.15) $$

Các phản lực khớp ở pt (6.4), (6.5) được tính trong hệ tọa độ cố định, còn ở pt (6.9), (6.10) được tính trong hệ tọa độ khâu. Cả hai đều hữu dụng khi phân tích tĩnh học cơ cấu chấp hành nối tiếp.

Moment ngẫu lực khớp tương đương

Khi đã biết phản lực trong các khớp, lực và/hoặc moment ngẫu lực bộ tác động sẽ được xác định. Trong cơ cấu nối tiếp, mỗi khớp được điều khiển bởi một bộ tác động cung cấp lực và/hoặc moment giữa hai khâu kế nhau. Lực và/hoặc moment bộ tác động này được tính bằng cách đối chiếu với phản lực lên các trục khớp tương ứng.

Với khớp lăng trụ, lực bộ tác động tác dụng dọc theo trục khớp thứ i. Giả sử lực ma sát không đáng kể, lực bộ tác động được tính theo công thức:

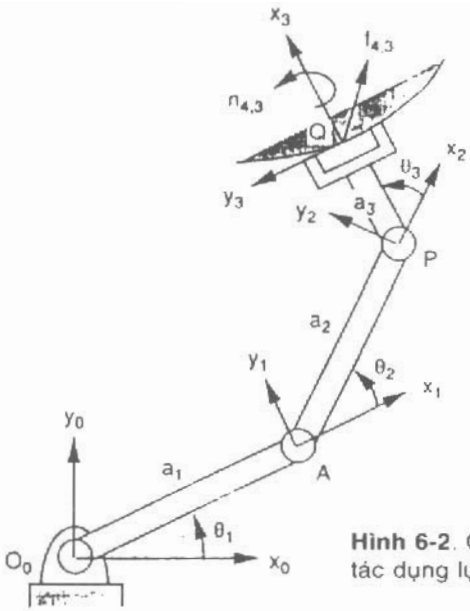
$$ \tau_i = z_{i-1}^{T} f_{i,i-1} \qquad (6.16) $$

trong đó, z_{i-1} là vector đơn vị có chiều dương theo trục khớp thứ i. Ý nghĩa pt (6.16) là bộ tác động chỉ mang thành phần của $f_{i,i-1}$ theo chiều trục khớp, trong khi các thành phần khác của $f_{i,i-1}$ được tác dụng lên các đệm khớp.

Với khớp quay, bộ tác động tác dụng moment ngẫu lực (thay vì lực) theo trục khớp thứ i. Moment bộ tác động này là:

$$ \tau_i = z_{i-1}^{T} n_{i,i-1} \qquad (6.17) $$

Bộ tác động chỉ mang thành phần của $n_{i,i-1}$ theo chiều trục khớp, trong khi các thành phần khác của $n_{i,i-1}$ tác dụng lên các đệm khớp. τ_i gọi là moment khớp tương đương .



Hình 6-2. Cơ cấu phẳng 3R tác dụng lực $f_{4,3}$ và moment $n_{4,3}$.

Ví dụ 6.1 *Tĩnh học cơ cấu chấp hành phẳng 3 bậc tự do.* Hình 6.2 minh họa cơ cấu chấp hành phẳng 3R đã nghiên cứu trong các Chương 2 và 4. Hệ tọa độ với tất cả chiều trục z hướng ra vuông góc với trang giấy xác định cho mỗi khâu tương ứng qui ước D-H. Lực và moment ngõ ra bộ tác động cuối là $f_{4,3}$ và $n_{4,3}$. Gia tốc trọng trường g có chiều âm theo y_0 và có tâm tại điểm giữa mỗi khâu. Cần tính phản lực và moment khớp.

Các thông số D-H và các ma trận biến đổi được cho trong Bảng 2.1 và các pt từ (2.6) đến (2.8). Các vector ${}^{i}r_i$ và ${}^{i}r_{ci}$:

$$ {}^{i}r_i = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad {}^{i}r_{ci} = \begin{bmatrix} -a_i/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.18) $$

Thay pt (6.18) với i = 1 đến 3 vào các pt (6.7) và (6.8):

$$ r_1 = {}^{0}R_1\,{}^{1}r_1 = a_1\begin{bmatrix} c\theta_1 \\ s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{c1} = {}^{0}R_1\,{}^{1}r_{c1} = -\frac{a_1}{2}\begin{bmatrix} c\theta_1 \\ s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$r_2 = {}^0R_2\,{}^2r_2 = a_2\begin{bmatrix} c\theta_{12} \\ s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{c2} = {}^0R_2\,{}^2r_{c2} = -\frac{a_2}{2}\begin{bmatrix} c\theta_{12} \\ s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_3 = {}^0R_3\,{}^3r_3 = a_3\begin{bmatrix} c\theta_{123} \\ s\theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_{c3} = {}^0R_3\,{}^3r_{c3} = -\frac{a_3}{2}\begin{bmatrix} c\theta_{123} \\ s\theta_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Áp dụng pt (6.4) và (6.5) để tính phản lực tác dụng trên khâu 3, rồi tuần tự tiếp tục qua khâu 2 và 1. Với i=3, thay r_3, r_{c3}, $f_{4,3}$ và $n_{4,3}$ vào pt (6.5):

$$f_{3,2} = f_{4,3} - m_3 g = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y + m_3 g_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n_{3,2} = n_{4,3} + r_3 \times f_{3,2} - r_{c3} \times m_3 g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{3,2z} \end{bmatrix}$$

trong đó $n_{3,2z} = n_z + f_y a_3 c\theta_{123} - f_x a_3 s\theta_{123} + 0.5 m_3 g_c a_3 c\theta_{123}$

Với i=2, thay $f_{3,2}$ và $n_{3,2}$, được tính ở trên, với r_2 và r_{c2} vào các pt (6.4), (6.5):

$$f_{2,1} = f_{3,2} - m_2 g = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y + (m_2 + m_3) g_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n_{2,1} = n_{3,2} + r_2 \times f_{2,1} - r_{c2} \times m_2 g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{2,1z} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$n_{2,1z} = n_z + f_y(a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) - f_x(a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123})$$
$$+ 0.5 m_2 g_c a_2 c\theta_{12} + m_3 g_c (a_2 c\theta_{12} + 0.5 a_3 c\theta_{123})$$

Với i = 1, thay $f_{2,1}$, $n_{2,1}$ (đã tính ở trên), r_1, r_{c1} vào các pt (6.4), (6.5):

$$f_{1,0} = f_{2,1} - m_1 g = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y + (m_1 + m_2 + m_3) g_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$n_{1,0} = n_{2,1} + r_1 \times f_{1,0} - r_{c1} \times m_1 g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{1,0z} \end{bmatrix}$$

trong đó

$$\begin{aligned} n_{1,0z} = n_z &+ f_y(a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) - f_x(a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123}) \\ &+ 0.5 m_1 g_c a_1 c\theta_1 + m_2 g_c (a_1 c\theta_1 + 0.5 a_2 c\theta_{12}) \\ &+ m_3 g_c (a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + 0.5 a_3 c\theta_{123}) \end{aligned}$$

Cuối cùng, áp dụng pt (6.17) để tính moment khớp:

$$\tau_1 = z_0^T n_{1,0} = n_{1,0z},$$

$$\tau_2 = z_1^T n_{2,1} = n_{2,1z},$$

$$\tau_3 = z_2^T n_{3,2} = n_{3,2z}.$$

Chú ý, khi không có trọng lực, moment ngẫu lực và lực ngõ ra bộ tác động cuối quan hệ với nhau theo phương trình :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ n_z \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

trong đó

$$J = \begin{bmatrix} -(a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123}) & -(a_2 s\theta_{12} + a_3 s\theta_{123}) & -a_3 s\theta_{123} \\ (a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) & (a_2 c\theta_{12} + a_3 c\theta_{123}) & a_3 c\theta_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi không có trọng lực tác dụng, phép biến đổi giữa lực ngõ ra bộ tác động cuối và moment ngẫu lực khớp là ma trận chuyển vị J^T của ma trận Jacobi qui ước.

Ví dụ 6.2: *Tĩnh học của cơ cấu chấp hành Stanford* (Hình 4.8).

Lực ngõ ra bộ tác động cuối và moment là $f_{7,6} = [f_x, f_y, f_z]^T$ và $n_{7,6} = [n_x, n_y, n_z]^T$. Gia tốc trọng trường g có chiều theo chiều âm của trục z_0 (nghĩa là $g = [0, 0, -g_c]^T$). Để đơn giản hóa sự phân tích, giả sử khối lượng các khâu 1, 2, 4, 5, 6 không đáng kể, tâm khâu 3 tại điểm giữa khâu này, cần tính phản lực khớp.

Các thông số D-H và các ma trận biến đổi đã xét trong Chương 4. Các vector đơn vị z_{i-1} với i = 0 đến 5 đã cho từ pt (4.69) đến (4.73), các vector ${}^i r_i$ và ${}^i r_{ci}$ có dạng:

$$ {}^2r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}, \quad {}^3r_{c3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_3/2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1r_1 = {}^4r_4 = {}^5r_5 = {}^6r_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Biến đổi các vector này vào hệ tọa độ cố định bằng các pt (6.7), (6.8:

$$ r_2 = {}^0R_2\,{}^2r_2 = d_2 = \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ r_3 = {}^0R_3\,{}^3r_3 = d_3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} $$

$$ r_{c3} = {}^0R_3\,{}^3r_{c3} = -\frac{d_3}{2} = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} $$

$$ r_1 = r_4 = r_5 = r_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

Áp dụng các pt (6.4), (6.5) để tính phản lực một khâu, bắt đầu từ khâu

6. Do khối lượng các khâu 4, 5, 6 không đáng kể, nên phản lực tại 3 khớp cuối này là bằng nhau:

$$f_{6,5} = f_{5,4} = f_{4,3} = f_{7,6} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$n_{6,5} = n_{5,4} = n_{4,3} = n_{7,6} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Với i = 3, thay r_3, r_{c3}, f_{43}, n_{43} vào pt (6.4), (6.5):

$$f_{3,2} = f_{4,3} - m_3 g = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z + m_3 g_c \end{bmatrix}$$

$$n_{3,2} = n_{4,3} + r_3 \times f_{3,2} - r_{c3} \times m_3 g$$

$$= \begin{bmatrix} n_x + f_z d_3 s\theta_1 s\theta_2 - f_y d_3 c\theta_2 + 0.5 m_3 g_c d_3 s\theta_1 s\theta_2 \\ n_y - f_z d_3 c\theta_1 s\theta_2 + f_x d_3 c\theta_2 - 0.5 m_3 g_c d_3 c\theta_1 s\theta_2 \\ n_z + f_y d_3 c\theta_1 s\theta_2 - f_x d_3 s\theta_1 s\theta_2 \end{bmatrix}$$

Với i = 2, thay f_{32}, n_{32} (đã tính ở trên), r_2, r_{c2} vào pt (6.4), (6.5):

$$f_{2,1} = f_{3,2} - m_2 g = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z + m_3 g_c \end{bmatrix}$$

$$n_{2,1} = n_{3,2} + r_2 \times f_{2,1} - r_{c2} \times m_2 g$$

$$= \begin{bmatrix} n_x + f_z(d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1) - f_y d_3 c\theta_2 + m_3 g_c(0.5 d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1) \\ n_y - f_z(d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) + f_x d_3 c\theta_2 - m_3 g_c(0.5 d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) \\ n_z + f_y(d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) - f_x(d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1) \end{bmatrix}$$

Với i =1, thay f_{21}, n_{21} (đã tính ở trên), r_1, r_{c1} vào pt (6.4), (6.5):

$$f_{1,0} = f_{2,1} - m_1 g = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z + m_3 g_c \end{bmatrix}$$

$$n_{1,0} = n_{2,1} + r_1 \times f_{1,0} - r_{c1} \times m_1 g$$

$$= \begin{bmatrix} n_x + f_z(d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1) - f_y d_3 c\theta_2 + m_3 g_c(0.5 d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1) \\ n_y - f_z(d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) + f_x d_3 c\theta_2 - m_3 g_c(0.5 d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) \\ n_z + f_y(d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) - f_x(d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1) \end{bmatrix}$$

Cuối cùng, tính moment ngẫu lực khớp bằng cách thay các phản lực vào các pt (6.16), (6.17):

$$\tau_1 = z_0^T n_{1,0} = n_z + f_y(d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) - f_x(d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= z_1^T n_{2,1} \\ &= -s\theta_1[n_x + f_z(d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1) - f_y d_3 c\theta_2 \\ &\quad + m_3 g_c(0.5 d_3 s\theta_1 s\theta_2 + d_2 c\theta_1)] \\ &\quad + c\theta_1[n_y - f_z(d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1) + f_x d_3 c\theta_2 \\ &\quad - m_3 g_c(0.5 d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1)] \end{aligned}$$

$$\tau_3 = z_2^T f_{3,2} = f_x c\theta_1 s\theta_2 + f_y s\theta_1 s\theta_2 + (f_z + m_3 g_c) c\theta_2$$

$$\tau_4 = z_3^T f_{4,3} = n_x c\theta_1 s\theta_2 + n_y s\theta_1 s\theta_2 + n_z c\theta_2$$

$$\tau_5 = z_4^T f_{5,4} = n_x j_{45} + n_y j_{55} + n_z j_{65}$$

$$\tau_6 = z_5^T f_{6,5} = n_x j_{46} + n_y j_{56} + n_z j_{66}$$

trong đó, j_{45}, j_{55}, j_{65} là các thành phần x,y,z của vector đơn vị z_4, và j_{46}, j_{56}, j_{66} là các thành phần x,y,z của z_5.

Do không có trọng lực, moment khớp ngõ vào và lực ngõ ra quan hệ với nhau theo phép biến đổi sau:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{bmatrix} = J^T \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \tag{6.20}$$

trong đó

$$J = \begin{bmatrix} -d_3 s\theta_1 s\theta_2 - d_2 c\theta_1 & d_3 c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 c\theta_1 s\theta_2 - d_2 s\theta_1 & d_3 s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_3 s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 s\theta_2 & j_{45} & j_{46} \\ 0 & c\theta_1 & 0 & s\theta_1 s\theta_2 & j_{55} & j_{56} \\ 1 & 0 & 0 & c\theta_2 & j_{65} & j_{66} \end{bmatrix}$$

là ma trận Jacobi qui ước đã nêu trong Chương 4.

Từ hai ví dụ trên, có thể thấy nếu bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực, lực ngõ ra bộ tác động cuối liên hệ với moment khớp ngõ vào theo ma trận chuyển vị J^T của ma trận Jacobi qui ước J, quan hệ này đúng với mọi cơ cấu chấp hành nối tiếp.

Ứng dụng nguyên lý công ảo

Phần này sẽ áp dụng nguyên lý công ảo để tìm phép biến đổi giữa moment khớp và lực bộ tác động cuối. Độ dịch chuyển ảo của hệ thống tạo ra sự thay đổi vô cùng bé trong cấu hình hệ thống, đó là các thay đổi vô cùng bé tùy ý của các tọa độ ứng với lực và các ràng buộc ở thời điểm đã cho. *Độ dịch chuyển ảo* được dùng để phân biệt với *độ dịch chuyển thực*, lực và các ràng buộc có thể thay đổi ở thời điểm đó. Độ dịch chuyển ảo được ký hiệu là ∂x, độ dịch chuyển thực ký hiệu là dx.

Trong cơ cấu nối tiếp, độ dịch chuyển ảo tại các khớp là $\delta q = [\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n]^T$ và tại bộ tác động cuối là $\delta x = [\delta x, \delta y, ..., \delta\psi]^T$. Lực và moment ngõ ra bộ tác động cuối là:

$$F = \begin{bmatrix} f \\ n \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

Vector moment ngẫu lực khớp là:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

Giả sử lực ma sát tại các khớp là không đáng kể, công ảo được tạo ra

do các lực và các ràng buộc tại các khớp là zero. Nếu bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực, công ảo ∂W do tất cả các lực tác động tạo ra là:

$$\delta W = \tau^T \delta q - F^T \delta x \tag{6.23}$$

Nguyên lý công ảo phát biểu như sau: "Hệ thống ở trạng thái cân bằng nếu và chỉ nếu công ảo triệt tiêu đối với dịch chuyển ảo vô cùng bé bất kỳ". Điều này xảy ra khi độ dịch chuyển ảo tương hợp với các ràng buộc tác động lên hệ thống. Tuy nhiên, trong pt 6.23, ∂q và ∂x không độc lập, chúng liên hệ với nhau theo ma trận Jacobi:

$$\delta x = J\delta q \tag{6.24}$$

Thay pt (6.24) vào (6.23):

$$(\tau^T - F^T J)\delta q = 0 \tag{6.25}$$

Vì $\partial q \neq 0$ đối với dịch chuyển ảo tùy ý bất kỳ, nên:

$$\tau^T - F^T J = 0 \tag{6.26}$$

từ đó:

$$\tau = J^T F \tag{6.27}$$

Phương trình (6.27) quy chiếu lực ngõ ra bộ tác động cuối m chiều thành các moment ngẫu lực khớp m chiều. Ma trận Jacobi là cấu hình phụ thuộc, nên phương trình này cũng là cấu hình phụ thuộc.

Ellipsoid lực

Tương tự phép biến đổi vận tốc, trong cơ cấu chỉ gồm một kiểu khớp và một kiểu tác vụ, phép biến đổi lực được đặc trưng bằng sự so sánh lực bộ tác động cuối phát sinh do moment ngẫu lực khớp đơn vị. Thay pt (6.27) vào $\tau^T \tau = 1$:

$$F^T J J^T F = 1 \tag{6.28}$$

Đối với cấu hình cơ cấu cho trước, pt (6.28) biểu thị ellipsoid m chiều. Tích JJ^T là nửa xác định dương đối xứng, nên các vector riêng trực giao. Các trục chính của ellipsoid trùng với các vector riêng của tích JJ^T, và có chiều dài bằng nghịch đảo căn bậc hai của các trị riêng.

Ma trận Jacobi là cấu hình phụ thuộc, nên ellipsoid lực cũng có cấu hình phụ thuộc. Khi bộ tác động cuối chuyển động từ vị trí này đến vị trí

khác, hình dạng và định hướng ellipsoid lực cũng thay đổi tương ứng. Ellipsoid truyền động càng gần với hình cầu, các đặc tính truyền động càng gần với chuẩn. Phép biến đổi là *đẳng hướng* khi các trục chính có chiều dài bằng nhau. Tại điểm đẳng hướng, hình cầu đơn vị n chiều trong không gian moment khớp ánh xạ lên hình cầu đơn vị m chiều trong không gian lực bộ tác động cuối. Mặt khác, tại điểm trạng thái đặc biệt, hình cầu đơn vị n chiều trong không gian moment khớp ánh xạ lên hình trụ m chiều trong không gian lực bộ tác động cuối. Do đó, ưu thế cơ học trở nên rất lớn theo một số chiều.

Ví dụ 6.3. *Elipsoid cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do*

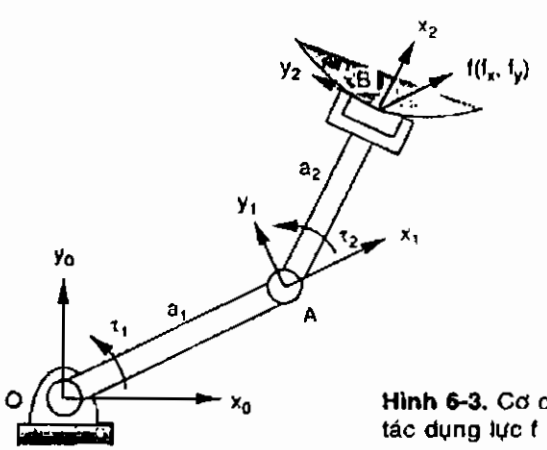
Hình 6.3 minh họa nguyên lý biến đổi các đặc tính của cơ cấu chấp hành phẳng 2-dof. Đối với cơ cấu này, lực ngõ ra bộ tác động cuối và moment khớp ngõ vào là $f = [f_x, f_y]^T$ và $\tau = [\tau_x, \tau_y]^T$.

Thay ma trận Jacobi từ pt (4.66) vào (6.27):

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 - a_2 s\theta_{12} & a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} \\ -a_2 s\theta_{12} & a_2 c\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \qquad (6.29)$$

Giả sử chiều dài các khâu là $a_1 = \sqrt{2}$m và $a_2 = 1$m. Ở vị trí $\theta_1 = 0$ và $\theta_2 = \pi/2$, ma trận Jacobi là:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 6-3. Cơ cấu phẳng 2R tác dụng lực f (f_x,f_y)

từ đó:

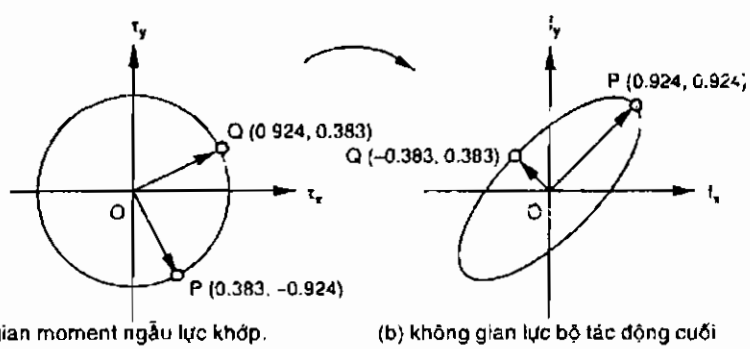
$$JJ^T = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Các trị riêng của JJ^T là $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2} = 0.5858$ và $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} = 3.4142$. Các vector riêng tương ứng, chuẩn hóa theo chiều dài đơn vị, là (0.707; 0.707) và (- 0.707; 0.707). Hai vector này tạo thành góc 45° với trục f_x và f_y, đồng thời thẳng hàng với các trục chính của ellipse.

Thay JJ^T vào pt (6.28):

$$2f_x^2 - 2\sqrt{2}f_x f_y + 2f_y^2 = 0.5858\left(\frac{f_x}{\sqrt{2}} + \frac{f_y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3.4142\left(\frac{f_x}{\sqrt{2}} - \frac{f_y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

Hình 6.4 minh họa ellipsoid lực và các trục chính. Moment khớp đơn vị tạo ra các lực bộ tác động cuối là $(f_x, f_y) = (0.924, 0.924)$ N trên trục chính và $(f_x, f_y) = (-0.383, 0.383)$ N trên trục phụ. Moment khớp tương ứng là $(\tau_1, \tau_2) = (0.383, -0.924)$ Nm theo trục chính và $(\tau_1, \tau_2) = (0.924, 0.383)$Nm theo trục phụ. Chú ý, ưu thế cơ học theo trục chính lớn hơn theo trục phụ.



a. Không gian moment ngẫu lực khớp. (b) không gian lực bộ tác động cuối

Hình 6-4. Ellipsoid lực

Phép biến đổi lực và moment

Chương 4 đã trình bày các tọa độ quay xoắn có thể được biến đổi từ hệ tọa độ này sang hệ tọa độ khác bằng biến đổi ma trận 6 × 6. Tương tự, các

tọa độ quay vít có thể được biến đổi từ hệ tọa độ này sang hệ tọa độ khác bằng ma trận 6 x 6. Gọi f là lực và c là moment tác động theo trục quay vít. Sự quay vít được viết theo ma trận cột 6 phần tử là:

$$F = \begin{bmatrix} f \\ s_0 \times f + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

với s_0 là vector vị trí của điểm bất kỳ trên trục quay vít trong hệ quy chiếu, vector $s_0 \times f$ là moment tại gốc hệ quy chiếu do f tạo ra. Có thể thấy tọa độ này phụ thuộc việc chọn hệ quy chiếu, do đó ảnh hưởng của lực lên moment tổng $n = [n_x\ n_y\ n_z]^T$ phụ thuộc điểm tác dụng.

Hình 6.5 minh họa sự quay vít F xét trong hai hệ quy chiếu $(x_i y_i z_i)$ và $(x_j y_j z_j)$. Vị trí và định hướng của hệ tọa độ $(x_j y_j z_j)$ liên hệ với hệ tọa độ $(x_i y_i z_i)$ theo vector vị trí $p = [p_x\ p_y\ p_z]^T$ và ma trận quay ${}^iR_j$. ${}^iF$ là quay vít F trong hệ tọa độ $(x_i y_i z_i)$ và ${}^jF$ là quay vít F trong hệ tọa độ $(x_j y_j z_j)$. Do quay vít có các tính chất của quay xoắn, nên:

$${}^iF = {}^i\tilde{T}_j\, {}^jF \tag{6.31}$$

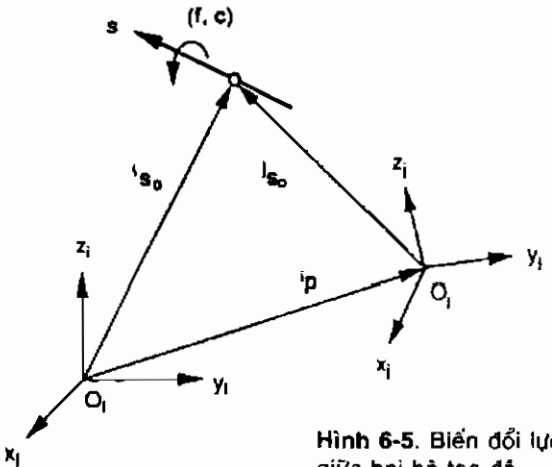
với ${}^iT_j$ là ma trận 6×6 (đã xét trong Chương 4). Đặc biệt:

$${}^i\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} {}^iR_j & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ {}^iW_j\, {}^iR_j & \vdots & {}^iR_j \end{bmatrix} \tag{6.32}$$

trong đó

$${}^iW_j = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$$

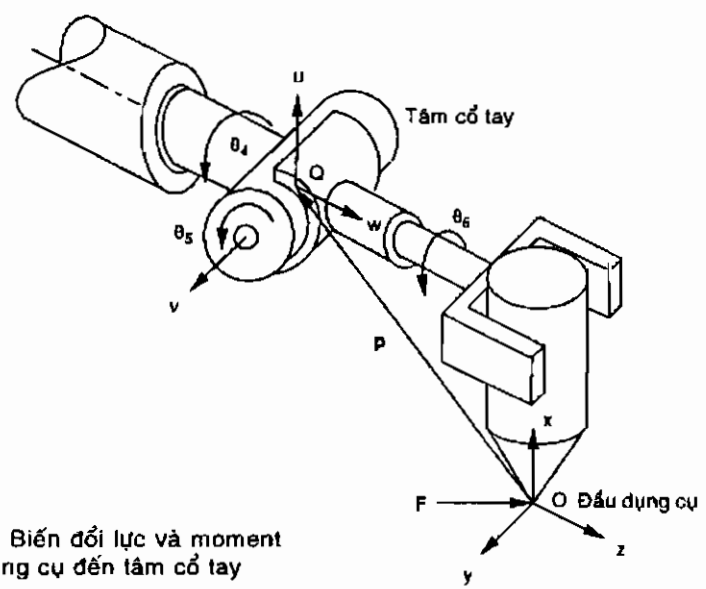
là ma trận đối xứng lệch 3 x 3 biểu thị vector O_iO_j trong hệ tọa độ $(x_i y_i z_i)$. Do đó, có thể biến đổi sự quay vít đã cho từ hệ quy chiếu này vào hệ quy chiếu khác và ngược lại.



Hình 6-5. Biến đổi lực và moment giữa hai hệ tọa độ

Ví dụ 6.4 *Biến đổi giữa đầu công cụ và tâm cổ tay.*

Hình 6.6 minh họa cánh tay robot cài chốt vào lỗ. Cần giám sát lực và moment tác dụng lên chốt. Để thực hiện điều này, cảm biến lực được gắn



Hình 6-6. Biến đổi lực và moment từ đầu dụng cụ đến tâm cổ tay

vào tâm cổ tay. Lực và moment quy theo hai vị trí khác nhau, ứng với hệ tọa độ (x,y,z) tại chốt và ứng với hệ tọa độ (u,v,w) tại tâm cổ tay. Lực và moment ứng với hệ tọa độ (u,v,w) được biết khi đo đạc tại tâm cổ tay. Vấn đề là tìm lực và moment tác dụng lên chốt.

Giả sử hai hệ tọa độ này song song ở một thời điểm và tâm cổ tay Q liên hệ với hệ tọa độ chốt theo vector $p = [p_x, p_y, p_z]^T$:

$$^{xyz}R_{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{xyz}W_{uvw} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}$$

Từ đó, ma trận biến đổi có dạng:

$$^{xyz}\tilde{T}_{uvw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_z & p_y & 1 & 0 & 0 \\ p_z & 0 & -p_x & 0 & 1 & 0 \\ -p_y & p_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

Thay pt (6.33) vào (6.31):

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_z & p_y & 1 & 0 & 0 \\ p_z & 0 & -p_x & 0 & 1 & 0 \\ -p_y & p_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \\ f_w \\ n_u \\ n_v \\ n_w \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

Phương trình (6.34) là phép biến đổi lực và moment được đo tại tâm cổ tay đến lực và moment ngõ ra tại điểm cài chốt.

Phân tích độ cứng vững cơ cấu chấp hành nối tiếp

Khi cơ cấu chấp hành thực thi tác vụ cho trước, bộ tác động cuối tác dụng lực và/hoặc moment vào môi trường tiếp xúc. Lực và/hoặc moment tiếp xúc này làm cho bộ tác động cuối bị lệch khỏi vị trí mong muốn. Độ lệch này là hàm của lực tác dụng và độ cứng vững của cơ cấu. Độ cứng vững của cơ cấu ảnh hưởng trực tiếp đến độ chính xác vị trí. Hiện nay, các điều khiển tiên tiến sử dụng đặc tính độ cứng vững để điều khiển hồi tiếp cho cơ cấu robot.

Độ cứng vững của cơ cấu phụ thuộc nhiều yếu tố, gồm kích cỡ và vật liệu khâu, cơ cấu truyền động, bộ tác động, bộ điều khiển. Khi các khâu trở nên dài hơn, mảnh hơn, lúc đó khâu là yếu tố chính gây ra độ lệch. Đây là đặc trưng của robot không gian, trong đó trọng lượng nhẹ và gọn là điều quan tâm chính. Mặt khác, đa số robot công nghiệp có cấu trúc với khâu cứng, nguồn phối hợp chính là cơ cấu truyền động và hệ thống điều khiển.

Phần này sẽ giả thiết các khâu chính là cứng hoàn toàn, cơ cấu truyền động và hệ thống trợ động là nguồn phối hợp chính.

Ma trận phối hợp

Đối với cơ cấu chấp hành nối tiếp, mỗi khớp được điều khiển bằng một bộ tác động truyền qua bộ giảm tốc theo nhiều trục truyền động. Bộ giảm tốc và các trục truyền động có thể bị lệch khi truyền lực hoặc moment. Hơn nữa lực hoặc momemt truyền động do hệ thống trợ động tạo ra thường phụ thuộc vào các tín hiệu báo lỗi vị trí, vận tốc và các khuếch đại hồi tiếp. Độ cứng vững của bộ giảm tốc, các trục truyền động và hệ thống trợ động có thể tổ hợp theo độ cứng vững tương đương.

Gọi n là chiều của không gian khớp, m là chiều của không gian bộ tác động cuối, τ_i là moment hoặc lực truyền qua khớp thứ i, Δq_i là độ lệch tương ứng tại khớp đó. Với độ lệch nhỏ, có thể áp dụng công thức tuyến tính gần đúng:

$$\tau_i = k_i \Delta q_i \qquad (6.35)$$

trong đó, k là hằng số cứng vững (độ cứng). Để tiện khảo sát, pt (6.35), với i=1, 2,..., n được viết dưới dạng ma trận:

$$\tau = \chi \Delta q \qquad (6.36)$$

trong đó $\tau = [\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n]^T$, $\Delta q = [\Delta q_1, \Delta q_2, ..., \Delta q_n]^T$, $\chi = [k_1, k_2, ..., k_n]$ là ma trận chéo n x n.

Trong cơ cấu chấp hành nối tiếp, độ dịch chuyển khớp Δq liên hệ với độ dịch chuyển bộ tác động cuối Δx theo ma trận Jacobi quy ước $m \times n$:

$$\Delta x = J\Delta q \tag{6.37}$$

và lực ngõ ra bộ tác động cuối F liên hệ với moment khớp τ theo ma trận Jacobi chuyển vị J^T:

$$\tau = J^T F \tag{6.38}$$

Khử τ và Δq từ các pt (6.36), (6.37), (6.38):

$$\Delta x = CF \tag{6.39}$$

với

$$C = J\chi^{-1}J^T \tag{6.40}$$

là ma trận $m \times m$, được gọi là *ma trận phối hợp.*

Từ pt (6.40), có thể thấy ma trận C là đối xứng, không chỉ phụ thuộc vào độ cứng vững của từng đường truyền động mà còn phụ thuộc vào ma trận Jacobi. Do ma trận Jacobi phụ thuộc cấu hình, ma trận phối hợp cũng phụ thuộc cấu hình.

Ma trận cứng vững

Nếu m=n và ma trận Jacobi không ở trạng thái đặc biệt, ma trận C có ma trận nghịch đảo C^{-1}. Nhân cả hai vế pt (6.39) với C^{-1}:

$$F = K\Delta x \tag{6.41}$$

trong đó

$$K = C^{-1} = J^{-T}\chi J \tag{6.42}$$

K là *ma trận độ cứng vững.*

Ma trận K cũng phụ thuộc cấu hình. Đối với các cơ cấu chỉ có một kiểu khớp và một kiểu công việc, có thể đặc trưng độ cứng vững bằng cách so sánh với lực cần tạo ra độ lệch trên một đơn vị chiều dài tại bộ tác động cuối. Thay pt (6.39) vào $(\Delta x)^T(\Delta x) = 1$:

$$F^T C^T C F = 1 \tag{6.43}$$

Với cấu hình cơ cấu cho trước, pt (6.43) biểu thị ellipsoid lực m chiều. Vì C^TC là nửa xác định dương đối xứng, nên có các vector riêng trực giao. Các trục chính của ellipsoid trùng với các vector riêng của C^TC, và chiều dài bằng nghịch đảo căn bậc hai của các trị riêng. Do đó, các lực cực đại và cực tiểu cần thiết để tạo ra độ lệch đơn vị là $1/(\lambda_{min})^{1/2}$ và $1/(\lambda_{max})^{1/2}$, với λ_{min} và λ_{max} là các trị riêng cực tiểu và cực đại của C^TC.

Ví dụ 6.5. *Phân tích độ cứng của cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do.* Với cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do (Hình 6.4), độ lệch bộ tác động cuối và lực ngõ ra là $\Delta x = [\Delta x, \Delta y]^T$ và $F = [f_x, f_y]^T$, cần xét độ cứng của cơ cấu này.

Thay ma trận Jacobi, pt (4.66) vào (6.40):

$$C = \begin{bmatrix} \dfrac{(a_1 s_1 + a_2 s_{12})^2}{k_1} + \dfrac{a_2^2 s_{12}^2}{k_2} & -\dfrac{(a_1 s_1 + a_2 s_{12})(a_1 c_1 + a_2 c_{12})}{k_1} - \dfrac{a_2^2 s_{12} c_{12}}{k_2} \\ -\dfrac{(a_1 s_1 + a_2 s_{12})(a_1 c_1 + a_2 c_{12})}{k_1} - \dfrac{a_2^2 s_{12} c_{12}}{k_2} & \dfrac{(a_1 c_1 + a_2 c_{12})^2}{k_1} + \dfrac{a_2^2 c_{12}^2}{k_2} \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

Trong đó, $s_i = \sin\theta_i$, $c_i = \cos\theta_i$, $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, và $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$

Để minh họa, có thể cho $a_1 = \sqrt{2}$m, $a_2 = 1$ m, $k_1 = k_2 = 1$ N/m, $\theta_1 = 0$, và $\theta_2 = \pi/2$. Ma trận phối hợp C rút gọn thành:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Từ đó:

$$C^T C = \begin{bmatrix} 6 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}$$

Thay vào Pt (6.43) và tính:

$$6f_x^2 - 8\sqrt{2}f_x f_y + 6f_y^2 = 0.343\left(\frac{f_x}{\sqrt{2}} + \frac{f_y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 11.657\left(\frac{f_x}{\sqrt{2}} - \frac{f_y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

Phương trình trên biểu thị hình ellipse trong không gian lực bộ tác động cuối. Các trị riêng của C^TC là $\lambda_1 = 0{,}343$ và $\lambda_2 = 11.657$. Các vector riêng tương ứng, tính theo chiều dài đơn vị, là (0.707, 0.707) và (-0.707, 0.707). Hai vector riêng này tạo góc 45° với các trục f_x và f_y, và trùng với các trục chính của ellipse.

Tĩnh học cơ cấu chấp hành song song

Cơ cấu chấp hành song song phức tạp hơn cơ cấu chấp hành nối tiếp. Do có nhiều vòng kín, không thể áp dụng phương pháp phân tích đệ quy (lần lượt từng khâu theo thứ tự ngược về khâu cơ bản). Nói chung, cần tìm các phương trình cân bằng lực và moment cho từng khâu và giải đồng thời các phương trình này. Nếu chỉ xét các lực và moment truyền động, có thể áp dụng nguyên lý công ảo.

Phương pháp giản đồ vật thể tự do

Cơ cấu chấp hành song song gồm nhiều nhánh song song, mỗi nhánh có nhiều khâu đôi. Để đơn giản hóa, có thể sử dụng tính chất một số khâu đôi chỉ chịu lực kéo hoặc lực nén. Ví dụ, nếu không có ngoại lực tác dụng vào khâu đôi của cơ cấu phẳng, khâu chỉ chịu tác dụng của lực dọc theo đường thẳng đi qua hai khớp quay. Tương tự, nếu không có ngoại lực và moment ngoài tác dụng vào chuỗi khâu đôi cầu-cầu trong cơ cấu không gian, khâu chỉ chịu lực dọc theo đường thẳng đi qua hai tâm khớp cầu. Sau đây là các ví dụ với phương pháp này.

Ví dụ 6.6. *Tĩnh học cơ cấu chấp hành song song phẳng 3 RRR.*

Hình 5.2 minh họa cơ cấu có 3 nhánh, mỗi nhánh gồm hai thành phần, a_i là khâu ngõ vào và b_i là khâu ghép đôi. Giả sử trọng lực vuông góc với mặt phẳng chuyển động, cần tìm các moment ngẫu lực khớp τ_1, τ_2, τ_3 tại ba khâu ngõ vào để tạo ra lực ngõ ra $f = [f_x, f_y, 0]^T$ và moment ngõ ra $n = [0, 0, n_z]^T$ tại điểm G.

Lực tại khâu ghép đi qua hai chốt xoay là:

$$f_i = \frac{f_i b_i}{b_i} \quad \text{với } i = 1, 2, 3. \tag{6.45}$$

trong đó, i là nhánh thứ i, f_i là cường độ của $\mathbf{f}_i$; b_i với i=1, 2, 3 là các vector DA, EB và FC ; b_i là cường độ của vector $\mathbf{b}_i$.

Giả sử tất cả các lực đều tác động lên bệ di động:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{f_i \mathbf{b}_i}{b_i} = [f_x, f_y, 0]^T \tag{6.46}$$

Tổng moment tại G được tạo ra bởi tất cả các lực là:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_i \times f_i \mathbf{b}_i}{b_i} = [0, 0, n_z]^T \tag{6.47}$$

Các pt (6.46) và (6.47) gồm ba phương trình vô hướng không tầm thường có ba ẩn, f_i, i=1,2,3; và ba phương trình tuyến tính này được viết dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{b_{1x}}{b_1} & \dfrac{b_{2x}}{b_2} & \dfrac{b_{3x}}{b_3} \\ \dfrac{b_{1y}}{b_1} & \dfrac{b_{2y}}{b_2} & \dfrac{b_{3y}}{b_3} \\ \dfrac{e_{1x}b_{1y} - e_{1y}b_{1x}}{b_1} & \dfrac{e_{2x}b_{2y} - e_{2y}b_{2x}}{b_2} & \dfrac{e_{3x}b_{3y} - e_{3y}b_{3x}}{b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ n_z \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

Các vector c_i và b_i đã biết từ phân tích động học. Ba lực f_i chưa biết, được tính từ phép biến đổi nghịch đảo pt (6.48). Khi biết f_i, i = 1, 2, và 3, moment bộ tác động được tính từ phương trình cân bằng moment của mỗi khâu:

$$\tau_i = \frac{f_i(a_{ix}b_{iy} - a_{iy}b_{ix})}{b_i} \tag{6.49}$$

Khử f_i giữa hai pt (6.48) và (6.49):

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{1x}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{b_{2x}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{b_{3x}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} \\ \dfrac{b_{1y}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{b_{2y}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{b_{3y}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} \\ \dfrac{e_{1x}b_{1y} - e_{1y}b_{1x}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{e_{2x}b_{2y} - e_{2y}b_{2x}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{e_{3x}b_{3y} - e_{3y}b_{3x}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \tag{6.50}$$

Phương trình (6.50) là phép biến đổi giữa lực ngõ ra bộ tác động cuối và moment khớp ngõ vào. Với moment khớp ngõ vào đã biết, có thể tìm lực ngõ ra bộ tác động cuối bằng phép biến đổi nghịch đảo pt (6.50).

Ví dụ 6.7. *Tĩnh học cơ cấu Stewart-Gough*.

Cơ cấu chấp hành S-G (Hình 3.5) với hệ tọa độ cố định (x, y, z) có gốc O tại trọng tâm đế cố định, các trục x, y trên mặt phẳng chứa các điểm A_i, với i=1, 2,..., 6. Hệ tọa độ di động (u,v,w) có gốc P tại trọng tâm bệ di động, các trục u, v trên mặt phẳng chứa các điểm B_i, i=1,2,...,6. Có thể bỏ qua tác dụng của trọng lực, cần tìm các lực bộ tác động $f_1, f_2, ..., f_6$ cần thiết để tạo ra lực f và moment n tại trọng tâm bệ di động.

Lực và moment ràng buộc tại từng khớp lăng trụ được xem như nội tại trong nhánh tương ứng. Với cấu trúc nhánh cầu-cầu, không có moment truyền đến nhánh này. Phản lực hướng theo đường A_iB_i được xác định bởi hai tâm cầu. Lực tác động lên bệ di động từ mỗi nhánh là:

$$\mathbf{f}_i = f_i \mathbf{s}_i \qquad \text{với } i = 1, 2, ..., 6. \tag{6.51}$$

trong đó i là ký hiệu nhánh thứ i, f_i là độ lớn của $\mathbf{f}_i$; $\mathbf{s}_i$ là vector đơn vị từ khớp cầu bệ đến khớp cầu di động trên nhánh thứ i do đó, $\mathbf{s}_i = \mathbf{d}_i/d_i$.

Cần tìm phương trình cân bằng moment và lực bệ di động. Tổng tất cả các lực tác dụng lên bệ di động là:

$$\sum_{i=1}^{6} f_i \mathbf{s}_i = \mathbf{f} \tag{6.52}$$

Tổng các moment được tạo ra bởi tất cả các lực tại trọng tâm P bệ di động là:

$$\sum_{i=1}^{6} f_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{s}_i = \mathbf{n} \tag{6.53}$$

trong đó $\mathbf{b}_i = \mathbf{PB}_i$. Các pt (6.52), (6.53) biểu thị sáu phương trình vô hướng tuyến tính, $\mathbf{f}_i$, được tổ hợp trong dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_6 \\ \mathbf{b}_1 \times \mathbf{s}_1 & \mathbf{b}_2 \times \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{b}_6 \times \mathbf{s}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix} \tag{6.54}$$

Phương trình (6.54) là phép biến đổi giữa các lực ngõ ra bộ tác động cuối và các lực bộ tác động tuyến tính. Vector b_i và s_i đã biết trong phân tích động học. Với các lực bộ tác động cho trước, lực ngõ ra bộ tác động cuối được tính trực tiếp từ pt (6.54). Mặt khác, nếu biết lực ngõ ra bộ tác động cuối, lực bộ tác động tương ứng được tính bằng phép biến đổi nghịch đảo pt (6.54).

Áp dụng nguyên lý công ảo

Có hai loại khớp trong cơ cấu chấp hành song song là khớp tác động và khớp thụ động. Giả sử khớp không có ma sát, và trọng lực không đáng kể, phản lực tại các khớp thụ động không tạo ra công ảo.

Gọi $F = [f, n]^T$ là vector lực và moment ngõ ra bộ tác động cuối; $\tau = [\tau_1, \tau_2, .., \tau_n]^T$ là vector moment, lực khớp chịu tác động, $\delta q = [\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_n]^T$ là vector độ dịch chuyển ảo ứng với các khớp tác động, và $\delta x = [\delta x, \delta y, ..., \delta\psi]^T$ là vector độ dịch chuyển áo ứng với bộ tác động cuối. Công ảo của các lực tác động là:

$$\tau^T \delta q - F^T \delta x = 0 \tag{6.55}$$

Độ dịch chuyển áo δq và δx liên hệ theo ma trận Jacobi:

$$\delta q = J \delta x \tag{6.56}$$

trong đó $J = J_q^{-1} J_x$ đã xác định trong Chương 5.

Thay pt (6.56) vào pt (6.55):

$$(\tau^T J - F^T)\delta x = 0 \tag{6.57}$$

Vì $\delta x \neq 0$, nên:

$$\tau^T J - F^T = 0 \tag{6.58}$$

Lấy chuyển vị pt (6.58) :

$$F = J^T \tau \tag{6.59}$$

Phương trình (6.59) tính lực ngõ ra bộ tác động cuối theo moment khớp tác động, và tính ngược lại, theo phép biến đổi nghịch đảo. So sánh pt (6.59) với pt (6.27), ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành song song là nghịch đảo của cơ cấu chấp hành nối tiếp, phép biến đổi này phụ thuộc cấu hình robot.

Ví dụ 6.8. *Cơ cấu chấp hành song song phẳng 3RRR.*

Có thể áp dụng nguyên lý công ảo để phân tích tĩnh học cơ cấu 3RRR 3-dof (Hình 5.2). Chương 5 đã tính ma trận Jacobi của cơ cấu này. Vector các tỷ suất khớp ngõ vào là $\dot{q} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T$, vector vận tốc bộ tác động cuối là $\dot{x} = [v_{gx}, v_{gy}, \dot{\phi}]^T$. Ma trận Jacobi đã tính trong Chương 5 là:

$$J_x = \begin{bmatrix} b_{1x} & b_{1y} & e_{1x}b_{1y} - e_{1y}b_{1x} \\ b_{2x} & b_{2y} & e_{2x}b_{2y} - e_{2y}b_{2x} \\ b_{3x} & b_{3y} & e_{3x}b_{3y} - e_{3y}b_{3x} \end{bmatrix} \tag{6.60}$$

$$J_q = \begin{bmatrix} a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x} \end{bmatrix} \tag{6.61}$$

Giả sử $a_i \times b_i \neq 0$, ma trận Jacobi gộp chung là:

$$J = J_q^{-1} J_x = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{1x}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{b_{1y}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{e_{1x}b_{1y} - e_{1y}b_{1x}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} \\ \dfrac{b_{2x}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{b_{2y}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{e_{2x}b_{2y} - e_{2y}b_{2x}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} \\ \dfrac{b_{3x}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} & \dfrac{b_{3y}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} & \dfrac{e_{3x}b_{3y} - e_{3y}b_{3x}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

Thay pt (6.62) vào pt (6.59):

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_{1x}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{b_{2x}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{b_{3x}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} \\ \dfrac{b_{1y}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{b_{2y}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{b_{3y}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} \\ \dfrac{e_{1x}b_{1y} - e_{1y}b_{1x}}{a_{1x}b_{1y} - a_{1y}b_{1x}} & \dfrac{e_{2x}b_{2y} - e_{2y}b_{2x}}{a_{2x}b_{2y} - a_{2y}b_{2x}} & \dfrac{e_{3x}b_{3y} - e_{3y}b_{3x}}{a_{3x}b_{3y} - a_{3y}b_{3x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \tag{6.63}$$

Kết quả tương tự với phương pháp phân tích giản đồ vật thể tự do.

Ví dụ 6.9. *Cơ cấu Stewart-Gough.*

Hình 3.15 minh họa cơ cấu Stewart-Gough, sử dụng phương pháp quy ước, trạng thái vận tốc bộ tác động cuối được biểu diễn bằng phương trình:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v_p \\ \omega_B \end{bmatrix} \tag{6.64}$$

Các tỷ suất khớp ngõ vào được xác định theo vector 6 chiều là:

$$\dot{q} = \left[\dot{d}_1, \dot{d}_2, \ldots, \dot{d}_6\right]^T \tag{6.65}$$

Ma trận Jacobi đã tính trong Chương 5 là:

$$J_x = \begin{bmatrix} s_1^T & (b_1 \times s_1)^T \\ s_2^T & (b_2 \times s_2)^T \\ \vdots & \vdots \\ s_6^T & (b_6 \times s_6)^T \end{bmatrix} \tag{6.66}$$

$$J_q = I \tag{6.67}$$

Ma trận Jacobi gộp chung là:

$$J = J_q^{-1} J_x = \begin{bmatrix} s_1^T & (b_1 \times s_1)^T \\ s_2^T & (b_2 \times s_2)^T \\ \vdots & \vdots \\ s_6^T & (b_6 \times s_6)^T \end{bmatrix} \tag{6.68}$$

Thay pt (6.68) vào pt (6.59) :

$$\begin{bmatrix} f \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_6 \\ b_1 \times s_1 & b_2 \times s_2 & \cdots & b_6 \times s_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{bmatrix} \tag{6.69}$$

Kết quả tương tự phương pháp phân tích giản đồ vật thể tự do.

Phân tích độ vững cứng cơ cấu chấp hành song song

Độ cứng cơ cấu chấp hành song song được các nhà nghiên cứu phân tích tương đối chi tiết. Tương tự cơ cấu nối tiếp, giả sử các khâu là hoàn toàn cứng, đồng thời cơ cấu truyền động cơ học và hệ thống trợ động là nguồn phối hợp duy nhất.

Đặt $\tau = [\tau_1, \ldots, \tau_n]^T$ là vector lực hoặc moment khớp tác động, $\Delta q = [\Delta q_1, \Delta q_2, \ldots, \Delta q_n]^T$ là vector độ lệch khớp tương ứng, Δq liên hệ với τ theo ma trận chéo $m \times n$, $\chi = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ như sau:

$$\tau = \chi \Delta q \tag{6.70}$$

Đối với cơ cấu song song, độ dịch chuyển khớp Δq liên hệ với độ lệch bộ tác động cuối, $\Delta x = [\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta\phi, \Delta\theta, \Delta\psi]^T$, theo ma trận Jacobi J như sau:

$$\Delta q = J \Delta x \tag{6.71}$$

trong đó $J = J_q^{-1} J_x$ là ma trận Jacobi qui ước đã xác định trong Chương 5. Thay pt (6.71) vào pt (6.70), và thay kết quả vào pt (6.59):

$$F = K \Delta x \tag{6.72}$$

với $$K = J^T \chi J \tag{6.73}$$

được gọi là *ma trận độ cứng* của cơ cấu chấp hành song song.

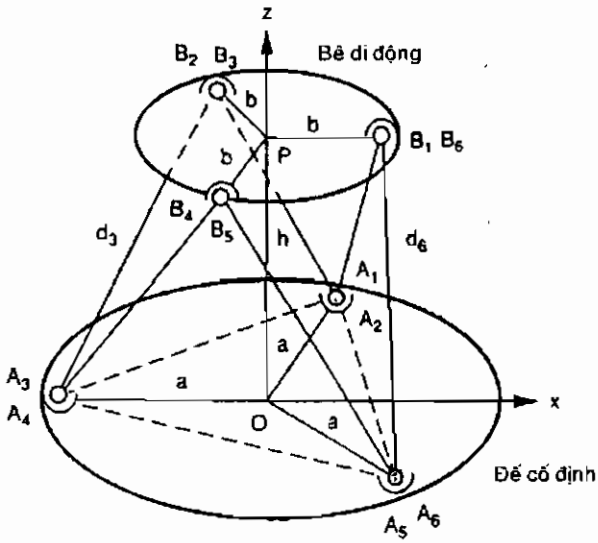
Phương trình (6.72) cho thấy lực ngõ ra bộ tác động cuối liên hệ với độ lệch theo ma trận độ cứng K. Ma trận này là nửa xác định dương đối xứng, cơ cấu chấp hành phụ thuộc cấu hình. Nếu các nhánh cùng loại và các hằng đàn hồi liên hệ với mọi đường truyền động là cùng giá trị (nghĩa là $k_1 = k_2 = \ldots = k_6 = k$), ma trận độ cứng là:

$$K = k J^T J \tag{6.74}$$

Phân tích độ cứng vững bệ Stewart-Gough 3-3

Hình 6.7 minh họa sơ đồ bệ Stewart-Gough 3-3. Có 6 nhánh nối bệ di động với đế cố định bằng hai bộ khớp cầu đồng tâm tại các điểm A_i và B_i, cần phân tích độ cứng của cơ cấu này.

Hệ tọa độ (x,y,z) có gốc O tại trọng tâm đế cố định, các trục x và y nằm trên mặt phẳng chứa các điểm A_i, i=1,..., 6, trục x ngược hướng OA_1



Hình 6-7. Cơ cấu Stewart-Gough 3-3

và trục z có chiều hướng ra ngoài (Hình 6.8). Hơn nữa, giả sử hai bộ khớp cầu đồng tâm tạo thành hai tam giác cân. Do ma trận độ cứng phụ thuộc vị trí và hướng của bệ di động, có thể giả thiết bệ di động định vị ở *cấu hình tâm*, tại đó bệ không quay so với đế cố định, và trọng tâm bệ này ở độ cao $\overline{OP}$ = h phía trên tâm đế cố định (Hình 6.8).

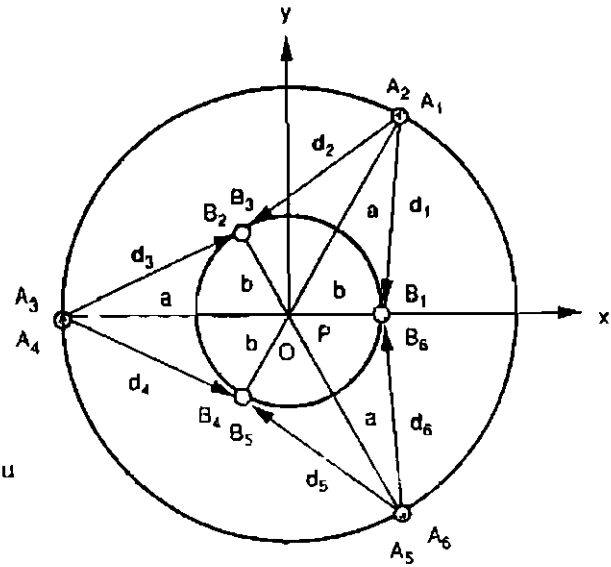
Với hình học của bệ nêu trên Hình 6.7 và 6.8, các vector a_i, b_i và d_i trong hệ tọa độ cố định (x,y,z) là:

$$a_1 = a_2 = \left[\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right]^T$$

$$a_3 = a_4 = [-a, 0, 0]^T$$

$$a_5 = a_6 = \left[\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, 0\right]^T$$

$$b_1 = b_6 = [b, 0, 0]^T$$



Hình 6-8. Hình chiếu từ đỉnh của cơ cấu Stewart-Gough 3-3

$$b_2 = b_3 = \left[-\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}, 0\right]^T$$

$$b_4 = b_5 = \left[-\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}b}{2}, 0\right]^T$$

$$d_1 = \left[\frac{2b-a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}, h\right]^T$$

$$d_2 = \left[\frac{-b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}(b-a)}{2}, h\right]^T$$

$$d_3 = \left[\frac{-b+2a}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2}, h\right]^T$$

$$d_4 = \left[\frac{-b+2a}{2}, -\frac{\sqrt{3}b}{2}, h\right]^T$$

$$d_5 = \left[\frac{-b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}(-b+a)}{2}, h\right]^T$$

$$d_6 = \left[\frac{2b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, h\right]^T$$

Ở cấu hình trung tâm, tất cả các nhánh duỗi thẳng theo cùng chiều dài ($d_1 = d_2 = ... = d_6 = d$). Điều này dẫn đến liên hệ đơn giản giữa a, b, h và d:

$$d^2 = a^2 - ab + b^2 + h^2 \tag{6.75}$$

thay biểu thức trên vào pt (6.68):

$$J = \frac{1}{2d}\begin{bmatrix} 2b-a & -\sqrt{3}a & 2h & 0 & -2bh & -\sqrt{3}ab \\ -b-a & \sqrt{3}(b-a) & 2h & \sqrt{3}bh & bh & \sqrt{3}ab \\ -b+2a & \sqrt{3}b & 2h & \sqrt{3}bh & bh & -\sqrt{3}ab \\ -b+2a & -\sqrt{3}b & 2h & -\sqrt{3}bh & bh & \sqrt{3}ab \\ -b-a & \sqrt{3}(-b+a) & 2h & -\sqrt{3}bh & bh & -\sqrt{3}ab \\ 2b-a & \sqrt{3}a & 2h & 0 & -2bh & \sqrt{3}ab \end{bmatrix} \tag{6.76}$$

Thay pt (6.76) và chuyển vị vào pt (6.74) sẽ được ma trận độ cứng:

$$K = \frac{3k}{d^2} \times$$

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2-ab & 0 & 0 & 0 & bh(a/2-b) & 0 \\ 0 & a^2+b^2-ab & 0 & -bh(a/2-b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -bh(a/2-b) & 0 & b^2h^2 & 0 & 0 \\ bh(a/2-b) & 0 & 0 & 0 & b^2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2b^2/2 \end{bmatrix} \tag{6.77}$$

Ma trận con 3×3 phía trên bên trái là độ cứng tịnh tiến, ma trận con 3×3 phía dưới bên phải là độ cứng xoắn, các ma trận con còn lại biểu thị tác động nối ghép chéo giữa các lực và moment, giữa sự quay và tịnh tiến.

Trong thực tế, cần phải khử các thành phần ghép chéo. Điều này có thể thực hiện bằng cách chọn a=2b làm điều kiện thiết kế. Thay a=2b vào pt (6.77):

$$K = \frac{3k}{d^2}\begin{bmatrix} 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6b^4 \end{bmatrix} \qquad (6.78)$$

Từ pt (6.78), có thể thấy có 3 dạng đặc biệt khả dĩ:

Trường hợp 1. $h^2 = 1.5b^2$, kết quả độ cứng tịnh tiến đẳng hướng

Trường hợp 2. $h^2 = 6b^2$, kết quả độ cứng xoắn đẳng hướng

Trường hợp 3. Phối hợp cả hai trường hợp 1 và 2.

Chú ý, nếu không có các thông số thiết kế bổ sung, không thể đạt được cả hai đặc tính cứng xoắn đẳng hướng và cứng tịnh tiến đẳng hướng. Các thông số thiết kế bổ sung được nhận biết bằng cách tách rời các khớp cầu đồng tâm ở bệ di động hoặc đế cố định.

Tóm tắt

Hai phương pháp, giản đồ vật thể tự do và nguyên lý công ảo, được dùng để phân tích tĩnh học cơ cấu chấp hành nối tiếp và song song. Phương pháp giản đồ vật thể tự do sử dụng tất cả các phản lực tác dụng lên các khớp hoạt động và các khớp thụ động. Nguyên lý công ảo có tính trực tiếp, chỉ sử dụng các lực khớp hoạt động. Nếu không xét trọng lực, các lực khớp hoạt động liên hệ với các lực bộ tác động cuối theo chuyển vị ma trận Jacobi. Các đặc tính biến đổi này được khảo sát chi tiết bằng cách áp dụng biến đổi tuyến tính. Hơn nữa, các đặc tính độ cứng của cơ cấu chấp hành nối tiếp và song song cũng được nghiên cứu. Các lực bộ tác động cuối liên hệ với độ lệch bằng ma trận độ cứng. Ma trận độ cứng là hàm của các hằng độ cứng trên các đường truyền động và ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành. Do ma trận Jacobi phụ thuộc cấu hình, ma trận độ cứng cũng phụ thuộc cấu hình. Tĩnh học và phân tích độ cứng của nhiều cơ cấu chấp hành được xem xét để minh họa các nguyên lý đó.

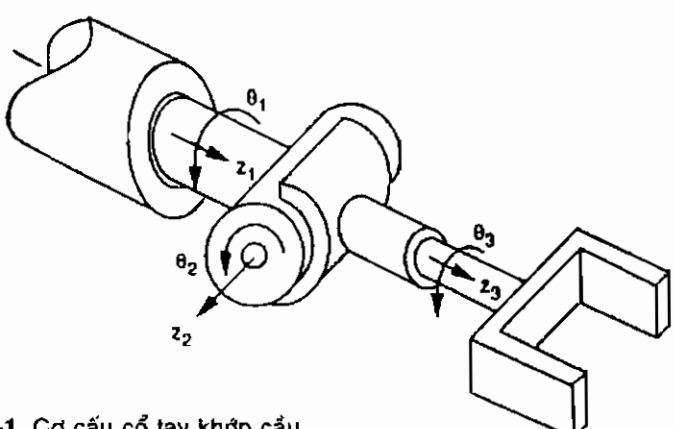
Chương 7

CƠ CẤU CỔ TAY

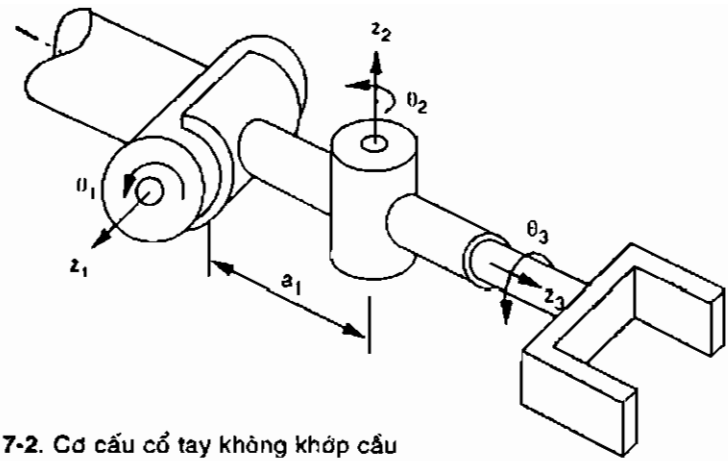
Giới thiệu

Cơ cấu chấp hành robot cần ít nhất 6 bậc tự do để điều khiển vật thể một cách tự do trong không gian. Nói chung, chiều dài 3 khâu chuyển động đầu dài hơn 3 khâu chuyển động cuối. Bộ tác động cuối gắn vào khâu chuyển động cuối để kẹp chặt hoặc điều khiển chính xác vật thể. Ba khâu đầu chủ yếu được dùng để điều khiển vị trí, ba khâu cuối điều khiển hướng bộ tác động cuối. Cụm bộ phận nối với ba khâu đầu là cánh tay đòn, cụm bộ phận nối với ba khâu cuối là cổ tay. Hơn nữa, ba trục khớp cuối thường được thiết kế với giao điểm chung, được gọi là tâm cổ tay. Sự sắp xếp đặc biệt (xem Chương 2) cho phép tách biệt vấn đề vị trí với vấn đề định hướng. Cánh tay đưa tâm cổ tay đến vị trí bất kỳ trong không gian làm việc, cổ tay điều khiển hướng của bộ tác động cuối.

Hình 7.1 minh họa cấu trúc động học cơ cấu cổ tay nối tiếp 3 bậc tự do với 3 trục khớp giao nhau. Hình 7.2 minh họa cơ cấu cổ tay với khoảng cách nhỏ giữa hai trục khớp thứ nhất và thứ hai. Về lý thuyết, có thể gắn một động cơ với bộ giảm tốc thích hợp lên mỗi khâu để điều khiển khớp. Động cơ và bộ giảm tốc cần phải đặt gần cụm cổ tay, điều này làm gia



Hình 7-1. Cơ cấu cổ tay khớp cầu.



Hình 7-2. Cơ cấu cổ tay không khớp cầu

tăng tải quán tính đối với các động cơ điều khiển cụm cánh tay. Do đó, cần phải kết hợp một số kiểu cơ cấu truyền động cơ học cho phép lắp các bộ tác động cách xa tâm cổ tay.

Trong thực hành, thiết kế cổ tay đạt hiệu quả khi hội đủ các đặc tính sau:

1. Ba bậc tự do.
2. Chuyển động cầu.
3. Không gian làm việc lớn (khoảng định hướng góc lớn).
4. Khả năng điều khiển từ xa.
5. Kích cỡ gọn, trọng lượng nhẹ, quán tính thấp.
6. Độ lặp và độ chính xác cao.
7. Độ cứng cơ học cao.
8. Giá thành sản xuất thấp
9. Thiết kế tin cậy và chắc chắn.

Cơ cấu cổ tay liên quan đặc biệt đến các nhu cầu về chuyển tải vật liệu hạt nhân, thám hiểm không gian, và các công việc nguy hiểm khác. Để đạt các đặc tính cần thiết, cơ cấu truyền động cơ học thường dùng là bộ truyền động bánh răng epicyclic, các nối kết thanh kéo - đẩy, dây truyền động.

Truyền động bánh răng epicylic nói chung được dùng để giảm tốc và tăng moment ngẫu lực trong các hệ thống cơ học. Cơ cấu bánh răng nón được dùng nhiều trong robot công nghiệp, vì chúng đơn giản, kích cỡ gọn nhẹ, được đặt trong hộp kim loại để truyền động bánh răng không bị ô nhiễm, trong sản xuất đạt độ tin cậy cao và kinh tế. Hơn nữa, khi dùng bánh răng nón để truyền động công suất, các bộ tác động được gắn từ xa, nên giảm được trọng lượng và quán tính của cơ cấu robot.

Trong Chương này, sẽ tập trung vào động học và tĩnh học truyền động bánh răng epicylic, đặc biệt là cơ cấu cổ tay robot. Trước hết, sẽ mô tả cơ cấu cổ tay bằng bánh răng nón thường dùng, các đặc tính cấu trúc, và phân loại. Kế tiếp, sẽ trình bày có hệ thống phương pháp phân tích động học theo khái niệm mạch cơ bản và chuỗi vòng hở tương đương. Cuối cùng, giới thiệu khái niệm đường truyền động để phân tích tĩnh học cơ cấu trên.

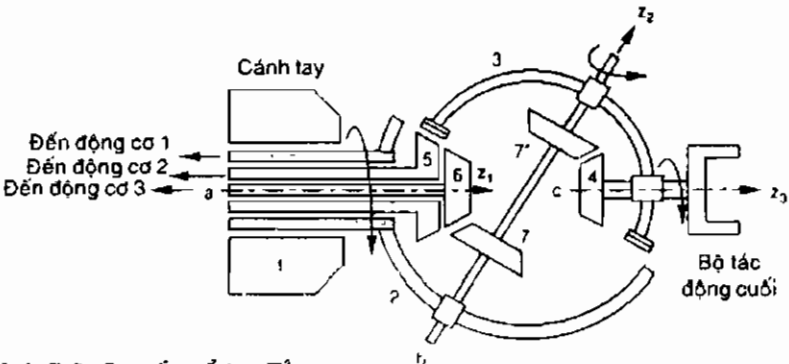
Cơ cấu cổ tay bánh răng nón

Cơ cấu cổ tay trong robot cần ít nhất 3 bậc tự do để định vị bộ tác động cuối theo định hướng tùy ý. Điều này đòi hỏi ít nhất ba sự quay độc lập tại ba trục khớp giao nhau không đồng phẳng. Nếu chuyển động này được thực hiện bằng bánh răng, cần có bộ truyền động bánh răng nón 3 bậc tự do với độ hồi chuyển phức tạp. Hơn nữa, 3 khâu ngõ vào truyền động bánh răng cần đồng trục để đạt khả năng truyền động từ xa.

Hình 7.3 minh họa sơ đồ cơ cấu cổ tay T^3. Cơ cấu gồm 7 khâu (kể cả tay đòn), 6 cặp quay và 3 cặp bánh răng hình nón. Có ba trục quay độc lập z_1, z_2, z_3. Góc cổ tay trục khớp thứ nhất và thứ hai là 60°, góc quay giữa trục khớp thứ hai và thứ ba là -60°.

Trong loại cổ tay này, khâu 2 dùng làm giá đỡ cặp bánh răng nón 5-3 và 6-7, khâu 3 dùng làm giá đỡ cặp bánh răng nón 7'-4. Các bánh răng 7-7' được nối cứng với nhau bằng một trục. Ba thành phần đồng trục, 2, 5, 6 được đỡ trên các ổ trượt trong tay đòn. Moment truyền từ các động cơ 1, 2, 3 đặt gần đầu vào tay đòn đến 3 khâu đồng trục. Sự quay khâu 5 được truyền đến khâu 3 qua cặp bánh răng 5-3. Sự quay khâu 6 truyền đến khâu 4 qua các cặp bánh răng 6-7 và 7'-4. Bộ tác động cuối được gắn vào khâu 4 trong giá đỡ 3. Hơn nữa, 3 trục khớp giao nhau tại điểm chung, nên cơ cấu cổ tay này là cơ cấu cầu 3 bậc tự do.

Chuyển động lăn cổ tay đạt được bằng cách quay khâu 2 với khâu 1 theo trục z_1. Chuyển động bước được thực hiện bằng cách quay khâu 3 với

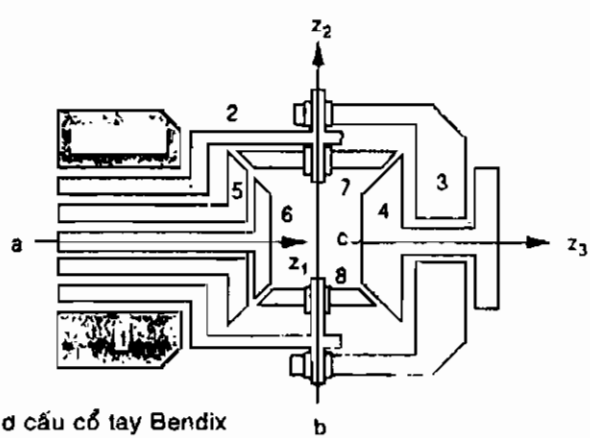


Hình 7-3. Cơ cấu cổ tay T[3]

khâu 2 theo trục z_2 . Chuyển động lăn của bộ tác động cuối được thực hiện bằng cách quay khâu 4 với khâu 3 theo trục z_3. Đặc điểm quan trọng của cơ cấu này là không có sự giao cắt cơ học giữa tất cả khâu. Do đó, có thể đạt được các sự quay thông suốt liên tục theo 3 trục khớp .

Hình 7.4 minh họa sơ đồ cổ tay Bendix, gồm 8 khâu (kể cả tay đòn), 7 cặp quay và 4 cặp bánh răng nón. Có 3 trục khớp bản lề, z_1, z_2, z_3. Các góc cổ tay 90° giữa các trục khớp thứ nhất và thứ hai, và –90° giữa các trục khớp thứ hai và thứ ba.

Trong cổ tay Bendix, khâu 2 dùng làm giá đỡ hai cặp bánh răng nón 5-7 và 6-8. Khâu 3 dùng làm giá đỡ 2 cặp bánh răng nón 7-4 và 8-4. Ba



Hình 7-4. Cơ cấu cổ tay Bendix

thành phần đồng trục, 2, 5, 6 được nâng bởi ổ trượt trong tay đòn. Moment được truyền từ các động cơ gần cuối tay đòn đến 3 khâu đồng trục. Các cặp bánh răng nón 5-7, 7-4, 6-8, 8-4 truyền chuyển động quay từ các khâu ngõ vào đồng trục đến bộ tác động cuối nối với khâu 4 đặt trong giá đỡ 3. Hơn nữa, 3 trục khớp giao nhau tại điểm chung, nên cổ tay Bendix cũng là cơ cấu cầu 3 bậc tự do. Không như cổ tay T^3, cổ tay Bendix có giới hạn quay quanh trục khớp thứ hai.

Cấu trúc cơ cấu

Phần này sẽ trình bày sơ đồ chức năng, đồ thị, và các biểu diễn đồ thị qui chuẩn cấu trúc động học của cơ cấu. Các giả thiết sau đây được áp dụng cho các cơ cấu.

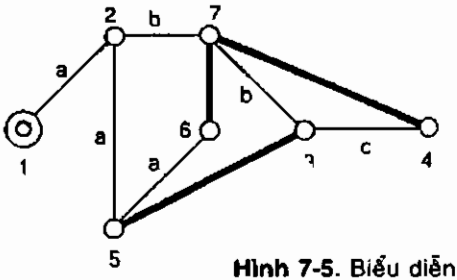
1. Để đơn giản, mọi đường dẫn song song dư trong cơ cấu được biểu thị bằng đường dẫn đơn. Nói chung, các đường dẫn song song được dùng để tăng khả năng tải và cân bằng động tốt hơn. Ví dụ, chỉ một bánh răng được vẽ thay cho bộ truyền động bánh răng hành tinh. Tương tự, khi khâu được đỡ bằng hai gối trên một trục, sẽ chỉ nêu một gối đỡ.
2. Hai thành phần cơ cấu được nối kết cứng được xét như một khâu. Ví dụ, hai bánh răng ăn khớp trên trục chung được xét động học như một khâu.
3. Tất cả các khớp đều là khớp đôi. Khớp đa chiều được thay bằng tổ hợp nhiều khớp đôi. Ví dụ, khớp ba được thay bằng hai khớp đôi đồng trục; khớp bốn được thay bằng ba khớp đôi đồng trục.

Sơ đồ chức năng

Sơ đồ chức năng của cơ cấu là bản vẽ quy ước gồm các trục, bánh răng và các thành phần khác. Để đơn giản và rõ ràng, chỉ vẽ các thành phần chính của cấu trúc động học. Ví dụ, sơ đồ trên các Hình 7.3 và 7.4 là sơ đồ chức năng cổ tay T^3 và cổ tay Bendix.

Biểu diễn đồ thị

Chuỗi động học là tổ hợp các khâu và khớp, do đó có thể biểu diễn theo đồ thị. Trong biểu diễn đồ thị, khâu được xác định bằng điểm ngọn, khớp được xác định bằng cạnh. Để phân biệt các cặp nối, cạnh có thể được ghi nhãn hoặc có màu. Đối với truyền động bánh răng epicyclic, cặp bánh



Hình 7-5. Biểu diễn đồ thị cổ tay T^3

răng được ký hiệu bằng nét vẽ đậm, cặp quay được ký hiệu bằng nét vẽ mảnh, các nét này được đánh dấu theo các vị trí trục trong không gian.

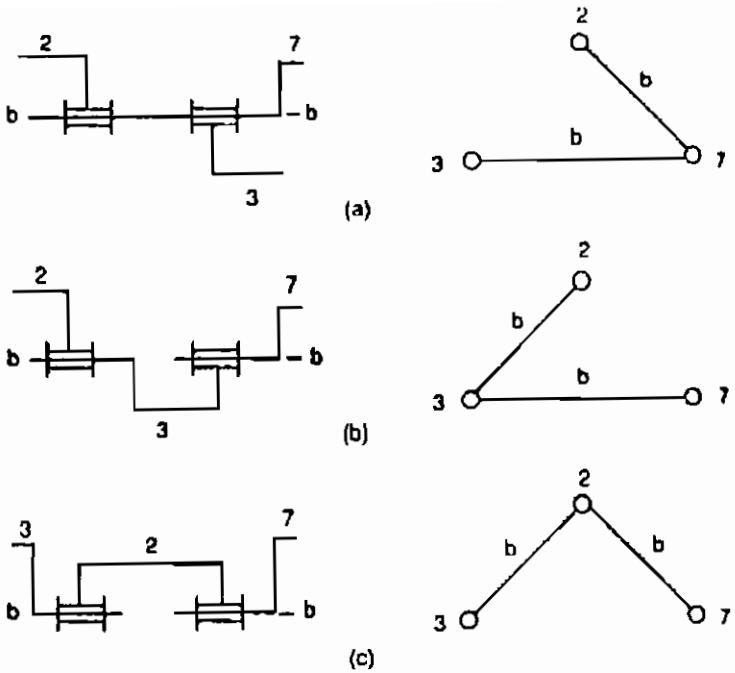
Đồ thị của cơ cấu cũng được xác định tương tự, chỉ thêm điểm ngọn đối với khâu cố định, thường bằng hai vòng tròn đồng tâm. Ví dụ, Hình 7.5 minh họa cổ tay T^3. Các khâu ứng với các điểm ngọn được đánh số từ 1 đến 7. Ba cặp bánh răng 5-3, 6-7, 7-4 vẽ bằng nét đậm. Các cặp khớp quay 1-2, 2-5, 2-7, 5-6, 7-3 và 3-4 được vẽ bằng nét mảnh và đánh dấu a, b, c theo vị trí trục.

Ưu điểm của biểu diễn đồ thị là:

1. Nhiều tính chất mạng cơ học có thể được áp dụng trực tiếp
2. Cấu hình cấu trúc có thể được xác định một cách phân biệt. Sử dụng biểu diễn đồ thị sẽ nhận biết rõ ràng sự tương tự, và các khác biệt giữa các cơ cấu.
3. Tập hợp đồ thị có thể được dùng để đánh số cho nhiều cơ cấu.
4. Các đồ thị có thể được dùng để tổ chức phân tích động học và động lực học cơ cấu.

Biểu diễn theo đồ thị chuẩn tắc

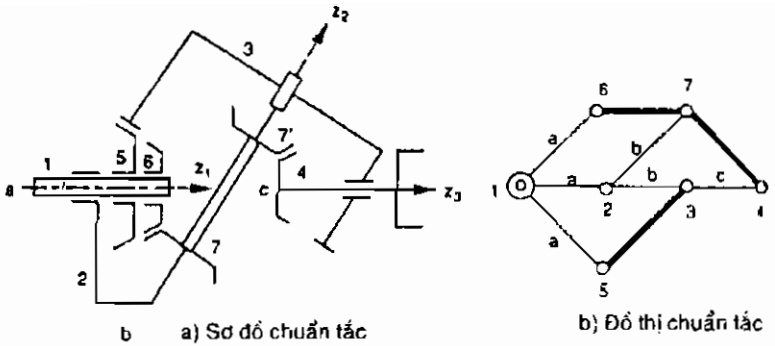
Khi ba hoặc nhiều khâu trong cơ cấu có chung trục khớp, các cặp quay dọc theo các khâu đồng trục này có thể tái lập cấu hình mà không ảnh hưởng đến tính năng của cơ cấu. Ví dụ, ba khâu 2,3,7 (Hình 7.3) được nối bằng hai khớp quay đồng trục tại trục b. Các khâu đồng trục này có thể được nối ghép theo 3 cách khác nhau. Hình 7.6a là cấu trúc ban đầu, trong đó, khâu 2 được nối với khâu 7 bằng khớp quay, khâu 7 nối với khâu 3 bằng khớp quay khác. Hình 7.6b và c là hai cấu trúc khả dĩ. Hình 7.6a, b và c minh họa các phương pháp tổ hợp ba khâu đồng trục.



Hình 7-6. Ba phương pháp tổ hợp ba khâu đồng trục.

Số nối kết khớp tăng theo số khâu đồng trục. Cơ cấu tạo thành từ các nối kết khớp này, được gọi là cơ cấu giả đẳng cấu, và đồ thị loại này là đồ thị giả đẳng cấu. Trong số các đồ thị giả đẳng cấu, đồ thị trong đó mọi đường nét mảnh bắt đầu từ khâu cơ bản đến các khâu khác đều ghi rõ các cạnh phân biệt, được gọi là đồ thị chuẩn tắc. Cơ cấu cổ tay T^3 (Hình 7.3 và 7.5) không phải là chuẩn tắc, do các cạnh 2-7 và 7-3 thuộc đường dẫn 1-2-7-3-4 có cùng ký hiệu. Tương tự, các cạnh 1-2, 2-5, và 5-6 thuộc đường dẫn 1-2-5-6, có cùng ký hiệu. Sau khi sắp xếp lại các khớp quay trong hai tập hợp các khâu đồng trục (khâu 1, 2, 5, 6) và (khâu 2, 3, 7), có thể nhận được sơ đồ chức năng chuẩn tắc và biểu diễn đồ thị của cơ cấu này. Biểu diễn chuẩn tắc loại bỏ khả năng nhầm lẫn giữa các cơ cấu giả đẳng cấu, cho phép tiếp cận một cách hệ thống khi phân tích động học và động lực học của cơ cấu robot.

Trong đồ thị chuẩn tắc, các đỉnh có thể được chia thành nhiều mức. Đỉnh mức nền được gọi là *gốc*, là khâu cơ bản. Đỉnh mức thứ nhất là các



Hình 7-7. Sơ đồ chuẩn tắc và biểu diễn đồ thị cổ tay T³.

khâu được nối trực tiếp với khâu cơ bản bằng cặp quay. Chúng có thể được dùng làm khâu ngõ vào. Các đỉnh mức cao là các bánh răng hành tinh hoặc các khâu đỡ, kể cả bộ tác động cuối.

Đặc tính cấu trúc bộ truyền động bánh răng epicyclic

Phần này sẽ trình bày các đặc tính cấu trúc của dãy bánh răng epicyclic. Để phân biệt giữa ăn khớp bánh răng và dãy bánh răng epicyclic, dưới đây sẽ đưa ra các nguyên tắc về cấu trúc động học của mọi dãy bánh răng epicyclic.

1. Bộ truyền động bánh răng epicyclic tuân theo phương trình bậc tự do tổng quát, nghĩa là không yêu cầu các chiều dài khâu đặc biệt để đạt được độ linh động mong muốn.
2. Không có chuỗi động học cục bộ bị khoá trong bộ truyền động bánh răng.
3. Bỏ qua giới hạn cơ học, tất cả các khâu trong bộ truyền động epicylic có khả năng quay không giới hạn.
4. Mỗi bánh răng trong bộ truyền động epicilic có một cặp quay trên trục để duy trì khoảng cách tâm không đổi giữa cặp bánh răng.

Gọi n là số khâu, j là tổng số khớp, j_r là số cặp quay, j_g là số cặp bánh răng, f_i là bậc tự do liên quan khớp thứ i, F là bậc tự do bộ truyền động bánh răng. L là số vòng độc lập. Phương trình bậc tự do có dạng:

$$F = 3(n - j - 1) + \sum f_i \qquad (7.1)$$

Giả sử chỉ sử dụng các cặp bánh răng và cặp quay trong bộ truyền động bánh răng epicyclic:

$$j = j_t + j_g \tag{7.2}$$

Tổng bậc tự do khớp là:

$$\sum f_i = j_t + 2j_g \tag{7.3}$$

Nguyên tắc 3 và 4 hàm ý rằng đồ thị con tạo thành do loại bỏ tất cả các cạnh truyền động bánh răng (trong đồ thị bộ truyền động bánh răng epicyclic) là đồ thị cây. Từ lý thuyết đồ thị, cây n đỉnh có chứa n-1 cạnh:

$$j_t = n - 1 \tag{7.4}$$

Thay pt (7.4) vào (7.2) và (7.3), kết quả được thay vào (7.1):

$$j_g = n - 1 - F \tag{7.5}$$

Áp dụng phương trình Euler:

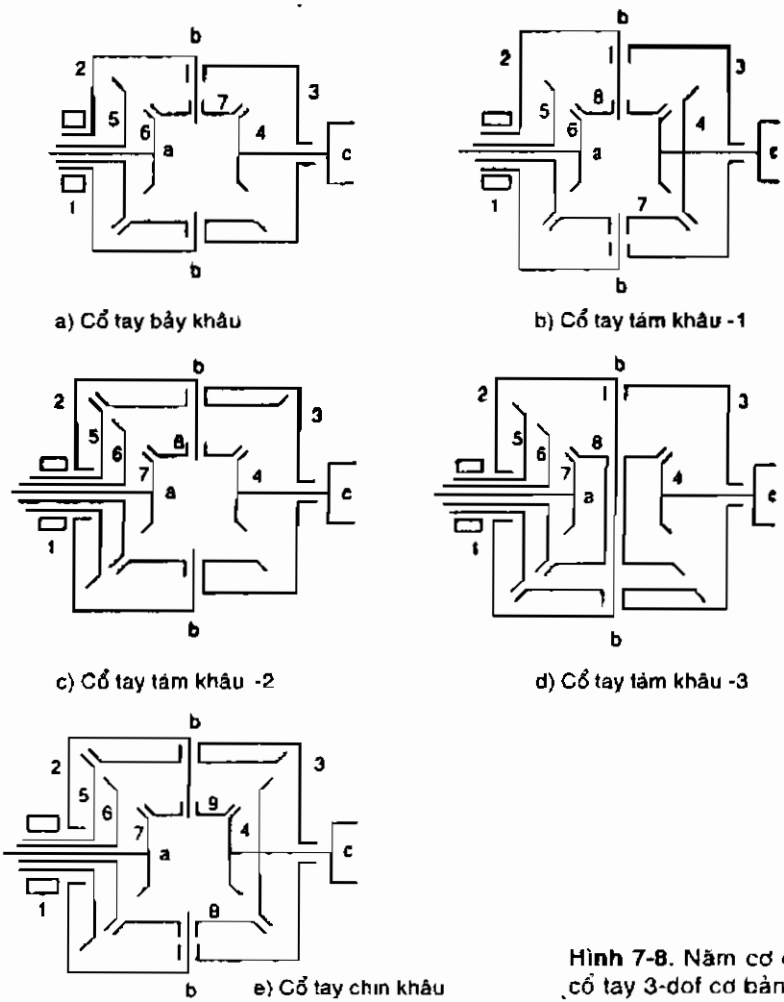
$$L = n - 1 - F = j_g \tag{7.6}$$

Từ các vấn đề nêu trên, các đặc tính cấu trúc bộ truyền động bánh răng elicylic bao gồm:

1. Đồ thị con tạo ra do xoá bỏ mọi cạnh truyền động răng trong đồ thị bộ truyền động bánh răng là đồ thị cây.
2. Số cặp quay bằng số khâu trừ 1, $j_t = n - 1$
3. Số cặp bánh răng là $j_g = n - 1 - F$
4. Cạnh truyền động răng bất kỳ được đưa vào đồ thị cây chỉ tạo nên một mạch, là *mạch cơ bản*, hoặc *mạch f*. Mỗi mạch f chứa một cạnh truyền động răng và nhiều cạnh cặp quay.
5. Số mạch f bằng số cặp bánh răng, $L = j_g$
6. Mỗi cạnh cặp quay được đặc trưng bằng ký hiệu vị trí trục trong không gian
7. Bậc tự do của mạch bất kỳ không được nhỏ hơn 1.
8. Trong mỗi mạch f, có một đỉnh được gọi là *điểm truyền dẫn*, sao cho mọi cạnh ở một phía của điểm truyền dẫn có cùng ký hiệu, và các cạnh ở phía đối diện có ký hiệu khác. Điểm này tương ứng thanh đỡ của cặp bánh răng.
9. Các cạnh nét mảnh có cùng ký hiệu tạo thành đồ thị cây.

Phân loại cơ cấu cổ tay

Các cơ cấu cổ tay có thể được phân loại theo nhiều cách, chẳng hạn theo số bậc tự do, kiểu chuyển động (cầu hoặc không phải cầu), hoặc các khảo sát hình học khác. Nói chung, các trục khớp của cơ cấu cổ tay không cần phải có chung giao điểm, và các góc cổ tay giữa các trục khớp kế nhau không nhất thiết phải bằng ± 90°. Cổ tay được gọi là *cổ tay cầu* nếu các

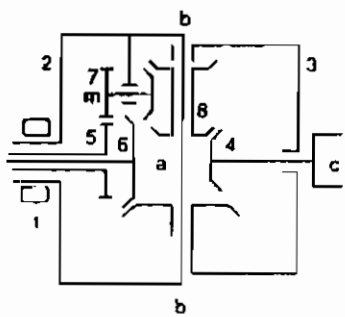


Hình 7-8. Năm cơ cấu cổ tay 3-dof cơ bản

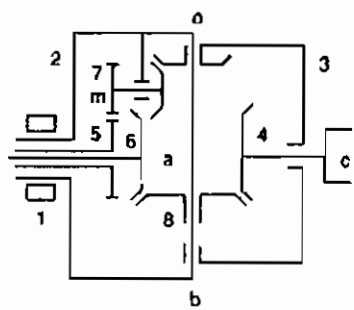
trục khớp có cùng giao điểm, ngược lại, được gọi là *cổ tay không cầu*. *Cổ tay đơn giản* là loại có góc cổ tay giữa các trục kế cận đều bằng ± 90°. Mặt khác, nếu có góc khác ± 90°, được gọi là *cổ tay nghiêng*. Theo các định nghĩa đó, cả cổ tay T^3 và Bendix (Hình 7.3 và 7.4) đều là cổ tay cầu 3-dof, nhưng cổ tay T^3 là loại cổ tay nghiêng và Bendix là cổ tay đơn giản.

Các cơ cấu này còn được phân loại theo sắp xếp bánh răng. Cổ tay được gọi là *cơ cấu cơ bản* nếu các chuyển động quay của khâu ngõ vào được truyền đến các điểm khớp bằng các bánh răng chỉ lắp trên các trục khớp nối, và được gọi là *cơ cấu dẫn xuất* nếu có các bánh răng trung gian giữa các trục của các điểm khớp. Dựa trên định nghĩa này và khái niệm đường truyền dẫn, các nhà nghiên cứu đưa ra phương pháp luận hệ thống để đánh số và phân loại các cơ cấu robot.

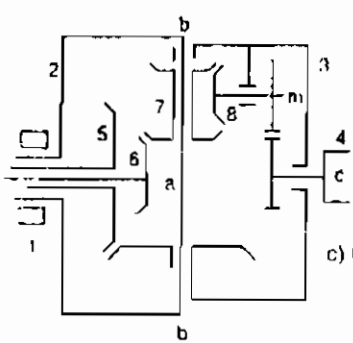
Hình 7.8 minh họa tập đồ thị các cơ cấu cổ tay cầu cơ bản 3-dof với 9 khâu. Hình 7.9 minh họa ba cơ cấu cổ tay suy ra từ cơ cấu 7-khâu trên



a) Cổ tay tám khâu - 1



b) Cổ tay tám khâu - 2



c) Cổ tay tám khâu - 3

Hình 7-9. Các cổ tay tám khâu từ cổ tay bảy khâu.

Hình 7.8(a). Trong mọi trường hợp, khâu 1 là khâu cơ bản (cánh tay) và khâu 4 là bộ tác động cuối. Trên Hình 7.8(a) và (b), Hình 7.9(a) và (c), các khâu 2, 5, 6 là khâu nhập, còn trên Hình 7.8 (c-e), các khâu 5, 6, 7 là các khâu nhập. Chú ý, mọi cơ cấu trên Hình 7.8 và 7.9 đều được phác thảo theo cấu hình cổ tay đơn giản. Các cơ cấu này có thể dễ dàng tái cấu hình theo cổ tay nghiêng.

Động học truyền động bánh răng epicyclic

Trong thiết kế các cơ cấu truyền động, chẳng hạn bộ giảm tốc, cần phải phân tích các tỷ số truyền giữa các cặp bánh răng, và các vận tốc góc giữa các bánh răng trung gian. Sự phân tích này thường được thực hiện trên cơ sở 1-1 bằng các phương pháp khác nhau, chẳng hạn phương pháp bảng, phương pháp vận tốc, phương pháp năng lượng, phương pháp vòng vector vận tốc, ... Khối lượng công việc trong phân tích dãy bánh răng epicyclic khá lớn và thường có các sai sót trong tính toán. Do đó, cần có quy trình hệ thống để phân tích, sử dụng lý thuyết các mạch cơ sở. Nói chung, thường có thanh dẫn cho từng cặp bánh răng trong dãy bánh răng epicyclic và phương trình mạch cơ bản có thể được viết cho từng mạch. Kết quả sẽ là các phương trình tuyến tính có thể được giải để tìm các vận tốc góc của mọi khâu. Phương pháp này là trực tiếp và có thể thực hiện trên máy tính để phân tích các dãy bánh răng epicyclic.

Phần kế tiếp sẽ giới thiệu lý thuyết mạch cơ sở và điều kiện đồng trục, sau đó sẽ phân tích hai bộ truyền động bánh răng epicyclic công nghiệp để minh họa lý thuyết này.

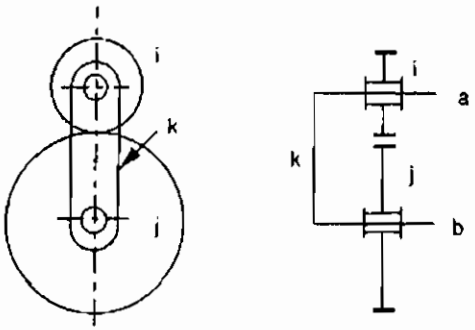
Phương trình mạch cơ sở

Hình 7.10 minh họa cặp bánh răng ăn khớp, i và j, trong đó k là giá đỡ. Các khâu i, j, k cấu thành *mạch cơ sở*. Phương trình mạch cơ sở liên hệ với độ dịch chuyển góc của các bánh răng là:

$$\theta_{i,k} = \pm N_{ji}\theta_{jk} \qquad (7.7)$$

trong đó, $\theta_{i,k}$ và $\theta_{j,k}$ là độ dịch chuyển góc của bánh răng i và j tương ứng so với giá đỡ k. Tỉ số truyền của cặp bánh răng là $N = T_j / T_i$, với T_i và T_j là số răng của bánh răng i và bánh răng j. Từ định nghĩa này, có thể thấy: $\theta_{i,k} = -\theta_{j,k}$ và $N_{ij} = 1/N_{ji}$.

Trong pt (7.7), dấu dương hay âm phụ thuộc bánh răng j quay chiều dương hay âm khi bánh răng i quay chiều dương so với giá đỡ k. Đối với



Hình 7-10. Cặp bánh răng.

bộ bánh răng truyền động phẳng, giả sử tất cả trục quay có chiều dương hướng ra trang giấy. Như vậy, tỉ số truyền dương với ăn khớp răng trong và tỉ số truyền âm với ăn khớp răng ngoài. Đối với cơ cấu cầu hoặc không gian, chiều quay dương truyền đến từng trục khớp theo đúng qui ước D-H (Denavit-Hartenberg), dấu của tỷ số truyền sẽ tuân theo định nghĩa nêu trên.

Phương trình (7.7) có liên quan đến độ dịch chuyển góc, đúng với các trường hợp chuỗi truyền động phẳng hoặc chuỗi bánh răng nón và giá đỡ dừng hoặc quay. Trong cơ cấu bánh răng epicyclic, có thể viết phương trình như trên cho từng mạch f, kết quả sẽ là n-F-1 phương trình mạch cơ sở. Lấy vi phân pt (7.7) theo thời gian, sẽ được phương trình quan hệ vận tốc góc các khâu:

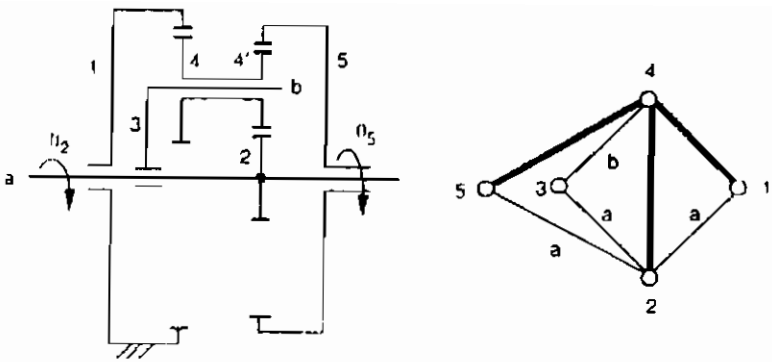
$$\omega_{i,k} = \pm N_{ji}\omega_{jk} \qquad (7.8)$$

Điều kiện đồng trục

Cho i, j , k là ba khâu đồng trục, các độ dịch chuyển góc tương đối dọc theo các khâu đồng trục này quan hệ với nhau theo quy luật chuỗi:

$$\theta_{i,j} = \theta_{i,k} - \theta_{j,k} \qquad (7.9)$$

Phương trình (7.9) được gọi là *điều kiện đồng trục*. Phương trình mạch cơ sở và điều kiện đồng trục được dùng để giải động học bộ truyền động bánh răng epicyclic. Phần này sẽ phân tích tỉ số vận tốc hai bộ truyền động epicyclic phẳng để minh họa lý thuyết.



a) Sơ đồ chức năng

b) Biểu diễn đồ thị

Hình 7-11. Bộ truyền động Minuteman Cover

Ví dụ 7.1. *Truyền động Minuteman Cover.* Hình 7.11a minh họa sơ đồ chức năng bộ truyền động Minuteman Cover. Trong cơ cấu này, bánh răng vòng 1 (răng trong) cố định với đất, bánh răng tâm 2 là khâu đầu vào, bánh răng vòng 5 (răng trong) là thành phần đầu ra. Bánh răng hành tinh ăn khớp với bánh răng tâm 2 và hai vòng bánh răng, được đỡ trên giá đỡ 3 với khớp quay. Khâu 2 nối với khâu 1, 3, 5 qua các khớp quay đồng trục. Chúng tạo thành bộ truyền động hành tinh năm khâu, 1-dof. Cần tìm tỉ số truyền tổng quát của cơ cấu này.

Mạch cơ sở. Vì có ba cặp bánh răng trong cơ cấu, nên có ba mạch cơ sở. Từ biểu diễn đồ thị (Hình 7.11(b)) có thể xác định các mạch cơ sở. Trước hết, cần loại bỏ các nét đậm để có đồ thị cây (đặc tính 1). Kế tiếp, thay một cạnh nét đậm vào đồ thị cây, mỗi lần chỉ một cạnh. Theo đặc tính 4, mỗi lần thay một cạnh đậm lên đồ thị cây, là một mạch cơ sở đơn vị. Sau cùng, các định truyền dẫn của mỗi mạch có thể nhận được bằng cách áp dụng đặc tính 8. Có ba mạch cơ sở là (2,4,3), (1,4,3), (4,5,3), trong đó hai số đầu trong ngoặc đơn là cặp bánh răng, số thứ 3 là trục đỡ. Các phương trình mạch cơ sở là:

$$f(2.4.3): \quad \theta_{2.3} = -N_{42}\theta_{43} \tag{7.10}$$

$$f(1,4,3): \quad \theta_{1.3} = -N_{41}\theta_{43} \tag{7.11}$$

$$f(4.5.3): \quad \theta_{4.3} = -N_{54}\theta_{53} \tag{7.12}$$

Vì khâu 1 cố định, nên tất cả các độ dịch chuyển góc đều được quy

chiếu theo khâu 1. Nghĩa là độ dịch chuyển góc đầu vào và đầu ra được viết là $\theta_{2,1}$ và $\theta_{5,1}$. Để có phương trình quan hệ giữa các độ dịch chuyển góc đầu ra và đầu vào, $\theta_{4,3}$ và $\theta_{1,3}$ cần được khử, trong khi $\theta_{2,3}$ và $\theta_{5,3}$ cần được tính theo $\theta_{2,1}$ và $\theta_{5,1}$, bằng cách áp dụng điều kiện đồng trục.

Điều kiện đồng trục. Từ Hình 7.11, có thể thấy các khâu 1,2,3,5 có chung trục khớp. Hai điều kiện đồng trục là:

$$\theta_{2,3} = \theta_{2,1} - \theta_{3,1} \tag{7.13}$$

$$\theta_{5,3} = \theta_{5,1} - \theta_{3,1} \tag{7.14}$$

Thay pt (7.13), (7.14) vào (7.10) đến (7.12):

$$\theta_{2,1} - \theta_{3,1} = -N_{42}\theta_{4,3} \tag{7.15}$$

$$-\theta_{3,1} = N_{41}\theta_{4,3} \tag{7.16}$$

$$\theta_{4,3} = N_{54}(\theta_{5,1} - \theta_{3,1}) \tag{7.17}$$

Các pt (7.15), (7.16), (7.17) là hệ ba phương trình tuyến tính với ba ẩn $\theta_{5,1}$, $\theta_{3,1}$, $\theta_{4,3}$. Giải pt (7.16) để tìm $\theta_{4,3}$ và thay biểu thức kết quả vào các pt (7.15) và (7.17):

$$\theta_{2,1} - \theta_{3,1} - \frac{N_{42}}{N_{41}}\theta_{3,1} = 0 \tag{7.18}$$

$$\frac{1}{N_{41}}\theta_{3,1} + N_{54}(\theta_{5,1} - \theta_{3,1}) = 0 \tag{7.19}$$

Giải pt (7.18) để tìm $\theta_{3,1}$ và thay kết quả vào pt (7.19):

$$\theta_{5,1} = \frac{N_{41}N_{54} - 1}{N_{54}(N_{41} + N_{42})}\theta_{2,1} \tag{7.20}$$

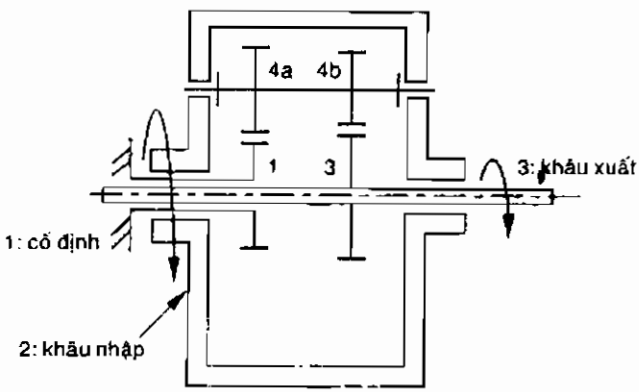
Lấy đạo hàm pt (7.20) theo thời gian và sắp xếp lại, sẽ có tỉ số vận tốc bộ truyền động:

$$\frac{\omega_{2,1}}{\omega_{5,1}} = \frac{N_{54}(N_{41} + N_{42})}{N_{41}N_{54} - 1} \tag{7.21}$$

Bộ bánh răng hành tinh đa hợp này có tỷ số giảm tốc rất lớn. Ví dụ, với $N_{4,1} = 32/74$, $N_{4,2} = 33/9$ và $N_{5,4} = 75/33$, tỉ số giảm tốc là:

$$\frac{\omega_{2.1}}{\omega_{5.1}} = \frac{\frac{75}{33}\left(\frac{32}{74} + \frac{33}{9}\right)}{\frac{32}{74} \cdot \frac{75}{33} - 1} = 541.7$$

Ví dụ 7.2. *Bộ giảm tốc vi sai.* Hình 7.12 minh họa sơ đồ chức năng bộ truyền động bánh răng vi sai hành tinh. Phần tử giá đỡ 2 là *khâu đầu vào*, bánh răng tâm 3 lớn hơn là *khâu đầu ra*, bánh răng tâm 1 nhỏ hơn là *khâu cố định*. *Bánh răng hành tinh 4* ăn khớp với cả hai bánh răng tâm 1 và 3, tìm tỉ số vận tốc giữa khâu đầu vào và khâu đầu ra.



Hình 7-12. Bộ giảm tốc vi sai

Có hai cặp bánh răng trên một giá đỡ, nên có hai mạch cơ sở là (1,4,2) và (3,4,2). Các phương trình mạch cơ sở là:

$$f(1.4,2): \quad \theta_{1.2} = -N_{41}\theta_{4.2} \tag{7.22}$$

$$f(3.4,2): \quad \theta_{3.2} = -N_{43}\theta_{4.2} \tag{7.23}$$

Vì khâu 1 cố định, nên tất cả các độ dịch chuyển góc đều được quy chiếu theo khâu 1. Độ dịch chuyển góc đầu vào và đầu ra là $\theta_{2.1}$ và $\theta_{3.1}$. Để có phương trình các độ dịch chuyển góc đầu ra và đầu vào, $\theta_{4.2}$ cần được loại bỏ, $\theta_{3.2}$ cần tính theo $\theta_{2.1}$ và $\theta_{3.1}$ bằng cách áp dụng điều kiện đồng trục. Từ Hình 7.12, có thể thấy các khâu 1,2,3 có chung trục khớp. Điều kiện đồng trục là:

$$\theta_{3,2} = \theta_{3,1} - \theta_{2,1} \tag{7.24}$$

Chia pt (7.22) cho (7.23):

$$-N_{43}\theta_{2,1} = N_{41}\theta_{3,2} \tag{7.25}$$

Thay pt (7.24) vào (7.25) và rút gọn:

$$\frac{\theta_{2,1}}{\theta_{3,1}} = \frac{N_{41}}{N_{41} - N_{43}} \tag{7.26}$$

Lấy đạo hàm pt (7.26) theo thời gian, sẽ có tỉ số giảm tốc bộ truyền động:

$$\frac{\omega_{2,1}}{\omega_{3,1}} = \frac{N_{41}}{N_{41} - N_{43}} \tag{7.27}$$

Ví dụ, với $N_{4,1} = 33/75$ và $N_{4,3} = 32/76$, tỉ số giảm tốc là:

$$\frac{\omega_{2,1}}{\omega_{3,1}} = \frac{\frac{33}{75}}{\frac{33}{75} - \frac{32}{76}} = 23.2$$

Động học cơ cấu cổ tay robot

Phần này nghiên cứu cơ cấu cổ tay robot có xét đến độ phức tạp hồi chuyển. Sự phân tích cơ cấu cổ tay bánh răng nón sẽ phức tạp hơn, do các trục và các bánh răng hành tinh có thể có đồng thời vận tốc góc trên các trục không song song. Các bảng hoặc các phương pháp phân tích trong các sổ tay kỹ thuật, tập trung vào bộ truyền động bánh răng epicyclic phẳng, đều không dùng được. Để khắc phục khó khăn này, nhiều nhà nghiên cứu áp dụng vận tốc kép và ma trận biến đổi kép để phân tích bộ truyền động bánh răng epicyclic và bánh răng hypoid. Gần đây, các nhà nghiên cứu đề nghị sử dụng khái niệm *chuỗi vòng hở tương đương* và lý thuyết mạch cơ sở để phân tích động học các cơ cấu robot có bộ truyền động bánh răng.

Phương pháp này gồm hai bước cơ bản. Bước thứ nhất là xác định chuỗi vòng lặp tương đương và đưa ra quan hệ động học giữa hướng của bộ tác động cuối và các góc khớp của chuỗi vòng lặp tương đương. Bước thứ hai là xác định quan hệ động học giữa các góc khớp và các dịch

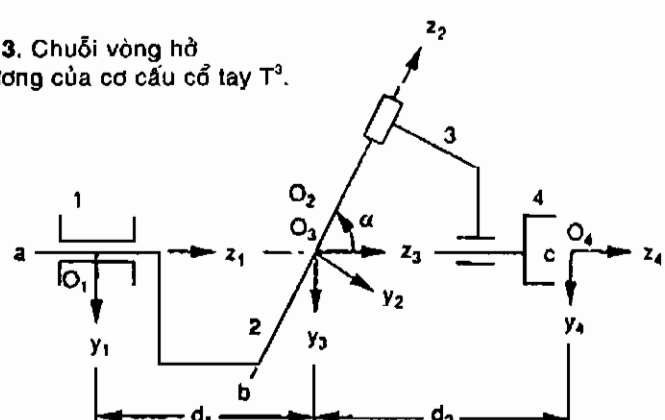
chuyển bộ tác động ngõ vào. Kết quả bước thứ nhất là biến đổi giữa không gian bộ tác động cuối và không gian khớp của chuỗi vòng lặp tương đương, kết quả của bước thứ hai là biến đổi giữa không gian khớp và không gian bộ tác động ngõ vào. Quan hệ động học tổng quát là tích của hai biến đổi này.

Dưới đây sẽ sử dụng cơ cấu cổ tay T^3 để minh họa quy trình nêu trên.

Chuỗi vòng hở tương đương

Đồ thị cơ cấu robot truyền động bằng bánh răng có thể biến đổi thành dạng chuẩn tắc, và việc loại bỏ tất cả các cạnh truyền động răng trong đồ thị sẽ tạo thành đồ thị cây. Cây là chuỗi động học vòng hở gồm các khâu nối bằng các cặp quay. *Chuỗi vòng hở tương đương* là đường dẫn nét mảnh từ khâu cơ bản đến khâu bộ tác động cuối. Ví dụ, đồ thị chuẩn tắc của cơ cấu T^3 (Hình 7.7b) gồm đỉnh 1 là khâu cơ bản và đỉnh 4 là bộ tác động cuối. Đường dẫn nét mảnh từ khâu cơ bản đến khâu bộ tác động cuối gồm các đỉnh 1-2-3-4, chuỗi vòng hở tương đương là các khâu 1,2,3,4 nối tiếp với các khớp quay (Hình 7.13).

Để dễ phân tích cơ cấu, cần đánh dấu chiều dương của chuyển động quay lên mỗi trục khớp và xác định hệ tọa độ cho mỗi khâu phù hợp qui ước Denavit-Hartenberg. Hệ tọa độ (x_1, y_1, z_1) gắn cho khâu 1, (x_2, y_2, z_2) cho khâu 2, (x_3, y_3, z_3) cho khâu 3, và (x_4, y_4, z_4) cho khâu 4. Điểm gốc O_1 và trục x_1 chọn tùy ý vì lúc này chưa biết cách thức nối cổ tay với tay đòn. Chuỗi vòng hở tương đương (Hình 7.13) được vẽ phác với các trục x_i, i=1 đến 4, song song với nhau và có chiều hướng ra trang giấy. Cấu hình này



Hình 7-13. Chuỗi vòng hở tương đương của cơ cấu cổ tay T^3.

là *vị trí quy chiếu*, và quy chiếu chuyển dịch góc của khâu (hoặc bánh răng) trong cơ cấu theo chuyển động quay của khâu từ vị trí quy chiếu đó, dương và âm theo quy tắc bàn tay phải.

Các thông số D-H của chuỗi vòng hở tương đương này được cho trong Bảng 7.1.

Bảng 7-1. Các thông số khâu của T^3.

Khớp i	α_i	a_i	d_i	$\theta_{i,i}$
1	α	0	d_1	$\theta_{2,1}$ (biến thiên)
2	$-\alpha$	0	0	$\theta_{3,2}$ (biến thiên)
3	0	0	d_3	$\theta_{4,3}$ (biến thiên)

Phép biến đổi giữa không gian bộ tác động cuối và không gian khớp của chuỗi vòng hở tương đương có thể xác định bằng cách áp dụng phương pháp Denavit-Hartenbert hoặc phương pháp dịch chuyển quay vít liên tiếp. Cả hai phương pháp này đều được trình bày chi tiết trong Chương 2.

Phép biến đổi giữa không gian khớp và không gian bộ tác động

Bước hai được thực hiện bằng cách áp dụng lý thuyết mạch cơ sở và điều kiện đồng trục. Với biểu diễn đồ thị, mạch cơ sở được xác định và phương trình mạch cơ sở, pt (7.7), được viết lần lượt cho từng mạch cơ sở. Kế tiếp, điều kiện đồng trục, pt (7.9), được viết nhiều lần để khử bớt các độ dịch chuyển góc. Kết quả chỉ còn quan hệ giữa độ dịch chuyển bộ tác động và các góc khớp của chuỗi vòng hở tương đương.

Ví dụ, cổ tay T^3 (Hình 7.7) là cơ cấu 3 bậc tự do với ba cặp bánh răng nón. Ứng dụng đặc tính 4, có ba mạch cơ sở là 7-2-3-4-7, 6-1-2-7-6, và 5-1-2-3-5. Ứng dụng đặc tính 8, các điểm truyền động tương ứng trên ba mạch này là đỉnh 3, 2, và 2. Từ đó phương trình mạch cơ sở là:

$$f(7,4,3): \quad \theta_{7,3} = -N_{47}\theta_{4,3} \tag{7.28}$$

$$f(6,7,2): \quad \theta_{6,2} = -N_{76}\theta_{7,2} \tag{7.29}$$

$$f(5,3,2): \quad \theta_{5,2} = -N_{35}\theta_{3,2} \tag{7.30}$$

Khâu 1 là khâu cố định, nên tất cả các độ dịch chuyển góc được quy chiếu theo khâu 1. Độ dịch chuyển góc đầu vào là $\theta_{2,1}$, $\theta_{5,1}$, $\theta_{6,1}$, còn độ dịch chuyển góc khớp của chuỗi vòng hở tương đương là $\theta_{2,1}$, $\theta_{3,2}$, $\theta_{4,3}$. Tất

cả các độ dịch chuyển góc khác đều được khử bằng cách áp dụng điều kiện đồng trục. Từ Hình 7.7, có thể thấy các khâu 2,3,7 có chung trục khớp z_2, các khâu 1,2,5,6 có chung trục z_1. Do đó, ba điều kiện đồng trục là:

$$\theta_{7,3} = \theta_{7,2} - \theta_{3,2} \tag{7.31}$$

$$\theta_{6,2} = \theta_{6,1} - \theta_{2,1} \tag{7.32}$$

$$\theta_{5,2} = \theta_{5,1} - \theta_{2,1} \tag{7.33}$$

Giải các pt từ (7.28) đến (7.33), tính được:

$$\theta_{5,1} = \theta_{2,1} + N_{35}\theta_{3,2} \tag{7.34}$$

$$\theta_{6,1} = \theta_{2,1} - N_{76}\theta_{3,2} + N_{76}N_{47}\theta_{4,3} \tag{7.35}$$

Vì khâu 2 là khâu đầu vào, nên:

$$\theta_{2,1} = \theta_{2,1} \tag{7.36}$$

Các pt (7.34), (7.35), (7.36) được viết theo ma trận:

$$\begin{bmatrix} \theta_{2,1} \\ \theta_{5,1} \\ \theta_{6,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & N_{35} & 0 \\ 1 & -N_{76} & N_{76}N_{47} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{2,1} \\ \theta_{3,2} \\ \theta_{4,3} \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

hoặc đơn giản hơn:

$$\phi = A\theta \tag{7.38}$$

trong đó $\phi = [\theta_{2,1}, \theta_{5,1}, \theta_{6,1}]^T$ là vector các độ dịch chuyển góc đầu vào, $\theta = [\theta_{2,1}, \theta_{3,2}, \theta_{4,3}]^T$ là vector các góc khớp, và :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & N_{35} & 0 \\ 1 & -N_{76} & N_{76}N_{47} \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

Đối với động học thuận, độ dịch chuyển góc đầu vào đã biết, các góc khớp được tìm bằng phép biến đổi nghịch đảo pt (7.38). Sau khi biết các góc khớp, có thể tìm định hướng bộ tác động cuối bằng phép biến đổi Denavit-Hartenberg thuận. Đối với động học đảo, biết hướng bộ tác động cuối, cần tìm các góc khớp bằng phép biến đổi D-H nghịch, và tìm độ chuyển dịch góc đầu vào bằng pt (7.38).

Quan hệ vận tốc góc

Vận tốc góc bộ tác động cuối ứng với khâu cơ bản, $\omega_{4,1}$, được tính bằng tổng các quay vít tức thời theo ba trục khớp tương đương:

$$\omega_{4,3} = \dot{\theta}_{2,1}z_1 + \dot{\theta}_{3,2}z_2 + \dot{\theta}_{4,3}z_3 \tag{7.40}$$

với z_i là vector đơn vị theo trục z_i dương. Lấy đạo hàm pt (7.37) theo thời gian:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{2,1} \\ \dot{\theta}_{5,1} \\ \dot{\theta}_{6,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & N_{35} & 0 \\ 1 & -N_{76} & N_{76}N_{47} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{3,2} \\ \dot{\theta}_{4,3} \end{bmatrix} \tag{7.41}$$

Các tỷ suất khớp được tính theo các tốc độ quay bộ tác động bằng cách tính nghịch đảo pt (7.41), nghĩa là:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_{2,1} \\ \dot{\theta}_{3,2} \\ \dot{\theta}_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -N_{53} & N_{53} & 0 \\ -N_{74}(N_{67}+N_{53}) & N_{74}N_{53} & N_{74}N_{67} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{5,1} \\ \dot{\theta}_{6,1} \end{bmatrix} \tag{7.42}$$

Đối với bài toán vận tốc thuận, cho trước các tốc độ quay bộ tác động, cần tìm các tỷ suất khớp từ pt (7.42) và vận tốc góc bộ tác động cuối từ pt (7.40). Đối với các bài toán vận tốc đảo, đã biết vận tốc góc bộ tác động cuối, cần tìm tỷ suất khớp từ pt vector (7.40), rồi tìm tốc độ quay bộ tác động từ pt (7.41).

Phân tích lực tĩnh học

Phần này áp dụng nguyên lý công ảo để xác định phép biến đổi giữa các moment ngẫu lực khớp tương đương và moment ngẫu lực bộ tác động.

Nguyên lý công ảo

Với bộ cổ tay 3 bậc tự do, độ dịch chuyển ảo của bộ tác động đầu vào là $\delta\phi = [\delta\phi_1, \delta\phi_2, \delta\phi_3]^T$, và độ dịch chuyển ảo tại các khớp của chuỗi vòng hở tương đương là $\delta\theta = [\delta\theta_{2,1}, \delta\theta_{3,2}, \delta\theta_{4,3}]^T$. Moment ngẫu lực đầu vào bộ tác động là $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^T$ và moment khớp đầu ra tương ứng là $\tau = [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$. Bỏ qua lực ma sát và trọng lực, công ảo δW được tạo ra từ tất cả các lực tác động này là:

$$\delta W = \xi^T \delta\phi - \tau^T \delta\theta \tag{7.43}$$

Từ pt (7.38), suy ra quan hệ giữa các độ dịch chuyển ảo $\delta\phi$ và $\delta\theta$ là:

$$\delta\phi = A\delta\theta \tag{7.44}$$

Thay pt (7.44) vào (7.43):

$$\delta W = (\xi^T A - \tau^T)\delta\theta \tag{7.45}$$

Hệ thống cân bằng nếu và chỉ nếu công ảo triệt tiêu với độ dịch chuyển ảo vô cùng bé độc lập bất kỳ. Do đó:

$$\xi^T A - \tau^T = 0 \tag{7.46}$$

Lấy chuyển vị pt (7.64):

$$\tau = B\xi \tag{7.47}$$

với $B = A^T$ được gọi là *ma trận cấu trúc*. Ví dụ, ma trận cấu trúc của cổ tay T^3 là:

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & N_{35} & -N_{76} \\ 0 & 0 & N_{76}N_{47} \end{bmatrix}$$

Chú ý, ma trận cấu trúc là hàm của cấu hình cấu trúc và tỉ số truyền, ma trận này độc lập với sự định hướng bộ tác động cuối.

Đối với cổ tay cầu 3 bậc tự do, quan hệ giữa vector của các moment khớp tương đương và moment ngõ ra bộ tác động cuối $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ là:

$$\tau = J^T \mathbf{n} \tag{7.48}$$

với J là ma trận Jacobi 3×3 biểu thị quan hệ của vận tốc góc bộ tác động cuối với các tỷ suất khớp của chuỗi vòng hở tương đương. Kết hợp phương trình (7.47) và (7.48), phép biến đổi toàn bộ là:

$$\xi = B^{-1} J^T \mathbf{n} \tag{7.49}$$

Sử dụng pt (7.49), có thể tính được moment ngẫu lực bộ tác động đầu vào theo moment ngõ ra bộ tác động cuối. Nếu biết moment bộ tác động đầu vào, có thể dùng phép biến đổi nghịch đảo pt (7.49) để tính moment bộ tác động cuối.

Đường truyền động

Phần này sẽ giới thiệu khái niệm *đường truyền động*. Lấy đạo hàm pt (7.47):

$$d\tau = Bd\xi \tag{7.50}$$

Phần tử (i,j) trong ma trận cấu trúc B có thể được diễn dịch theo tỷ suất riêng của thay đổi moment khớp ứng với moment bộ tác động đầu vào, nghĩa là:

$$b_{i,j} = \frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_j} \tag{7.51}$$

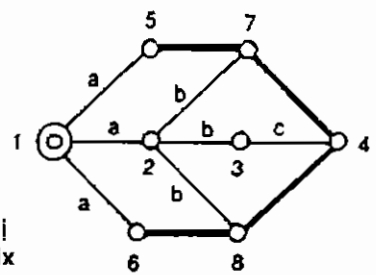
trong đó $b_{i,j}$ là phần tử (i,j) của B.

Với phần tử $b_{i,j} \neq 0$, moment đầu vào ξ_j tăng lên $b_{i,j}$ lần khi truyền đến khớp thứ i. Với $b_{i,j} = 0$, moment đầu vào ξ_j không ảnh hưởng đến moment hình thành tại khớp i. Hàng thứ i của ma trận cấu trúc B là moment tổng tại khớp i bị ảnh hưởng bởi tất cả các bộ tác động ngõ vào. Cột thứ j của ma trận cấu trúc B xác định moment bộ tác động ngõ vào thứ j được truyền đến các khớp của cơ cấu. Vì moment ngõ vào truyền đến các khớp qua hệ thống bánh răng, nên các phần tử khác zero trong cột của ma trận cấu trúc phải liên tiếp với nhau. Đường truyền bánh răng tạo ra chuỗi phần tử khác zero trong cột thứ j của B được gọi là *đường truyền động* ứng với bộ tác động ngõ vào j. Trên một đường truyền động, bánh răng thứ nhất gắn với rotor của bộ tác động, và bánh răng cuối gắn với một trong các khâu trong chuỗi vòng hở tương đương.

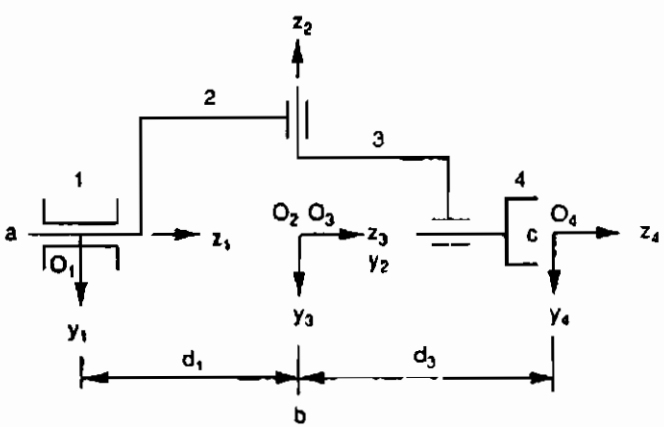
Phần tử b_{ij} bằng *giá trị truyền động* xác định từ bánh răng j ngõ vào đến bánh răng quay theo trục khớp j của chuỗi vòng hở tương đương. Ví dụ, cổ tay T^3 (Hình7.7) có ba đường truyền động: (1) bằng chính khâu 2. (2) các bánh răng 5 và 3. (3) các bánh răng 6,7,7' và 4. Phần tử $b_{2,3}$ bằng giá trị truyền động $-N_{7,6}$ xác định từ bánh răng 6 ngõ vào đến bánh răng 7 quay quanh trục khớp thứ hai, có dấu âm khi bánh răng 6 ngõ vào quay chiều dương quanh trục z_1, và bánh răng 7 quay chiều âm quanh trục z_2. Tương tự, phần tử $b_{3,3}$ bằng giá trị truyền động $N_{7,6}N_{4,7}$ xác định từ bánh răng 6 ngõ vào đến bánh răng 4 quay quanh trục khớp thứ ba. Do đó, các phần tử của B được xác định. Chú ý, nếu stator của động cơ gắn trên khâu thứ i và rotor nối với khâu i+1, không qua sự giảm tốc, đó là *truyền động trực tiếp*. Phần tử của B đối với truyền động trực tiếp là bằng 1.

Động học của cổ tay Bendix

Phần này phân tích động học cổ tay Bendix (Hình 7.4). Hình 7.14 minh họa biểu diễn đồ thị chuẩn tắc của cơ cấu này, trong đó, đỉnh 1 là khâu cơ bản, điểm 4 là bộ tác động cuối. Đường dẫn nét mảnh, từ khâu cơ bản đến khâu bộ tác động cuối, gồm các điểm 1,2,3,4. Từ đó, chuỗi vòng hở tương đương được tạo thành từ các khâu 1,2,3,4 mắc nối tiếp bởi các khớp quay (Hình 7.15). Phép biến đổi giữa không gian bộ tác động cuối và không gian khớp tương tự như của cơ cấu T^3, chỉ khác về góc quay giữa các trục khớp. Trong Bendix các góc quay là $\alpha_1 = 90^o$, $\alpha_2 = -90^o$, $\alpha_3 = 0^o$.



Hình 7-14. Biểu diễn đồ thị chuẩn tắc của cổ tay Bendix



Hình 7-15. Chuỗi vòng hở tương đương của cổ tay Bendix

Có bốn cặp bánh răng truyền động và có bốn mạch cơ sở. Áp dụng đặc tính 4, có bốn mạch cơ sở là 5-1-2-7-5, 7-2-3-4-7, 8-2-3-4-8, và 6-1-2-8-6. Áp dụng đặc tính 8, các đỉnh 2,3,3, và 2 là các đỉnh truyền động. Do đó, các phương trình mạch cơ sở là:

$$f(7,5,2): \quad \theta_{7,2} = N_{57}\theta_{5,2} \tag{7.52}$$

$$f(4,7,3): \quad \theta_{4,3} = -N_{74}\theta_{7,3} \tag{7.53}$$

$$f(4,8,3): \quad \theta_{4,3} = N_{84}\theta_{8,3} \tag{7.54}$$

$$f(8,6,2): \quad \theta_{8,2} = -N_{68}\theta_{6,2} \tag{7.55}$$

Khâu 1 là khâu cố định, nên tất cả các độ dịch chuyển góc được quy chiếu theo khâu 1. Các độ dịch chuyển góc đầu vào là $\theta_{2,1}$, $\theta_{5,1}$, $\theta_{6,1}$, các góc khớp của chuỗi vòng hở tương đương là $\theta_{2,1}$, $\theta_{3,2}$, $\theta_{4,3}$. Tất cả các độ dịch chuyển góc khác được khử bằng cách áp dụng điều kiện đồng trục.

Từ Hình 7.4, các khâu 2,3,7,8 có chung trục khớp z_2, và các khâu 1,2,5,6 có chung trục khớp z_1. Do đó, bốn điều kiện đồng trục là:

$$\theta_{7,3} = \theta_{7,2} - \theta_{3,2} \tag{7.56}$$

$$\theta_{8,3} = \theta_{8,2} - \theta_{3,2} \tag{7.57}$$

$$\theta_{5,2} = \theta_{5,1} - \theta_{2,1} \tag{7.58}$$

$$\theta_{6,2} = \theta_{6,1} - \theta_{2,1} \tag{7.59}$$

Giải các pt (7.52) đến (7.59) để tính $\theta_{5,1}$ và $\theta_{6,1}$:

$$\theta_{5,1} = \theta_{2,1} + N_{75}\theta_{3,2} - N_{75}N_{47}\theta_{4,3} \tag{7.60}$$

$$\theta_{6,1} = \theta_{2,1} - N_{86}\theta_{3,2} - N_{86}N_{48}\theta_{4,3} \tag{7.61}$$

Vì khâu 2 là khâu đầu vào, nên:

$$\theta_{2,1} = \theta_{2,1} \tag{7.62}$$

Các pt (7.60),(7.61),(7.62) được viết theo dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \theta_{2,1} \\ \theta_{5,1} \\ \theta_{6,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & N_{75} & -N_{75}N_{47} \\ 1 & -N_{86} & -N_{86}N_{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{2,1} \\ \theta_{3,2} \\ \theta_{4,3} \end{bmatrix} \tag{7.63}$$

Từ đó, ma trận cấu trúc B là:

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & N_{75} & -N_{86} \\ 0 & -N_{75}N_{47} & -N_{86}N_{48} \end{bmatrix} \tag{7.64}$$

Khi xét các góc vuông giữa trục z_1 và z_2, giữa trục z_2 và z_3, có thể thấy $N_{75} = N_{86} = 1/N_{47} = 1/N_{48}$. Do đó, ma trận cấu trúc được rút gọn thành:

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & N_{75} & -N_{75} \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{7.65}$$

Một khi đã biết ma trận cấu trúc, phân tích vận tốc và phân tích tĩnh học có thể được thực hiện theo qui trình đã nêu đối với cổ tay T^3.

Tóm tắt

Chương này trình bày sự biểu diễn đồ thị các cấu trúc động học của bộ truyền động bánh răng epicyclic, kể cả cơ cấu cổ tay bánh răng côn. Áp dụng các tính chất mạng của đồ thị, có thể xác định các đặc tính cấu trúc của bộ truyền động bánh răng epicyclic, từ đó các cơ cấu bánh răng nón có thể được phân loại theo đặc tính cấu trúc. Lý thuyết mạch cơ sở và điều kiện đồng trục được giới thiệu để phân tích động học các cơ cấu bánh răng nón theo hai bước cơ bản. Bước thứ nhất là xác định chuỗi vòng hở tương đương và đưa ra quan hệ động học giữa hướng của bộ tác động cuối và các góc khớp của chuỗi vòng hở tương đương. Bước thứ hai xác định quan hệ động học giữa các góc khớp và các dịch chuyển bộ tác động ngõ vào. Chương này còn giới thiệu khái niệm đường truyền động và ma trận cấu trúc. Sử dụng khái niệm này, ma trận cấu trúc của cơ cấu có thể được xác định từ cấu trúc động học của cơ cấu. Vài bộ giảm tốc bánh răng công nghiệp và cơ cấu cổ tay robot được phân tích để minh họa phương pháp luận nêu trên.

Chương 8

CƠ CẤU CHẤP HÀNH TRUYỀN ĐỘNG BẰNG ĐAI

Giới thiệu

Cấu trúc động học của cơ cấu robot thường có dạng chuỗi vòng hở. Cơ cấu chấp hành vòng hở đơn giản về mặt cơ học và dễ xây dựng. Về lý thuyết, một bộ tác động gắn trên từng khâu để truyền động khâu kế tiếp qua bộ giảm tốc. Nhược điểm khi gắn các bộ tác động ở các vị trí này là hệ thống nặng và có kích cỡ cồng kềnh. Để giảm kích cỡ và lực quán tính của cơ cấu chấp hành, cần có hệ thống truyền động cơ học với các bộ tác động đặt cách xa các khớp.

Các hệ thống truyền động cơ học gồm truyền động bánh răng, truyền động đai và puli, khâu bản lề, ...đều có thể được áp dụng. Hệ truyền động phụ thuộc vào ứng dụng và nghiên cứu thiết kế. Nói chung, tỉ số giữa công suất và trọng lượng phải được tối ưu hoá, giảm độ lệch, rung và ma sát. Ứng dụng truyền động bánh răng trong cơ cấu truyền động cơ học đã khảo sát trong Chương 7. Chương này tập trung vào động học truyền động đai. Thuật ngữ *đai* có hàm ý rộng bao gồm dây cuaroa, dây cáp, và các cấu trúc tương tự. Ưu điểm chính của truyền động đai là: (1) Tất cả các bộ tác động được lắp đặt trên đế cố định, kết cấu gọn và trọng lượng nhẹ. (2) Hệ truyền động đai được thiết kế tốt có độ lệch nhỏ. Do đó, hệ thống truyền động đai thích hợp hơn các hệ thống truyền động khác trong các ứng dụng như cánh tay máy, trong đó, yêu cầu về thể tích nhỏ, trọng lượng nhẹ, tốc độ cao là các yếu tố quan trọng.

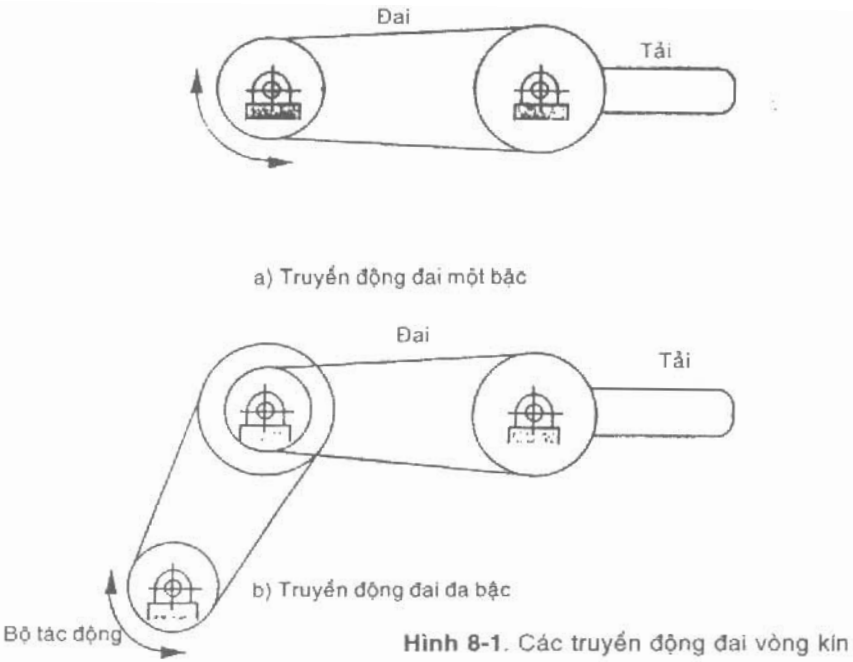
Phần này trình bày cơ học của cơ cấu truyền động đai. Các đặc tính cấu trúc, động học, và tĩnh học của hệ thống được nghiên cứu chi tiết.

Phân loại cơ cấu truyền động đai

Các truyền động đai thường được chia thành hai nhóm, truyền động đai vòng kín và truyền động đai đầu hở.

Truyền động đai vòng kín

Cơ cấu này chiếm đa số trong hệ thống truyền động đai, được sử dụng nhiều trong máy móc công nghiệp. Gần đây, chúng được kết hợp

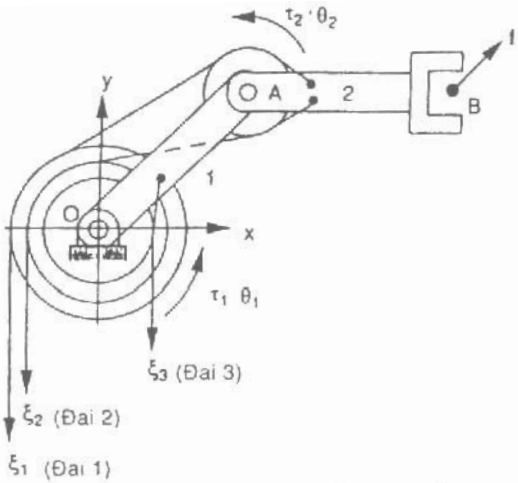


Hình 8-1. Các truyền động đai vòng kín

vào cơ cấu chấp hành robot. Loại truyền động này sử dụng một động cơ để điều khiển đai vòng kín theo hai chiều. Hình 8.1a minh họa cơ cấu 1 bậc tự do, được truyền động bằng bộ tác động quay thông qua đai. Truyền công suất trong hệ thống truyền động này dựa vào ma sát giữa puli và dây đai. Để tăng hiệu suất, có thể dùng loại đai răng, chẳng hạn đai thời chuẩn hoặc bộ xích - đĩa xích. Đai vòng kín còn được nối tiếp thành chuỗi, tạo thành hệ thống truyền động đa bậc (Hình 8.1b). Trong truyền động vòng kín, một phần của từng đai chịu lực kéo cao và phần kia chịu lực kéo nhỏ. Mặc dù moment truyền cả hai chiều, nhưng yêu cầu đai không được chùng. Tuy nhiên, lực kéo cao làm tăng ma sát và độ lệch do tính đàn hồi của đai. Do đai vòng kín có thể được truyền động cả hai chiều, số lượng bộ tác động cần dùng bằng số bậc tự do của cơ cấu chấp hành.

Truyền động đai đầu hở

Gọi n là số bậc tự do, m là số đai điều khiển trong truyền động đai đầu hở. Cơ cấu này được gọi là cơ cấu n × m. Ví dụ, Hình 8.2 minh họa cơ



Hình 8-2. Cơ cấu chấp hành 2-dof được truyền động bằng ba đai

cấu truyền động đai 2×3. Trong hệ thống truyền động này, một đầu của mỗi đai gắn với khâu chuyển động, còn đầu kia được kéo từ bộ tác động. Lực được truyền bằng cách kéo các đai. Điểm đặc trưng của hệ thống này là các đai chỉ có thể tác dụng lực kéo. Nghĩa là, lực bộ tác động phải tác dụng theo một chiều. Nói chung, m lớn hơn n để đạt được sự điều khiển độc lập mọi bậc tự do của cơ cấu. Với tiêu chuẩn này, cơ cấu chấp hành truyền động bằng đai đầu hở được phân loại như sau:

(a) **m < n**. Nếu số đai nhỏ hơn số bậc tự do, chuyển động của cơ cấu không thể điều khiển tùy ý. Đây là *cơ cấu tác động không đủ*. Cơ cấu chấp hành tác động thiếu thường dựa vào các ràng buộc cơ học hoặc đặc tính cấu trúc để điều khiển tư thế hoạt động. Các nhà nghiên cứu đưa ra loại tay kẹp mềm gồm ba ngón tay nhiều bậc tự do. Mỗi ngón được điều khiển bằng một đai kẹp và một đai nhả. Đường kính puli kẹp nhỏ dần từ khớp cơ bản đến khớp đỉnh, còn đường kính puli nhả không đổi trên toàn bộ chiều dài. Mặc dầu các khớp không thể được điều khiển độc lập, nhưng các ngón tay có thể kẹp vật thể hình dạng bất kỳ với lực kẹp đồng nhất. Ngoài ra còn có tay máy cơ học với hai ngón thường và một ngón cái. Mỗi ngón tay có bốn khớp và được kéo bằng một đai, còn ngón cái có lò xo tác động. Các cơ cấu chấp hành tác động thiếu còn được lập cấu hình theo cơ cấu vi sai.

(b) **m= n**. Khi số đai bằng số bậc tự do, cơ cấu chấp hành vẫn là cơ cấu tác động thiếu. Kiểu cơ cấu này thường được dùng trong các cần trục nâng để nâng, chuyển tải, và hạ các vật nặng. Đối với các kiểu ứng dụng đó, đai thường được thiết kế để kéo, lực tác dụng ngược với trọng lực. Hệ thống cần trục robot có thể dùng cấu trúc bệ Stewart. Trong thiết kế này, sáu dây cáp được dùng làm các khâu song song để điều khiển vị trí bệ di động treo. Mặc dầu số lượng bộ tác động nhỏ hơn n+1, vẫn có thể điều khiển vị trí bộ tác động cuối, do sử dụng trọng lực làm lực điều khiển (n+1).

(c) **m< n**. Nếu số đai lớn hơn số bậc tự do, cơ cấu chấp hành có thể được điều khiển theo yêu cầu. Kiểu cơ cấu này được áp dụng rộng rãi, do người dùng có thể hoàn toàn kiểm soát các bậc tự do. Đây là loại *cơ cấu chấp hành tác động đủ,* thường được dùng trong các tay máy mô phỏng tay người. Các tay máy này thường có ba ngón, mỗi ngón có ba đốt và được điều khiển bằng bốn đai, hoặc bốn đốt được điều khiển bằng tám đai.

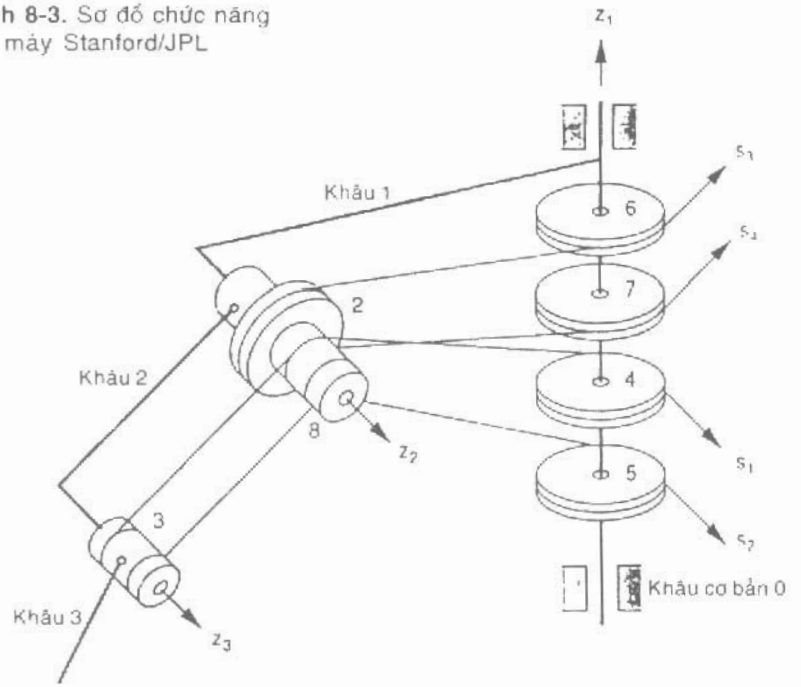
Biểu diễn sơ đồ phẳng

Phần này giới thiệu sự biểu diễn sơ đồ phẳng về cấu trúc động học của cơ cấu chấp hành truyền động bằng đai. Để đơn giản, có thể áp dụng các giả thiết:

1. Cơ cấu là loại khớp nối (nghĩa là sau khi loại bỏ các đai và puli, cơ cấu trở thành chuỗi vòng hở).
2. Mỗi đai từ khâu cơ bản đến một trong các khâu di động qua các puli gắn trên trục khớp chuỗi vòng hở theo kiểu liên tiếp.
3. Tất cả các đai đều có lực kéo, độ dãn không đáng kể.
4. Không có sự trượt xảy ra giữa puli và đai.

Hình 8.3 minh họa sơ đồ chức năng của ngón tay Stanford/JPL. Bệ cố định được ký hiệu là khâu 0; các khâu di động và các khớp được đánh số từ 1 đến 3; chiều quay dương của mỗi trục khớp được đánh dấu như trên Hình. Trục khớp thứ nhất, z_1, cố định với khâu cơ bản; trục khớp thứ hai, z_2, vuông góc với z_1; trục khớp thứ ba, z_3, song song với z_2. Puli 2 gắn vào khâu 2 và puli 3 gắn vào khâu 3. Các puli 4,5,6,7 quay tự do trên trục khớp thứ nhất; các puli 2, 8 quay tự do trên trục khớp thứ hai; puli 3 quay tự do trên trục khớp thứ ba. Đai thứ nhất, s_1, nối lần lượt các puli 4,8,3;

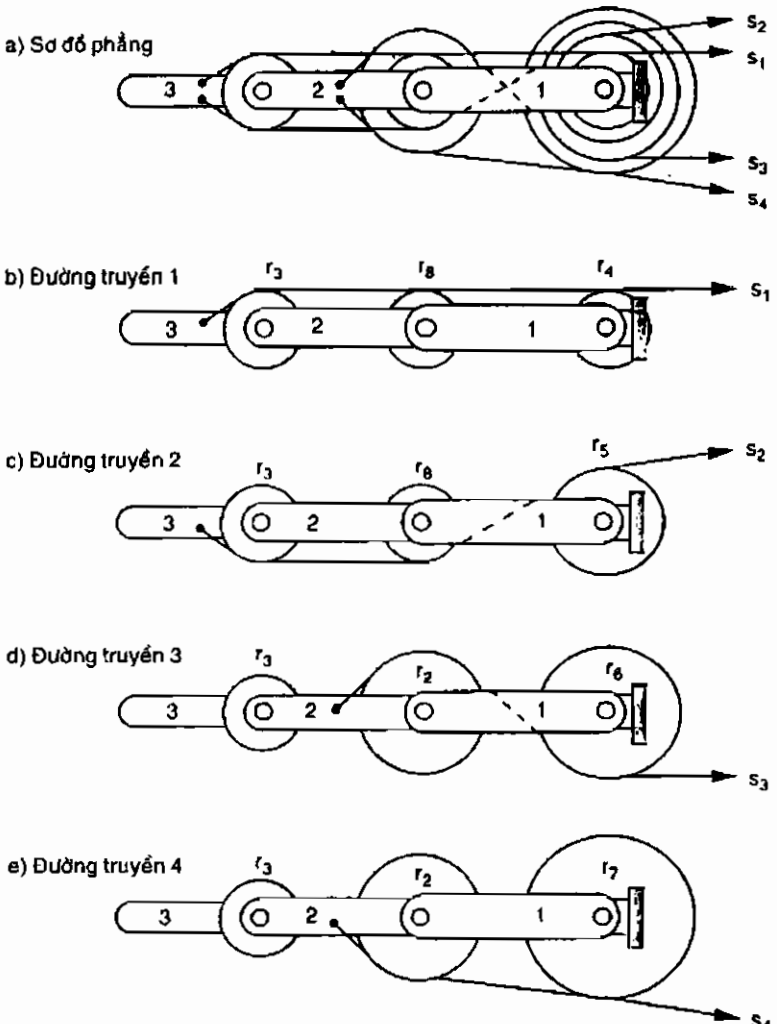
Hình 8-3. Sơ đồ chức năng tay máy Stanford/JPL



đai thứ hai, s_2, nối các puli 5, 8, 3; đai thứ ba, s_3, nối các puli 6, 2; đai thứ tư, s_4, nối các puli 7, 2. Nói chung, cơ cấu gồm 9 khâu và 4 đai điều khiển.

Các tuyến đai trong sơ đồ đôi khi bị nhầm lẫn do bản chất của cấu trúc không gian. Để thuận tiện, có thể dùng biểu diễn sơ đồ phẳng để minh họa các đai. Để xây dựng sơ đồ phẳng, cần bắt đầu từ trục khớp thứ hai và quay xoắn từng trục khớp quanh pháp tuyến chung được xác định bằng chính trục khớp đó và trục khớp đứng trước, cho đến khi mọi trục khớp đều có cùng chiều. Theo đó các đai được minh họa rõ ràng, không ảnh hưởng đến cấu hình thực của chúng. Hình 8.4a minh họa sơ đồ phẳng của tay máy Stanford/JPL. Trong sơ đồ này mọi trục khớp dương đều hướng ra trang giấy. Từng đai có thể được phác thảo riêng rẽ (Hình 8.4b-e).

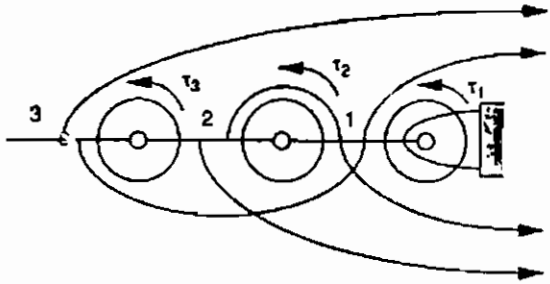
Hình 8.5 minh họa sơ đồ chức năng có tính trừu tượng cao hơn. Trong sơ đồ này, đường đi qua một phía puli cho biết đai đi qua puli đó vài lần, bắt đầu và kết thúc ở phía của puli đó. Tương tự dãy bánh răng, có thể gọi sự sắp xếp các đai là *đường truyền động*.



Hình 8-4. Sơ đồ phẳng của tay máy Stanford/JPL

Động học cơ cấu chấp hành truyền động đai

Động học cơ cấu truyền động đai tương tự cơ cấu robot truyền động bánh răng. Sự phân tích được thực hiện theo hai bước cơ bản. Bước thứ



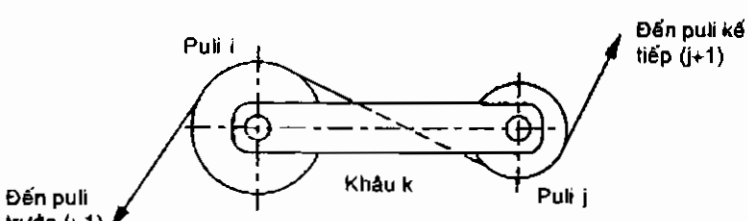
Hình 8-5. Sơ đồ chức năng tổng quát của tay máy Stanford/JPL

nhất là tìm quan hệ động học giữa vị trí bộ tác động cuối và các góc khớp của chuỗi vòng hở. Bước này thực hiện theo phương pháp D-H đã xét trong Chương 2. Bước thứ hai là tìm quan hệ động học giữa các góc khớp và độ dịch chuyển đai.

Về toán học, góc khớp và độ dịch chuyển đai liên hệ với nhau theo phép biến đổi tuyến tính. Phần này sẽ áp dụng lý thuyết mạch cơ sở và điều kiện đồng trục để tìm ma trận biến đổi. Ma trận biến đổi có thể được xác định bằng cách khảo sát cấu hình các đai theo khái niệm đường truyền. Nói chung, ma trận biến đổi là hàm của kích cỡ puli, cấu hình đai, và tư thế của cơ cấu. Tuy nhiên, đối với cơ cấu vòng hở này, các đai từ khớp này đến khớp khác dọc theo chuỗi vòng hở theo kiểu liên tiếp, ma trận là độc lập với cấu hình cơ cấu.

Phương trình mạch cơ sở

Gọi i và j là cặp puli với khâu k là giá đỡ chung (Hình 8.6). Các khâu i, j và k tạo thành bộ truyền động đai - puli. Chiều quay dương được đánh



Hình 8-6. Sơ đồ phẳng của đường truyền động đai - puli đơn giản.

dấu trên mỗi trục khớp của cặp puli. *Phương trình mạch cơ sở* về độ dịch chuyển góc của hai poli là:

$$r_i\theta_{i,k} = \pm r_j\theta_{j,k} \qquad (8.1)$$

trong đó $\theta_{i,k}$ và $\theta_{j,k}$ là chuyển động quay của puli i và j ứng với giá đỡ k, r_i và r_j là các bán kính của hai puli.

Truyền động đai là *kiểu song song* khi chuyển động quay của một puli quanh trục khớp dương tạo ra chuyển động quay dương của puli kia. Ngược lại, là *kiểu chéo*. Ví dụ, Bộ đai trên Hình 8.6 là kiểu chéo. Dấu trong pt (8.1) là dương khi đai song song, và âm khi đai chéo.

Điều kiện đồng trục

Gọi i, j và k là ba khâu có chung trục khớp; tương tự truyền động bánh răng epicylic, độ dịch chuyển góc của ba khâu quan hệ với nhau theo quy tắc chuỗi:

$$\theta_{i,j} = \theta_{i,k} - \theta_{j,k} \qquad (8.2)$$

Phương trình (8.2) rất hữu dụng khi tính quan hệ các chuyển động quay trên ba khâu đồng trục.

Đường truyền động

Hình 8.7 minh họa đường truyền, trong đó các khâu được ký hiệu tuần tự từ 0 đến n, các puli được ký hiệu từ j đến j+n -1. Gọi $\theta_{j,i}$ là độ dịch chuyển góc của khâu j so với khâu i. Phương trình mạch cơ sở được viết một lần cho mỗi cặp puli như sau:

$$r_{j+i-1}\theta_{j+i-1,i} = \pm r_{j+i}\theta_{j+i,i} \qquad \text{với } i=1, 2,..., n-1 \qquad (8.3)$$

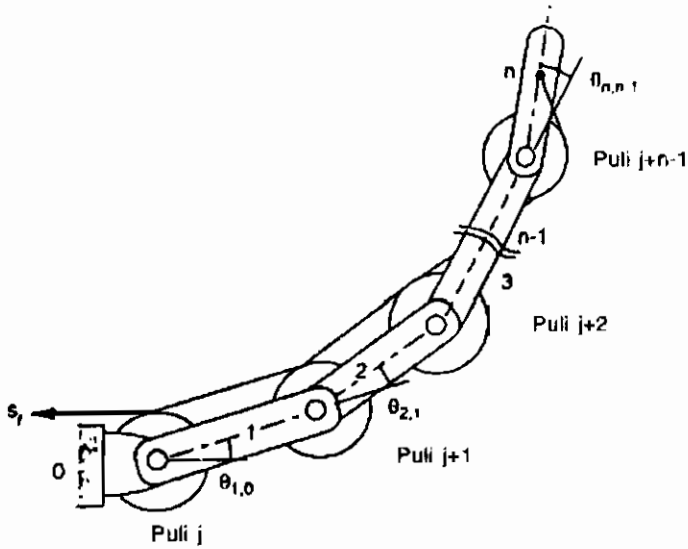
trong đó dấu ± là dương khi đai song song, và âm khi đai chéo.

Các khâu i-1, i và puli j+i-1 đồng trục, nên điều kiện đồng trục là:

$$\theta_{j+i-1,i} = \theta_{j+i-1,i-1} - \theta_{i,i-1} \qquad \text{với } i = 1, 2,..., n \qquad (8.4)$$

Puli j+n-1 được gắn vào khâu n, nên $\theta_{j+n-1,n} = 0$. Khử $\theta_{j+i-1,i}$ với i= 2, 3, ...n, từ các pt (8.3), (8.4):

$$\theta_{j,0} = \theta_{1,0} \pm (r_{j+1}/r_j)\theta_{2,1} \pm \cdots \pm (r_{j+n-1}/r_j)\theta_{n,n-1} \qquad (8.5)$$



Hình 8-7. Đường truyền động đai.

Dấu ± đối với từng đại lượng $\theta_{k,k-1}$ trong pt (8.5) được xác định bằng số đai chéo trước trục khớp thứ k. Dấu cộng nếu số đai chẵn, và ngược lại là dấu trừ.

Gọi độ dịch chuyển của đai j so với vị trí quy chiếu là s_j. Độ dịch chuyển đai j có quan hệ với độ dịch chuyển góc của puli cơ sở theo:

$$s_j = \pm r_j \theta_{j,0} \tag{8.6}$$

trong đó dấu ± là dương khi sự kéo đai làm puli cơ sở quay theo chiều dương; ngược lại là âm.

Khử $\theta_{j,0}$ giữa các pt (8.6) và (8.5), phương trình kết quả được viết lần lượt cho từng đai, sẽ có m phương trình tuyến tính về độ dịch chuyển đai và góc khớp của chuỗi vòng hở. Các phương trình này được tổ hợp theo ma trận:

$$s = A\theta \tag{8.7}$$

với $s = [s_1, s_2, ..., s_m]^T$ là vector m-chiều các độ dịch chuyển đai; $\theta = [\theta_{1,0}, \theta_{2,1}, ..., \theta_{n,n-1}]^T$ là vector các góc khớp n chiều; A là ma trận biến đổi

m×n. Các phần tử của A là các hàm kích cỡ puli và cấu hình đai độc lập với cấu hình của cơ cấu chấp hành. A không phải là ma trận vuông vì m $\geq$ n+1.

Phương trình (8.7) là tập hợp m phương trình tuyến tính. Nếu biết các góc khớp của chuỗi vòng hở, các độ dịch chuyển đai được tính trực tiếp từ pt (8.7). Mặt khác, vì m > n, các độ dịch chuyển đai không thể xác định tùy ý. Đặc biệt, chỉ n trong m độ dịch chuyển đai là cần xác định các góc khớp. Các độ dịch chuyển của m-n đai còn lại được tính theo các ràng buộc từ pt (8.7). Đây là điểm khác nhau cơ bản giữa các cơ cấu truyền động đai và truyền động bánh răng robot.

Ví dụ 8.1: *Động học tay máy Stanford/JPL.* Có thể áp dụng khái niệm đường truyền động để phân tích động học tay máy Stanford/JPL (Hình 8.3). Chuỗi vòng hở chứa các khâu 0, 1, 2, 3. Hình 8.4 minh họa bốn đai truyền động.

Viết pt (8.5) lần lượt cho từng đường truyền đai:

$$\theta_{4,0} = \theta_{1,0} + (r_8 / r_4)\theta_{2,1} + (r_3 / r_4)\theta_{3,2}$$

$$\theta_{5,0} = \theta_{1,0} - (r_8 / r_5)\theta_{2,1} - (r_3 / r_5)\theta_{3,2}$$

$$\theta_{6,0} = \theta_{1,0} - (r_2 / r_6)\theta_{2,1}$$

$$\theta_{7,0} = \theta_{1,0} + (r_2 / r_7)\theta_{2,1} \qquad (8.8)$$

Bộ đai 1 song song và song song, do đó vế phải phương trình thứ nhất có số hạng thứ hai và ba dương; bộ đai 2 song song-chéo, do đó vế phải phương trình thứ hai có số hạng thứ hai và ba âm; bộ đai 3 chéo, do đó vế phải phương trình thứ ba có số hạng thứ hai âm; bộ đai thứ 4 song song, do đó vế phải phương trình thứ tư có số hạng thứ hai dương.

Các độ dịch chuyển đai quan hệ với các chuyển động quay puli cơ bản theo phương trình sau:

$$s_1 = -r_4\theta_{4,0}$$

$$s_2 = -r_5\theta_{5,0}$$

$$s_3 = -r_6\theta_{6,0}$$

$$s_4 = -r_7\theta_{7,0} \qquad (8.9)$$

Khử θ ,θ ,θ ,θ giữa các pt (8.8) và (8.9):

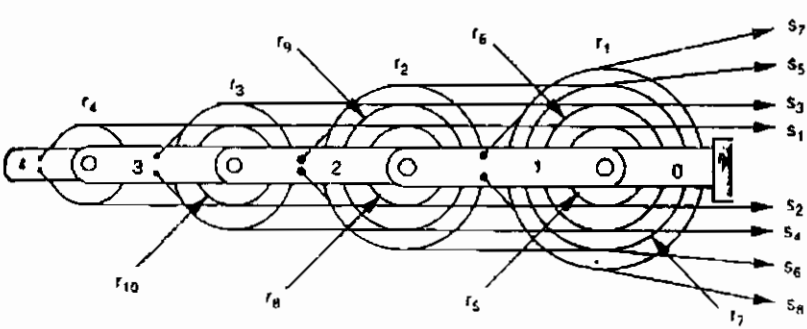
$$s = A\theta \tag{8.10}$$

với $s = [s_1, s_2, s_3, s_4]^T$ và $\theta = [\theta_{1,0}, \theta_{2,1}, \theta_{3,2}]^T$, và

$$A = \begin{bmatrix} -r_4 & -r_8 & -r_3 \\ -r_5 & r_8 & r_3 \\ r_6 & -r_2 & 0 \\ r_7 & r_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

Có thể thấy các phần tử của A là các hàm của tuyến đai và kích cỡ puli. Độ dịch chuyển đai được ghép hợp cao. Góc khớp thứ ba, $\theta_{3,2}$, chỉ ảnh hưởng đến các độ dịch chuyển đai 1 và 2; trong khi các góc khớp thứ nhất và hai, $\theta_{1,0}$ và $\theta_{2,1}$, ảnh hưởng đến độ dịch chuyển của cả bốn đai.

Ví dụ 8.2: *Động học tay máy Utah / MIT*. Xét cơ cấu chấp hành 4 bậc tự do có 8 đai điều khiển, đó là cơ cấu tay máy Utah/MIT. Trong cơ cấu này, trục khớp thứ nhất cố định so với đế; trục khớp thứ hai vuông góc khớp thứ nhất lệch một khoảng cách nhỏ; trục khớp thứ ba và bốn song song trục khớp thứ hai. Sơ đồ phẳng của cơ cấu được minh họa trên Hình 8.8, các puli 1,2,3,4 gắn vào các khâu tương ứng 1,2,3,4. Các puli 1,5,6,7 quay quanh trục khớp thứ nhất; các puli 2,8,9 quay quanh trục khớp thứ hai; các puli 3,10 quay quanh trục khớp thứ ba; puli 4 quay quanh trục khớp thứ tư. Đai thứ nhất và hai, s_1 và s_2, mắc qua cả hai phía của các puli 5,8,10,4; đai thứ ba và bốn, s_3 và s_4, mắc qua hai phía các puli 6,9,3; đai thứ 5 và 6, s_5 và s_6, mắc qua hai phía các puli 7 và 2; đai thứ 7 và 8, s_7 và



Hình 8-8. Cơ cấu chấp hành 4-dof truyền động bằng 8 đai.

s_8, mắc qua hai phía puli 1. Cần tìm phép biến đổi giữa các góc khớp và các độ dịch chuyển đai.

Viết pt (8.5) lần lượt cho tám đai:

$$\theta_{5,0} = \theta_{1,0} + (r_8 / r_5)\theta_{2,1} + (r_{10} / r_5)\theta_{3,2} + (r_4 / r_5)\theta_{4,3}$$

$$\theta_{5,0} = \theta_{1,0} + (r_8 / r_5)\theta_{2,1} + (r_{10} / r_5)\theta_{3,2} + (r_4 / r_5)\theta_{4,3}$$

$$\theta_{6,0} = \theta_{1,0} + (r_9 / r_6)\theta_{2,1} + (r_3 / r_6)\theta_{3,2}$$

$$\theta_{6,0} = \theta_{1,0} + (r_9 / r_6)\theta_{2,1} + (r_3 / r_6)\theta_{3,2}$$

$$\theta_{7,0} = \theta_{1,0} + (r_2 / r_7)\theta_{2,1}$$

$$\theta_{7,0} = \theta_{1,0} + (r_2 / r_7)\theta_{2,1}$$

$$\theta_{1,0} = \theta_{1,0}$$

$$\theta_{1,0} = \theta_{1,0} \qquad (8.12)$$

Chú ý, phương trình thứ nhất và hai trong pt (8.12) là đồng nhất, do các đai 1 và 2 mắc qua cả hai phía của cùng các puli; đối với các đai còn lại cũng tương tự. Các độ dịch chuyển đai quan hệ với các độ dịch chuyển góc của puli cơ bản theo phương trình:

$$s_1 = -r_5\theta_{5,0}$$

$$s_2 = r_5\theta_{5,0}$$

$$s_3 = -r_6\theta_{6,0}$$

$$s_4 = r_6\theta_{6,0}$$

$$s_5 = -r_7\theta_{7,0}$$

$$s_6 = r_7\theta_{7,0}$$

$$s_7 = -r_1\theta_{1,0}$$

$$s_8 = r_1\theta_{1,0} \qquad (8.13)$$

Thay (8.12) vào (8.13):

$$s = A\theta \qquad (8.14)$$

trong đó $s = [s_1, s_2, \ldots, s_8]^T$, $\theta = [\theta_{1,0}, \theta_{2,1}, \theta_{3,2}, \theta_{4,3}]^T$, và

$$A = \begin{bmatrix} -r_5 & -r_8 & -r_{10} & -r_4 \\ r_5 & r_8 & r_{10} & r_4 \\ -r_6 & -r_9 & -r_3 & 0 \\ r_6 & r_9 & r_3 & 0 \\ -r_7 & -r_2 & 0 & 0 \\ r_7 & r_2 & 0 & 0 \\ -r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

Phương trình (8.14) là biến đổi ma trận giữa các góc khớp và các độ dịch chuyển đai. Với các góc khớp đã biết, có thể tính độ dịch chuyển đai tương ứng từ pt (8.14).

Phân tích lực tĩnh học

Phần này sẽ áp dụng nguyên lý công ảo để tìm phép biến đổi giữa moment ngẫu lực khớp tương đương và lực đai. Vector các lực đai là $\xi = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m]^T$; vector các moment khớp đầu vào là $\tau = [\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n]^T$; độ dịch chuyển khớp ảo là $\delta\theta = [\delta\theta_1, \delta\theta_2, \ldots, \delta\theta_{n,n-1}]^T$; độ dịch chuyển đai ảo là $\delta s = [\delta s_1, \delta s_2, \ldots, \delta s_m]^T$. Công ảo δw do các lực tác động tạo ra là:

$$\delta W = -\tau^T \delta\theta + \xi^T \delta s \tag{8.16}$$

trong đó, δw và δs trong pt (8.16) liên hệ với nhau theo phương trình:

$$\delta s = A\delta\theta \tag{8.17}$$

Thay pt (8.17) vào (8.16):

$$\delta W = (-\tau^T + \xi^T A)\delta\theta \tag{8.18}$$

Vì hệ thống ở điều kiện cân bằng, nên công ảo bị triệt tiêu với độ dịch chuyển ảo $\delta\theta$ tùy ý. Từ đó:

$$-\tau^T + \xi^T A = 0 \tag{8.19}$$

Chuyển vị pt (8.19):

$$\tau = B\xi \tag{8.20}$$

trong đó, $B = A^T$ là *ma trận cấu trúc*. Chú ý, mỗi cột của B là một đường truyền động.

Phương trình (8.20) là phép biến đổi từ các lực đai thành moment ngẫu lực khớp. Trong Chương 6, đã đề cập các moment khớp liên hệ với lực đầu ra bộ tác động cuối theo ma trận chuyển vị Jacobi:

$$\tau = J^T F \tag{8.21}$$

Khử τ ở pt (8.20) và (8.21), sẽ nhận được phép biến đổi tổng thể:

$$B\xi = J^T F \tag{8.22}$$

Giả sử J là ma trận vuông không đặc biệt, biến đổi nghịch đảo pt (8.22) sẽ có:

$$F = J^{-T} B\xi \tag{8.23}$$

Với các lực đai đã biết, có thể tính các lực ra bộ tác động cuối trực tiếp từ pt (8.23). Vì m>n, và lực bộ tác động cuối đã biết, sẽ có vô hạn các lực đai, nhưng chỉ các lực đai dương là được phép. Do đó, cơ cấu truyền động đai phức tạp hơn cơ cấu thông thường.

Giả sử các puli gắn trên cùng trục khớp có kích cỡ như nhau, ma trận cấu trúc được tách thành tích hai ma trận:

$$B = R^* B^* \tag{8.24}$$

với R^* là ma trận chéo n×n, trong đó các phần tử khác zero là bán kính các puli lắp trên các trục khớp liên tiếp của chuỗi vòng hở; và B^* là ma trận m×n, trong đó phần tử (i,j) có giá trị +1, -1, hoặc 0 tùy thuộc lực dương kéo đai j tạo ra tác dụng dương, âm, hoặc không, đối với moment khớp thứ i. Do đó, B^* biểu thị cấu hình sắp xếp các đai, còn R^* thể hiện kích cỡ puli.

Ví dụ 8.3: *Ma trận cấu trúc tay máy Stanford / JPL.*

Có thể tìm ma trận cấu trúc tay máy Stanford/JPL (Hình 8.3) bằng cách lấy chuyển vị pt (8.11):

$$B = A^T = \begin{bmatrix} -r_4 & -r_5 & r_6 & r_7 \\ -r_8 & r_8 & -r_2 & r_2 \\ -r_3 & r_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.25}$$

Hơn nữa, nếu $r_2 = r_8$ và $r_4 = r_5 = r_6 = r_7$, ma trận cấu trúc là $B = R^* B^*$, với

$$B^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

$$R^* = \begin{bmatrix} r_4 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

Cột thứ nhất của B^* cho thấy lực kéo đai 1 tạo ra các moment âm trên các trục khớp thứ nhất, hai và ba. Cột thứ hai của B^* cho thấy lực kéo đai 2 tạo các moment âm, dương, và dương trên các trục khớp thứ nhất, hai, và ba. Tác dụng của các đai 3 và 4 đối với các moment khớp của cơ cấu cũng được giải thích tương tự.

Ví dụ 8.4: *Ma trận cấu trúc tay máy Utah/MJT*. Ma trận cấu trúc của cơ cấu chấp hành 4-dof (Hình 8.8) có thể được xác định bằng cách tính chuyển vị pt (8.15):

$$B = \begin{bmatrix} -r_5 & r_5 & -r_6 & r_6 & -r_7 & r_7 & -r_1 & r_1 \\ -r_8 & r_8 & -r_9 & r_9 & -r_2 & r_2 & 0 & 0 \\ -r_{10} & r_{10} & -r_3 & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r_4 & r_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.28}$$

Hơn nữa, nếu $r_1 = r_5 = r_6 = r_7$, $r_2 = r_8 = r_9$ và $r_3 = r_{10}$, ma trận cấu trúc là $B = R^* B^*$, trong đó:

$$B^* = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.29}$$

$$R^* = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

Ma trận B˙ có 8 cột được tạo bởi bốn cặp đai: (1,2),(3,4),(5,6), và (7,8). Đối với từng cặp đai, các vector cột tương ứng là âm so với nhau, cho thấy các đai đối xứng qua hai phía đối diện của puli.

Ma trận cấu trúc khả thi

Phần này trình bày các đặc tính cấu trúc cơ sở của cơ cấu chấp hành truyền động đai. Cơ cấu chấp hành vòng hở n bậc tự do đòi hỏi ít nhất là n+1 đai và bảo đảm điều khiển các khớp một cách độc lập. Cuối cùng, sẽ giới thiệu khái niệm ma trận cấu trúc đẳng cấu và trình bày vài ma trận cấu trúc khả thi.

Đặc tính cấu trúc

Ma trận cấu trúc xác định các đặc tính truyền lực giữa không gian lực đai và không gian moment khớp. Với tổ hợp các lực đai cho trước, tổng moment khớp của chuỗi truyền động vòng hở được tính trực tiếp từ pt (8.20). Ngược lại, nếu biết trước tổ hợp các moment khớp, pt (8.20) gồm n phương trình tuyến tính với m ẩn số. Để duy trì các lực đai dương, m phải lớn hơn n, các nghiệm lực đai có thể ở dạng nghiệm riêng cộng với nghiệm (m-n)-chiều thuần nhất. Hơn nữa, với m>n, phép biến đổi nghịch đảo pt (8.20) có dạng:

$$\xi = B^{+}\tau + H\lambda \qquad (8.31)$$

trong đó $B = B^{T}[BB^{T}]^{-1}$ là nghịch đảo giả của B, H là ma trận m×(m-n) có các vector cột trải rộng không gian null của B, λ là vector (m×n) chiều tùy ý.

Số hạng thứ nhất ở vế phải pt (8.31) là *nghiệm riêng*, và số hạng thứ hai là *nghiệm đồng nhất*. Các nghiệm riêng tạo thành không gian con n chiều trong không gian lực - đai m chiều. Các nghiệm đồng nhất đưa ra các tỉ số lực đai, kết quả là không có các moment ngẫu lực khớp tổng. Vì thế, nếu không gian cột của H chứa ít nhất một vector m chiều với tất cả các phần tử dương, bằng cách chọn giá trị λ thích hợp, các lực đai dương luôn luôn được duy trì.

Tóm lại, ma trận cấu trúc B phải thoả các điều kiện sau:

1. Số lượng đai lớn hơn số bậc tự do tối thiểu là 1 (nghĩa là $m \geq n+1$)
2. Hạng của B bằng số bậc tự do của hệ thống. Hơn nữa, nếu m = n+1,

định thức của ma trận con hình thành khi xóa cột bất kỳ trong B phải khác zêro.

3. Tồn tại tối thiểu một vector với mọi phần tử dương trong không gian null của B.
4. Giả sử các đai từ khớp này đến khớp khác theo thứ tự liên tiếp, các phần tử khác zero trong mỗi cột của B cũng phải theo thứ tự đó.
5. Khi trao đổi hai cột bất kỳ trong ma trận cấu trúc, tương đương việc đánh số lại hai đai, sẽ không ảnh hưởng đến cơ học của cơ cấu. Từ đó, ma trận cấu trúc luôn luôn có thể sắp xếp lại để tất cả các phần tử zero xuất hiện ở góc phải phía dưới ma trận.
6. Đổi dấu từng phần tử trong hàng không ảnh hưởng đến cơ học của cơ cấu. Điều này tương đương với đổi chiều quay dương của trục khớp.

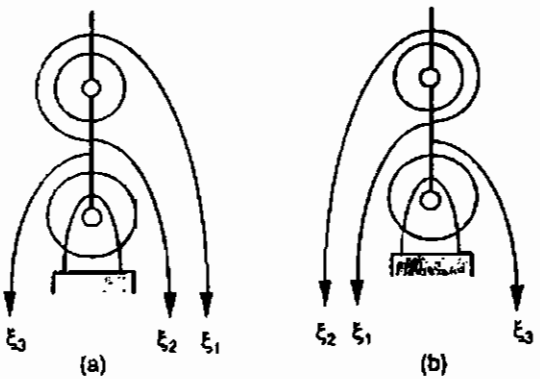
Ma trận cấu trúc đẳng cấu

Hình 8.3, cho thấy các phần tử của ma trận cấu trúc được xác định theo tuyến các đai và định nghĩa chiều quay dương của các trục khớp. Nếu chiều quay dương của trục khớp được xác định theo chiều ngược lại, dấu của mỗi phần tử trong hàng tương ứng của ma trận cấu trúc sẽ đổi dấu. Vì sự xác định chiều quay dương và đánh số đai không ảnh hưởng đến chức năng của cơ cấu, nên hai ma trận cấu trúc được gọi là *đẳng cấu* nếu thoả các điều kiện sau:

1. Chúng là đồng nhất.
2. Chúng trở thành đồng nhất sau khi đổi dấu từng phần tử trong một hay nhiều hàng của ma trận (đặc tính cấu trúc 6).
3. Chúng trở thành đồng nhất sau khi trao đổi hai hoặc nhiều cột trong một ma trận (đặc tính cấu trúc 5).
4. Chúng trở thành đồng nhất sau khi kết hợp các điều kiện 2 và 3.

Ví dụ 8.5: *Hai tuyến đai đẳng cấu.* Hình 8.9a và b minh họa cơ cấu 2 bậc tự do có hai tuyến đai biểu kiến khác nhau, có tính đẳng cấu. Giả thiết, chiều quay dương hướng ra khỏi trang giấy, ma trận cấu trúc của hai tuyến đai này là:

$$(1) \quad B_1^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 8-9. Hai cơ cấu chấp hành 2-dof truyền động đai cấu trúc đẳng cấu.

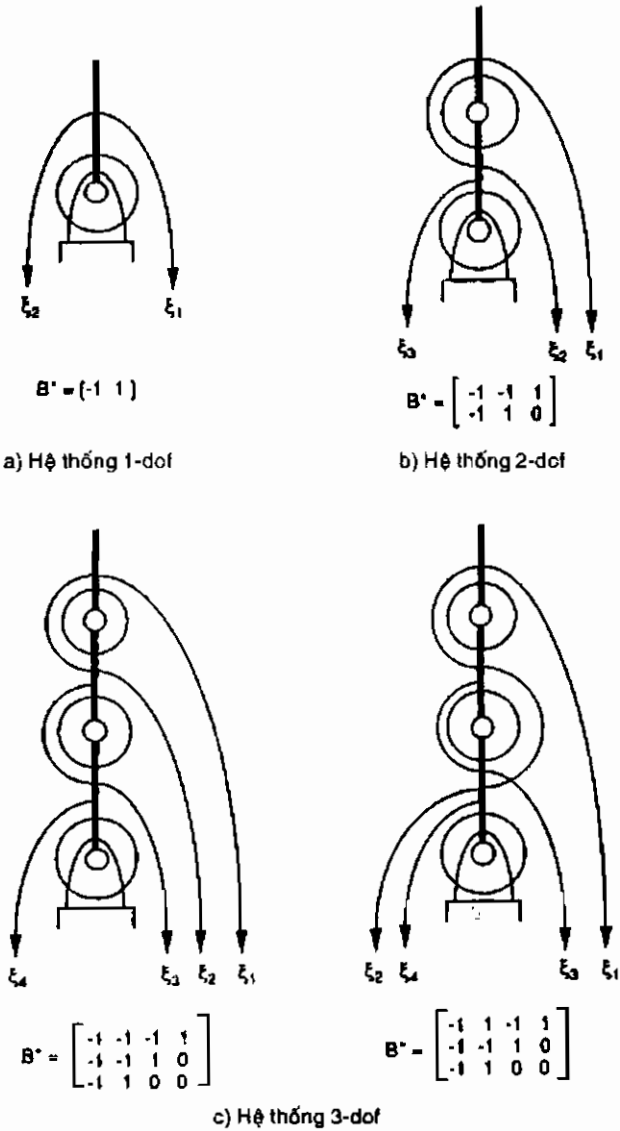
$$(2)\quad B_2^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sau khi đổi dấu từng phần tử trong hàng thứ nhất của B^*_2, ma trận cấu trúc B^*_2 trở thành đồng nhất với B^*_1. Về vật lý, nếu đảo chiều quay dương của trục khớp thứ nhất, cơ cấu trên Hình 8.9b sẽ đồng nhất với cơ cấu trên Hình 8.9a. Do đó, hai tuyến đai này là đẳng cấu.

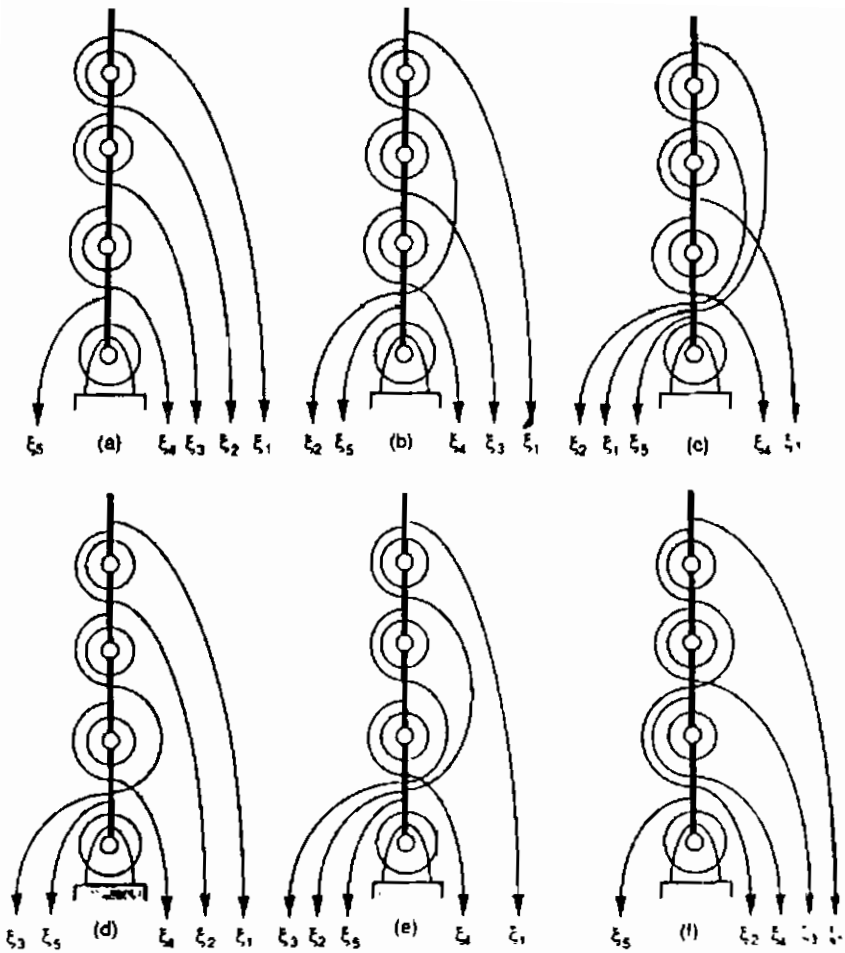
Ma trận cấu trúc giả tam giác khả thi

Phần trước, đã chứng minh cơ cấu n bậc tự do yêu cầu tối thiểu n+1 đai và các tuyến đai phải thoả đặc tính cấu trúc từ 1 đến 6. Ma trận cấu trúc thoả đặc tính từ 1 đến 6 được gọi là ma trận cấu trúc khả thi; ngược lại, cơ cấu là không thể điều khiển.

Giả sử tất cả các puli có cùng kích cỡ, tập hợp các ma trận cấu trúc giả tam giác không đẳng cấu, tương ứng các cơ cấu truyền động đai có đến 6 bậc tự do, đã được các nhà nghiên cứu phân tích. Hình 8.10 minh họa sơ đồ phẳng các cơ cấu truyền động đai không đẳng cấu có đến 3 bậc tự do. Hình 8.11 và 8.12 liệt kê tất cả các tuyến đai không đẳng cấu, khả thi trong cơ cấu truyền động đai 4 bậc tự do. Chú ý, tay máy Stanford/JPL và tay máy Utah/MIT không thuộc lớp cơ cấu chấp hành này. Chú ý, số lượng tuyến đai khả thi tăng rất lớn nếu các puli cho phép có các kích cỡ khác nhau.



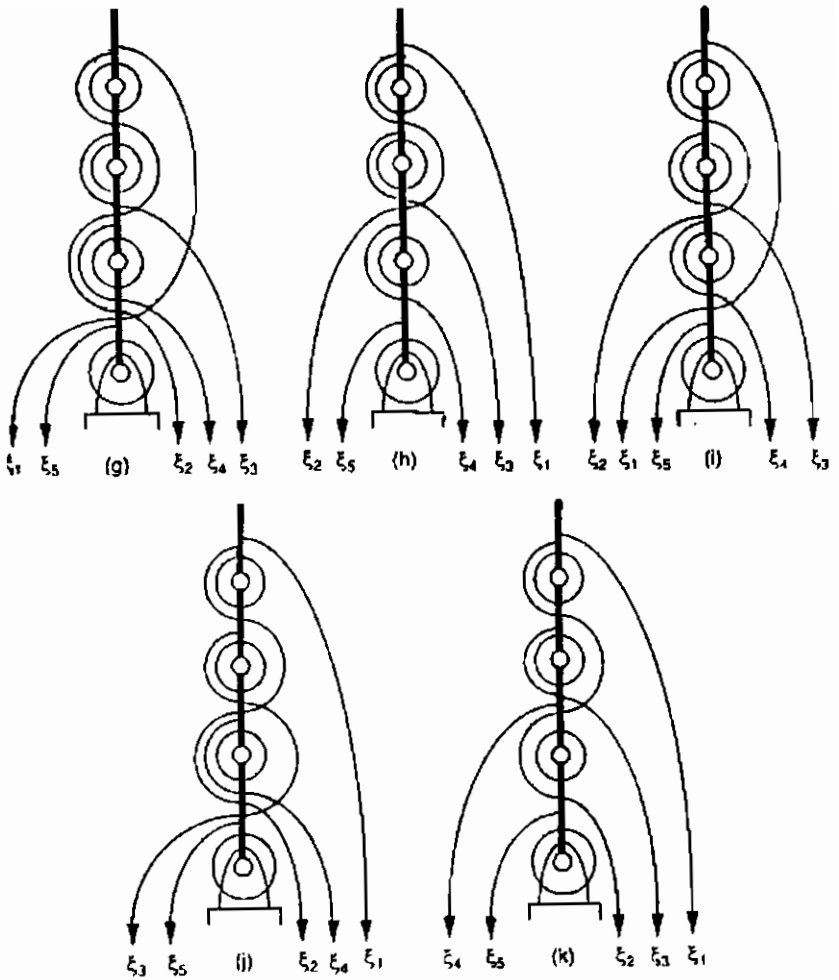
Hình 8-10. Các cơ cấu chấp hành n x (n + 1) khả thi đến 3-dof



Hình 8-11. Các tuyến đai 4 x 5 khả thi

Phân giải lực dư thừa

Phần này sẽ trình bày phương pháp hệ thống về phân giải các lực đai dư thừa. Do không gian khớp và không gian đai không có cùng thứ nguyên, sự quy chiếu từ các moment ngẫu lực khớp đến các lực đai là không duy nhất. Về lý thuyết, kỹ thuật giả nghịch đảo được sử dụng, nhưng tốn



Hình 8-12. Các tuyến đai 4 x 5 khả thi (tiếp theo)

nhiều thời gian. Hơn nữa, vector λ trong pt (8.31) phải được chọn hợp lý, sao cho các đai luôn luôn chịu lực kéo. Để đạt điều này, tỉ số lớn nhất của mọi lực đai âm trong nghiệm riêng với các phần tử tương ứng trong nghiệm đồng nhất phải tương đồng. Qui trình này chắc chắn làm tăng thời gian tính toán và làm giảm khả năng điều khiển hệ thống cơ cấu

chấp hành truyền động đai theo thời gian thực. Để khắc phục khó khăn này, các nhà nghiên cứu bổ sung vào pt (8.20) một phương trình thu được từ một trong các lực ở trục để phân giải lực dư thừa, và đưa ra giải pháp bộ chính lưu để điều khiển tay máy Utah/MIT.

Giải pháp bộ chính lưu sử dụng các toán tử để biến đổi tín hiệu moment khớp thành tín hiệu lực đai không cần phép biến đổi giả nghịch đảo, cho kết quả nghiệm dạng khép kín đối với các lực đai. Phần này sẽ trình bày giải pháp bộ chỉnh lưu để phân giải các lực dư thừa. Trước hết sẽ nghiên cứu các đặc tính hệ 1-dof để minh hoạ nguyên lý cơ bản bộ chỉnh lưu, sau đó sẽ mở rộng cho các hệ nhiều bậc tự do.

Nguyên lý cơ bản

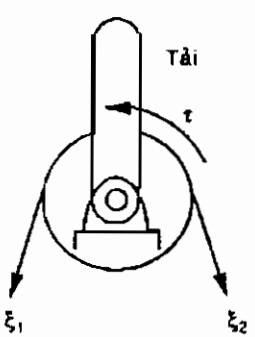
Xét hệ thống 1 bậc tự do với hai đai truyền động (Hình 8.13). Chiều quay dương hướng ra ngoài trang giấy, τ là moment khớp tổng hợp tại điểm cố định O. Bán kính puli là r, phương trình cân bằng moment tại O là:

$$\xi_1 - \xi_2 = \tau / r \tag{8.32}$$

Phương trình (8.20) có hai lực đai ξ_1 và ξ_2 dương ở mọi thời điểm. Nếu τ dương (ngược chiều kim đồng hồ), lực đai cực tiểu là $\xi = \tau/r$ và $\xi = 0$. Nếu τ âm (cùng chiều kim đồng hồ), lực cực tiểu là $\xi = 0$ và $\xi = -\tau/r$. Quan hệ đơn giản này được viết dưới dạng toán học:

$$\text{với} \quad \tau \geq 0, \begin{cases} \xi_1 = \tau / r + \delta \\ \xi_2 = \delta \end{cases} \tag{8.33}$$

$$\text{với} \quad \tau < 0, \begin{cases} \xi_1 = \delta \\ \xi_2 = -\tau / r + \delta \end{cases} \tag{8.34}$$



Hình 8-13. Hệ thống 1-dof được điều khiển bằng hai đai.

trong đó δ là lực xiên dương không tác dụng lên moment khớp tổng.

Để thuận tiện, có thể định nghĩa hai toán tử O^+ và O^- như sau

$$O^+(x), \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{8.35}$$

$$O^-(x), \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{8.36}$$

trong đó x là biến giả.

Đặc tính của $O^+(x)$ và $O^-(x)$ được mô tả bằng đồ thị trên Hình 8.14. Về toán học, có thể viết:

$$O^+(x) = \frac{x + |x|}{2} \tag{8.37}$$

$$O^-(x) = \frac{-x + |x|}{2} \tag{8.38}$$

Theo các định nghĩa nêu trên:

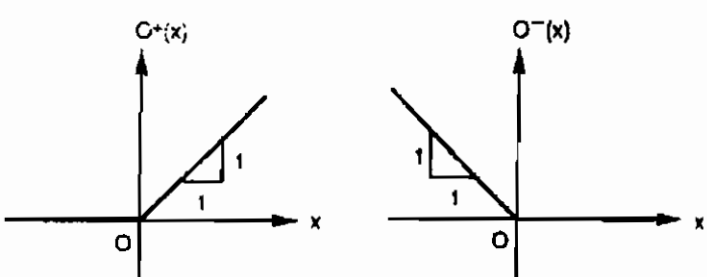
$$O^+(x) + O^-(x) = |x| \tag{8.39}$$

$$O^+(x) - O^-(x) = x \tag{8.40}$$

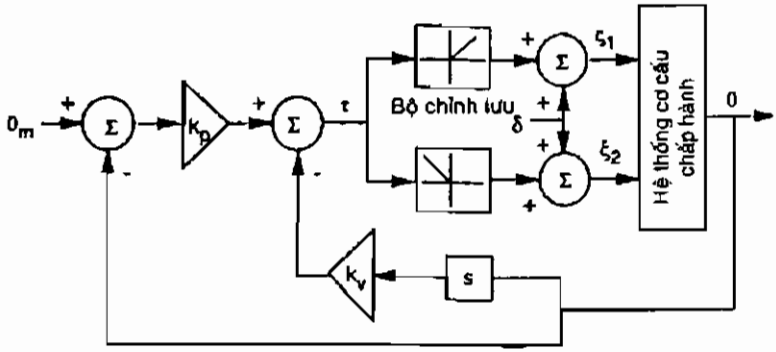
Biểu diễn các pt (8.33), (8.34) theo toán tử O^+ và O^- như sau:

$$\xi_1 = O^+(\tau/r) + \delta$$

$$\xi_2 = O^-(\tau/r) + \delta \tag{8.41}$$



Hình 8-14. Các đặc tính của toán tử $O^+(x)$ và $O^-(x)$.



Hình 8-15. Bộ điều khiển PD (tỷ lệ - đạo hàm) sử dụng giải pháp chỉnh lưu.

Chú ý, toán tử O^+ đi với lực đai tạo thành moment khớp dương, và toán tử O^- đi với lực đai cho kết quả moment khớp âm trong pt (8.32). Ý nghĩa vật lý của pt (8.41) được đánh giá từ Hình 8.13. Nếu moment khớp dương, ξ_1 cho lực kéo τ/r cực tiểu, trong khi ξ_2 vẫn là zero. Mặt khác, nếu moment khớp âm, ξ_2 phải cho lực kéo $|\tau/r|$ cực tiểu, trong khi ξ_1 vẫn là zero. Cộng lực xiên δ vào cả ξ_1 và ξ_2 đều không ảnh hưởng đến moment khớp. Hơn nữa, tỉ số hai lực xiên, 1:1 trong hệ thống này, tỉ lệ với nghiệm đồng nhất của pt (8.32). Việc cộng lực xiên sẽ làm cho các đai không bị lỏng.

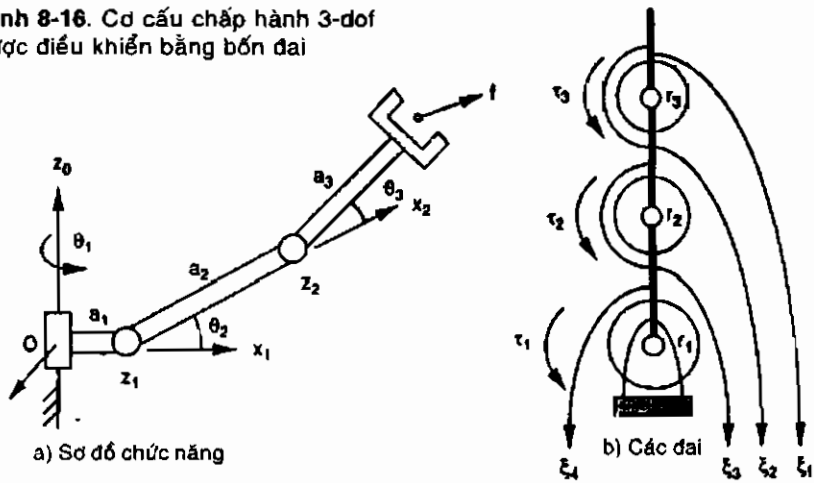
Giải pháp bộ chỉnh lưu có thể được cải tiến trong các bộ điều khiển thông thường hoặc tiên tiến. Hình 8.15 minh họa bộ điều khiển PD sử dụng giải pháp chỉnh lưu để điều khiển cơ cấu chấp hành 1 bậc tự do (Hình 8.13).

Ứng dụng vào hệ thống đa bậc tự do

Phần này trình bày phương pháp xác định các lực đai trong hệ thống n bậc tự do bằng cách sử dụng toán tử $O^+(x)$ và $O^-(x)$. Nói chung, cần rút gọn hệ pt (8.20) về một phương trình có hai lực chưa biết. Kế tiếp tìm hai lực này bằng cách áp dụng các toán tử $O^+(x)$ và $O^-(x)$, sau đó thay kết quả vào hệ phương trình gốc để có hệ phương trình đơn giản hơn, và lặp lại qui trình cho đến khi tìm được mọi biến. Trong các ví dụ sau, sẽ giả sử các puli gắn trên cùng trục khớp và có kích cỡ như nhau.

Ví dụ 8.6: *Cơ cấu 3 bậc tự do với ma trận cấu trúc giả tam giác.* Trước hết xét cơ cấu không gian 3 bậc tự do được điều khiển bằng bốn đai (Hình 8.16). Ma trận cấu trúc B có dạng:

Hình 8-16. Cơ cấu chấp hành 3-dof được điều khiển bằng bốn đai



a) Sơ đồ chức năng

b) Các đai

$$B = R^*B^* = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.42}$$

Do cấu hình các đai, ma trận cấu trúc có dạng giả tam giác. Không gian null của B* là $H = [1,1,2,4]^T$. Thay ma trận cấu trúc nêu trên vào pt (8.20), và nhân hai vế phương trình kết quả với nghịch đảo của B*:

$$-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = \tau_1 / r_1 \tag{8.43}$$

$$-\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = \tau_2 / r_2 \tag{8.44}$$

$$-\xi_1 + \xi_2 = \tau_3 / r_3 \tag{8.45}$$

Do pt (8.45) chỉ chứa hai lực chưa biết, ξ_1 và ξ_2, và chúng phải luôn luôn dương, có thể biểu thị ξ_1 và ξ_2 theo toán tử O^+ và O^- bằng cách áp dụng pt (8.41):

$$\xi_1 = O^-(\tau_3 / r_3) + \delta_1$$

$$\xi_2 = O^+(\tau_3 / r_3) + \delta_1 \tag{8.46}$$

trong đó δ_1 là lực xiên dương, không có moment khớp tổng ở trục khớp thứ ba.

Để xác định ξ_3, cần thay pt (8.46) vào (8.44), và áp dụng $O^+(x) + O^-(x) = |x|$:

$$-s\delta_1 + \xi_3 = \tau_2 / r_2) + |\tau_3 / r_3| \tag{8.47}$$

Xem pt (8.47) là phương trình hai ẩn δ_1 và ξ_3. Áp dụng toán tử O^+ và O^-:

$$\delta_1 = \frac{O^-(\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3|}{2} + \frac{\delta_2}{2}$$

$$\xi_3 = O^+(\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3| + \delta_2 \tag{8.48}$$

trong đó, δ_2 là lực xiên dương, không có moment khớp tổng ở trục khớp thứ hai và ba.

Phối hợp pt (8.46) và (8.48):

$$\xi_1 = O^-(\tau_3 / r_3) + \frac{O^-(\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3|}{2} + \frac{\delta_2}{2}$$

$$\xi_2 = O^+(\tau_3 / r_3) + \frac{O^-(\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3|}{2} + \frac{\delta_2}{2}$$

$$\xi_3 = O^+(\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3| + \delta_2 \tag{8.49}$$

Thay pt (8.49) vào (8.43):

$$-\delta_2 + \xi_4 = \tau_1 / r_1 + |\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3|| + |\tau_3 / r_3| \tag{8.50}$$

Phương trình (8.50) chứa hai ẩn, δ_2 và ξ_4. Áp dụng toán tử O^+ và O^- lần nữa, sẽ có:

$$\delta_2 = \frac{O^-(\tau_1 / r_1 + |\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3|| + |\tau_3 / r_3|)}{2} + \frac{\delta_3}{2}$$

$$\xi_4 = O^+(\tau_1 / r_1 + |\tau_2 / r_2 + |\tau_3 / r_3|| + |\tau_3 / r_3|) + \delta_3 \tag{8.51}$$

trong đó, δ_3 là lực xiên dương, không có moment khớp tổng ở các trục khớp thứ nhất, hai và ba.

Kết hợp pt (8.49) và (8.51):

$$\xi_1 = O^-(\tau_3/r_3) + \frac{O^-(\tau_2/r_2 + |\tau_3/r_3|}{2}$$

$$+ \frac{O^-(\tau_1/r_1 + |\tau_2/r_2 + |\tau_3/r_3|| + |\tau_3/r_3|)}{4} + \frac{\delta_3}{4}$$

$$\xi_2 = O^+(\tau_3/r_3) + \frac{O^-(\tau_2/r_2 + |\tau_3/r_3|}{2}$$

$$+ \frac{O^-(\tau_1/r_1 + |\tau_2/r_2 + |\tau_3/r_3|| + |\tau_3/r_3|)}{4} + \frac{\delta_3}{4}$$

$$\xi_3 = O^+(\tau_2/r_2 + |\tau_3/r_3|) + \frac{O^-(\tau_1/r_1 + |\tau_2/r_2 + |\tau_3/r_3|| + |\tau_3/r_3|)}{2} + \frac{\delta_3}{2}$$

$$\xi_4 = O^+(\tau_1/r_1 + |\tau_2/r_2 + |\tau_3/r_3|| + |\tau_3/r_3|) + \delta_3 \qquad (8.52)$$

Phương trình (8.52) cung cấp phương pháp hiệu dụng để biến đổi moment khớp thành lực đai, tính toán dễ dàng hơn so với kỹ thuật giả nghịch đảo. Kết quả bảo đảm từng lực đai tối thiểu bằng một phần tư lực xiên δ_3. Dù lực xiên được chọn tùy ý, nhưng phần đóng góp của lực xiên tỉ lệ với vector nghiệm đồng nhất (nghĩa là 1:1: 2 : 4)

Ví dụ 8.7: *Tay máy Stanford/JPL.* Tay máy Stanford/JPL (Hình 8.5), với biểu diễn đồ thị phẳng đơn giản trên Hình 8.7. Giả sử các puli gắn trên cùng trục khớp và có cùng kích cỡ (nghĩa là $r_1 = r_4 = r_5 = r_6 = r_7$, và $r_2 = r_8$), ma trận cấu trúc là tích của R* và B*, trong đó R* và B* theo các pt (8.27) và (8.26). Không gian null của B* là $H = [1,1,1,1]^T$.

Thay B = R* B* vào pt (8.20):

$$-\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = \tau_1/r_1 \qquad (8.53)$$

$$-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = \tau_2/r_2 \qquad (8.54)$$

$$-\xi_1 + \xi_2 = \tau_3/r_3 \qquad (8.55)$$

Do pt (8.55) chỉ chứa hai ẩn, ξ_1 và ξ_2, có thể viết với các toán tử O^+ và O^-:

$$\xi_1 = O^-(\tau_3/r_3) + \delta_1$$

$$\xi_2 = O^+(\tau_3/r_3) + \delta_1 \qquad (8.56)$$

trong đó δ_1 là lực xiên dương, không có moment khớp tổng trên trục khớp thứ nhất.

Thay pt (8.55) vào (8.54):

$$-\xi_3 + \xi_4 = \tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3 \tag{8.57}$$

Phương trình (8.57) chỉ chứa hai ẩn, ξ_3 và ξ_4, có thể viết với các toán tử O^+ và O^-:

$$\xi_3 = O^-(\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3) + \delta_2$$

$$\xi_4 = O^+(\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3) + \delta_2 \tag{8.58}$$

trong đó δ_2 là lực xiên dương không có moment khớp trên trục khớp thứ hai.

Thay các pt (8.56), (8.58) vào (8.53) và áp dụng pt (8.39):

$$2\delta_1 + 2\delta_2 = \tau_1 / r_1 + |\tau_3 / r_3| - |\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3| \tag{8.59}$$

Do đó δ_1 và δ_2 được viết với các toán tử O^+ và O^-:

$$\delta_1 = \frac{O^-(\tau_1 / r_1 + |\tau_3 / r_3| - |\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3|)}{2} + \delta_3$$

$$\delta_2 = \frac{O^+(\tau_1 / r_1 + |\tau_3 / r_3| - |\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3|)}{2} + \delta_3 \tag{8.60}$$

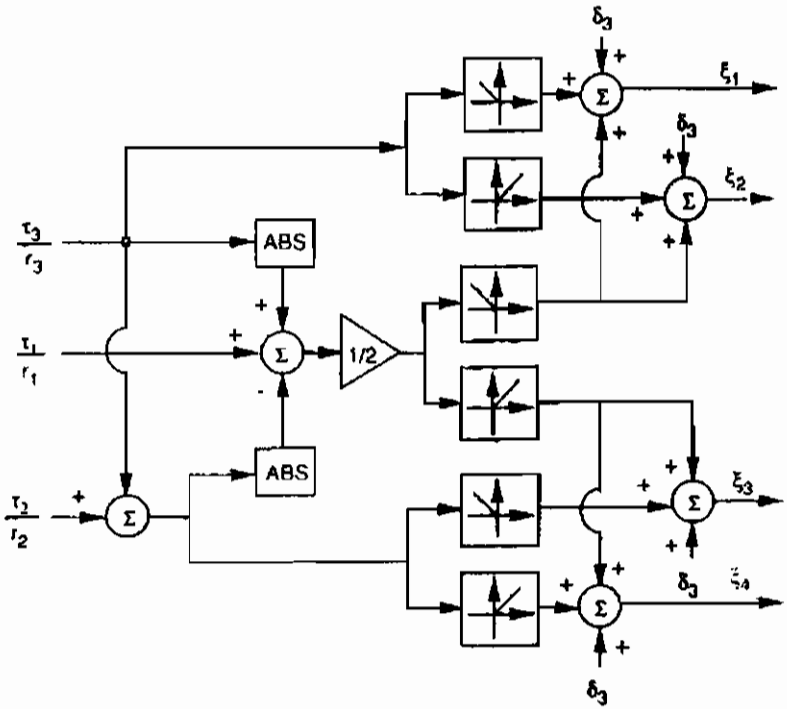
trong đó δ_3 là lực xiên dương, không có moment khớp trên trục khớp thứ nhất, hai, và ba. Thay pt (8.60) vào (8.56) và (8.58):

$$\xi_1 = O^-(\tau_3 / r_3) + \frac{O^-(\tau_1 / r_1 + |\tau_3 / r_3| - |\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3|)}{2} + \delta_3 \tag{8.61}$$

$$\xi_2 = O^+(\tau_3 / r_3) + \frac{O^-(\tau_1 / r_1 + |\tau_3 / r_3| - |\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3|)}{2} + \delta_3$$

$$\xi_3 = O^-(\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3) + \frac{O^+(\tau_1 / r_1 + |\tau_3 / r_3| - |\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3|)}{2} + \delta_3$$

$$\xi_4 = O^+(\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3) + \frac{O^+(\tau_1 / r_1 + |\tau_3 / r_3| - |\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3|)}{2} + \delta_3$$



Hình 8-17. Sơ đồ mạch bộ phân giải lực dư dùng cho tay máy Stanford/JPL.

Mặc dầu lực xiên δ_3 có thể chọn tùy ý, nhưng phần đóng góp của lực này vào các lực đai tỉ lệ với vector nghiệm đồng nhất. Hình 8.17 minh họa thiết kế bộ phân giải lực dư thừa phù hợp với pt (8.61). Thiết kế này có thể được cải tiến để điều khiển moment được tính cho tay máy Stanford/JPL.

Ví dụ 8.8: *Tay máy Utah/MIT.* Tay máy này được minh họa trên Hình 8.8. Giả sử các puli gắn trên cùng trục khớp có kích thước như nhau (nghĩa là $r_1 = r_5 = r_6 = r_7$; $r_2 = r_8$; và $r_3 = r_9$). Ma trận cấu trúc là tích của R* và B*, với R* và B* được xác định theo các pt (8.30) và (8.29).

Vì n = 4 và m= 8, không gian null của B* là ma trận 8×4 :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.62}$$

Thay B = R* B* vào pt (8.20):

$$-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 - \xi_5 + \xi_6 - \xi_7 + \xi_8 = \tau_1 / r_1 \tag{8.63}$$

$$-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 - \xi_5 + \xi_6 = \tau_2 / r_2 \tag{8.64}$$

$$-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = \tau_3 / r_3 \tag{8.65}$$

$$-\xi_1 + \xi_2 = \tau_4 / r_4 \tag{8.66}$$

Lấy pt (8.63) trừ (8.64); (8.64) trừ (8.65), và (8.65) trừ (8.66), sẽ được hệ phương trình đơn giản:

$$\begin{aligned} -\xi_7 + \xi_8 &= \tau_1 / r_1 - \tau_2 / r_2 \\ -\xi_5 + \xi_6 &= \tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3 \\ -\xi_3 + \xi_4 &= \tau_3 / r_3 - \tau_4 / r_4 \\ -\xi_1 + \xi_2 &= \tau_4 / r_4 \end{aligned} \tag{8.67}$$

Vì từng phương trình trong pt (8.67) đều chỉ chứa hai ẩn, nên bốn cặp lực đai có thể viết với các toán tử O^+ và O^-:

$$\xi_1 = O^-(\tau_4 / r_4) + \delta_1$$

$$\xi_2 = O^+(\tau_4 / r_4) + \delta_1$$

$$\xi_3 = O^-(\tau_3 / r_3 - \tau_4 / r_4) + \delta_2$$

$$\xi_4 = O^+(\tau_3 / r_3 - \tau_4 / r_4) + \delta_2$$

$$\xi_5 = O\ (\tau_2 / r_2 - \tau_3 / r_3) + \delta_3$$

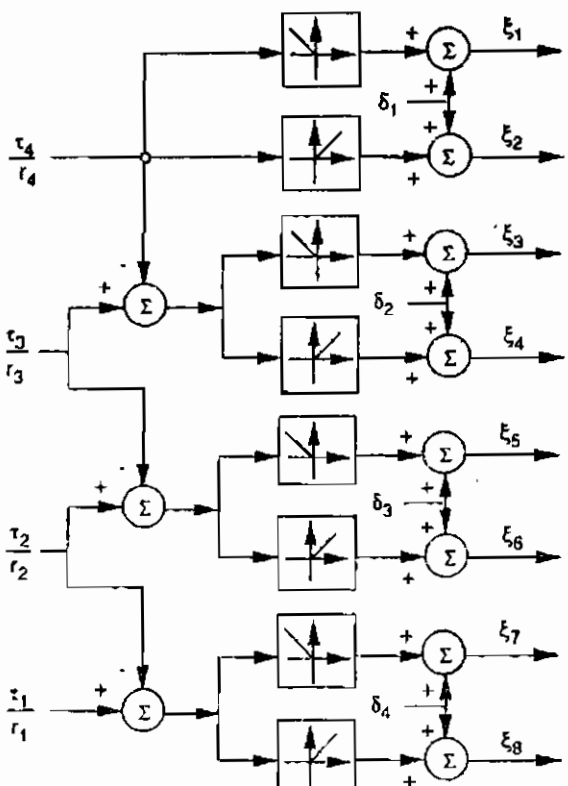
$$\xi_6 = O^+(\tau_2/r_2 - \tau_3/r_3) + \delta_3$$

$$\xi_7 = O^-(\tau_1/r_1 - \tau_2/r_2) + \delta_4$$

$$\xi_8 = O^+(\tau_1/r_1 - \tau_2/r_2) + \delta_4 \qquad (8.68)$$

trong đó δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 là bốn lực xiên dương. Bốn lực xiên này ứng với bốn vector cột của H.

Hình 8.18 minh họa thiết kế bộ phân giải lực dư tương ứng với pt (8.68). So với hai ví dụ trước, có bốn lực xiên đối với tay máy Utah/MIT nhưng chỉ có một đối với mỗi tay máy Stanford/JPL và cơ cấu chấp hành



Hình 8-18. Sơ đồ mạch bộ phân giải lực dùng trên tay máy Utah/MIT

3 x4 với ma trận cấu trúc giả tam giác. Cả tay máy Stanford/JPL và cơ cấu chấp hành đều 3 x4 đều sử dụng số đai tối thiểu (m = n+1), còn tay máy Utah/MIT sử dụng số đai tối đa (m = 2n). Dù tay máy Utah/MIT cần nhiều dây, nhưng có ưu điểm là điều chỉnh độc lập lực xiên cho từng cặp đai. Hơn nữa, việc tính toán các lực dai trong tay máy Utah/MIT đơn giản hơn nhiều.

Tóm tắt

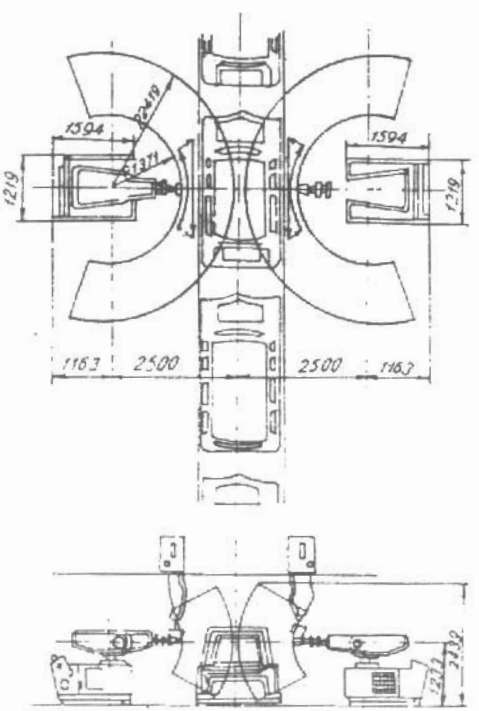
Chương này trình bày động học và phân tích lực tĩnh học của các cơ cấu chấp hành được truyền động bằng đai. Các cơ cấu này được phân loại theo truyền động đai vòng kín và truyền động đai hở đầu. Cấu hình các đai được biểu diễn theo sơ đồ phẳng. Các phương trình mạch cơ sở, các điều kiện đồng trục, và khái niệm các đường truyền động được giới thiệu chi tiết. Các dịch chuyển đai quan hệ với các góc khớp theo ma trận cấu trúc, bằng cách sử dụng các đường truyền động, có thể xác định ma trận cấu trúc khi xem xét cấu hình sắp xếp các đai. Từ phân tích các lực tĩnh, có thể xác định các đặc tính cấu trúc liên quan với cơ cấu chấp hành được truyền động bằng đai. Tập hợp các cơ cấu chấp hành truyền động đai với các ma trận cấu trúc giả-tam giác nx(n+1) được giới thiệu. Phần cuối trình bày phương pháp phân giải các lực đai dư thừa. Để minh họa phương pháp luận này, các tay máy Stanford/JPL và Utah/MIT được phân tích chi tiết.

Chương 9

ĐỘNG LỰC HỌC CƠ CẤU CHẤP HÀNH NỐI TIẾP

Giới thiệu

Chương này mở rộng phạm vi nghiên cứu từ động học, tĩnh học, sang lĩnh vực động lực học các cơ cấu chấp hành nối tiếp. Trong vài ứng dụng, như máy hàn (Hình 9.1), bộ tác động cuối cơ cấu cần di chuyển nhanh từ điểm này đến điểm khác. Động lực học cơ cấu chấp hành đóng vai trò rất quan trọng nhằm đạt được sự hoạt động của cơ cấu với tốc độ cao. Chương này sẽ triển khai tập hợp phương trình về ứng xử của cơ cấu chấp hành,



Hình 9-1. Sơ đồ tay máy hàn khung xe

và thiết lập mô hình động lực học. Thứ nhất, mô hình động lực học được dùng để mô phỏng hệ thống robot trên máy tính. Bằng cách khảo sát sự hoạt động của mô hình trong những điều kiện vận hành khác nhau, có thể tiên đoán hoạt động sau này của robot. Các hoạt động sản xuất tự động được khảo sát mà không cần đến hệ thống thực. Thứ hai, mô hình động lực được dùng để khai triển các chế độ điều khiển thích hợp. Bộ điều khiển tinh vi đòi hỏi sử dụng mô hình động lực thực sự để đạt sự vận hành tối ưu với tốc độ cao. Một số sơ đồ điều khiển dựa vào mô hình động lực học để tính toán các moment ngẫu lực trên bộ tác động cần thiết để vận hành theo quỹ đạo mong muốn. Thứ ba, sự phân tích động lực học cho phép xác định các phản lực khớp cần thiết để thiết kế cơ cấu chấp hành.

Có hai loại vấn đề động lực học: động lực thuận và động lực đảo. *Động lực học thuận* là tìm các đáp ứng cánh tay robot khi chịu lực và moment tác động. Nghĩa là với vector moment khớp hoặc lực đã cho, cần tính chuyển động của cơ cấu theo hàm thời gian. *Động lực học đảo* là tìm moment và lực bộ tác động cần để tạo ra hành trình cơ cấu theo yêu cầu. Có thể tính công thức trong không gian khớp q(t), hoặc không gian bộ tác động cuối x(t). Hai hệ phương trình này liên hệ với nhau theo ma trận Jacobi và đạo hàm thời gian. Nói chung, hiệu quả của động lực học thuận không cao do các kết quả chủ yếu được dùng để mô phỏng cơ cấu chấp hành trên máy tính. Mặt khác, mô hình động lực học đảo rất quan trọng đối với điều khiển thời gian thực của cơ cấu chấp hành.

Các phương trình động lực về chuyển động có thể được thiết lập bằng nhiều phương pháp, chẳng hạn bằng cách áp dụng các định luật Newton và Euler. Viết phương trình Newton và Euler cho từng vật thể của hệ thống cơ học sẽ được hệ phương trình chứa các lực tác dụng và các lực ràng buộc. Các lực ràng buộc có thể được khử bằng cách xét các phương trình động học và hình học về bản chất của các ràng buộc đó. Phương pháp thứ hai là áp dụng nguyên lý *d'Alembert* hoặc *Hamilton*. Phương pháp thứ ba là sử dụng các *phương trình chuyển động Lagrange*. Ưu điểm của phương pháp Lagrange là không cần các lực ràng buộc. Tuy nhiên, cần khôi phục các lực này nếu chúng được dùng khi thiết kế. Mặt khác, phương pháp Newton-Euler tạo ra hệ các phương trình khá lớn, cần được giải đồng thời cho tất cả các lực, kể cả các lực ràng buộc.

Gần đây, nhiều chương trình máy tính được áp dụng để phân tích động lực hệ thống cơ học. Ví dụ, các chương trình sử dụng hệ phương trình Lagrange:

- *ADAMS*: chương trình của đại học Michigan.
- *DADS*: chương trình của đại học Iowa.
- *DYMAC*: chương trình của đại học Pennsynvania.
- *IMP*: chương trình của đại học Wisconsin.

Các chương trình (phần mềm) máy tính khác, chẳng hạn *NBOD2*, *SD_EXACT*, dựa trên hệ phương trình Euler và phương pháp Kane. Các chương trình máy tính đáp ứng tốt cho các yêu cầu mô phỏng hoạt động của robot trên máy tính. Tuy nhiên, chúng có thể không thích hợp đối với sự điều khiển robot thời gian thực. Do đó cần có các phương pháp luận hiệu quả chuyên dùng cho hệ thống robot. Các phương pháp này bao gồm hệ phương trình Lagrange đệ quy, hệ phương trình Newton-Euler đệ quy, và các phương trình d'Alembert tổng quát.

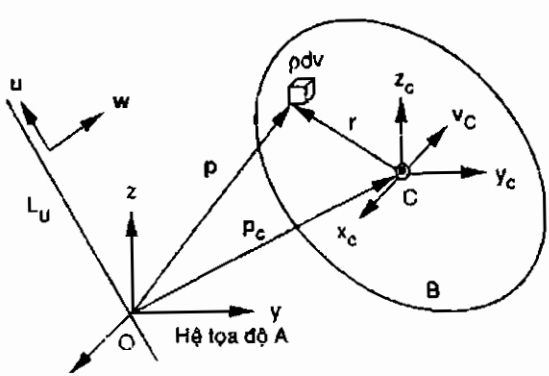
Động lực học là chuyên ngành lớn, do đó ở đây không thể trình bày chi tiết. Chương này sẽ chỉ khái quát các định luật cơ bản của động lực học vật rắn, giới thiệu các phương pháp phân tích sử dụng hệ phương trình đệ quy Newton-Euler và Lagrange, ảnh hưởng của quán tính rotor và các ví dụ để minh họa nguyên lý.

Các tính chất khối lượng

Nội dung phần này bao gồm tâm khối lượng, ma trận quán tính, định lý trục song song, và moment quán tính của vật rắn.

Tâm khối lượng

Khối lượng là lượng vật chất tạo nên vật thể có hình dạng và kích thước xác định. Trên Hình 9.2, A(x,y,z) là hệ tọa độ quy chiếu, **u** và **w** là hai vector đơn vị, dV là thể tích vi phân của vật thể B, ρ là trọng lượng riêng, **p** là vector vị trí của khối lượng vi phân ρdV theo hệ tọa



Hình 9-2. Moment khối lượng theo điểm quy chiếu.

độ quy chiếu A. Điểm C là tâm khối lượng có vector vị trí $\mathbf{p}_c$ thỏa điều kiện sau:

$$p_c = \frac{1}{m}\int_v \mathbf{p}\rho dV \tag{9.1}$$

trong đó $m = \int_v \rho\, dV$ là tổng khối lượng của vật thể B.

Ma trận quán tính

Moment thứ hai, I_u^o, của vật rắn B, liên hệ với đường L_u đi qua điểm quy chiếu O và song song vector đơn vị **u**, được xác định là:

$$I_u^o = \int_v p \times (\mathbf{u} \times \mathbf{p})\rho dV \tag{9.2}$$

Trong vế trái pt (9.2), ký hiệu o là điểm quy chiếu và u là chiều của đường quy chiếu. Khai triển tích trong pt (9.2):

$$I_u^o = \int_v \left[p^2 u - (p^T u)p\right]\rho dV \tag{9.3}$$

Tích vô hướng của I_u^o với vector đơn vị w được gọi là tích quán tính vật thể B quan hệ với O theo u và w:

$$I_{uw} = I_u^o \cdot w = \int_v \left[(u^T w)p^2 - (p^T u)(p^T w)\right]\rho dV \tag{9.4}$$

Với định nghĩa trên, $I_{uw} = I_{wu}$. Đặc biệt, khi **u** và w là vector như nhau, tích quán tính I_{uw} được gọi là moment quán tính vật thể B theo L_u:

$$I_{uu} = \int_v \left[p^2 - (p^T u)\right]\rho dV = mr_a^2 \tag{9.5}$$

trong đó, $r_a = \mathbf{p}^2 - (\mathbf{p}^T \mathbf{u})^2 = (\mathbf{u} \times \mathbf{p})^2$ là đại lượng thực không âm, được gọi là bán kính hồi chuyển của B ứng với L_u.

Phương trình (9.3) viết dưới dạng ma trận:

$$I_u^o = I_B^o u \tag{9.6}$$

trong đó:

$$I_B^o \equiv \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{9.7}$$

được gọi là ma trận quán tính hay tensor quán tính của vật thể B theo điểm O, và:

$$I_{xx} = \int_v (y^2 + z^2)\rho dV$$

$$I_{yy} = \int_v (z^2 + x^2)\rho dV$$

$$I_{zz} = \int_v (x^2 + y^2)\rho dV$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_v xy\rho dV$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int_v yz\rho dV$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\int_v xz\rho dV \qquad (9.8)$$

trong đó x,y,z là các tọa độ thể tích vi phân của khối lượng ρ dv trong hệ tọa độ quy chiếu A có gốc là O. Chú ý, mỗi phần tử của I_B^0 biểu thị moment quán tính hoặc tích quán tính của B theo các trục tọa độ của hệ quy chiếu A.

Ma trận quán tính là đối xứng, có các phần tử phụ thuộc sự lựa chọn điểm quy chiếu và hệ quy chiếu. Đối với vật rắn có dạng hình học đơn giản, ma trận quán tính được tính bằng cách sử dụng tích phân thể tích theo pt (9.8). Với các vật thể có dạng không đều, ma trận quán tính thường được xác định bằng thực nghiệm.

Định lý trục song song

Gọi $C(x_c, y_c, z_c)$ là hệ tọa độ gắn với tâm khối lượng C của vật rắn B, các trục tọa độ này song song với các trục của hệ quy chiếu A (Hình 9.2), có thể chứng minh:

$$I_{xx}^O = I_{xx}^C + m(y_c^2 + z_c^2)$$

$$I_{yy}^O = I_{yy}^C + m(z_c^2 + x_c^2)$$

$$I_{zz}^O = I_{zz}^C + m(x_c^2 + y_c^2)$$

$$I_{xy}^O = I_{xy}^C + mx_c y_c$$

$$I_{yz}^O = I_{yz}^C + my_c z_c$$

$$I_{zx}^O = I_{xz}^C + mz_c x_c \qquad (9.9)$$

trong đó x_c, y_c, z_c là tọa độ tâm khối trong hệ quy chiếu A. Phương trình (9.9) là *định lý trục song song*.

Moment quán tính chính

Ma trận quán tính phụ thuộc việc chọn điểm quy chiếu và sự định hướng hệ tọa độ quy chiếu. Đối với định hướng hệ quy chiếu xác định, tích quán tính bị loại trừ. Các trục tọa độ đặc biệt đó được gọi là *trục chính*, và moment quán tính tương ứng là *moment quán tính chính*.

Gọi I_B^0 là ma trận quán tính của vật thể B tại điểm O trong hệ tọa độ A; L_u là trục chính đi qua gốc O và cùng chiều với **u**. Theo định nghĩa, **u** song song với vector moment thứ hai của B theo L_u. Nghĩa là:

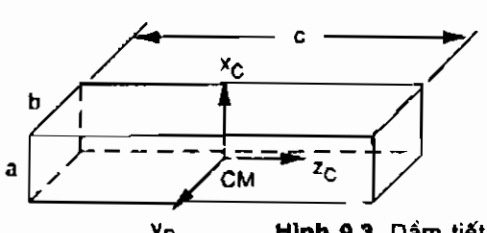
$$I_B^O u = \lambda u \tag{9.10}$$

Phương trình (9.10) gồm ba phương trình thuần nhất tuyến tính có ba ẩn u_x, u_y, u_z. Điều kiện tồn tại các nghiệm không tầm thường là:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9.11}$$

Do đó, các trị riêng và các vector riêng của ma trận quán tính tương ứng là các moment quán tính chính và các chiều trục chính. Nói chung, ứng với mỗi điểm quy chiếu, tồn tại ít nhất một tập hợp ba trục quán tính chính vuông góc với nhau.

Ví dụ 9.1: *Ma trận quán tính của dầm chữ nhật.* Xét dầm chữ nhật có tiết diện a × b, và chiều dài c (Hình 9.3). Giả sử vật liệu dầm là đồng nhất, khối lượng m = ρabc. Các trục của hệ tọa độ tâm khối lượng (Hình 9.3) thẳng hàng với các trục chính của dầm. Tích quán tính đều bằng 0, ma trận quán tính tổng hợp là:



Hình 9.3. Dầm tiết diện chữ nhật

$$I_B^C = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \qquad (9.12)$$

Đối với thanh, a và b rất nhỏ so với c. Ma trận quán tính tính gần đúng là:

$$I_B^C = \frac{mc^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9.13)$$

Moment khối lượng

Phần này sẽ xét moment khối lượng tuyến tính và moment khối lượng góc.

Moment khối lượng tuyến tính

Moment khối lượng tuyến tính của phân tố khối lượng ρ dV tại điểm O, tính trong hệ quy chiếu A (Hình 9.2), là:

$$dI^O = \frac{dp}{dt}\rho dV \qquad (9.14)$$

Moment khối lượng tuyến tính toàn phần của vật thể B tại điểm O là:

$$I^O = \int_v \frac{dp}{dt}\rho dV \qquad (9.15)$$

Quy chiếu với tâm khối lượng, vector vị trí **p** của phân tố khối lượng ρ dV là:

$$p = p_c + r \qquad (9.16)$$

với $\mathbf{r} = {}^A R_c\, {}^c\mathbf{r}$ là vị trí phân tố khối lượng ứng với tâm khối lượng C được tính trong hệ quy chiếu A. Ma trận quay ${}^A R_c$ được dùng để biến đổi vector **r** từ hệ tọa độ C đến A.

Thay pt (9.16) vào (9.15):

$$I^O = \int_v \frac{dp_c}{dt}\rho dV + \int_v \frac{dr}{dt}\rho dV \qquad (9.17)$$

Với vật rắn có khối lượng không đổi, có thể chứng minh tích phân và đạo hàm thời gian ở vế phải pt (9.17) có thể đổi lẫn cho nhau. Do đó, theo định nghĩa tâm khối lượng, đại lượng thứ hai ở vế phải sẽ triệt tiêu.

$$\mathbf{I}^O = \frac{d\mathbf{p}_c}{dt}\int_V \rho dV = m\mathbf{v}_c \tag{9.18}$$

trong đó, $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{p}_c/dt$ là vận tốc tuyến tính của tâm khối lượng theo hệ quy chiếu A. Phương trình (9.18) có nghĩa là moment khối lượng tuyến tính toàn phần của vật rắn bằng moment khối lượng tuyến tính của khối lượng điểm có khối lượng m đặt tại tâm khối lượng đó.

Moment khối lượng góc

Từ Hình 9.2, có thể thấy *moment khối lượng góc* $\mathbf{dh}^o$ của phân tố khối lượng ρ dV tại điểm quy chiếu O, hệ quy chiếu A, được định nghĩa là moment của moment khối lượng tuyến tính tại O:

$$d\mathbf{h}^O = \left(\mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)\rho dV \tag{9.19}$$

Moment khối lượng góc toàn phần của B tại O là:

$$\mathbf{h}^O = \int_V \left(\mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)\rho dV \tag{9.20}$$

Thay pt (9.16) vào (9.20):

$$\mathbf{h}^O = \left(\mathbf{p}_c \times \frac{d\mathbf{p}_c}{dt}\right)\int_V \rho dV + \int_V \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\rho dV$$
$$+ \mathbf{p}_c \times \left(\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{r}\rho dV\right) + \int_V \mathbf{r}\rho dV \times \left(\frac{d\mathbf{p}_c}{dt}\right) \tag{9.21}$$

Hai số hạng cuối của biểu thức trên bị triệt tiêu do đều có:

$$\int_V \mathbf{r}\rho dV = 0$$

Nên moment khối lượng góc toàn phần tại O là:

$$\mathbf{h}^O = m(\mathbf{p}_c \times \mathbf{v}_c) + \mathbf{h}^C \tag{9.22}$$

với:

$$h^C = \int_V \left(r \times \frac{dr}{dt} \right) \rho dV = \int_V r \times (\omega_B \times r) \rho dV \qquad (9.23)$$

là moment khối lượng góc của chuyển động so với tâm khối lượng; ω_n là vận tốc góc của B; v_c là vận tốc tuyến tính của tâm khối lượng ứng với hệ tọa độ A.

Phương trình (9.22) cho biết moment khối lượng góc toàn phần của B tại điểm gốc O bằng moment khối lượng góc của khối điểm có khối lượng m đặt tại tâm khối lượng đó, cộng với moment khối lượng góc của chuyển động quay tại tâm khối lượng đó. Phương trình (9.23) có dạng như pt (9.2), từ pt (9.6) suy ra h^C:

$$h^C = I_B^C \omega_B \qquad (9.24)$$

với $I_B{}^C$ là ma trận quán tính của B theo tâm khối lượng C và tính theo hệ tọa độ A . Để đơn giản, tâm khối lượng thường được dùng làm điểm quy chiếu, do đó không cần dùng ký hiệu C.

Biến đổi ma trận quán tính

Moment khối lượng góc trong pt (9.24) được tính theo hệ quy chiếu bất kỳ. Biểu diễn pt (9.24) trong hệ quy chiếu A và loại bỏ ký hiệu C:

$${}^A h = {}^A I_B {}^A \omega_B \qquad (9.25)$$

trong đó ký hiệu A biểu thị hệ tọa độ tính vector hoặc ma trận tuyến tính. Biểu diễn pt (9.24) trong hệ tọa độ C, tâm khối lượng, vật thể cố định:

$${}^C h = {}^C I_B {}^C \omega_B \qquad (9.26)$$

trong đó, ${}^C\omega_B$ là vận tốc góc của B trong hệ tọa độ cố định A và được biểu diễn trong hệ tọa độ C của vật thể. Nghĩa là, ${}^C\omega_B = {}^A R_c^T {}^A\omega_B$, với ${}^A R_c$ là ma trận quay xác định hướng của C theo A.

Vì **h** là vector, nên có thể dùng biến đổi vector sau:

$${}^A h = {}^A R_C {}^C h \qquad (9.27)$$

Thay các pt (9.25) và (9.26) vào (9.27):

$${}^A I_B {}^A \omega_B = {}^A R_C {}^C I_B {}^C \omega_B \qquad (9.28)$$

Thay ${}^A\omega_B = R_c^T\,{}^A\omega_B$ vào pt (9.28):

$$ {}^A I_B = {}^A R_C\,{}^C I_B\,{}^A R_C^T \tag{9.29} $$

Phương trình (9.29) biến đổi ma trận quán tính từ hệ quy chiếu này sang hệ quy chiếu khác. Cả hai ma trận quán tính đều được tính theo tâm khối lượng C. Các phần tử của ${}^C I_B$ là hằng vì chúng được biểu diễn trong hệ tọa độ C của vật thể cố định. Tuy nhiên, các phần tử của ${}^A I_B$ không phải là hằng do chúng được biểu diễn trong hệ tọa độ cố định A và sự định hướng của B theo A có thể phụ thuộc thời gian. Sự phụ thuộc của ${}^A I_B$ phát sinh từ ma trận quay ${}^A R_c$.

Động năng

Trên Hình 9.2, *động năng dK* của phân tố khối lượng $\rho\, dV$ trong hệ tọa độ A là:

$$ dK = \frac{1}{2} v^T v \rho dV \tag{9.30} $$

với v là vận tốc của phân tố khối lượng $\rho\, dV$. Động năng toàn phần của B là:

$$ K = \frac{1}{2} \int_V v^T v \rho dV \tag{9.31} $$

Có thể biểu diễn v theo các đại lượng vận tốc tuyến tính của tâm khối lượng và vận tốc góc của vật thể chuyển động:

$$ v = v_c + \omega_B \times r \tag{9.32} $$

Thay pt (9.32) vào (9.31):

$$ K = \frac{1}{2} v_c^T v_c \int_V \rho dV + (v_c \times \omega_B)^T \int_V r \rho dV + \frac{1}{2} \omega_B^T \left(\int_V r \times (\omega_B \times r)\, \rho dV \right) \tag{9.33} $$

Số hạng thứ hai trong pt (9.33) triệt tiêu do tuân theo định nghĩa tâm khối lượng. Hàm tích phân trong số hạng thứ ba là moment khối lượng góc của B tại tâm khối. Do đó pt (9.33) trở thành:

$$ K = \frac{1}{2} v_c^T m v_c + \frac{1}{2} \omega_B^T I_B \omega_B \tag{9.34} $$

Động năng của vật rắn B bằng động năng của khối lượng điểm có khối lượng **m** đặt tại tâm khối lượng cộng với động năng chuyển động quay tại tâm đó.

Định luật NEWTON - EULER

Phần này sẽ xét các định luật Newton-Euler về chuyển động. Dựa vào các định luật đó, phần sau sẽ khai triển phương pháp phân tích đệ quy.

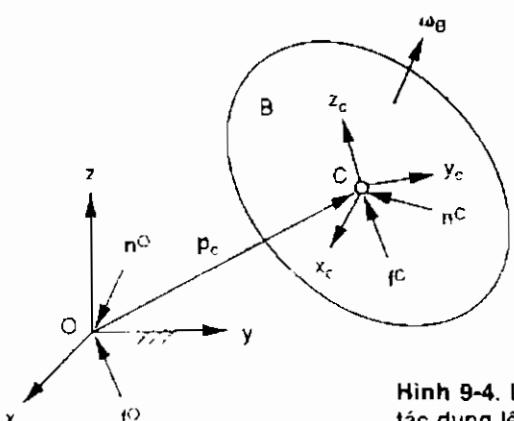
Điểm quy chiếu chung

Giả sử tồn tại *hệ tọa độ quán tính* có thể quy chiếu các định luật Newton-Euler. Trên Hình 9.4, A(x,y,z) là hệ tọa độ quán tính, $\mathbf{I}^0$ là moment khối lượng tuyến tính của B tại gốc O được biểu diễn trong A, $\mathbf{h}^0$ là moment khối lượng góc tương ứng, $\mathbf{f}^0$ và $\mathbf{n}^0$ là hợp lực và moment tác dụng lên B tại gốc O. Định luật Newton-Euler có phương trình:

$$f^O = \frac{dI^O}{dt} \tag{9.35}$$

$$n^O = \frac{dh^O}{dt} \tag{9.36}$$

Các pt (9.35), (9.36) là hai phương trình động lực học chuyển động cơ bản. Sự khác biệt giữa các phương trình động lực học và động học là phương trình động lực chỉ áp dụng trong hệ tọa độ quán tính, còn phương



Hình 9-4. Lực và moment tác dụng lên vật rắn

trình động học có giá trị trong hệ tọa độ quy chiếu bất kỳ. Trong ứng dụng kỹ thuật, hệ tọa độ bất kỳ cố định với nền có thể xét như hệ quán tính. Nói chung, hệ tọa độ quán tính, hệ tọa độ cơ bản, hệ tọa độ cố định được coi là như nhau.Vector bất kỳ mô tả trong hệ tọa độ cố định được coi là tuyệt đối, và trong hệ tọa độ di động được gọi là vector tương đối.

Tâm khối lượng là điểm quy chiếu

Khi một điểm tùy ý được chọn làm điểm quy chiếu, sẽ phức tạp khi áp dụng định luật chuyển động cơ bản. Khi tâm khối lượng là điểm quy chiếu, chuyển động của vật rắn gồm chuyển động tuyến tính của tâm cộng với chuyển động quay của vật thể tại tâm đó.

Từ Hình 9.4, C là tâm khối lượng của vật thể B. Trước hết, cần áp dụng định luật Newton. Thay pt (9.18) vào (9.35):

$$\mathbf{f}^O = \frac{d(m\mathbf{v}_c)}{dt} \tag{9.37}$$

Do vật thể có khối lượng không đổi, pt (9.37) được rút gọn thành:

$$\mathbf{f}^O = m\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} \tag{9.38}$$

Phương trình (9.38) được gọi là phương trình chuyển động Newton đối với tâm khối lượng.

Kế tiếp, xét chuyển động quay của vật thể B. Lấy vi phân pt (9.22) theo thời gian:

$$\frac{d\mathbf{h}^O}{dt} = \frac{d\mathbf{h}^C}{dt} + m\left(\mathbf{p}_c \times \frac{d\mathbf{v}_c}{dt}\right) \tag{9.39}$$

Gọi $\mathbf{I}^c$ và $\mathbf{n}^c$ là hợp lực và moment tác dụng tại tâm C (Hình 9.4):

$$\mathbf{f}^O = \mathbf{f}^C \tag{9.40}$$

$$\mathbf{n}^O = \mathbf{n}^C + \mathbf{p}_c \times \mathbf{f}^C \tag{9.41}$$

Thay các pt (9.39) và (9.41) vào (9.36):

$$\mathbf{n}^C + \mathbf{p}_c \times \mathbf{f}^C = \frac{d\mathbf{h}^C}{dt} + m\left(\mathbf{p}_c \times \frac{d\mathbf{v}_c}{dt}\right) \tag{9.42}$$

Do các pt (9.38) và (9.40), có thể rút gọn pt (9.42):

$$n^C = \frac{dh^C}{dt} \tag{9.43}$$

Do đó tỷ suất thay đổi moment khối lượng góc của B tại tâm C bằng tổng moment tác dụng tại điểm đó.

Đạo hàm dh^C có thể khai triển thuận tiện trong hệ tọa độ C, tâm khối lượng, vật thể cố định do các thành phần quán tính của B là hằng trong C. Thay pt (9.26) vào (9.43), bỏ qua ký hiệu C phía trên, và viết phương trình kết quả theo hệ tọa độ C:

$$^C n = \frac{d(^C I_B \, ^C\omega_B)}{dt} \tag{9.44}$$

Chú ý vi phân của dh^C trong pt (9.44) được lấy ứng với hệ tọa độ quán tính A. Áp dụng pt (4.19) vào (9.44):

$$^C n = {}^C I_B \, ^C\omega_B + {}^C\omega_B \times ({}^C I_B \, ^C\omega_B) \tag{9.45}$$

Phương trình (9.45) được gọi là *phương trình chuyển động Euler* đối với hệ tọa độ tâm khối lượng.

Phương trình chuyển động Euler còn được viết trong hệ tọa độ cố định A. Nhân cả hai vế pt (9.45) với R và sử dụng các đẳng thức $^c\omega_B = {}^A R_c^T \, {}^A\omega_B$ và $^c\omega_B = {}^A R_c^T \, {}^A\omega_B$:

$$^A n = ({}^A R_C \, {}^C I_B \, {}^A R_C^T) \, {}^A\omega_B + {}^A\omega_B \times [({}^A R_C \, {}^C I_B \, {}^A R_C^T) \, {}^A\omega_B] \tag{9.46}$$

hoặc đơn giản

$$^A n = {}^A I_B \, {}^A\omega_B + {}^A\omega_B \times ({}^A I_B \, {}^A\omega_B) \tag{9.47}$$

Phương trình (9.47) được gọi là *phương trình chuyển động Euler* đối với hệ tọa độ cố định không vật thể, hệ tọa độ đặt tức thời tại tâm khối lượng có các trục song song với các trục hệ tọa độ quán tính A. Mặc dầu các pt (9.45) và (9.47) có dạng tương tự, nhưng khác nhau một cách cơ bản. Các phần tử quán tính trong pt (9.45) là hằng, trong khi ở pt (9.47) là phụ thuộc thời gian. Do đó, pt (9.45) thường được dùng thay cho pt (9.47) để tránh nhầm lẫn.

Trong động lực học thuận, biết trước hợp lực, cần tìm chuyển động của vật rắn bằng cách lấy tích phân các phương trình vi phân (9.38) và

(9.45). Trong động lực học đảo, chuyển động vật rắn được xác định trước theo hàm thời gian, cần tìm lực tạo ra chuyển động này bằng cách thay vị trí, vận tốc, và gia tốc của vật thể vào các pt (9.38) và (9.45) hay (9.47).

Trường hợp đặc biệt: Khi các trục của hệ tọa độ tâm khối lượng trùng hợp với các trục chính của B, pt (9.45) trở thành:

$$\mathbf{n}_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z(I_{yy} - I_{zz})$$

$$\mathbf{n}_y = I_{yy}\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x(I_{zz} - I_{xx})$$

$$\mathbf{n}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y(I_{xx} - I_{yy}) \qquad (9.48)$$

trong đó I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} là các moment quán tính chính trong hệ tọa độ tâm khối lượng.

Công thức NEWTON - EULER đệ quy

Phần này sẽ giới thiệu phương pháp thiết lập công thức Newton-Euler đệ quy để phân tích động lực học cơ cấu chấp hành nối tiếp. Công thức Newton-Euler kết hợp tất cả các lực tác dụng lên từng khâu của cánh tay robot. Do đó, các phương trình động lực bao gồm tất cả các lực ràng buộc giữa hai khâu kế nhau. Các lực này rất hữu dụng trong việc tính kích cỡ khâu và ổ trục trong giai đoạn thiết kế. Phương pháp này gồm phép tính thuận các vận tốc và gia tốc mỗi khâu, sau đó tính ngược các lực và moment trong mỗi khớp.

Lực và moment tác dụng lên khâu i của cơ cấu chấp hành nối tiếp được minh họa trên Hình 9.5. Các ký hiệu sau được sử dụng để phân tích:

$\mathbf{f}_{i,i-1}$: hợp lực tác dụng lên khâu i từ khâu i-1 tại điểm O_{i-1}.

$\mathbf{f}_i^*$: lực quán tính tác động tại tâm khối lượng khâu i.

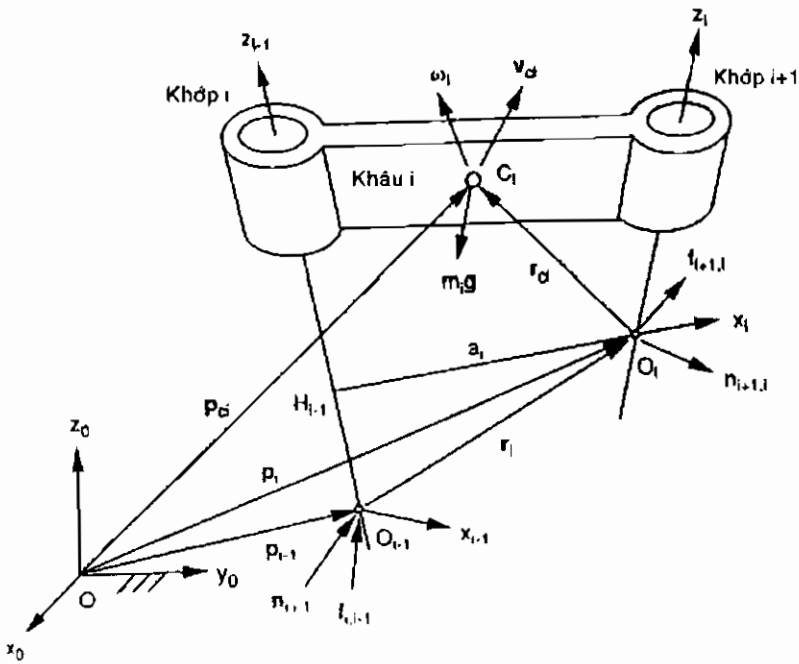
${}^iI_i$: ma trận quán tính của khâu i tại tâm khối lượng, biểu diễn trong hệ tọa độ khâu i.

$\mathbf{n}_{i,i-1}$: moment tổng tác dụng lên khâu i từ khâu i-1tại điểm O_{i-1}.

$\mathbf{n}_i^*$: moment quán tính tác dụng tại tâm khối lượng khâu i.

$\mathbf{p}_i$: vector vị trí điểm gốc hệ tọa độ khâu i theo hệ tọa độ khâu cơ bản, $\mathbf{p}_i = O_0O_i$

$\mathbf{p}_{c,i}$: vector vị trí tâm khối lượng khâu i theo hệ tọa độ khâu cơ bản, $\mathbf{p}_{c,i} = O_0C_i$



Hình 9-5. Các lực và moment tác dụng lên khâu i.

$\mathbf{r}_i$: vector vị trí điểm gốc hệ tọa độ khâu i theo hệ tọa độ khâu (i-1), $\mathbf{r}_i = O_{i-1}O_i$.

$\mathbf{r}_{ci}$: vector vị trí tâm khối lượng khâu i theo hệ tọa độ khâu i, $\mathbf{r}_{ci} = O_i C_i$.

$\mathbf{v}_i$: vận tốc tuyến tính tuyệt đối của gốc O_i.

$\mathbf{v}_{ci}$: vận tốc tuyến tính tuyệt đối của tâm khối lượng khâu i.

$\dot{\mathbf{v}}_i$: gia tốc tuyến tính tuyệt đối của điểm gốc O_i

$\dot{\mathbf{v}}_{ci}$: gia tốc tuyến tính tuyệt đội của tâm khối lượng khâu i

$\mathbf{z}_i$: vector đơn vị trên trục z_i

ω_i : vận tốc góc tuyệt đối của khâu i

$\dot{\omega}_i$: gia tốc góc tuyệt đối của khâu i

Tính toán thuận

Phần này tính vận tốc góc, gia tốc góc, vận tốc tuyến tính, và gia tốc tuyến tính từng khâu theo khâu đứng trước. Các vận tốc này có thể được tính theo phương pháp đệ quy, bắt đầu từ khâu chuyển động thứ nhất và kết thúc ở khâu bộ tác động cuối. Khâu cơ bản thoả điều kiện ban đầu $v_0 = \dot{v}_0 = \omega_0 = \dot{\omega}_0 = 0$.

Sự lan truyền vận tốc góc: Do cơ cấu có cấu trúc nối tiếp, vận tốc góc khâu i quan hệ với khâu i-1 là bằng $z_{i-1}\dot{\theta}_i$ đối với khớp quay và bằng zero đối với khớp lăng trụ, trong đó z_{i-1} là vector đơn vị trên trục khớp thứ i. Vận tốc góc khâu i là

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1}\dot{\theta}_i & \text{khớp quay} \\ \omega_{i-1} & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.49}$$

Đưa pt (9.49) vào hệ tọa độ khâu i:

$${}^{i}\omega_i = \begin{cases} {}^{i}R_{i-1}({}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^{i-1}z_{i-1}\dot{\theta}_i & \text{khớp quay} \\ {}^{i}R_{i-1}\,{}^{i-1}\omega_{i-1} & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.50}$$

trong đó:

$${}^{i}R_{i-1} = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 \\ -c\alpha_i s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & s\alpha_i \\ s\alpha_i s\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \tag{9.51}$$

và ${}^{i-1}z_{i-1} = [0,0,1]^T$ là vector đơn vị trên trục khớp i được tính trong hệ tọa độ (i-1).

Sự lan truyền gia tốc góc. Gia tốc góc khâu i được xác định bằng cách lấy vi phân pt (9.49) theo thời gian:

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1}\ddot{\theta}_i + \omega_{i-1} \times z_{i-1}\dot{\theta}_i & \text{khớp quay} \\ \dot{\omega}_{i-1} & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.52}$$

Đưa pt (9.52) vào hệ tọa độ khâu i:

$${}^{i}\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^{i}R_{i-1}({}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + {}^{i-1}z_{i-1}\ddot{\theta}_i + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}z_{i-1}\dot{\theta}_i) & \text{khớp quay} \\ {}^{i}R_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.53}$$

Phương trình (9.53) là công thức đệ quy để tính gia tốc góc khâu i theo các đại lượng của khâu (i-1).

Sự lan truyền vận tốc tuyến tính. Từ Hình 9.5, có thể thấy: (1) nếu khớp i là khớp quay, khâu i không tịnh tiến dọc theo trục khớp i, (2) nếu khớp i là khớp lăng trụ, khâu i có vận tốc dài d_i dọc theo trục khớp i. Do đó, vận tốc của O_i viết theo các đại lượng O_{i-1} là:

$$\mathbf{v}_i = \begin{cases} \mathbf{v}_{i-1} + \omega_i \times \mathbf{r}_i) & \text{khớp quay} \\ \mathbf{v}_{i-1} + \omega_i \times \mathbf{r}_i + \mathbf{z}_{i-1}\mathbf{d}_i & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.54}$$

Đưa pt (9.54) vào hệ tọa độ khâu i:

$${}^i\mathbf{v}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + {}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{r}_i & \text{khớp quay} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1}\mathbf{d}_i) + {}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{r}_i & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.55}$$

trong đó:

$${}^i\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{d}_i s\alpha_i \\ \mathbf{d}_i c\alpha_i \end{bmatrix} \tag{9.56}$$

Vector ${}^i\mathbf{r}_i$ là hằng đối với khớp quay và là biến đổi với khớp lăng trụ. Phương trình (9.55) là công thức đệ qui để tính vận tốc tuyến tính điểm gốc khâu i theo khâu i-1.

Sự lan truyền gia tốc tuyến tính. Gia tốc tuyến tính điểm gốc O_i của hệ tọa độ i được tính bằng cách lấy vi phân pt (9.54) theo thời gian:

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_i) & \text{khớp quay} \\ \dot{\mathbf{v}}_{i-1} + \mathbf{z}_{i-1}\ddot{\mathbf{d}}_i + \dot{\omega}_i \times \mathbf{r}_i & \\ \quad + \omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{r}_i) + 2\omega_i \times (\mathbf{z}_{i-1}\dot{\mathbf{d}}_i) & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.57}$$

Đưa pt (9.57) vào hệ tọa độ khâu i:

$${}^i\dot{\mathbf{v}}_i = \begin{cases} {}^i\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{r}_i + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{r}_i) & \text{khớp quay} \\ {}^i\mathbf{R}_{i-1}({}^{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{i-1} + {}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1}\ddot{\mathbf{d}}_i) + {}^i\dot{\omega}_i \times {}^i\mathbf{r}_i & \\ \quad + {}^i\omega_i \times ({}^i\omega_i \times {}^i\mathbf{r}_i) + 2{}^i\omega_i \times ({}^i\mathbf{R}_{i-1}\,{}^{i-1}\mathbf{z}_{i-1}\dot{\mathbf{d}}_i) & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.58}$$

Phương trình (9.58) là công thức đệ quy để tính gia tốc tuyến tính khâu i theo các đại lượng khâu (i-1).

Gia tốc tuyến tính của tâm khối lượng. Gia tốc tuyến tính của tâm khối lượng được tính theo:

$$^{i}\dot{v}_{ci} = {}^{i}\dot{v}_{i} + {}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}r_{ci} + {}^{i}\omega_{i} \times ({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}r_{ci}) \tag{9.59}$$

Gia tốc trọng lực. Gia tốc trọng lực được tính từ hệ tọa độ khâu (i-1) vào hệ tọa độ khâu i như sau:

$$^{i}g = {}^{i}R_{i-1}\ {}^{i-1}g \tag{9.60}$$

Tính toán ngược

Sau khi tìm được vận tốc và gia tốc các khâu, có thể tính các lực khớp lần lượt từng khâu bắt đầu từ khâu bộ tác động cuối đến khâu cơ bản. Trước hết, cần áp dụng các pt (9.38), (9.39) để tính lực quán tính và moment quán tính tác dụng tại tâm khối lượng khâu i:

$$^{i}f_{i}^{*} = -m_{i}\,{}^{i}\dot{v}_{ci} \tag{9.61}$$

$$^{i}n_{i}^{*} = -{}^{i}I_{i}\,{}^{i}\dot{\omega}_{i} - {}^{i}\omega_{i} \times ({}^{i}I_{i}\,{}^{i}\omega_{i}) \tag{9.62}$$

Kế tiếp, viết các phương trình cân bằng lực và moment tại tâm khối lượng khâu i. Từ Hình 9.5, có thể thấy:

$$^{i}f_{i}^{*} + {}^{i}f_{i,i-1} - {}^{i}f_{i+1,i} + m_{i}\,{}^{i}g = 0 \tag{9.63}$$

$$^{i}n_{i}^{*} + {}^{i}n_{i,i-1} - {}^{i}n_{i+1,i} - ({}^{i}r_{i} + {}^{i}r_{ci}) \times {}^{i}f_{i,i-1} + {}^{i}r_{ci} \times {}^{i}f_{i+1,i} = 0 \tag{9.64}$$

Viết các pt (9.63), (9.64) dưới dạng đệ quy:

$$^{i}f_{i,i-1} = {}^{i}f_{i+1,i} - m_{i}\,{}^{i}g - {}^{i}f_{i}^{*} \tag{9.65}$$

$$^{i}n_{i,i-1} = {}^{i}n_{i+1,i} + ({}^{i}r_{i} + {}^{i}r_{ci}) \times {}^{i}f_{i,i-1} - {}^{i}r_{ci} \times {}^{i}f_{i+1,i} - {}^{i}n_{i}^{*} \tag{9.66}$$

Sau khi tính moment và phản lực trong hệ tọa độ khâu i, chúng được biến đổi vào hệ tọa độ khâu (i-1) theo phép biến đổi sau:

$$^{i-1}f_{i,i-1} = {}^{i-1}R_{i}\,{}^{i}f_{i,i-1} \tag{9.67}$$

$$^{i-1}n_{i,i-1} = {}^{i-1}R_{i}\,{}^{i}n_{i,i-1} \tag{9.68}$$

Các phương trình từ (9.65) đến (9.68) được dùng để tìm ${}^{i}\mathbf{f}_{i,i-1}$ và ${}^{i}\mathbf{n}_{i,i-1}$, bắt đầu từ khâu bộ tác động cuối. Đối với khâu bộ tác động cuối, ${}^{n}\mathbf{f}_{n+1,n}$ và ${}^{n}\mathbf{n}_{n+1,n}$ là lực và moment ngõ ra bộ tác động cuối cho trước.

Phương trình moment ngẫu lực khớp

Moment hoặc lực bộ tác động τ_i xuất hiện khi quy chiếu lực ràng buộc lên các trục khớp của chúng; nghĩa là:

$$\tau_i = \begin{cases} {}^{i-1}n_{i,i-1}^T \, {}^{i-1}z_{i-1} & \text{khớp quay} \\ {}^{i-1}f_{i,i-1}^T \, {}^{i-1}z_{i-1} & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \qquad (9.69)$$

Nếu có lực dính nhớt trong các khớp, moment hoặc lực bộ tác động được tính như sau:

$$\tau_i = \begin{cases} {}^{i-1}n_{i,i-1}^T \, {}^{i-1}z_{i-1} + b_i\dot{\theta}_i & \text{khớp quay} \\ {}^{i-1}f_{i,i-1}^T \, {}^{i-1}z_{i-1} + b_i\dot{d}_i & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \qquad (9.70)$$

trong đó, b_i là hệ số giảm chấn đối với khớp i.

Với vận tốc khớp và gia tốc khớp đã cho, vận tốc và gia tốc các khâu được tính theo các lực ràng buộc. Vận tốc và gia tốc tức thời của khâu i được tính từ khâu (i-1) theo các pt (9.50), (9.53), (9.58), và (9.59). Quy trình bắt đầu từ khâu chuyển động thứ nhất và kết thúc ở khâu bộ tác động cuối. Khi tìm được vận tốc và gia tốc các khâu, phản lực giữa hai khâu liên tiếp được giải bằng qui trình ngược. Đó là lực ràng buộc tại khớp i được tính từ lực ràng buộc khớp (i+1) trong pt (9.65) và (9.66), qui trình bắt đầu với khâu bộ tác động cuối và kết thúc tại khâu chuyển động thứ nhất.

Ví dụ 9.2: *Động lực học Newton-Euler của cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do.* Xét cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do (Hình 6.4). Ma trận biến đổi D-H là:

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9.71)$$

Giả sử các khâu đồng nhất, có thể tính:

$${}^ir_i = \begin{bmatrix} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ và } {}^ir_{ci} = \begin{bmatrix} -a_i/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{với } i = 1, 2 \qquad (9.72)$$

Nếu hai khâu là dầm tiết diện vuông tương đối nhỏ, ma trận quán tính khâu i trong hệ tọa độ tâm khối lượng là:

$$^{i}I_i = \frac{m_i a_i^2}{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{với } i=1,2$$

Giả sử gia tốc trọng lực có chiều $-y_o$, $^{o}g = [0, -g_c, 0]^T$. Có thể áp dụng phương pháp Newton-Euler để tính vận tốc và gia tốc khâu, sau đó tính lực và moment.

(a) Tính thuận (i=1,2). Trước hết cần tính vận tốc và gia tốc khâu 1. Thay các điều kiện ban đầu $^{o}\omega_o = {}^{0}v_0 = {}^{0}\dot{\omega}_0 = {}^{0}\dot{v}_0 = 0$ vào các pt (9.50), (9.53), (9.58), (9.59):

$$^{1}\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}\dot{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}\dot{v}_1 = a_1 \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{1}\dot{v}_{c1} = \frac{a_1}{2} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gia tốc trọng lực được xét trong hệ tọa độ khâu thứ nhất là:

$$^{1}g = {}^{1}R_0\, {}^{0}g = [-g_c s\theta_1 \quad -g_c c\theta_1 \quad 0]^T$$

Kế tiếp, cần tính vận tốc và gia tốc khâu 2. Thay vận tốc và gia tốc khâu 1 vào các pt (9.50), (9.53), (9.58), (9.59):

$$^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} a_1(\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 c\theta_2) - a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ a_1(\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + a_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^2\dot{v}_2^c = \begin{bmatrix} a_1(\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 c\theta_2) - \frac{1}{2}a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ a_1(\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + \frac{1}{2}a_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gia tốc trọng lực trong hệ tọa độ khâu thứ hai là:

$$^2g = {}^2R_1\,{}^1g = \begin{bmatrix} -g_c s\theta_{12} & -g_c c\theta_{12} & 0 \end{bmatrix}^T$$

(b) Tính ngược (i=2,1) : Trước hết cần tính lực tác dụng lên khâu 2 rồi đến khâu 1. Giả sử không có ngoại lực tác dụng, thay $^2\mathbf{f}_{3,2} = {}^2\mathbf{n}_{3,2} = 0$ cùng với vận tốc và gia tốc khâu 2 đã tính trong phép tính thuận ở trên vào các pt (9.61), (9.62), (9.65), (9.66) với i=2, sẽ được:

$$^2f_2^* = -m_2 \begin{bmatrix} a_1(\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 c\theta_2) - \frac{1}{2}a_2(\dot{\theta}_{11} + \dot{\theta}_2)^2 \\ a_1(\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + \frac{1}{2}a_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^2n_2^* = -\frac{m_2 a_2^2}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$
{}^{2}f_{2,1} = m_2 \begin{bmatrix} a_1(\ddot{\theta}_1 s\theta_2 - \dot{\theta}_1^2 c\theta_2) - \frac{1}{2}a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + g_c s\theta_{12} \\ a_1(\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + \frac{1}{2}a_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + g_c c\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}n_{2,1} = m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}m_2 a_2^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + \frac{1}{2}m_2 a_1 a_2(\ddot{\theta}_1 c\theta_2 + \dot{\theta}_1^2 s\theta_2) + \frac{1}{2}m_2 g_c a_2 c\theta_{12} \end{bmatrix}
$$

Thay lực và moment khâu 2 nêu trên cùng với vận tốc và gia tốc khâu 1 vào các pt (9.61), (9.62), (9.65), (9.66) với i=1, và sử dụng các pt (9.67), (9.68) sẽ được:

$$
{}^{1}f_1^* = -\frac{ma_1}{2}\begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1^2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}n_1^* = -\frac{m_1 a_1^2}{12}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}f_{1,0} = \begin{bmatrix} m_2\left[-a_1\dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2}a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c\theta_2 - \frac{1}{2}a_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)s\theta_2 + g_c s\theta_1\right] \\ + m_1\left(-\frac{1}{2}a_1\dot{\theta}_1^2 + g_c s\theta_1\right) \\ m_2\left[a_1\ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}a_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s\theta_2 + \frac{1}{2}a_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)c\theta_2 + g_c c\theta_1\right] \\ + m_1\left(\frac{1}{2}a_1\ddot{\theta}_1 + g_c c\theta_1\right) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}n_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{3}m_1a_1^2 + \frac{1}{3}m_2a_2^2 + m_2a_1^2 + m_2a_1a_2c\theta_2\right)\ddot{\theta}_1 \\ +\left(\frac{1}{3}m_2a_2^2 + \frac{1}{2}m_2a_1a_2c\theta_2\right)\ddot{\theta}_2 - m_2a_1a_2s\theta_2\left(\dot{\theta}_1\theta_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\right) \\ +\frac{1}{2}m_1g_ca_1c\theta_1 + m_2g_ca_1c\theta_1 + \frac{1}{2}m_2g_ca_2c\theta_{12} \end{bmatrix}
$$

(c) Tính moment khớp. Cuối cùng, áp dụng pt (9.69) để tính moment khớp cần thiết, kết quả là hai phương trình động lực sau:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 = &\left[\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)a_1^2 + m_2a_1a_2c\theta_2 + \frac{1}{3}m_2a_2^2\right]\ddot{\theta}_1 \\
&+\left(\frac{1}{2}m_2a_1a_2c\theta_2 + \frac{1}{3}m_2a_2^2\right)\ddot{\theta}_2 - m_2a_1a_2s\theta_2\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\right) \\
&+g_c\left[\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)a_1c\theta_1 + \frac{1}{2}m_2a_2c\theta_{12}\right]
\end{aligned} \tag{9.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_2 = &\left(\frac{1}{2}m_2a_1a_2c\theta_2 + \frac{1}{3}m_2a_2^2\right)\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2a_2^2\ddot{\theta}_2 \\
&+\frac{1}{2}m_2a_1a_2s\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2g_ca_2c\theta_{12}
\end{aligned} \tag{9.74}
$$

Phương trình động lực học khớp thứ hai đơn giản hơn khớp thứ nhất. Các hiệu ứng động lực học, bao gồm kết nối vận tốc ly tâm và lực Coriolis, và các hiệu ứng trọng lực được nêu rõ trong ví dụ này. Có thể thấy từ các pt (9.73), (9.74), mô hình động lực tương đối phức tạp ngay cả đối với cơ cấu chấp hành đơn giản 2 bậc tự do. Sử dụng phương pháp đệ quy Newton-Euler còn tìm được tất cả các phản lực khớp.

Công thức LAGRANGE

Phương trình chuyển động Newton-Euler chứa tất cả các lực ràng buộc giữa hai khâu liên tiếp là các biến. Để có phương trình dạng kín, cần khử các lực ràng buộc này bằng phép toán bổ sung. Mặt khác, phương

pháp Lagrange thiết lập các phương trình chuyển động bằng cách sử dụng tập hợp các tọa độ tổng quát hoá. Phần này sử dụng các ký hiệu sau:

G: vector trọng lực

I_i : ma trận quán tính khâu i tại tâm khối lượng, biểu diễn trong hệ tọa độ khâu cơ bản

J_i : ma trận Jacobi khâu i

J_{vi}: ma trận con Jacobi liên hệ với vận tốc tuyến tính của tâm khối lượng khâu i

$J\omega_i$: ma trận con Jacobi liên hệ với vector vận tốc góc của khâu i

K : động năng của hệ thống cơ học.

L: hàm Lagrange, L = K-U

M: ma trận quán tính của cơ cấu chấp hành.

M_{ij} : phần tử (i,j) của M.

n: số lượng tọa độ tổng quát.

${}^kp^*_{ci}$: vector vị trí tâm khối lượng khâu i theo hệ tọa độ khâu k và được tính trong hệ tọa độ đế cố định.

Q_i: lực tác dụng tổng quát hoá ứng với tọa độ tổng quát thứ i.

Q: vector lực tổng quát hóa, $Q = [Q,Q,...,Q]^T$

q_i: tọa độ tổng quát hoá thứ i

q: vector các tọa độ tổng quát, $q = [q_1, q_2, ..., q_n]^T$

U: thế năng của hệ thống cơ học.

V : vector ghép nối vận tốc.

δW: công ảo.

Hàm Lagrange được định nghĩa là hiệu giữa động năng và thế năng của hệ thống cơ học:

$$L = K - U \tag{9.75}$$

Chú ý, động năng phụ thuộc vào cả vị trí và vận tốc các khâu trong hệ thống cơ cấu chấp hành, trong khi thế năng chỉ phụ thuộc vị trí các khâu. Phương trình chuyển động Lagrange được tính theo hàm Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.76}$$

Sau đây sẽ định nghĩa tọa độ tổng quát, thiết lập các biểu thức thế năng, động năng, và lực tổng quát của cơ cấu chấp hành robot.

Tọa độ tổng quát hóa

Nhiều lực ràng buộc hiện diện trong hệ thống cơ học. Ràng buộc động học tạo ra một số điều kiện đối với chuyển động tương đối giữa cặp vật thể. Có lẽ các ràng buộc phổ biến là loại do các khớp nối nhiều khâu tạo ra trong hệ thống cơ học.

Sự ràng buộc được chia làm 2 loại; holonom và nonholonom. Ràng buộc đồng hình *holonom* khi điều kiện ràng buộc được biểu diễn bằng phương trình đại số theo tọa độ, theo thời gian, và có dạng:

$$f(x_1, x_2, \ldots, t) \tag{9.77}$$

trong đó, x_i là tọa độ một hạt hoặc vật thể. Sự ràng buộc động học không thể diễn tả theo dạng trên, là nonholonom. Phương trình ràng buộc được tính theo dạng hình học của khớp. Ví dụ, sự ràng buộc đối với khớp cầu có thể xác định theo vector vị trí tâm cầu của một vật thể luôn luôn bằng vector vị trí của ổ cầu bao kín khối cầu. Do đó ràng buộc khớp cầu là holonom. Tương tự, các ràng buộc của khớp quay, khớp trụ, khớp lăng trụ cũng là holonom.

Cấu hình hệ thống cơ học được biết đầy đủ nếu biết vị trí và hướng của tất cả các vật thể của hệ thống theo hệ quy chiếu. Do vật rắn có 6 bậc tự do, hệ thống cơ học có m vật thể chuyển động cần 6m tọa độ để xác định cấu hình một cách đầy đủ trong không gian 3 chiều. Trong hệ thống cơ học, chẳng hạn cánh tay robot, các vật thể này thường là các đối tượng chịu ràng buộc cơ học từ các khớp. Do đó, 6m tọa độ không còn độc lập với nhau. Hầu hết các ràng buộc trong hệ thống cơ học đều là holonom. Nếu tồn tại c ràng buộc holonom, có thể sử dụng các ràng buộc này để loại bỏ c trong số 6m tọa độ, còn lại n = 6m - c tọa độ độc lập và hệ thống được gọi là n-bậc tự do. Sự loại bỏ các tọa độ phụ thuộc cũng có thể được thực hiện bằng cách sử dụng n biến độc lập mới, chẳng hạn $q_1, q_2, \ldots, q_n$, sao cho 6m tọa độ có thể được biểu thị theo n biến đó. Các biến độc lập mới được gọi là các *tọa độ tổng quát hóa*. Số lượng các biến tổng quát hóa độc lập bằng số bậc tự do của hệ cơ học nhiều vật thể. Đối với hệ cơ học

cho trước, các tọa độ tổng quát hóa có thể được định nghĩa theo nhiều cách.

Phương trình chuyển động Lagrange được thiết lập theo tập hợp các tọa độ tổng quát độc lập và các lực tổng quát, được gọi là phương trình Lagrange loại hai. Sử dụng công thức loại hai, tất cả các lực ràng buộc trong các khớp không xuất hiện trong phương trình, và số phương trình bằng số bậc tự do. Trong việc thiết lập các phương trình chuyển động, đôi khi sẽ thuận tiện hơn nếu dùng nhiều tọa độ hơn số bậc tự do. Với tình huống này, tọa độ là không độc lập và hệ phương trình chuyển động phải giải theo tập hợp phương trình ràng buộc, ví dụ, phương pháp số nhân Lagrange. Tập hợp các tọa độ không độc lập được gọi là tọa độ Lagrange dư thừa. Phương trình chuyển động sử dụng tập hợp tọa độ Lagrange dư thừa được gọi là phương trình Lagrange loại một. Công thức loại một chứa một số lực ràng buộc chưa biết, đó là các số nhân Lagrange.

Phương trình Lagrange loại một áp dụng được cho hệ thống cơ học các ràng buộc holonom hoặc nonholonom. Phương trình ràng buộc và các đạo hàm bậc nhất, bậc hai của phương trình này phải gắn liền với phương trình chuyển động để có số lượng phương trình bằng số lượng ẩn số. Phương trình Lagrange loại một phù hợp với mô hình động lực cơ cấu chấp hành song song, có nhiều ràng buộc động học do có nhiều vòng kín.

Mặc dù phương trình Lagrange loại hai chỉ áp dụng cho hệ thống cơ học có ràng buộc holonom, nhưng phù hợp với mô hình động lực cơ cấu chấp hành nối tiếp, do số khớp bằng số bậc tự do. Do đó. các biến khớp $\mathbf{q} = [q_1, q_2, ..., q_n]^T$ tạo thành tập hợp các tọa độ tổng quát độc lập. Mỗi phần tử của $\mathbf{q}$ là góc khớp của khớp quay hoặc khoảng tịnh tiến của khớp lăng trụ. Tọa độ tổng quát q_i không cần có thứ nguyên chiều dài, và lực tổng quát tương ứng Q_i, không cần có thứ nguyên lực, nhưng tích $Q_i^T q_i$ luôn luôn có thứ nguyên công.

Động năng

Xét động năng khâu (Hình 9.5), áp dụng pt (9.34), động năng khâu i có dạng:

$$K_i = \frac{1}{2} v_{ci}^T m_i v_{ci} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i \omega_i \qquad (9.78)$$

Các vector vận tốc và ma trận quán tính trong pt (9.78) có thể được biểu diễn trong hệ quy chiếu bất kỳ. Gọi I_i là ma trận quán tính khâu i

theo tâm khối lượng, trong hệ tọa độ cơ bản; I_i là ma trận quán tính khâu i theo tâm khối lượng, trong hệ tọa độ khâu i. Từ pt (9.29):

$$I_i = {}^0R_i\, {}^iI_i ({}^0R_i)^T \tag{9.79}$$

Chú ý, ${}^iI_i$ bất biến với thời gian, nhưng I_i phụ thuộc vào tư thế cánh tay robot vì được biểu diễn trong hệ tọa độ cơ bản, và sự định hướng khâu i trong hệ tọa độ cơ bản là hàm của các biến khớp.

Vận tốc tâm khối lượng và vận tốc góc khâu i được tính bằng phương pháp đệ quy đã xét ở phần trước. Các đại lượng này cũng có thể được xác định bằng cách áp dụng lý thuyết chuyển động quay vít tức thời. Chúng được thiết lập theo dạng ma trận:

$$\dot{x}_{ci} = J_i \dot{q} \tag{9.80}$$

trong đó

$$\dot{x}_{ci} = \begin{bmatrix} v_{ci} \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad J_i = \begin{bmatrix} J_{vi} \\ J_{\omega i} \end{bmatrix}$$

J_i là ma trận 6×n, quy chiếu các tỷ suất vận tốc khớp tức thời theo vận tốc tâm khối lượng tức thời và vận tốc góc khâu i; J_{vi} và $J\omega_i$ là hai ma trận con 3×n của J_i. J_i được gọi là ma trận Jacobi khâu, và J_{vi}, $J\omega_i$ là ma trận con Jacobi khâu.

Gọi J^j_{vi} và $J^j\omega_i$ là các vector cột thứ j của J_{vi} và $J\omega_i$. Áp dụng lý thuyết chuyển động quay vít tức thời với $j \le i$:

$$J^j_{vi} = \begin{cases} z_{j-1} \times {}^{j-1}p^*_{ci} & \text{khớp quay} \\ z_{j-1} & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.81}$$

$$J^j_{wi} = \begin{cases} z_{j-1} & \text{khớp quay} \\ 0 & \text{khớp lăng trụ} \end{cases} \tag{9.82}$$

trong đó ${}^{j-1}p^*_{ci}$ là vector vị trí xác định từ điểm gốc của hệ tọa độ khâu j-1đến tâm khối lượng khâu i và được tính trong hệ tọa độ khâu cơ bản. Chú ý, J^j_{vi} và $J^j\omega_i$ là tỷ suất biến đổi cục bộ vận tốc tâm khối lượng và vận tốc góc khâu i tương ứng với chuyển động khâu j. Do chuyển động khâu i chỉ phụ thuộc vào các khớp từ 1 đến khớp i, nên khi j >i, hai vector cột

nêu trên bằng zero. Hơn nữa, do cả hai $\mathbf{z}_{j-1}$ và ${}^{j-1}\mathbf{p}^*_{ci}$ đều phụ thuộc vào $\mathbf{q}$, nên ma trận con J_{vi} và $J\omega_i$ là độc lập với cấu hình. Do đó, có thể viết:

$$J_{vi} = \left[J^1_{vi}, J^2_{vi}, \ldots, J^i_{vi}, 0, 0, \ldots, 0\right] \tag{9.83}$$

$$J_{wi} = \left[J^1_{wi}, J^2_{wi}, \ldots, J^i_{wi}, 0, 0, \ldots, 0\right] \tag{9.84}$$

Thay pt (9.80) vào (9.78), và cộng qua tất cả các khâu, sẽ được biểu thức động năng của hệ thống:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_{ci}^T m_i v_{ci} + \omega_i^T I_i \omega_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(J_{vi}\dot{q})^T m_i (J_{vi}\dot{q}) + (J_{wi}\dot{q})^T I_i (j_{wi}\dot{q})\right] \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^T\left[\sum_{i=1}^{n}(J_{vi}^T m_i J_{vi} + J_{wi}^T I_i J_{wi}\right]\dot{q} \end{aligned} \tag{9.85}$$

Để đơn giản, có thể định nghĩa *ma trận quán tính cơ cấu chấp hành* $n \times n$ là:

$$M = \sum_{i=1}^{n}(J_{vi}^T m_i J_{vi} + J_{wi}^T I_i J_{wi}) \tag{9.86}$$

Theo đó, tổng động năng toàn phần của cánh tay robot được xác định theo ma trận quán tính và vector các tỷ suất khớp:

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} \tag{9.87}$$

Chú ý, ma trận quán tính cơ cấu chấp hành M xác định trong pt (9.86) gồm các ma trận con Jacobi khâu J_{vi} và $J\omega_i$, phụ thuộc cấu hình. Tương tự ma trận quán tính của vật rắn, ma trận quán tính cơ cấu chấp hành là ma trận đối xứng xác định dương. Dạng toàn phương của phương trình này cho biết động năng luôn luôn dương trừ khi hệ thống ngưng hoạt động.

Thế năng

Thế năng trong khâu i của cánh tay robot là lượng công cần thiết để nâng tâm khối lượng khâu i từ mặt phẳng quy chiếu ngang đến vị trí hiện tại dưới ảnh hưởng trọng lực. Với quy chiếu theo hệ tọa độ quán tính, công cần thiết để dịch chuyển khâu i đến vị trí $\mathbf{p}_{ci}$ là $-m_i\,\mathbf{g}^T\mathbf{p}_{ci}$. Do đó thế năng toàn phần trong cánh tay robot là:

$$U = -\sum_{i=1}^{n} m_i g^T p_{ci} \tag{9.88}$$

Lực tổng quát hóa

Phần này xét các thành phần trong vector lực tổng quát hóa. Ngoài trọng lực và lực quán tính, các lực tổng quát bao gồm tất cả các lực tác dụng lên cánh tay robot phù hợp các ràng buộc cơ học. Vector lực tổng quát $\mathbf{Q} = [Q_1, Q_2, \ldots, Q_n]^T$ được xác định theo nguyên lý công ảo:

$$\delta W = \mathbf{Q}^T \delta q \tag{9.89}$$

Trước hết sẽ xét trường hợp các bộ tác động tác dụng lực hoặc moment tại các khớp, ngoại lực và moment tác dụng vào bộ tác động cuối. Gọi $\tau = [\tau_1, \ldots, \tau_n]^T$ là vector các moment khớp n chiều do bộ tác động tạo ra và $\mathbf{F}_c = [f_c^T, n_c^T]^T$ là vector 6 chiều biểu thị hợp lực và moment tác dụng tại bộ tác động cuối. Công ảo tạo thành do các lực và moment này là:

$$\delta W = \tau^T \delta q + \mathbf{F}_e^T \delta \mathbf{x} \tag{9.90}$$

trong đó, $\delta\mathbf{x}$ là vector độ dịch chuyển ảo 6 chiều của bộ tác động cuối. Thay quan hệ $\delta\mathbf{x} = J\delta\mathbf{q}$ vào pt (9.90), và kết quả công ảo được cân bằng với pt (9.89), sẽ được vector lực tổng quát:

$$Q = \tau + J^T F_c \tag{9.91}$$

Thành phần ma sát trong vector lực tổng quát cũng được thiết lập công thức. Lực ma sát là hiện tượng phi tuyến tính, khó lập mô hình chính xác, ảnh hưởng đáng kể đối với động học hệ thống. Trong ổ trục được bôi trơn bằng dầu mỡ, có 4 chế độ bôi trơn: ma sát tĩnh, bôi trơn biên, bôi trơn chất lỏng cục bộ, và bôi trơn chất lỏng toàn phần. Trong chế độ thứ tư, lực ma sát tỉ lệ với vận tốc tương đối giữa các vật thể tiếp xúc, và có biểu thức: $-b_i q_i$. Công ảo của loại ma sát này là:

$$\delta W = -f_r^T \delta q \tag{9.92}$$

trong đó, $f_r = [b_1\dot{q}_1, b_2\dot{q}_2, \ldots, b_n\dot{q}_n]^T$ là moment hoặc lực ma sát trong các khớp và dấu trừ biểu thị chiều ngược với vận tốc khớp. Vector lực tổng quát có tính đến loại ma sát này là:

$$Q = \tau + J^T F_e - f_r \tag{9.93}$$

Chú ý, nếu không có lực ma sát và ngoại lực, vector lực tổng quát và vector moment khớp là tương đương (nghĩa là $\mathbf{Q} = \tau$). Trong trường hợp này, các thành phần của vector lực tổng quát là các lực bộ tác động đối với khớp lăng trụ và moment đối với khớp quay.

Dạng tổng quát các phương trình động lực

Để thiết lập công thức các phương trình động lực cho cơ cấu chấp hành nối tiếp, cần thay các pt (9.87), (9.88) vào (9.75), để được biểu thức hàm Lagrange:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q} + \sum_{i=1}^{n} m_i g^T p_{ci} \tag{9.94}$$

Kế tiếp, lấy vi phân hàm Lagrang theo q_i, $\dot{q}_i$, và t để có các phương trình động lực chuyển động. Để dễ lấy đạo hàm, cần khai triển động năng thành tổng vô hướng. Gọi M_{ij} là phần tử (i,j) của ma trận quán tính cơ cấu chấp hành M; pt (9.94) trở thành:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} m_i g^T p_{ci} \tag{9.95}$$

Do thế năng không phụ thuộc $\dot{q}_i$, cần lấy đạo hàm riêng pt (9.95) theo $\dot{q}_i$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\dot{q}_j \tag{9.96}$$

Lấy đạo hàm pt (9.96) theo thời gian:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{dM_{ij}}{dt}\right)\dot{q}_j = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j \tag{9.97}$$

Lấy đạo hàm riêng pt (9.95) theo q_i:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\right) + \sum_{j=1}^{n} m_j g^T\left(\frac{\partial p_{ci}}{\partial q_i}\right) \tag{9.98}$$

Chú ý, đạo hàm riêng của p_{ci} theo q_i bằng vector cột thứ i của ma trận con Jacobi khâu J_{vj}, do đó pt (9.98) trở thành:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} m_j g^T J'_{vj} \tag{9.99}$$

Thay các pt (9.97), (9.99) vào (9.76), sẽ được các phương trình động lực của chuyển động:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\ddot{q}_j + V_i + G_i = Q_i\,, \quad \text{với } i = 1, 2, ..., n. \tag{9.100}$$

trong đó:

$$V_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{9.101}$$

$$G_i = -\sum_{j=1}^{n} m_j g^T J^i_{vj} \tag{9.102}$$

Số hạng thứ nhất trong pt (9.100) là lực quán tính, số hạng thứ hai là lực *ly tâm* và lực *Coriolis*, số hạng thứ ba là tác dụng của trọng lực, từ đó, n phương trình vô hướng (9.100) được viết theo dạng ma trận:

$$M\ddot{q} + V + G = Q \tag{9.103}$$

trong đó $V=[V_1, ..., V_n]^T$, $G = [G_1,..., G_n]^T$, và $Q = [Q_1,..., Q_n]^T$

Phương trình (9.103) là *dạng tổng quát của các phương trình động lực học*. Vector V là *vector ghép nối vận tốc*. Vector G là vector các trọng lực. Có hai loại ghép nối vận tốc giữa các khớp. Các đại lượng bình phương vận tốc là lực ly tâm, và tích vận tốc là lực Coriolis. Ma trận quán tính cơ cấu chấp hành M là đối xứng và xác định dương, nên có thể nghịch đảo. Các đại lượng ngoài đường chéo của M là tác dụng ghép gia tốc giữa các khớp.

Ví dụ 9.3: *Động lực học Lagrange của cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do*. Trong ví dụ này sẽ thiết lập các phương trình chuyển động Lagrange của cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do (Hình 6.4). Các trục tọa độ khâu thẳng hàng với các trục chính của từng khâu. Hai ma trận biến đổi D-H được xác định từ pt (9.71). Tâm khối lượng khâu i, biểu diễn theo hệ tọa độ khâu i, được xác định từ pt (9.72). Cho θ_1 và θ_2 là tập,hợp hai tọa độ tổng quát độc lập. Cần tính các ma trận quán tính khâu, ma trận Jacobi khâu, trọng lực, và phương trình chuyển động Lagrange.

(a) Ma trận quán tính khâu. Giả sử các khâu chuyển động là thuần nhất có tiết diện nhỏ. Ma trận quán tính khâu i tại tâm khối lượng được tính theo hệ tọa độ khâu i là:

$$^{i}I_i = \frac{1}{12} m_i a_i^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{với } i = 1, 2 \tag{9.104}$$

Các ma trận quán tính khâu 1 và 2 tại tâm khối lượng tính theo hệ tọa độ cơ bản được xác định bằng cách thay pt (9.104) với i=1,2 vào (9.79):

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 a_1^2 \begin{bmatrix} s^2\theta_1 & -s\theta_1 c\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_1 & c^2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.105}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 a_2^2 \begin{bmatrix} s^2\theta_{12} & -s\theta_{12} c\theta_{12} & 0 \\ -s\theta_{12} c\theta_{12} & c^2\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.106}$$

(b) Ma trận Jacobi khâu. Vector vị trí tâm khối lượng khâu 1 và 2 ứng với các hệ tọa độ khâu, được tính trong hệ tọa độ cơ bản là:

$$^{0}f_{c1}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_1 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} a_1 s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.107}$$

$$^{1}p_{c2}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_2 c\theta_{12} \\ \frac{1}{2} a_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.108}$$

$$^{0}p_{c2}^{*} = \begin{bmatrix} a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2} a_2 c\theta_{12} \\ a_1 s\theta_1 + \frac{1}{2} a_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.109}$$

Ma trận con jacobi khâu J_{v1} và $J\omega_1$ được tính bằng cách thay các pt (9.107) đến (9.109) vào (9.83) và (9.84):

$$J_{v1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_1 s\theta_1 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1 c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.110}$$

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.111}$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 - \frac{1}{2}a_2 s\theta_{12} & -\frac{1}{2}a_2 s\theta_{12} \\ a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2}a_2 c\theta_{12} & \frac{1}{2}a_2 c\theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.112}$$

$$J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.113}$$

(c) Ma trận quán tính cơ cấu chấp hành. Ma trận này được tính bằng cách thay các pt (9.105), (9.106), và (9.110) đến (9.113) vào (9.86):

$$M = J_{v1}^T m_1 J_{v1} + J_{\omega 1}^T I_1 J_{\omega 1} + J_{v2}^T m_2 J_{v2} + J_{\omega 2}^T I_2 J_{\omega 2}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1 a_1^2 + m_2(a_1^2 + a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}a_2^2) & m_2(\frac{1}{2}a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}a_2^2) \\ m_2(\frac{1}{2}a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}a_2^2) & \frac{1}{3}m_2 a_2^2 \end{bmatrix} \tag{9.114}$$

(d) Vector ghép nối vận tốc. Lấy các đạo hàm riêng của ma trận quán tính cơ cấu chấp hành, pt (9.114), theo θ phù hợp với pt (9.101):

$$V_1 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial M_{1j}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial \theta_1}\right)\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k = -m_2 a_1 a_2 s\theta_2\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\right) \tag{9.115}$$

$$V_2 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial M_{2j}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial \theta_2}\right)\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k = \frac{1}{2}m_2 a_1 a_2 s\theta_2 \dot{\theta}_1^2 \tag{9.116}$$

(e) Vector trọng lực. Trọng lực được tính bằng cách thay các pt (9.110), (9.112) vào (9.102):

$$G_1 = \frac{1}{2}m_1 g_c a_1 c\theta_1 + m_2 g_c a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2}m_2 g_c a_2 c\theta_{12} \tag{9.117}$$

$$G_2 = \frac{1}{2}m_2 g_c a_2 c\theta_{12} \tag{9.118}$$

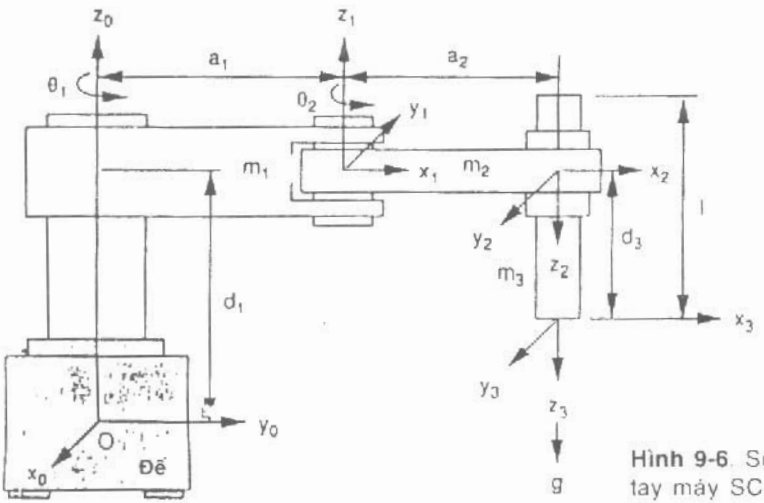
(f) Phương trình chuyển động Lagrange. Giả sử không có ngoại lực đối với bộ tác động cuối và ma sát khớp không đáng kể, vector moment khớp và vector lực tổng quát là tương đương. Phương trình chuyển động Lagrange được tính bằng cách thay các pt (9.114) đến (9.118) vào (9.100). Kết quả là hai phương trình chuyển động động lực:

$$\begin{aligned}\tau_1 = &\left[\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2\right)a_1^2 + m_2 a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}m_2 a_2^2\right]\ddot{\theta}_1 \\ &+ \left(\frac{1}{2}m_2 a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}m_2 a_2^2\right)\ddot{\theta}_2 - m_2 a_1 a_2 s\theta_2\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\right) \\ &+ g_c\left[\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2}m_2 a_2 c\theta_{12}\right]\end{aligned} \tag{9.119}$$

$$\begin{aligned}\tau_2 = &\left(\frac{1}{2}m_2 a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}m_2 a_2^2\right)\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2 a_2^2\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 a_1 a_2 s\theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\ &+ \frac{1}{2}m_2 g_c a_2 c\theta_{12}\end{aligned} \tag{9.120}$$

Có thể nhận được phương trình tương tự khi sử dụng công thức Newton-Euler. Sử dụng phương pháp Lagrange, lực ràng buộc không xuất hiện trong phương trình chuyển động.

Ví dụ 9.4: *Động lực học Lagrange của tay máy SCARA.* Tay máy SCARA có bốn trục khớp song song. Hai khớp đầu và khớp thứ tư là khớp quay, khớp thứ ba là khớp lăng trụ. Để đơn giản, xét chuyển động của ba khâu di động và tổ hợp khối lượng khâu thứ tư với tải. Theo đó, vấn đề sẽ trở thành bài toán thuần vị trí. Hình 9.6 minh họa sơ đồ nguyên lý với ba khâu chuyển động, trong đó trục tọa độ từng hệ tọa độ



Hình 9-6. Sơ đồ tay máy SCARA.

khâu thẳng hàng với trục chính của khâu. Các thông số D-H được nêu trong Bảng 2.2, và ma trận biến đổi D-H theo các pt (2.9) đến (2.11).

Giả sử tất cả các khâu đồng nhất có tiết diện nhỏ. Các vector vị trí tâm khối lượng là:

$$^{1}p_{c1} = [-a_1/2, 0, 0]^T$$

$$^{2}p_{c2} = [-a_2/2, 0, 0]^T$$

$$^{3}p_{c3} = [0, 0, -\ell/2]^T$$

trong đó, ℓ là chiều dài khâu thứ ba. Đặt θ_1, θ_2, và d_3 là tập hợp tọa độ tổng quát độc lập, cần tìm ma trận quán tính khâu, ma trận Jacobi khâu, trọng lực khâu, và thay chúng vào pt (9.100) để có phương trình chuyển động Lagrange.

(a) Ma trận quán tính khâu. Các ma trận quán tính theo các tâm khối lượng từng khâu, được tính theo hệ tọa độ khâu tương ứng của chúng là:

$$^{1}I_1 = \frac{1}{12} m_1 a_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9.121)$$

$$^{2}I_2 = \frac{1}{12} m_2 a_2^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.122}$$

$$^{3}I_3 = \frac{1}{12} m_3 \ell^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.123}$$

Các ma trận quán tính khâu tại các tâm khối lượng khâu tính trong hệ tọa độ cơ bản được xác định bằng cách thay các pt (9.121) đến (9.123) cùng với các ma trận quay của chúng vào (9.79):

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 a_1^2 \begin{bmatrix} s^2\theta_1 & -s\theta_1 c\theta_1 & 0 \\ -s\theta_1 c\theta_1 & c^2\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.124}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 a_2^2 \begin{bmatrix} s^2\theta_{12} & -s\theta_{12} c\theta_{12} & 0 \\ -s\theta_{12} c\theta_{12} & c^2\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.125}$$

$$I_3 = \frac{1}{12} m_3 \ell^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.126}$$

(b) Ma trận Jacobi khâu. Các vector vị trí tâm khối lượng của khâu 1,2, và 3 trong các hệ tọa độ khâu được biểu diễn theo hệ tọa độ khâu cơ bản là:

$$^{0}\vec{p}_{c1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_1 c\theta_1 \\ \frac{1}{2} a_1 s\theta_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{9.127}$$

$$
{}^{1}\dot{p}_{c2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_2 c\theta_{12} \\ \frac{1}{2}a_2 s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.128}
$$

$$
{}^{0}\dot{p}_{c2} = \begin{bmatrix} a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2}a_2 c\theta_{12} \\ a_1 s\theta_1 + \frac{1}{2}a_2 s\theta_{12} \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{9.129}
$$

$$
{}^{2}\dot{p}_{c3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 - \frac{1}{2}\ell \end{bmatrix} \tag{9.130}
$$

$$
{}^{1}\dot{p}_{c3} = \begin{bmatrix} a_2 c\theta_{12} \\ a_2 s\theta_{12} \\ -d_3 + \frac{1}{2}\ell \end{bmatrix} \tag{9.131}
$$

$$
{}^{0}\dot{p}_{c3} = \begin{bmatrix} a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} \\ a_1 s\theta_1 + a_2 s\theta_{12} \\ d_1 - d_3 + \frac{1}{2}\ell \end{bmatrix} \tag{9.132}
$$

Các ma trận con Jacobi khâu, J_{vi} và $J\omega_i$, được xác định bằng cách thay các phương trình trên vào pt (9.83) và (9.84):

$$
J_{v1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}a_1 s\theta_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1 c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.133}
$$

$$J_{\omega 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.134}$$

$$J_{v2} = \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 - \frac{1}{2}a_2 s\theta_{12} & -\frac{1}{2}a_2 s\theta_{12} & 0 \\ a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2}a_2 c\theta_{12} & \frac{1}{2}a_2 c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.135}$$

$$J_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.136}$$

$$J_{v3} = \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 - a_2 s\theta_{12} & -a_2 s\theta_{12} & 0 \\ a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} & a_2 c\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{9.137}$$

$$J_{\omega 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.138}$$

(c) Ma trận quán tính cơ cấu chấp hành. Ma trận này được xác định bằng cách thay các pt (9.124) đến (9.126) và (9.133) đến (9.138) vào (9.86):

$$M = J_{v1}^T m_1 J_{v1} + J_{\omega 1}^T I_1 J_{\omega 1} + J_{v2}^T m_2 J_{v2} + J_{\omega 2}^T I_2 J_{\omega 2} + J_{v3}^T m_3 J_{v3} + J_{\omega 3}^T I_3 J_{\omega 3}$$

$$= m_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} a_1^2 + a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{2}a_2^2 & \frac{1}{2}a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}a_2^2 & 0 \\ \frac{1}{2}a_1 a_2 c\theta_2 + \frac{1}{3}a_2^2 & \frac{1}{3}a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ m_3 \begin{bmatrix} a_1^2 + 2a_1 a_2 c\theta_2 + a_2^2 & a_1 a_2 c\theta_2 + a_2^2 & 0 \\ a_1 a_2 c\theta_2 + a_2^2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.139}$$

(d) Vector ghép nối vận tốc. Lấy đạo hàm riêng của ma trận quán tính cơ cấu chấp hành theo q_i phù hợp với pt (9.101):

$$V_1 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial M_{1j}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_1}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k = -(m_2 + 2m_3)a_1a_2s\theta_2\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\right) \tag{9.140}$$

$$V_2 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial M_{2j}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_2}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k = \left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)a_1a_2s\theta_2\dot{\theta}_1^2 \tag{9.141}$$

$$V_3 = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial M_{3j}}{\partial q_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{jk}}{\partial q_3}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k = 0 \tag{9.142}$$

(e) Vector trọng lực. Giả sử gia tốc trọng lực hướng theo chiều z_o, nghĩa là $g=[0,0,-g_c]^T$, trọng lực được xác định bằng cách thay các pt (9.133), (9.135), (9.137) vào (9.102):

$$G_1 = -\sum_{j=1}^{3} m_j g^T J_{vj}^1 = 0 \tag{9.143}$$

$$G_2 = -\sum_{j=1}^{3} m_j g^T J_{vj}^2 = 0 \tag{9.144}$$

$$G_3 = -\sum_{j=1}^{3} m_j g^T J_{vj}^3 = -m_3 g_c \tag{9.145}$$

(f) Phương trình chuyển động Lagrange. Giả sử không có ngoại lực và moment tác dụng lên bộ tác động cuối và ma sát khớp không đáng kể, vector moment khớp và vector lực tổng quát là tương đương. Thay các pt (9.139) đến (9.145) vào (9.100):

$$\begin{aligned}\tau_1 = &\left[\left(\frac{1}{3}m_1 + m_2 + m_3\right)a_1^2 + (m_2 + 2m_3)a_1a_2c\theta_2 + \left(\frac{1}{3}m_2 + m_3\right)a_2^2\right]\ddot{\theta}_1 \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)a_1a_2c\theta_2 + \left(\frac{1}{3}m_2 + m_3\right)a_2^2\right]\ddot{\theta}_2 \\ &- (m_2 + 2m_3)a_1a_2s\theta_2\left(\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2\right)\end{aligned} \tag{9.146}$$

$$\tau_2 = \left[\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)a_1a_2c\theta_2 + \left(\frac{1}{3}m_2 + m_3\right)a_2^2\right]\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{1}{3}m_2 + m_3\right)a_2^2\ddot{\theta}_2$$
$$+\left(\frac{1}{2}m_2 + m_3\right)a_1a_2s\theta_2\dot{\theta}_1^2 \tag{9.147}$$

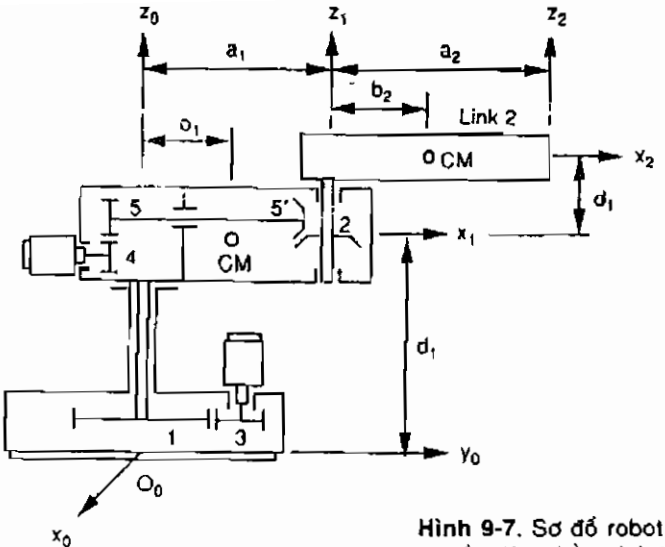
$$\tau_3 = m_3\ddot{d}_3 - m_3g_c \tag{9.148}$$

Các phương trình (9.146) đến (9.148) là phương trình động lực chuyển động của tay máy SCARA 3 bậc tự do. Mô hình phức tạp hơn so với cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do. Điều này là do cấu trúc của hai trục khớp đầu của cơ cấu SCARA về cơ bản tương tự cơ cấu phẳng 2 bậc tự do. Trong cơ cấu tay máy SCARA, hai trục khớp đầu điều khiển vị trí bộ tác động cuối theo hàng ngang, còn khớp lăng trụ thứ ba điều khiển vị trí dọc. Trọng lực không xuất hiện trong hai phương trình đầu, vì gia tốc trọng lực song song với hai trục khớp đầu. Có thể thấy chuyển động khớp thứ ba hoàn toàn độc lập với hai khớp đầu, khâu thứ ba tác động đơn thuần như một tải đối với chuyển động của hai khớp đầu.

Tác dụng quán tính của rotor

Trong các phần trước, đã giả thiết mỗi khớp trong cơ cấu chấp hành nối tiếp được truyền động trực tiếp bằng động cơ, không xét tác dụng quán tính của bánh răng và rotor. Nói đúng ra, các phương trình kết quả trên chỉ đúng với cơ cấu chấp hành truyền động trực tiếp. Trong cơ cấu chấp hành truyền động gián tiếp, mỗi khớp được truyền động bằng động cơ qua bộ giảm tốc bánh răng. Mặc dầu quán tính của các bánh răng và rotor nhỏ, nhưng có ảnh hưởng đáng kể đối với động học cơ cấu. Đó là do tác dụng quán tính, phản ánh trong không gian khớp, là hàm bình phương hoặc tích của tỉ số truyền động răng. Mô hình động lực chính xác cần phải xét điều này. Phần này sẽ khảo sát cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do để minh hoạ nguyên lý.

Hình 9.7 minh họa cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do truyền động răng. Khâu 1 quay so với khâu cơ bản cố định quanh trục z_0. Khâu 2 quay so với khâu 1 qua trục z_1. Để đơn giản, ở đây chỉ vẽ một số bánh răng. Trong thực tế thường dùng nhiều bậc giảm tốc bánh răng trên mỗi đường truyền động. Động cơ 1 điều khiển khâu chuyển động thứ nhất qua cặp bánh răng lắp trên trục động cơ 1 và khâu 1. Động cơ 2 điều khiển khâu



Hình 9-7. Sơ đồ robot 2-dof truyền động bằng bánh răng.

2 qua cặp bánh răng xoắn trên trục động cơ 2 và trục trung gian 5, cộng với cặp bánh răng nón gắn trên đầu còn lại của trục 5 và khâu 2. Động cơ 1 lắp trên đế cố định, động cơ 2 lắp ở cuối khâu 1. Giả sử gia tốc trọng trường có chiều theo $-z_o$, cần khai triển mô hình động lực cho cơ cấu này.

Phân tích động học

Trong Chương 7 đã phân tích động học cơ cấu robot truyền động bánh răng theo hai bước. Bước một là xác định chuỗi vòng hở tương đương và quan hệ động học giữa bộ tác động cuối với các góc khớp trong chuỗi vòng hở tương đương. Bước hai là xác định quan hệ động học giữa các góc khớp và độ dịch chuyển bộ tác động ngõ vào. Chương 2 trình bày quan hệ động học giữa vị trí bộ tác động cuối và các góc khớp. Phần này sẽ áp dụng lý thuyết mạch cơ sở để thiết lập quan hệ động học giữa các góc khớp và độ dịch chuyển bộ tác động ngõ vào. Trên Hình 9.7, chuỗi vòng hở tương đương chứa ba khâu sơ cấp: khâu 0, khâu 1, khâu 2. Tất cả các khâu còn lại đều là khâu thứ cấp. Khâu 0 mang bánh răng 3; khâu 1 mang bánh răng 4 và 5; khâu 2 không mang khâu thứ cấp.

Phần này sẽ xác định quan hệ động học giữa các góc khớp và độ dịch chuyển bộ tác động cuối bằng cách áp dụng lý thuyết mạch cơ sở. Có ba

cặp bánh răng. Khâu 0 là bệ đỡ cặp bánh răng 3-1; khâu 1 là bệ đỡ cặp bánh răng 4-5 và 5'-2. Gọi N_{ij} là tỉ số truyền giữa bánh răng i và j. Phương trình mạch cơ sở có dạng:

$$f(3, 1, 0): \qquad \theta_{3,0} = -N_{13}\theta_{1,0} \tag{9.149}$$

$$f(4, 5, 1): \qquad \theta_{4,1} = -N_{54}\theta_{5,1} \tag{9.150}$$

$$f(5', 2, 1): \qquad \theta_{5,1} = -N_{25}\theta_{2,1} \tag{9.151}$$

trong đó $\theta_{i,j}$ là sự quay tương đối khâu i so với khâu j.

Vì $\theta_{1,0}$ và $\theta_{2,1}$ là các góc khớp của chuỗi vòng hở tương đương, nên các độ dịch chuyển góc khác được tính theo hai góc khớp này. Thay pt (9.151) vào (9.150):

$$\theta_{4,1} = N_{54}N_{25}\theta_{2,1} \tag{9.152}$$

Tổ hợp các pt (9.149), (9.151), (9.152):

$$\begin{bmatrix} \theta_{3,0} \\ \theta_{4,1} \\ \theta_{5,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_{13} & 0 \\ 0 & N_{54}N_{25} \\ 0 & -N_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \tag{9.153}$$

Để đơn giản, có thể sử dụng θ_i thay cho $\theta_{i,i-1}$ với i=1 và 2 trong pt (9.153). Do đó, với các góc khớp đã cho, có thể tính các chuyển động quay tương ứng của rotor và trục trung gian.

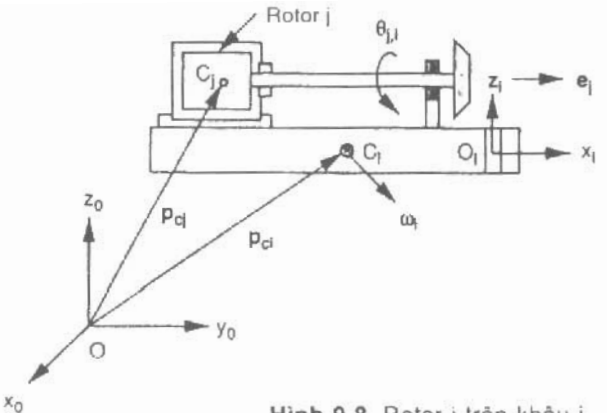
Động năng của rotor quay

Trước khi tính các phương trình động lực học chuyển động, cần xét động năng của rotor j gắn trên khâu sơ cấp i (Hình 9.8). Giả sử khối lượng rotor phân bố đối xứng qua trục quay. Điều này hợp lý vì rotor, bánh răng, và trục đều đối xứng qua trục quay của chúng.

Gọi v_{cj} là vector tuyệt đối của tâm khối lượng rotor, ω_j là vận tốc góc tuyệt đối của rotor, và I_j là ma trận quán tính của rotor tại tâm khối lượng rotor được tính theo hệ tọa độ quán tính. Động năng khâu j là:

$$K_j = \frac{1}{2}\left[v_{cj}^T m_j v_{cj} + \omega_j^T I_j \omega_j\right] \tag{9.154}$$

Vận tốc góc tuyệt đối khâu j , được tính theo vận tốc góc tuyệt đối ω_i



Hình 9-8. Rotor j trên khâu i

của thành phần truyền động, và vận tốc góc rotor liên hệ với thành phần truyền động này, là:

$$\omega_j = \omega_i + \dot{\theta}_{j,i} e_j \tag{9.155}$$

trong đó e_j là chiều của trục rotor, và $\theta_{j,i}$ là chuyển động quay tương đối của khâu j so với khâu i.

Thay pt (9.155) vào (9.154) và sử dụng đặc tính đối xứng của ma trận quán tính:

$$K_j = \frac{1}{2}\left[v_{cj}^T m_j v_{cj} + \omega_i^T I_j \omega_i + 2\omega_i^T I_j e_j \dot{\theta}_{j,i} + e_j^T I_j e_j \dot{\theta}_{j,i}^2\right] \tag{9.156}$$

Đại lượng $e_j^T I_j e_j = I_{j,z}$ được gọi là *moment trục quán tính* của rotor j. Có thể thấy chỉ có hai số hạng cuối vế phải pt (9.156) phụ thuộc chuyển động quay tương đối của rotor. Đối với rotor đối xứng đồng trục, tâm khối lượng rotor trên trục quay, nên có thể xem là điểm cố định trên thành phần truyền động. Hơn nữa, do đối xứng, ma trận quán tính rotor I_j là bất biến trong hệ tọa độ khâu i. Vì thế, sự đóng góp của hai số hạng này thường được kết hợp với khâu i để tạo thành khâu tương đương. Từ đó, các hiệu ứng quán tính của rotor do chuyển động quay tương đối so với thành phần truyền động sẽ là:

$$\tilde{K}_j = \frac{1}{2} I_{j,z} \dot{\theta}_{j,i}^2 + I_{j,z}(\omega_i^T e_j)\dot{\theta}_{j,i} \tag{9.157}$$

Nói chung, $\dot{\theta}_{j,i}$ là hàm tuyến tính của các tỷ suất vận tốc khớp trong chuỗi vòng hở tương đương. Đối với cơ cấu có từng khớp được truyền động bằng một bộ tác động, $\dot{\theta}_{j,i}$ quan hệ với tỷ suất khớp $\dot{q}_{i+1,i}$ theo tỉ số truyền động, N. Thay $\dot{\theta}_{j,i} = N\dot{q}_{i+1,i}$ vào pt (9.157):

$$\dot{K}_j = \frac{1}{2}N^2 I_{j,z}\dot{q}_{i+1,i}^2 + NI_{j,z}(\omega_i^T e_j)\dot{q}_{i+1,i} \qquad (9.158)$$

Chú ý, việc cộng $N^2 I_{j,z}$ vào quán tính hệ thống robot chỉ có giá trị nếu thành phần truyền động là tĩnh tại hoặc vận tốc góc vuông góc với trục quay rotor, nghĩa là khi $\omega_i^T e_j = 0$.

Phân tích động lực học

Phần này sẽ thực hiện sự phân tích động lực học của cơ cấu chấp hành nối tiếp. Trước hết sẽ áp dụng phương pháp đệ quy để tính vận tốc góc, vận tốc tâm khối lượng, và thế năng của mỗi khâu. Sau đó, thay các kết quả tính toán vào phương trình chuyển động Lagrange.

Khâu tương đương thứ nhất gồm khâu 1, rotor 4, trục trung gian 5, và các bánh răng liên quan. Khâu tương đương thứ 2 gồm khâu 2 và bánh răng nón. Gọi m_i là khối lượng khâu tương đương i. Để đơn giản khi phân tích có thể giả sử ma trận quán tính của khâu tương đương i tại tâm khối lượng hỗn hợp được tính theo hệ tọa độ khâu i có dạng:

$$^1I_1 = \begin{bmatrix} I_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{i,z} \end{bmatrix}$$

Động năng và thế năng khâu 1. Điều kiện ban đầu của khâu cơ bản là $^0\omega_0 = {}^0v_0 = 0$. Vận tốc góc và vận tốc tâm khối lượng khâu 1 được tính theo hệ tọa độ khâu 1 là:

$$^1\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$$^1v_{c1} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

trong đó, b_1 xác định vị trí tâm khối lượng hỗn hợp khâu 1 dọc theo trục x_1 (Hình 9.7). Gia tốc không cần trong công thức Lagrange, nên động năng khâu 1 là:

$$K_1 = \frac{1}{2}{}^1v_{c1}^T m_1 {}^1v_{c1} + \frac{1}{2}{}^1\omega_1^T {}^1I_1 {}^1\omega_1 = \frac{1}{2}(m_1 b_1^2 + I_{1,z})\dot{\theta}_1^2 \qquad (9.159)$$

và thế năng khâu 1 là:

$$U_1 = m_1 g_c d_1 \qquad (9.160)$$

Động năng và thế năng khâu 2. Vận tốc góc và vận tốc tuyến tính của tâm khối lượng hỗn hợp khâu 2 được tính theo hệ tọa độ khâu 2 là:

$${}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2v_{c2} = \begin{bmatrix} a_1 s\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ a_1 c\theta_2 \dot{\theta}_1 + b_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

trong đó b_2 xác định vị trí tâm khối lượng hỗn hợp khâu 2 dọc theo trục x_2 (Hình 9.7). Động năng khâu 2 là:

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}{}^2v_{c2}^T m_2 {}^2v_{c2} + \frac{1}{2}{}^2\omega_2^T {}^2I_2 {}^2\omega_2 \\ &= \frac{1}{2} m_2 \left[a_1^2\dot{\theta}_1^2 + b_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2a_1 b_2 c\theta_2 \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\right] + \frac{1}{2} I_{2,z}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \end{aligned} \qquad (9.161)$$

và thế năng khâu 2 là:

$$U_2 = m_2 g_c (d_1 + d_2) \qquad (9.162)$$

Động năng rotor và bánh răng. Chú ý, $\omega_i^T e_j = 0$ đối với i = 0 và 1. Thay pt (9.153) vào (9.157), sẽ được động năng bổ sung từ rotor và bánh răng:

$$K_r = \frac{1}{2}\left[N_{13}^2 I_{3,z}\dot{\theta}_1^2 + (N_{54}^2 I_{4,z} + I_{5,z})N_{25}^2\dot{\theta}_2^2\right] \qquad (9.163)$$

Hàm Lagrange và các đạo hàm. Thay các pt (9.159) đến (9.163) vào (9.75), sẽ được hàm Lagrange:

$$L = \frac{1}{2}\left[(k_1 + 2m_2a_1b_2c\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + k_2\dot{\theta}_2^2 + 2(k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right] - m_1g_cd_1 - m_2g_c(d_1 + d_2) \quad (9.164)$$

trong đó:

$$k_1 = k_3 + k_4 + N_{13}^2 I_{3,z} + m_2a_1^2$$

$$k_2 = k_4 + N_{54}^2 N_{25}^2 I_{4,z} + N_{25}^2 I_{5,z}$$

$$k_3 = I_{1,z} + m_1b_1^2$$

$$k_4 = I_{2,z} + m_2b_2^2$$

Chú ý, k_3 là moment khối lượng quán tính khâu 1 theo trục z_o, k_4 là moment khối lượng quán tính khâu 2 theo trục z_1. Hiệu ứng quán tính bánh răng và rotor là hàm bình phương các tỉ số truyền tương ứng.

Lấy đạo hàm riêng L lần lượt theo $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (9.165)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2a_1b_2s\theta_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (9.166)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (k_1 + 2m_2a_1b_2c\theta_2)\dot{\theta}_1 + (k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2)\dot{\theta}_2) \quad (9.167)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = k_2\dot{\theta}_2 + (k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2)\dot{\theta}_1) \quad (9.168)$$

Lấy tổng các đạo hàm từ các pt (9.167) và (9.168) theo thời gian:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (k_1 + 2m_2a_1b_2c\theta_2)\ddot{\theta}_1 + (k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2)\ddot{\theta}_2 - m_2a_1b_2s\theta_2\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (9.169)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = (k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2)\ddot{\theta}_1 + k_2\ddot{\theta}_2 - m_2a_1b_2s\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \quad (9.170)$$

Phương trình chuyển động Lagrange. Thay các pt (9.165), (9.166), (9.169), (9.170) vào (9.76) sẽ có phương trình chuyển động Lagrange:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta,\dot{\theta}) + G(\theta) = \tau \qquad (9.171)$$

trong đó:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} k_1 + 2m_2a_1b_2c\theta_2 & k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2 \\ k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2a_1b_2s\theta_2\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2a_1b_2s\theta_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình (9.171) là mô hình động lực của cơ cấu chấp hành hai-khâu. Dù quán tính rotor nhỏ, nhưng có hiệu ứng đáng kể vì chúng được nhân theo bình phương hoặc tích tỉ số truyền. Bộ giảm tốc 50 đến 100 thường dùng trong robot công nghiệp. Ví dụ, với tỉ số truyền động 60, quán tính rotor tăng lên 3600 lần.

Phương trình động lực không gian bộ tác động cuối

Trong các phần trước đã tìm được các phương trình động lực chuyển động theo các góc khớp **q**, hay trong không gian khớp. Giả sử quỹ đạo bộ tác động cuối được tính theo các góc khớp, vận tốc, và gia tốc. Dựa vào sự thiết lập công thức không gian khớp, nhiều sơ đồ điều khiển truyền động khác nhau đã được nghiên cứu. Tuy nhiên, trong thực tế, thường lập trình quỹ đạo bộ tác động cuối trong không gian theo tọa độ vuông góc, **x**, và đối với sơ đồ điều khiển dựa trên các khớp làm việc với quỹ đạo không gian theo tọa độ vuông góc cần được biến đổi vào quỹ đạo không gian khớp. Về lý thuyết, sự biến đổi này có thể được thực hiện bằng cách áp dụng:

$\mathbf{q}_d$ = động học đảo của $\mathbf{x}_d$

$$\dot{q}_d = J^{-1}\dot{x}_d$$

$$\ddot{q}_d = J^{-1}\dot{x}_d + J^{-1}\ddot{x}_d \tag{9.172}$$

trong đó, J là ma trận Jacobi và ký hiệu d dùng để biểu thị đại lượng mong muốn.

Trong thực tế, rất khó tính các phương trình trên một cách hiệu quả đối với yêu cầu điều khiển thời gian thực. Do đó, chỉ các góc khớp mong muốn $\mathbf{q}_d$ được tính từ động học đảo, còn vận tốc khớp và gia tốc được tính bằng các phương pháp số theo sai phân. Tuy nhiên với kỹ thuật điều khiển chính xác, điều mong muốn là tính phương trình động lực trong không gian bộ tác động cuối. Sau đây là phương pháp thực hiện.

Vận tốc bộ tác động cuối quan hệ vận tốc khớp theo phương trình:

$$\dot{x} = J\dot{q} \tag{9.173}$$

Giả sử J là ma trận vuông không có trạng thái đặc biệt, thay phép biến đổi đảo pt (9.173) vào (9.87), sẽ được biểu thức động năng theo vận tốc bộ tác động cuối:

$$K = \frac{1}{2}\dot{x}^T\tilde{M}\dot{x} \tag{9.174}$$

trong đó:

$$\tilde{M} = (J^{-1})^T M J^{-1} \tag{9.175}$$

là ma trận quán tính cơ cấu chấp hành được tính trong không gian bộ tác động cuối. Phương trình (9.175) là *ma trận quán tính không gian bộ tác động cuối* được gọi là *ma trận quán tính DesCartes*.

Lấy đạo hàm pt (9.173) theo thời gian:

$$\ddot{x} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q} \tag{9.176}$$

Nhân cả hai vế pt (9.176) với J^{-1} và rút gọn:

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{x} - \dot{J}\dot{q}) \tag{9.177}$$

Nhân pt (9.103) với J^{-T}, và thay các pt (9.175), (9.177) vào kết quả:

$$\tilde{M}\ddot{x} + \tilde{V} + \tilde{G} = \tilde{Q} \tag{9.178}$$

trong đó,

$$\tilde{V} = J^{-T}(V - MJ^{-1}\dot{J}\dot{q})$$

Phương trình chuyển động Lagrange. Thay các pt (9.165), (9.166), (9.169), (9.170) vào (9.76) sẽ có phương trình chuyển động Lagrange:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + V(\theta,\dot{\theta}) + G(\theta) = \tau \qquad (9.171)$$

trong đó:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} k_1 + 2m_2a_1b_2c\theta_2 & k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2 \\ k_4 + m_2a_1b_2c\theta_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2a_1b_2s\theta_2\dot{\theta}_2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ m_2a_1b_2s\theta_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình (9.171) là mô hình động lực của cơ cấu chấp hành hai-khâu. Dù quán tính rotor nhỏ, nhưng có hiệu ứng đáng kể vì chúng được nhân theo bình phương hoặc tích tỉ số truyền. Bộ giảm tốc 50 đến 100 thường dùng trong robot công nghiệp. Ví dụ, với tỉ số truyền động 60, quán tính rotor tăng lên 3600 lần.

Phương trình động lực không gian bộ tác động cuối

Trong các phần trước đã tìm được các phương trình động lực chuyển động theo các góc khớp **q**, hay trong không gian khớp. Giả sử quỹ đạo bộ tác động cuối được tính theo các góc khớp, vận tốc, và gia tốc. Dựa vào sự thiết lập công thức không gian khớp, nhiều sơ đồ điều khiển truyền động khác nhau đã được nghiên cứu. Tuy nhiên, trong thực tế, thường lập trình quỹ đạo bộ tác động cuối trong không gian theo tọa độ vuông góc, **x**, và đối với sơ đồ điều khiển dựa trên các khớp làm việc với quỹ đạo không gian theo tọa độ vuông góc cần được biến đổi vào quỹ đạo không gian khớp. Về lý thuyết, sự biến đổi này có thể được thực hiện bằng cách áp dụng:

$\mathbf{q}_d$ = động học đảo của $\mathbf{x}_d$

$$\dot{q}_d = J^{-1}\dot{x}_d$$

$$\tilde{G} = J^{-T}G$$

$$\tilde{Q} = J^{-T}Q$$

Do đó, khi đã có các phương trình động lực trong không gian khớp, có thể biến đổi chúng vào không gian bộ tác động cuối. Mặc dù các phương trình chuyển động trên được tính trong không gian bộ tác động cuối, nhưng vẫn có vài số hạng như $\tilde{V}$, $\tilde{G}$, và $\tilde{Q}$ được viết dưới dạng hàm theo các biến khớp **q**. Do sự không tuyến tính của động học đảo, không thể biểu diễn mọi đại lượng theo các biến bộ tác động **x**. Chú ý, khi cánh tay robot tiến tới trạng thái đặc biệt, ma trận Jacobi không thể nghịch đảo và một số đại lượng trong không gian bộ tác động cuối trở nên rất lớn.

Tóm tắt

Chương này mở đầu bằng sự khái quát các tính chất quán tính, moment khối lượng, và động năng của vật rắn. Moment khối lượng và động năng của vật rắn có thể được chia thành hai phần, liên hệ với tâm khối lượng và chuyển động của vật rắn quanh tâm khối lượng. Phần kế tiếp trình bày các định luật Newton-Euler, đưa ra các phương trình chuyển động Newton và Euler. Hai phương pháp phân tích động lực học của cơ cấu chấp hành nối tiếp được giới thiệu. Sự thiết lập phương trình Newton-Euler đệ quy gồm tính toán thuận và tính toán ngược. Trong tính toán thuận, cần tính vận tốc và gia tốc lần lượt cho từng khâu, từ khâu 1 đến khâu n, sử dụng các phương trình động học đã đề cập trong Chương 4. Trong tính toán ngược, phản lực khớp được tính toán lần lượt cho từng khâu, từ khâu n trở lại khâu 1, sử dụng các phương trình chuyển động Newton-Euler. Mặc dầu phương pháp đệ quy khá dài, nhưng có thể xác định mọi phản lực khớp, rất hữu ích khi xác định kích cỡ khâu và ổ đỡ trong giai đoạn thiết kế. Phương pháp Lagrange thiết lập công thức với tất cả các lực ràng buộc đều bị loại bỏ từ đầu. Các ma trận con Jacobi, ma trận quán tính cơ cấu chấp hành, và đạo hàm các lực tổng quát hóa đều được giới thiệu, từ đó xác định dạng ma trận tổng quát của các phương trình động lực chuyển động. Phần cuối giới thiệu về quán tính rotor, được hiểu là quán tính vật thể quay. Quán tính rotor, trong nhiều tài liệu thường không xét đến, nhưng có ảnh hưởng rõ rệt đối với động lực học cơ cấu chấp hành. Phần này còn trình bày tóm tắt phương pháp biến đổi các phương trình động lực theo không gian bộ tác động cuối.

Chương 10

ĐỘNG LỰC HỌC CƠ CẤU CHẤP HÀNH SONG SONG

Giới thiệu

Chương này sẽ trình bày khái quát về động lực học cơ cấu chấp hành song song. Tuy động lực học cơ cấu chấp hành song song được nghiên cứu nhiều trong 20 năm gần đây, nhưng tài liệu về động lực học cơ cấu chấp hành song song tương đối ít. Phân tích động lực học cơ cấu này gặp nhiều khó khăn do sự hiện diện của nhiều chuỗi vòng kín. Nhiều phương pháp được đề nghị, chẳng hạn hệ phương trình Newton-Euler, hệ phương trình Lagrange, nguyên lý công ảo, và vài phương pháp khác.

Phương pháp Newton-Euler đòi hỏi các phương trình chuyển động phải được viết cho từng vật thể trong cơ cấu, do đó có quá nhiều phương trình và hiệu suất tính toán thấp. Phương pháp Lagrange loại bỏ mọi phản lực và moment, hiệu quả hơn phương pháp Newton-Euler, nhưng do nhiều ràng buộc từ các vòng kín của cơ cấu song song, việc thiết lập các phương trình chuyển động theo tập hợp các tọa độ độc lập tổng quát hóa trở nên rất khó khăn. Để đơn giản hóa vấn đề, có thể dùng thêm các tọa độ và tập hợp các thừa số Lagrange. Trong một số trường hợp, các nhánh có thể được xét một cách gần đúng là các khối lượng điểm nếu có sai số mô hình đủ nhỏ. Hiện nay, nguyên lý công ảo là phương pháp phân tích hiệu quả nhất.

Phần đầu sẽ trình bày phương pháp phân tích cơ cấu chấp hành song song sử dụng hệ phương trình Newton-Euler. Sau đó sẽ giới thiệu phương pháp sử dụng nguyên lý công ảo. Cuối cùng sẽ trình bày mô hình động lực học của một số cơ cấu chấp hành song song được xây dựng bằng phương pháp Lagrange.

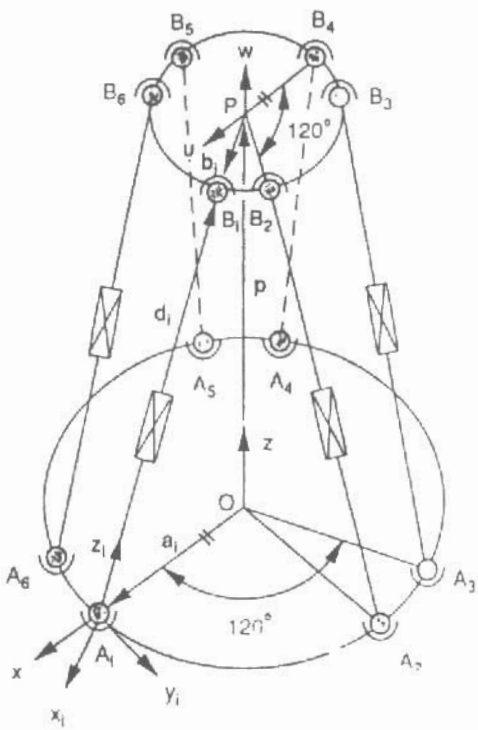
Công thức NEWTON - EULER

Phần này sẽ minh họa phương pháp áp dụng các phương trình Newton-Euler để phân tích động lực bệ Stewart-Gough.

Động lực học bệ Stewart - Gough

Hình 10.1 minh họa sơ đồ nguyên lý bệ Stewart-Gough, đã xét trong các Chương 3 và 5. Để phân tích, cần chọn hệ tọa độ A(x,y,z) tại đế cố định, và hệ tọa độ B(u,v,w) tại bệ di động. Mặt phẳng x-y chứa các khớp cầu A_i, với i = 1 đến 6; mặt phẳng u-v chứa các khớp cầu B_i, với i=1 đến 6. Gốc hệ tọa độ di động B tại tâm P bệ di động; gốc hệ tọa độ cố định A tại tâm O đế cố định. Mỗi phần có sáu nhánh, được ký hiệu theo vector $\mathbf{d}_i$. Hệ tọa độ $C(x_i,y_i,z_i)$ gắn vào từng nhánh, với gốc tại A_i. Trục z_i hướng từ A_i đến B_i. Trục y_i song song với tích hai vector đơn vị trên trục z_i và z, trục x_i được xác định theo quy tắc bàn tay phải.

Trong bài toán động lực đảo, biết hành trình (quĩ đạo) theo thời gian, cần xác định lực và moment bộ tác động tạo ra chuyển động đó. Bệ chuyển động được xác định bằng vector vị trí tâm khối **p** và ba góc Euler



Hình 10-1. Sơ đồ cơ cấu Stewart-Gough.

là ϕ, θ, và ψ. Vận tốc và gia tốc tâm P được xác định bằng cách lấy đạo hàm **p** theo thời gian; đó là $v_p = \dot{p}$ và $\dot{v}_p = \ddot{p}$.

Ba góc Euler được xác định theo chuyển động quay của ϕ quanh trục z, chuyển động quay của θ quanh trục quay v, và chuyển động quay của ψ quanh trục quay w. Ma trận quay của bệ di động so với đế cố định là:

$$^{A}R_{B} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta \\ s\phi c\theta c\psi + c\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \tag{10.1}$$

Vận tốc góc bệ di động, ω_p, tính theo các góc Euler và các vector đơn vị **w, v', w"** gắn vào vật thể là:

$$\omega_p = \dot{\phi}w + \dot{\theta}v' + \dot{\psi}w'' \tag{10.2}$$

Trong pt (10.2), **w, v',w" không** vuông với nhau. Biểu diễn w,v',w" trong hệ quy chiếu cố định A, sẽ được:

$$\omega_p = \begin{bmatrix} \dot{\psi}c\phi s\theta - \dot{\theta}s\phi \\ \dot{\psi}s\phi s\theta + \dot{\theta}c\phi \\ \dot{\psi}c\theta + \dot{\phi} \end{bmatrix} \tag{10.3}$$

Gia tốc góc bệ di động được xác định bằng cách lấy đạo hàm pt (10.3) theo thời gian:

$$\dot{\omega}_p = \begin{bmatrix} \ddot{\psi}c\phi s\theta - \dot{\psi}\dot{\phi}s\phi s\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}c\phi c\theta - \ddot{\theta}s\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}c\phi \\ \ddot{\psi}s\phi s\theta + \dot{\psi}\dot{\phi}c\phi s\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}s\phi c\theta + \ddot{\theta}c\phi - \dot{\theta}\dot{\phi}s\phi \\ \ddot{\psi}c\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}s\theta + \ddot{\phi} \end{bmatrix} \tag{10.4}$$

Cả ω_p và $\dot{\omega}_p$ trong các pt (10.3), (10.4) đều được tính theo hệ tọa độ cố định A. Hai vector này có thể được biến đổi vào hệ tọa độ B theo phép nhân $^{A}R^{T}_{B}$

Phân tích vị trí. Vị trí mỗi nhánh truyền động được tính theo vị trí bệ di động. Từ Hình 10.1, có thể xác định phương trình vector vòng:

$$a_i + d_i s_i = p + b_i \tag{10.5}$$

trong đó $a_i = [a_{ix}, a_{yi}, 0]^T$ là vector vị trí của A_i trong hệ tọa độ cố định,

${}^{B}b_i = [b_{iu}, b_{iv}, 0]^T$ là vector vị trí của B_i trong hệ tọa độ chuyển động, $b_i = [b_{ix}, b_{iy}, b_{iz}]^T$ biểu thị vector ${}^{B}b_i$ trong hệ tọa độ cố định (nghĩa là $b_i = {}^{A}R_B\,{}^{B}b_i$), s_i là vector đơn vị hướng từ A_i đến B_i, và d_i là chiều dài nhánh i.

Giải pt (10.5) theo s_i:

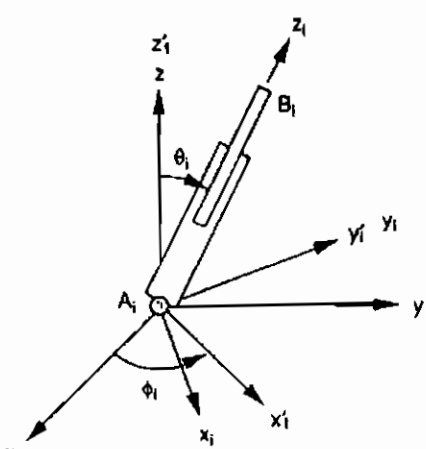
$$s_i = \frac{p + b_i - a_i}{d_i} \tag{10.6}$$

trong đó:

$$d_i = |p + b_i - a_i| \tag{10.7}$$

Giả sử từng nhánh đều nối với đế cố định bằng khớp đa năng, và không thể quay theo trục dọc, sự định hướng nhánh i so với đế cố định được xác định theo các góc Euler, nghĩa là sự quay ϕ_i quanh trục z_i cho kết quả trong hệ (x_i', y_i', z_i'), tiếp theo là sự quay θ_i quanh trục quay y_i' (Hình 10.2). Do đó, ma trận quay nhánh i là:

$${}^{A}R_i = \begin{bmatrix} c\phi_i c\theta_i & -s\phi_i & c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i c\theta_i & c\phi_i & s\phi_i s\theta_i \\ -s\theta_i & 0 & c\theta_i \end{bmatrix} \tag{10.8}$$



Hình 10-2. Các góc Euler của nhánh.

Vector đơn vị, s_i, trong hệ tọa độ nhánh i là:

$$^{i}s_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10.9}$$

Thay $^{i}s_i$ vào $s_i = {}^{A}R_i\, {}^{i}s_i$:

$$s_i = \begin{bmatrix} c\phi_i s\theta_i \\ s\phi_i s\theta_i \\ c\theta_i \end{bmatrix} \tag{10.10}$$

Giải pt (10.10) theo θ_i và ϕ_i:

$$c\theta_i = s_{iz}$$

$$s\theta_i = \sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2} \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$s\phi_i = s_{iy} / s\theta_i$$

$$c\phi_i = s_{ix} / s\theta_i \tag{10.11}$$

trong đó, s_{ix}, s_{iy}, và s_{iz} là các thành phần x, y, z của s_i. Các pt (10.6) và (10.11) xác định chiều và các góc Euler nhánh i theo vị trí bệ di động.

Từ Hình 10.3, có thể thấy mỗi nhánh gồm một cylinder (khâu 1) và piston (khâu 2). Gọi e_1 là khoảng cách giữa A_i và tâm khối lượng cylinder i, e_2 là khoảng cách giữa B_i và tâm khối lượng piston i. Vector vị trí tâm khối lượng cylinder và piston i là r_{1i} và r_{2i} là:

$$r_{1i} = a_i + e_1 s_i \tag{10.12}$$

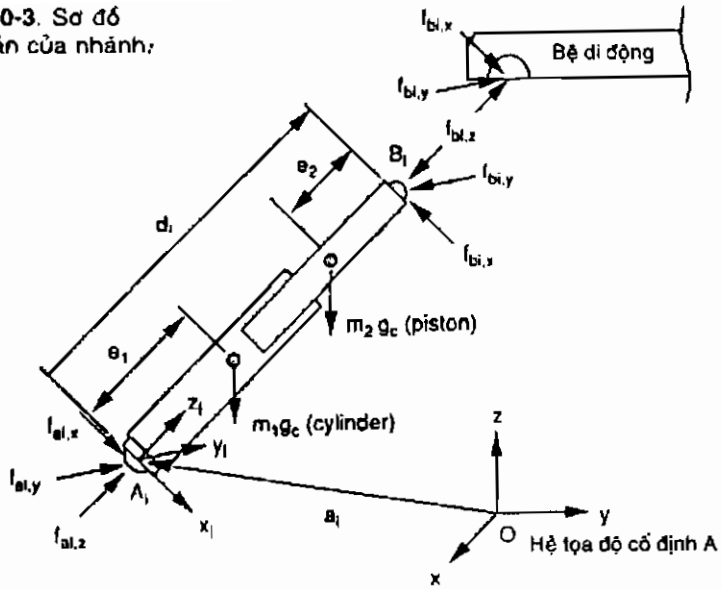
$$r_{2i} = a_i + (d_i - e_2) s_i \tag{10.13}$$

Phân tích vận tốc. Cần tính vận tốc góc và vận tốc tuyến tính của từng khâu theo vận tốc góc và vận tốc tuyến tính của bệ di động. Vận tốc v_{bi} của khớp cầu B_i được xác định bằng cách lấy đạo hàm vế phải pt (10.5) theo thời gian:

$$v_{bi} = v_p + \omega_p \times b_i \tag{10. 14}$$

Biến đổi v_{bi} theo hệ tọa độ nhánh i:

Hình 10-3. Sơ đồ đơn giản của nhánh:



$$^{i}v_{bi} = {}^{i}R_{A}\, v_{bi} \tag{10.15}$$

trong đó, $^{i}v_{bi} = \left[{}^{i}v_{bix}, {}^{i}v_{biy}, {}^{i}v_{biz}\right]^{T}$ là vận tốc của B_i tính trong hệ tọa độ nhánh i, và $^{i}R_{A} = {}^{A}R_{i}^{T}$.

Vận tốc của B_i cũng có thể được tính theo vận tốc góc nhánh i bằng cách lấy đạo hàm vế trái pt (10.5) theo thời gian:

$$^{i}v_{bi} = \dot{d}_i\, {}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i + \dot{d}_i\, {}^{i}s_i \tag{10.16}$$

Nhân hai vế pt (10.16) với $^{i}s_i$:

$$\dot{d}_i = {}^{i}v_{biz} \tag{10.17}$$

Do các nhánh truyền động không quay theo trục dọc, nên $\omega_i^{T} s_i = 0$. Nhân hai vế pt (10.16) với s_i, sẽ được vận tốc góc nhánh i:

$$^{i}\omega_i = \frac{1}{d_i}\left({}^{i}s_i \times {}^{i}v_{bi}\right) = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} -{}^{i}v_{biy} \\ {}^{i}v_{bix} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.18}$$

Khi biết vận tốc góc nhánh i, các vận tốc ${}^{i}v_{1i}$ và ${}^{i}v_{2i}$ tâm khối lượng cylinder và piston nhánh i được xáx định bằng cách lấy đạo hàm các pt (10.12) và (10.13) theo thời gian:

$$ {}^{i}v_{1i} = e_1\,{}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i = \frac{e_1}{d_i}\begin{bmatrix} {}^{i}v_{bix} \\ {}^{i}v_{biy} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.19} $$

$$ {}^{i}v_{2i} = (d_i - e_2)\,{}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i + \dot{d}_i\,{}^{i}s_i = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} (d_i - e_2)\,{}^{i}v_{bix} \\ (d_i - e_2)\,{}^{i}v_{biy} \\ d_i\,{}^{i}v_{biz} \end{bmatrix} \tag{10.20} $$

Phân tích gia tốc. Gia tốc khớp cầu B_i, tính trong hệ tọa độ cố định, được xác định bằng cách lấy đạo hàm pt (10.14) theo thời gian:

$$ \dot{v}_{bi} = \dot{v}_p + \dot{\omega}_p \times b_i + \omega_p \times (\omega_p \times b_i) \tag{10.21} $$

biểu thị trong hệ tọa độ nhánh i:

$$ {}^{i}\dot{v}_{bi} = {}^{i}R_A\,\dot{v}_{bi} \tag{10.22} $$

Gia tốc của B_i còn được tính theo gia tốc góc khâu i, bằng cách lấy đạo hàm pt (10.16) theo thời gian:

$$ {}^{i}\dot{v}_{bi} = \ddot{d}_i\,{}^{i}s_i + d_i\,{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}s_i + d_i\,{}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i) + 2\dot{d}_i\,{}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i \tag{10.23} $$

Do các nhánh không quay theo trục dọc, nên ${}^{i}\omega_{iz} = 0$. Nhân hai vế pt (10.23) với ${}^{i}s_i$, sẽ được:

$$ \ddot{d}_i = {}^{i}\dot{v}_{biz} + d_i\,{}^{i}\omega_i^2 = {}^{i}\dot{v}_{biz} + \frac{{}^{i}v_{bix}^2 + {}^{i}v_{biy}^2}{d_i} \tag{10.24} $$

Nhân hai vế pt (10.23) với ${}^{i}s_i$, sẽ được gia tốc góc khâu i:

$$ {}^{i}\dot{\omega}_i = \frac{1}{d_i}\,{}^{i}s_i \times {}^{i}\dot{v}_{bi} - \frac{2\dot{d}_i}{d_i}\,{}^{i}\omega_i = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} -{}^{i}\dot{v}_{biy} + \dfrac{2\,{}^{i}v_{biz}\,{}^{i}v_{biy}}{d_i} \\ {}^{i}\dot{v}_{bix} - \dfrac{2\,{}^{i}v_{biz}\,{}^{i}v_{bix}}{d_i} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10.25} $$

Khi biết gia tốc góc nhánh i, gia tốc tâm khối lượng cylinder và piston i được xác định bằng cách lấy đạo hàm các pt (10.19) và (10.20) theo thời gian:

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\dot{v}_{1i} &= e_1\,{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}s_i + e_1\,{}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i) \\
&= \frac{e_1}{d_i}\begin{bmatrix} {}^{i}\dot{v}_{bix} - \dfrac{2\,{}^{i}v_{biz}\,{}^{i}v_{bix}}{d_i} \\ {}^{i}\dot{v}_{biy} - \dfrac{2\,{}^{i}v_{biz}\,{}^{i}v_{biy}}{d_i} \\ -\dfrac{{}^{i}v_{bix}^2 + {}^{i}v_{biy}^2}{d_i} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{10.26}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\dot{v}_{2i} &= \ddot{d}_i\,{}^{i}s_i + (d_i - e_2)\,{}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}s_i + (d_i - e_2)\,{}^{i}\omega_i \times ({}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i) \\
&\quad + 2\dot{d}_i\,{}^{i}\omega_i \times {}^{i}s_i \\
&= \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} (d_i - e_2)\,{}^{i}\dot{v}_{bix} + \dfrac{2e_2\,{}^{i}v_{biz}\,{}^{i}v_{bix}}{d_i} \\ (d_i - e_2)\,{}^{i}\dot{v}_{biy} + \dfrac{2e_2\,{}^{i}v_{biz}\,{}^{i}v_{biy}}{d_i} \\ d_i\,{}^{i}\dot{v}_{biz} + \dfrac{e_2({}^{i}v_{bix}^2 + {}^{i}v_{biy}^2)}{d_i} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{10.27}
$$

Động lực học của các nhánh

Để đơn giản hóa sự phân tích, cơ cấu chấp hành được chia thành bệ di động và 6 chuỗi vòng hở (6 nhánh). Sơ đồ vật thể tự do của nhánh minh họa trên Hình 10.3. Có thể kết hợp cylinder và piston của từng nhánh thành hệ thống con, và tính biểu thức phương trình động lực trực tiếp cho hệ thống con. Theo cách đó, moment và phản lực giữa cylinder và piston sẽ không có trong phương trình chuyển động. Phương trình chuyển động Euler tại điểm A_i là:

$$
{}^{i}n_i^A = \frac{d}{dt}\left({}^{i}h_i^A\right) \tag{10.28}
$$

trong đó, ${}^{i}n_i^A$ là moment tổng tác dụng lên khâu i tại điểm A_i và ${}^{i}h_i^A$ là tổng moment khối lượng góc của cylinder và piston i tại điểm A_i, cả hai vector được tính trong hệ tọa độ nhánh i.

Tổng moment khối lượng góc của cylinder và piston i tại điểm A_i là:

$$ {}^{i}h_i^A = m_1 e_1({}^{i}s_i \times {}^{i}v_{1i}) + m_2(d_i - e_2)({}^{i}s_i \times {}^{i}v_{2i}) + {}^{i}h_{1i}^C + {}^{i}h_{2i}^C \quad (10.29) $$

trong đó:

$$ {}^{i}h_{1i}^C = {}^{i}I_{1i}\,{}^{i}\omega_i $$

$$ {}^{i}h_{2i}^C = {}^{i}I_{2i}\,{}^{i}\omega_i $$

là moment khối lượng góc của cylinder và piston tại tâm khối lượng, và trong đó ${}^{i}I_{1i}$ và ${}^{i}I_{2i}$ là ma trận quán tính của cylinder và piston tại tâm khối lượng và được tính trong hệ tọa độ khâu i. Lấy vi phân pt (10.29) theo thời gian:

$$ \frac{d}{dt}\left({}^{i}h_i^A\right) = m_1 e_1({}^{i}s_i \times {}^{i}\dot{v}_{1i}) + m_2(d_i - e_2)({}^{i}s_i \times {}^{i}\dot{v}_{2i}) + {}^{i}I_{1i}\,{}^{i}\dot{\omega}_i $$
$$ + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}I_{1i}\,{}^{i}\omega_i) + {}^{i}I_{2i}\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}I_{2i}\,{}^{i}\omega_i) \quad (10.30) $$

Moment ngoài tác dụng lên khâu i tại điểm A_i là do trọng lực tác dụng tại tâm khối lượng của hai khâu và phản lực tác dụng tại khớp cầu B_i. Gia tốc trọng lực g xác định trong hệ tọa độ cố định, có thể biến đổi vào hệ tọa độ khâu. Từ Hình 10.3, gọi ${}^{i}f_{bi} = [{}^{i}f_{bix}, {}^{i}f_{biy}, {}^{i}f_{biz}]^T$ là lực tác dụng lên bệ chuyển động bởi nhánh i và ${}^{A}g = [0,0,-g_c]^T$ là gia tốc trọng lực. Moment tổng tác dụng lên nhánh i tại điểm A_i là:

$$ {}^{i}n_i^A = d_i\,{}^{i}s_i \times (-{}^{i}f_{bi}) + \left[m_1 e_1 + m_2(d_i - e_2)\right]\left({}^{i}s_i \times {}^{i}R_A\,{}^{A}g\right) $$
$$ = \begin{bmatrix} d_i\,{}^{i}f_{biy} \\ -d_i\,{}^{i}f_{bix} + m_1 e_1 g_c s\theta_i + m_2(d_i - e_2) g_c s\theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.31) $$

Các phương trình động lực học chuyển động đối với nhánh i có thể được xác định bằng cách thay các pt (10.30), (10.31) vào (10.28). Các phương trình này sẽ đơn giản hóa nếu các khâu là thanh trụ đường kính nhỏ. Thay các pt (10.30) và (10.31) vào (10.28), với các tích quán tính bằng zero, I_{iz} nhỏ không đáng kể, và ${}^{i}\omega_{iz} = 0$:

$$ {}^{i}f_{bix} = \frac{1}{d_i}[m_1 e_1 g_c s\theta_i + m_2(d_i - e_2) g_c s\theta_i - m_1 e_1\,{}^{1}\dot{v}_{1ix} $$
$$ - m_2(d_i - e_2)\,{}^{i}\dot{v}_{2ix} - I_{1iy}\,{}^{i}\dot{\omega}_{iy} - I_{2iy}\,{}^{i}\dot{\omega}_{iy}] \quad (10.32) $$

$$
{}^{i}f_{biy} = \frac{1}{d_1}[-m_1 e_1 {}^{i}\dot{v}_{1iy} - m_2(d_i - e_2){}^{i}\dot{v}_{2iy} + I_{1ix}{}^{i}\dot{\omega}_{ix} + I_{2ix}{}^{i}\dot{\omega}_{ix}] \tag{10.33}
$$

trong đó, I_{jix} và I_{jiy} là các thành phần x và y của moment quán tính chính của cylinder (j =1) hoặc piston (j =2) tại tâm khối lượng tương ứng và được tính trong hệ tọa độ khâu i. Các pt (10.32) và (10.33) xác định ${}^{i}f_{bix}$ và ${}^{i}f_{biy}$ của từng khâu theo moment và lực quán tính.

Động lực học bệ di động

Các phương trình động lực chuyển động của bệ di động cũng được tính trong hệ tọa độ cố định A hoặc trong hệ tọa độ chuyển động B. Các phản lực ${}^{i}f_{bi}$ ở phần trước được tính trong hệ tọa độ nhánh i, và có thể được biến đổi vào hệ tọa độ cố định A hoặc hệ tọa độ chuyển động B trước khi thay vào phương trình chuyển động.

Áp dụng phương trình chuyển động Newton đối với bệ di động và tính phương trình kết quả trong hệ tọa độ cố định:

$$
\sum_{i=1}^{6} {}^{A}f_{bi} + m_p {}^{A}g = m_p {}^{A}\dot{v}_p \tag{10.34}
$$

trong đó:

$$
{}^{A}f_{bi} = {}^{A}R_i {}^{i}f_{bi} \tag{10.35}
$$

là phản lực tác dụng lên bệ di động do nhánh i tại khớp cầu B_i và được tính trong hệ tọa độ cố định A. Thay pt (10.8) vào (10.35), và thay kết quả vào pt (10.34):

$$
\sum_{i=1}^{6}({}^{i}f_{bix} c\phi_i c\theta_i - {}^{i}f_{biy} s\phi_i + {}^{i}f_{biz} c\phi_i s\theta_i) = m_p \dot{v}_{px} \tag{10.36}
$$

$$
\sum_{i=1}^{6}({}^{i}f_{bix} s\phi_i c\theta_i + {}^{i}f_{biy} c\phi_i + {}^{i}f_{biz} s\phi_i s\theta_i) = m_p \dot{v}_{py} \tag{10.37}
$$

$$
\sum_{i=1}^{6}(-{}^{i}f_{bix} s\theta_i + {}^{i}f_{biz} c\theta_i) = m_p \dot{v}_{pz} + m_p g_c \tag{10.38}
$$

Moment tổng, ${}^{B}n_p$, tại tâm khối lượng bệ di động, và tính trong hệ tọa độ chuyển động B là:

$$^{B}n_p = \sum_{i=1}^{6} {}^{B}b_i \times {}^{B}f_{bi} \qquad (10.39)$$

trong đó:

$$^{B}f_{bi} = {}^{B}R_A \, {}^{A}f_{bi} = {}^{B}R_i \, {}^{i}f_{bi} \qquad (10.40)$$

là phản lực tác dụng lên bệ di động do nhánh i tại khớp cầu B_i, tính trong hệ tọa độ chuyển động B.

Giả sử u,v,w là các trục chính của bệ di động, thay pt (10.39) vào phương trình chuyển động Euler, pt (9.48), với mọi tích quán tính bằng zero và $I_{pu} = I_{pv}$, sẽ được:

$$\sum_{i=1}^{6} b_{iv}(a_{31}\,{}^{i}f_{bix} + a_{32}\,{}^{i}f_{biy} + a_{33}\,{}^{i}f_{biz}) = I_{pu}\dot{\omega}_{pu} - \omega_{pv}\omega_{pw}(I_{pv} - I_{pw}) \qquad (10.41)$$

$$\sum_{i=1}^{6} -b_{iu}(a_{31}\,{}^{i}f_{bix} + a_{32}\,{}^{i}f_{biy} + a_{33}\,{}^{i}f_{biz}) = I_{pv}\dot{\omega}_{pv} - \omega_{pw}\omega_{pu}(I_{pw} - I_{pu}) \qquad (10.42)$$

$$\sum_{i=1}^{6}[b_{iu}(a_{21}\,{}^{i}f_{bix} + a_{22}\,{}^{i}f_{biy} + a_{23}\,{}^{i}f_{biz}) - b_{iv}(a_{11}\,{}^{i}f_{bix} + a_{12}\,{}^{i}f_{biy} + a_{13}\,{}^{i}f_{biz})] = I_{pw}\dot{\omega}_{pw} \qquad (10.43)$$

trong đó a_{ij} là các phần tử (i,j) của ${}^{B}R_i$; ${}^{B}\omega_p = [\omega_{pu}, \omega_{pv}, \omega_{pw}]^T$ là vận tốc góc của bệ di động tính theo hệ tọa độ di động B; I_{pu}, I_{pv}, I_{pw} là các thành phần u,v,w của moment quán tính chính của bệ di động tại tâm khối lượng và tính theo hệ tọa độ di động B.

Do đó, khi đã xác định được ${}^{i}f_{bix}$ và ${}^{i}f_{biy}$ từ các pt (10.32) và (10.33), các pt (10.30) đến (10.38) và (10.41) đến (10.43) là tập hợp 6 phương trình tuyến tính với 6 ẩn, ${}^{i}f_{biz}$ với i = 1, ..., 6. Các phương trình này có thể được giải dễ dàng, chẳng hạn theo phương pháp khử Gauss.

Bộ tác động và phản lực nền

Khi đã tìm được phản lực tại các khớp cầu, lực tác động τ_i được xác định bằng cách cộng tất cả lực tác động lên piston i dọc theo trục z_i :

$$\tau_i = {}^{i}f_{biz} + m_2 g_c c\theta_i + m_2\,{}^{i}\dot{v}_{2iz} \qquad (10.44)$$

Chú ý, moment trong pt (10.31) được lấy tại khớp cầu cố định A_i, sao

cho các phản lực f_{ai} tại khớp cầu cố định không cần đưa vào phương trình chuyển động. Phản lực này, nếu cần xét, được xác định bằng cách tính phương trình Newton, mỗi lần một nhánh, như sau:

$$^{i}f_{ai} + {}^{i}f_{bi} + (m_1 + m_2)\,{}^{i}R_A\,{}^{A}g = m_1\,{}^{i}\dot{v}_{1i} + m_2\,{}^{i}\dot{v}_{2i} \qquad (10.45)$$

Quy trình Newton-Euler

Quy trình giải động lực học đảo bệ Stewart-Gough có thể tóm tắt trong 5 bước:

1. Thực hiện phân tích động học đảo cho cơ cấu. Trước hết tính vị trí, vận tốc và gia tốc các khớp cầu chuyển động trong các phương trình chuyển động bệ đã nêu. Kế tiếp, tìm vị trí, vận tốc, gia tốc của tâm khối lượng và vận tốc góc, gia tốc góc của mỗi nhánh. Đặc biệt, nếu i =1 đến 6, có thể lần lượt tính:

   (a) $b_i = {}^{A}R_B\,{}^{B}b_i$

   (b) d_i và s_i từ pt (10.7) và (10.6)

   (c) $c\phi_i$, $s\phi_i$, $c\theta_i$, $s\theta_i$, và ${}^{A}R_i$ từ pt (10.11) và (10.8)

   (d) v_{bi} và ${}^{i}v_{bi}$ từ pt (10.14) và (10.15)

   (e) ${}^{i}\omega_i$ từ (10.18)

   (f) $\dot{v}_{bi}$ và ${}^{i}\dot{v}_{bi}$ từ pt (10.21) và (10.22)

   (g) ${}^{i}\dot{\omega}_i$ từ pt (10.25)

   (h) ${}^{i}\dot{v}_{1i}$ và ${}^{i}\dot{v}_{2i}$ từ pt (10.26) và (10.27)

2. Cơ cấu chấp hành được chia thành bệ di động và nhiều nhánh truyền động vòng hở bằng cách chia cắt tại các khớp cầu chuyển động. Xác định ký hiệu các lực tác động và phản lực tương ứng tại các điểm nối giữa bệ và 6 nhánh.

3. Xét từng nhánh theo hệ thống con, thiết lập phương trình chuyển động Euler tại khớp cầu cố định của mỗi nhánh. Theo cách đó, một số phản lực tại các khớp cầu chuyển động được xác định độc lập với các phương trình chuyển động của bệ, giải các pt (10.32), (10.33) để tìm ${}^{i}f_{bix}$ và ${}^{i}f_{biy}$.

4. Tìm các phản lực còn lại bằng cách lập công thức các phương trình chuyển động Newton và Euler của bệ. Nghĩa là giải các pt (10.36) đến (10.38) và (10.41) đến (10.43) để có ${}^{i}f_{biz}$ với i =1,...,6.

5. Tìm lực bộ tác động τ_i bằng pt (10.44).

Nguyên lý công ảo

Phần này minh họa phương pháp áp dụng nguyên lý công ảo hay nguyên lý d'Alember để phân tích động lực cơ cấu chấp hành song song. Các qui ước dưới đây sẽ được sử dụng:

f_i: hợp lực (không kể lực bộ tác động) tác dụng tại tâm khối lượng khâu i.

f_i^*: lực quán tính tác dụng tại tâm khối lượng khâu i, $f_i^* = -m_i\dot{v}_i$

$\hat{f}_i$: $f_i + f_i^*$

f_p: hợp lực tác dụng tại tâm khối lượng bệ di động.

f_p^* : lực quán tính tác dụng tại tâm khối lượng bệ di động,

$f_p^* = -m_p\dot{v}_p$

$\hat{f}_p$: $f_p + f_p^*$

n_i: moment tổng (không tính moment bộ tác động) tác dụng tại tâm khối lượng khâu i

n_i^* : moment quán tính tác dụng tại tâm khối lượng khâu i,

$n_i^* = -{}^{i}I_i\,{}^{i}\dot{\omega}_i - {}^{i}\omega_i \times ({}^{i}I_i\,{}^{i}\omega_i)$

$\hat{n}_i$: $n_i + n_i^*$

n_p: moment tổng tác dụng tại tâm khối lượng bệ di động.

n_p^* : moment quán tính tác dụng tại tâm khối lượng bệ di động,

$n_p^* = -I_p\dot{\omega}_p - \omega_p \times (I_p\omega_p)$

$\hat{n}_p$: $n_p + n_p^*$

q: vector các chiều dài nhánh tác động, $q = [d_1, d_2, ..., d_n]^T$

x_i: vector 6 chiều vị trí và hướng khâu i.

$\dot{x}_{ji}$: vector 6 chiều vận tốc tuyến tính và vận tốc góc cylinder (j=1) hoặc piston (j=2) trên nhánh i, $\dot{x}_{ji} = \left[v_{jix}, v_{jiy}, \ldots, \omega_{iz}\right]^T$

x_p: vector 6 chiều vị trí và hướng bệ di động.

$\dot{x}_p$: vector 6 chiều vận tốc tuyến tính và vận tốc góc bệ di động, $\dot{x}_p = \left[v_{px}, v_{py}, \ldots, \omega_{pz}\right]^T$

τ: vector lực và/hoặc moment khớp tác động.

$\delta(\cdot)$: độ dịch chuyển ảo của (.)

Để thuận tiện, sự quay xoắn 6 chiều, $\hat{F}_i$, được coi là tổng các quay xoắn tác dụng và quán tính tại tâm khối lượng khâu i :

$$\hat{F}_i = \begin{bmatrix} \hat{f}_i \\ \hat{n}_i \end{bmatrix} \tag{10.46}$$

Tương tự, sự quay xoắn 6 chiều, $\hat{F}_p$, được coi là tổng các quay xoắn tác dụng và quán tính tại tâm khối lượng bệ di động :

$$\hat{F}_p = \begin{bmatrix} \hat{f}_p \\ \hat{n}_p \end{bmatrix} \tag{10.47}$$

Nguyên lý công ảo đối với cơ cấu chấp hành song song được viết theo phương trình:

$$\delta q^T \tau + \delta x_p^T \hat{F}_p + \sum_i \delta x_i^T \hat{F}_i = 0 \tag{10.48}$$

trong đó, phép lấy tổng thực hiện cho mọi khâu trong các nhánh. Trong pt (10.48), moment và/hoặc lực bộ tác động được tách riêng với các lực tác dụng để thuận tiện khi lấy đạo hàm.

Độ dịch chuyển ảo trong pt (10.48) phải tương thích với các ràng buộc động học từ các khớp. Do đó, độ dịch chuyển ảo này phải liên hệ với tập hợp các độ dịch chuyển ảo tổng quát độc lập. Trong cơ cấu song song, tọa độ bệ di động, $x_p = [x_p, y_p, \ldots, \psi_p]^T$, có thể được chọn là tọa độ tổng quát. Điều này là do độ dịch chuyển ảo của các khớp tác động δq liên hệ với độ dịch chuyển ảo bệ di động, δx_p, theo ma trận Jacobi của cơ cấu J_b:

$$\delta q = J_p \delta x_p \tag{10.49}$$

Hơn nữa, độ dịch chuyển ảo khâu i của nhánh, δx_i, liên hệ với độ dịch chuyển ảo bệ di động, δx_p, bằng ma trận Jacobi khâu J_i:

$$\delta x_i = J_i \delta x_p \tag{10.50}$$

Thay các pt (10.49), (10.50) vào (10.48):

$$\delta x_p^T (J_p^T \tau + \hat{F}_p + \sum_i J_i^T \hat{F}_i) = 0 \tag{10.51}$$

Do pt (10.51) có hiệu lực với độ dịch chuyển ảo bất kỳ δx_p, nên:

$$J_p^T \tau + \hat{F}_p + \sum_i J_i^T \hat{F}_i = 0 \tag{10.52}$$

Phương trình (10.52) về động lực cơ cấu chấp hành song song tương tự công thức Kane. Chú ý, sự quay xoắn trong pt (10.52) được lấy theo tâm khối lượng của từng khâu. Nếu sự quay vít từ bên ngoài tác dụng tại điểm khác tâm khối lượng, cần biến đổi vào hệ tọa độ tâm khối lượng trước khi thay vào phương trình chuyển động.

Nói chung, nếu số bộ tác động bằng số bậc tự do của cơ cấu chấp hành, J_p là ma trận vuông, do đó τ được xác định như sau:

$$\tau = -J_p^{-T} (\hat{F}_p + \sum_j J_i^T \hat{F}_i), \tag{10.53}$$

với điều kiện J_p không ở trạng thái đặc biệt

Mặt khác, nếu số bộ tác động lớn hơn số bậc tự do, τ có vô số nghiệm, từ đó nghiệm chuẩn cực tiểu có thể tính được bằng cách áp dụng phương pháp giả đảo.

Sau đây, sẽ sử dụng bệ Stewart-Gough (Hình 10.2) để minh họa phương pháp. Phân tích động học đảo đã được trình bày trong phần trước, phần này sẽ thiết lập các ma trận Jacobi khâu, sự quay xoắn quán tính khâu, và phương trình chuyển động.

Ma trận Jacobi khâu

Bước cơ bản thứ nhất để thiết lập phương trình chuyển động d'Arlembert là lấy đạo hàm ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành và các ma trận Jacobi khâu. Để nhận dạng ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành J_p, cần viết pt (10.14) theo dạng ma trận:

$$v_{bi} = J_{bi}\dot{x}_p \tag{10.54}$$

trong đó:

$$J_{bi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{iz} & -b_{iy} \\ 0 & 1 & 0 & -b_{iz} & 0 & b_{ix} \\ 0 & 0 & 1 & b_{iy} & -b_{ix} & 0 \end{bmatrix} \tag{10.55}$$

Thay pt (10.54) vào (10.15):

$$^{i}v_{bi} = {}^{i}J_{bi}\dot{x}_p = \begin{bmatrix} {}^{i}J_{bix} \\ {}^{i}J_{biy} \\ {}^{i}J_{biz} \end{bmatrix}\dot{x}_p \tag{10.56}$$

trong đó $^{i}J_{bi} = {}^{i}R_A J_{bi}$ là ma trận 3×6 với các vector hàng là:

$$^{i}j_{bix} = [c\phi_i c\theta_i, s\phi_i c\theta_i, -s\theta_i, -b_{iz}s\phi_i c\theta_i - b_{iy}s\theta_i, b_{iz}c\phi_i c\theta_i + b_{ix}s\theta_i,$$
$$-b_{iy}c\phi_i c\theta_i + b_{ix}s\phi_i c\theta_i]$$

$$^{i}j_{biy} = [-s\phi_i, c\phi, 0, -b_{iz}c\phi_i, -b_{iz}s\phi_i, b_{iy}s\phi_i + b_{ix}c\phi]$$

$$^{i}j_{biz} = [c\phi_i s\theta_i, s\phi_i s\theta_i, c\theta_i, -b_{iz}s\phi_i s\theta_i + b_{iy}c\theta_i, b_{iz}c\phi_i s\theta_i - b_{ix}c\theta_i,$$
$$-b_{iy}c\phi_i s\theta_i + b_{ix}s\phi_i s\theta_i] \tag{10.57}$$

Sử dụng các ma trận hàng nêu trên, pt (10.17) được viết:

$$\dot{d}_i = {}^{i}J_{biz}\dot{x}_p \tag{10.58}$$

Phương trình (10.58) được viết 6 lần cho từng khâu tương ứng, để có sáu phương trình vô hướng, được tổ hợp theo dạng ma trận:

$$\dot{q} = J_p\dot{x}_p \tag{10.59}$$

trong đó:

$$J_p = \begin{bmatrix} {}^{1}J_{b1z} \\ {}^{2}J_{b2z} \\ \vdots \\ {}^{6}J_{b6z} \end{bmatrix} \tag{10.60}$$

là ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành.

Tương tự, các pt (10.18), (10.19), (10.20) được viết theo dạng:

$$ {}^{i}\omega_i = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} -{}^{i}J_{biy} \\ {}^{i}J_{bix} \\ 0_{1\times 6} \end{bmatrix}\dot{x}_p \tag{10.61} $$

$$ {}^{i}v_{1i} = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} {}^{i}J_{bix} \\ {}^{i}J_{biy} \\ 0_{1\times 6} \end{bmatrix}\dot{x}_p \tag{10.62} $$

$$ {}^{i}v_{2i} = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} (d_i - e_2){}^{i}J_{bix} \\ (d_i - e_2){}^{i}J_{biy} \\ d_i\,{}^{i}J_{biz} \end{bmatrix}\dot{x}_p \tag{10.63} $$

Kết hợp các pt (10.61), (10.62), (10.63):

$$ {}^{i}\dot{x}_{1i} = {}^{i}J_{1i}\dot{x}_p \tag{10.64} $$

$$ {}^{i}\dot{x}_{2i} = {}^{i}J_{2i}\dot{x}_p \tag{10.65} $$

trong đó:

$$ {}^{i}J_{1i} = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} e_1\,{}^{i}J_{bix} \\ e_1\,{}^{i}J_{biy} \\ 0_{1\times 6} \\ -{}^{i}J_{biy} \\ {}^{i}J_{bix} \\ 0_{1\times 6} \end{bmatrix} \tag{10.66} $$

$$ {}^{i}J_{2i} = \frac{1}{d_i}\begin{bmatrix} (d_i - e_2){}^{i}J_{bix} \\ (d_i - e_2){}^{i}J_{biy} \\ d_i\,{}^{i}J_{biz} \\ -{}^{i}J_{biy} \\ {}^{i}J_{bix} \\ 0_{1\times 6} \end{bmatrix} \tag{10.67} $$

là các ma trận Jacobi khâu của cylinder và piston.

Sự quay xoắn quán tính và tác dụng

Giả sử trọng lực là lực duy nhất tác dụng lên cơ cấu chấp hành. Tổng vector quay xoắn tác dụng và quán tính tác động tại tâm khối lượng bệ di động là:

$$\dot{\hat{F}}_p = \begin{bmatrix} \dot{\hat{f}}_p \\ \dot{\hat{n}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_p g - m_p \dot{v}_p \\ -{}^A I_p \dot{\omega}_p - \omega_p \times ({}^A I_p \omega_p) \end{bmatrix} \tag{10.68}$$

trong đó ${}^A I_p = {}^A R_B \, {}^B I_p \, {}^B R_A$ là ma trận quán tính của bệ di động tại tâm khối lượng được tính trong hệ tọa độ cố định A.

Tương tự, tổng vector các quay xoắn từ bên ngoài và quán tính tác động tại tâm khối lượng cylinder và piston, tính trong hệ tọa độ khâu i là:

$${}^i\dot{\hat{F}}_{1i} = \begin{bmatrix} {}^i\dot{\hat{f}}_{1i} \\ {}^i\dot{\hat{n}}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1i} \, {}^iR_A g - m_{1i} \, {}^i\dot{v}_{1i} \\ -{}^iI_{1i} \, {}^i\dot{\omega}_i - {}^i\omega_i \times ({}^iI_{1i} \, {}^i\omega_i) \end{bmatrix} \tag{10.69}$$

$${}^i\dot{\hat{F}}_{2i} = \begin{bmatrix} {}^i\dot{\hat{f}}_{2i} \\ {}^i\dot{\hat{n}}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{2i} \, {}^iR_A g - m_{2i} \, {}^i\dot{v}_{2i} \\ -{}^iI_{2i} \, {}^i\dot{\omega}_i - {}^i\omega_i \times ({}^iI_{2i} \, {}^i\omega_i) \end{bmatrix} \tag{10.70}$$

Chú ý, do tính chất đối xứng, các ma trận quán tính của bệ di động và sáu nhánh đều là ma trận chéo.

Phương trình chuyển động

Phần này sẽ trình bày phương pháp áp dụng nguyên lý công ảo để thiết lập phương trình chuyển động. Đối với bệ Stewart-Gough, pt (10.52) trở thành:

$$J_p^T \tau + \dot{\hat{F}}_p + \sum_{i=1}^{6} ({}^iJ_{1i}^T \, {}^i\dot{\hat{F}}_{1i} + {}^iJ_{2i}^T \, {}^i\dot{\hat{F}}_{2i}) = 0 \tag{10.71}$$

Chú ý, trong pt (10.71), $\dot{\hat{F}}_p$ được tính trong hệ tọa độ cố định A, còn ${}^i\dot{\hat{F}}_{1i}$ và ${}^i\dot{\hat{F}}_{2i}$ trong hệ tọa độ khâu i, sau đó biến đổi vào hệ tọa độ cố định bằng phép chuyển vị ma trận Jacobi khâu. Tương tự, vector các lực bộ tác động τ được xác định trong không gian khớp bộ tác động, rồi biến đổi vào hệ tọa độ cố định bằng phép chuyển vị ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành.

Thay các pt (10.66) và (10.67) vào (10.71):

$$J_p^T(\tau + \hat{F}_z) + \hat{F}_p + J_x^T\hat{F}_x + J_y^T\hat{F}_y = 0 \tag{10.72}$$

trong đó:

$$J_x = \begin{bmatrix} {}^1J_{b1x} \\ {}^2J_{b2x} \\ \vdots \\ {}^6J_{b6x} \end{bmatrix} \tag{10.73}$$

$$J_y = \begin{bmatrix} {}^1J_{b1y} \\ {}^2J_{b2y} \\ \vdots \\ {}^6J_{b6y} \end{bmatrix} \tag{10.74}$$

$$\hat{F}_x = \begin{bmatrix} \dfrac{e_1\hat{f}_{11x} + (d_1 - e_2)\hat{f}_{21x} + \hat{n}_{11y} + \hat{n}_{21y}}{d_1} \\ \dfrac{e_1\hat{f}_{12x} + (d_2 - e_2)\hat{f}_{22x} + \hat{n}_{12y} + \hat{n}_{22y}}{d_2} \\ \vdots \\ \dfrac{e_1\hat{f}_{16x} + (d_6 - e_2)\hat{f}_{26x} + \hat{n}_{16y} + \hat{n}_{26y}}{d_6} \end{bmatrix} \tag{10.75}$$

$$\hat{F}_y = \begin{bmatrix} \dfrac{e_1\hat{f}_{11y} + (d_1 - e_2)\hat{f}_{21y} + \hat{n}_{11x} + \hat{n}_{21x}}{d_1} \\ \dfrac{e_1\hat{f}_{12y} + (d_2 - e_2)\hat{f}_{22y} + \hat{n}_{12x} + \hat{n}_{22x}}{d_2} \\ \vdots \\ \dfrac{e_1\hat{f}_{16y} + (d_6 - e_2)\hat{f}_{26y} + \hat{n}_{16x} + \hat{n}_{26x}}{d_6} \end{bmatrix} \tag{10.76}$$

$$\hat{F}_z = \begin{bmatrix} \hat{f}_{21z} \\ \hat{f}_{22z} \\ \vdots \\ \hat{f}_{26z} \end{bmatrix} \tag{10.77}$$

trong đó $\hat{f}_{jix}, \hat{f}_{jiy}$, và $\hat{f}_{jiz}$ là các thành phần x, y, z của ${}^{i}\hat{f}_{ji}$; và $\hat{n}_{jix}, \hat{n}_{jiy}$, và $\hat{n}_{jiz}$ là các thành phần x, y, z của ${}^{i}\hat{n}_{ji}$. Từ pt (10.72), các lực bộ tác động cần thiết để tạo ra các đặc tính chuyển động như mong muốn được tính bằng cách sử dụng, ví dụ, phương pháp khử Gauss. Chú ý, lực bộ tác động phụ thuộc vào ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành chuyển vị đảo, J_p^{-T}. Việc tính toán lực bộ tác động bằng số liệu trở nên không ổn định khi cơ cấu chấp hành tiến tới cấu hình trạng thái đặc biệt.

Có thể thấy khi sử dụng nguyên lý công ảo, các moment và lực ràng buộc bị khử khỏi phương trình chuyển động. Phương pháp này hiệu quả hơn công thức Newton-Euler và công thức Lagrange, hữu dụng đối với điều khiển thời gian thực của cơ cấu chấp hành song song.

Qui trình d'Alembert

Phần này tóm tắt qui trình giải động lực đảo bệ Stewart-Gough bằng cách sử dụng nguyên lý công ảo. Giả sử tiến trình thời gian của bệ di động được xác định theo vị trí tâm, p, và ba góc Euler ϕ, θ, ψ. Vận tốc và gia tốc của tâm được tính bằng cách lấy đạo hàm của p theo thời gian. Ma trận quay ${}^{A}R_B$ của bệ di động được tính từ pt (10.1). Vận tốc góc và gia tốc góc của bệ di động được tính từ pt (10.3) và (10.4). Tại thời điểm bất kỳ, các lực bộ tác động được tính theo năm bước sau:

1. Xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của mọi khâu bằng cách thực hiện phân tích động học đảo. Với i = 1 đến 6, cần tính:

   (a) $b_i = {}^{A}R_B\,{}^{B}b_i$ và ${}^{A}I_p = {}^{A}R_B\,{}^{B}I_p\,{}^{B}R_A$

   (b) d_i và s_i từ các pt (10.7) và (10. 6)

   (c) $c\phi_i$, $s\phi_i$, $c\theta_i$, $s\theta_i$, và ${}^{A}R_i$ từ các pt (10.11) và (10.8)

   (d) v_{bi} và ${}^{i}v_{bi}$ từ các pt (10.14) và (10.15)

   (e) ${}^{i}\omega_i$ từ (10.18)

   (f) $\dot{v}_{bi}$ và ${}^{i}\dot{v}_{bi}$ từ các pt (10.21) và (10.22)

   (g) ${}^{i}\dot{\omega}_{bi}$ từ pt (10.25)

   (h) ${}^{i}\dot{v}_{1i}$ và ${}^{i}\dot{v}_{2i}$ từ các pt (10.26) và (10.27)

2. Xác định ma trận Jacobi bệ di động và khâu:

(a) Với i =1 đến 6, tính J_{bi}, và ${}^iJ_{bi}$ từ các pt (10.55) và (10.57)

(b) Tính J_p bằng pt (10.60)

3. Xác định tổng các quay xoắn tác dụng và quán tính:

(a) Tính $\hat{F}_p$ từ pt (10.68)

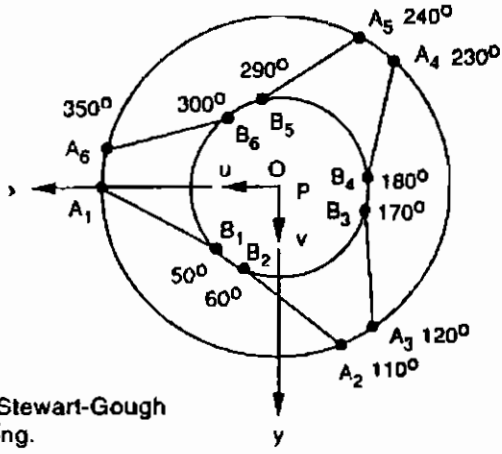
(b) Với i =1 đến 6, tính ${}^i\hat{F}_{1i}$ và ${}^i\hat{F}_{2i}$ từ các pt (10.69) và (10.70).

4. Thiết lập các phương trình động lực chuyển động. Tính J_x, J_y, $\hat{F}_x$, $\hat{F}_y$, và $\hat{F}_z$ từ các pt (10.73) đến (10.77), thay kết quả vào pt (10.72)

5. Giải các phương trình động lực chuyển động, pt (10.72), bằng phương pháp khử Gauss.

Ví dụ bằng số

Dựa vào thuật toán nêu trên, chương trình máy tính được triển khai để giải động lực học đảo bệ Stewart-Gough (Hình 10.2), sử dụng phần mềm MATLAB. Hình 10.4 minh họa vị trí các khớp cầu và vị trí ban đầu bệ di động. Các thông số của hệ thống cơ cấu chấp hành gồm m_p = 32kg, m_{1i} = 2kg, m_{2i} = 2kg, b_i = 0.5m, a_i = 1m, e_1 =0.2m, e_2 = 0.75m, ${}^BI_p$ =diag[2, 2, 4]kg.m^2, ${}^iI_{1i}$ = diag[1, 1, 0.001]kg.m^2, ${}^iI_{2i}$ = diag[0.4, 0.4, 0.0001]kg.m^2, và g =[0,0,-9.8]^T m/s^2



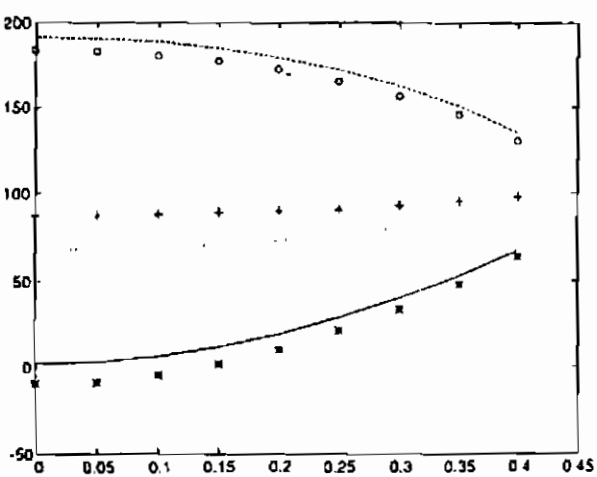
Hình 10-4. Bệ Stewart-Gough nhìn từ trên xuống.

Các ví dụ sau được giải để minh họa thuật toán. Trong tất cả các ví dụ này đều giả thiết bệ khởi động từ trạng thái nghỉ và tăng tốc với gia tốc không đổi theo chu kỳ 0.4s. Ở vị trí ban đầu, giả thiết bệ di động được đặt phía trên và cách đế cố định 1m, nghĩa là ở thời điểm t = 0, $p = [0,0,1]^T$ m, và $\phi = \theta = \psi = 0$.

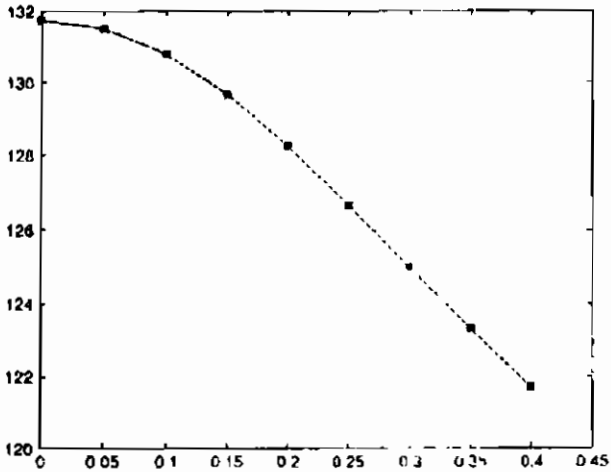
Ví dụ 1, bệ chuyển động dọc theo trục x với hằng số gia tốc $\ddot{p}_x = 5$ m/s², và mọi thông số khác đều là hằng, $\ddot{p}_y = \ddot{p}_z = \ddot{\phi} = \ddot{\theta} = \ddot{\psi} = 0$. Lực tác động theo thời gian được vẽ theo đồ thị (Hình 10.5).

Ví dụ 2, bệ chuyển động dọc theo trục z với hằng số gia tốc $\ddot{p}_z = 5$ m/s², và mọi thông số khác đều là hằng, $\ddot{p}_x = \ddot{p}_y = \ddot{\phi} = \ddot{\theta} = \ddot{\psi} = 0$. Từ Hình 10.6, với gia tốc của bệ theo trục z, mọi lực tác động đều bằng nhau. Khi bệ chuyển động ra xa đế cố định, các nhánh có khuynh hướng theo chiều đứng, do đó lực tác động suy giảm.

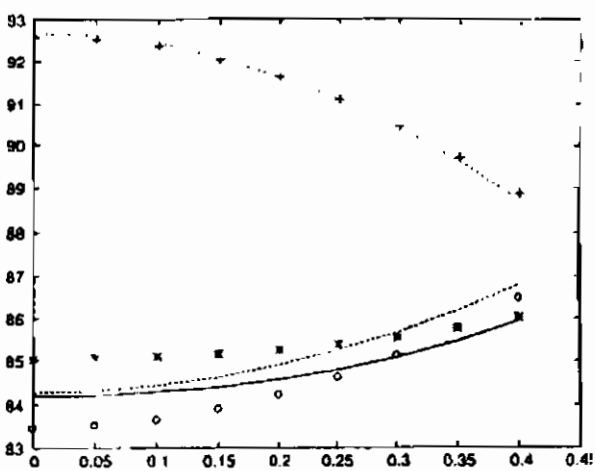
Ví dụ 3, bệ di động quay quanh trục y với gia tốc góc không đổi $\ddot{\theta} = 2$ rad/s², và mọi thông số khác đều là hằng, $\ddot{p}_x = \ddot{p}_y = \ddot{p}_z = \ddot{\phi} = \ddot{\psi} = 0$. Lực tác động theo thời gian được vẽ theo đồ thị (Hình 10.7).



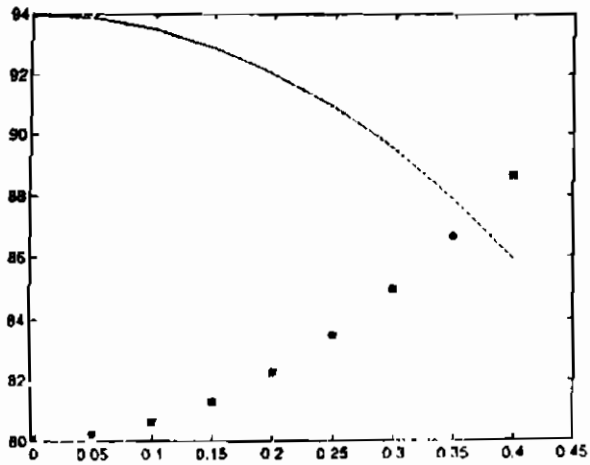
Hình 10-5. Lực tác động và thời gian, $\ddot{p}_x = 5 m/s^2$



Hình 10-6. Lực tác động và thời gian, $\ddot{p}_z = 5m/s^2$



Hình 10-7. Lực tác động và thời gian, $\ddot{\theta} = 2rad/s^2$



Hình 10-8. Lực tác động và thời gian, $\ddot{\phi} = 2\text{rad}/\text{s}^2$

Ví dụ 4, bệ di động quay quanh trục z với gia tốc góc không đổi $\ddot{\phi}$ = 2rad/s², và mọi thông số khác đều là hằng, $\ddot{p}_x = \ddot{p}_y = \ddot{p}_z = \ddot{\theta} = \ddot{\psi} = 0$. Từ Hình 10.8, do sự bố trí đối xứng của các nhánh, các lực tác dụng từ các bộ tác động 1, 3, 5 là bằng nhau, và các lực tác dụng từ các bộ tác động 2, 4, 6 cũng bằng nhau.

Công thức LAGRANGE

Phần này sẽ trình bày phương pháp áp dụng phương trình Lagrange loại 1 để giải động lực học đảo các cơ cấu chấp hành song song đơn giản. Phương trình Lagrange loại 1 có tập hợp tọa độ dư thừa. Do đó, sự thiết lập công thức cần sử dụng hệ phương trình ràng buộc từ động học cơ cấu. Các phương trình ràng buộc và đạo hàm của chúng phải kết hợp trong các phương trình chuyển động để tạo số phương trình bằng số ẩn số.

Các phương trình Lagrang loại 1 có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \qquad \text{với } j = 1 \text{ đến } n \quad (10.78)$$

trong đó Γ_i là hàm ràng buộc thứ i; k là số lượng hàm ràng buộc; λ_i là số nhân Lagrange. Số tọa độ n hơn số bậc tự do là k. Để dễ giải phương

trình chuyển động, cần sắp xếp các phương trình Lagrange thành hai hệ phương trình, một hệ chỉ chứa các số nhân Lagrange là các ẩn, và hệ phương trình còn lại chứa các ẩn số là các lực tổng quát, do bộ tác động tạo ra. Hệ k phương trình thứ nhất liên hệ với các tọa độ dư thừa, hệ n-k phương trình còn lại liên hệ với các biến khớp tác động. Hệ k phương trình thứ nhất có dạng:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \hat{Q}_j \qquad (10.79)$$

trong đó $\hat{Q}_j$, nếu có, là lực tổng quát hoá do ngoại lực tác dụng. Với động lực học đảo, $\hat{Q}_j$, được cho trước, nên vế phải pt (10.79) cũng được biết. Viết pt (10.79) lần lượt cho từng tọa độ dư thừa, sẽ có hệ k phương trình tuyến tính và được giải để tìm k số nhân Lagrange.

Khi tìm được k số nhân Lagrange, lực và/hoặc moment bộ tác động được tính trực tiếp từ các phương trình còn lại. Hệ phương trình thứ hai có dạng:

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad \text{với } j = k+1 \text{ đến } n \qquad (10.80)$$

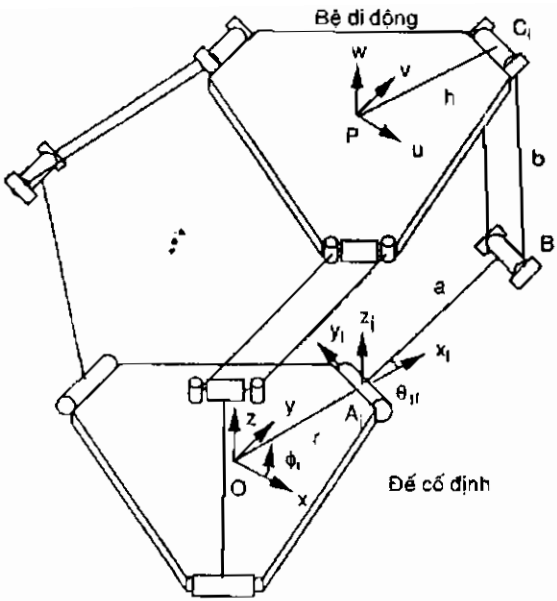
trong đó Q_j là lực hoặc moment bộ tác động.

Sau đây sẽ phân tích động lực học của cơ cấu chấp hành song song 3 bậc tự do, để minh họa nguyên lý.

Động lực học Lagrange cơ cấu chấp hành của đại học Maryland

Hình 10.9 minh họa sơ đồ nguyên lý cơ cấu chấp hành của đại học Maryland. Các hệ tọa độ, chiều dài khâu, các góc khớp của cơ cấu này được nêu chi tiết trên Hình 3.10. Trong cơ cấu này, θ_{11}, θ_{12}, θ_{13} là các khớp tác động.

Về lý thuyết, phân tích động lực được thực hiện bằng cách sử dụng ba tọa độ tổng quát vì do đây là cơ cấu 3 bậc tự do. Tuy nhiên, điều này đưa đến hàm Lagrange rất cồng kềnh do tính phức tạp của động lực trong cơ cấu chấp hành. Nên phương trình Lagrange loại 1 được sử dụng với ba tọa độ dư thừa p_x, p_y, p_z. Do đó p_x, p_y, p_z, θ_{11}, θ_{12}, θ_{13} là các tọa độ tổng quát. Phương trình (10.78) trình bày hệ 6 phương trình với 6 biến, λ_i, với i=1, 2, 3



Hình 10-9. Cơ cấu chấp hành của đại học Maryland.

và ba moment khớp Q_j, với j=4, 5, 6. Chú ý, các lực tổng quát Q_j, với i=1,2,3 là các thành phần x,y,z của ngoại lực tác dụng tại tâm P bệ di động.

Cùng thời gian cả ba phương trình ràng buộc, Γ_i, với i=1,2,3. Các phương trình ràng buộc nhận được do khoảng cách giữa khớp B và C luôn luôn bằng chiều dài thanh nối của nhánh trên, b, nghĩa là:

$$
\begin{aligned}
T_i &= \overline{B_iC_i}^2 - b^2 \\
&= (p_x + hc\phi_i - rc\phi_i - ac\phi_i c\theta_{1i})^2 + (p_y + hs\phi_i - rs\phi_i - as\phi_i c\theta_{1i})^2 \\
&\quad + (p_z - as\theta_{1i})^2 - b^2 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{10.81}
$$

với i=1,2,3.

Để đơn giản hóa sự phân tích, giả thiết khối lượng m_b của từng thanh nối ở tổ hợp tay đòn trên, được chia đều và tập trung ở hai điểm mút B_i và C_i, từ đó có thể thiết lập hàm Lagrange L. Tổng động năng của cơ cấu là:

$$K = K_p + \sum_{i=1}^{3}(K_{ai} + K_{bi}) \tag{10.82}$$

trong đó K_p là động năng bệ di động, K_{ai} là động năng rotor và khâu ngõ vào trên nhánh i, K_{bi} là động năng hai thanh nối nhánh i, và được xác định như sau:

$$K_p = \frac{1}{2}m_p(\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2)$$

$$K_{ai} = \frac{1}{2}(I_m + \frac{1}{3}m_a a^2)\dot{\theta}_{1i}^2$$

$$K_{bi} = \frac{1}{2}m_b(\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2) + \frac{1}{2}m_b a^2\dot{\theta}_{1i}^2$$

với m_p là khối lượng bệ di động, m_a là khối lượng khâu ngõ vào, m_b là khối lượng một trong hai thanh nối, I_m là moment trục quán tính rotor lắp trên nhánh i. Giả sử gia tốc trọng lực có chiều –z, tổng thế năng của cơ cấu chấp hành theo mặt phẳng cố định x-y là

$$U = U_p + \sum_{i=1}^{3}(U_{ai} + U_{bi}) \tag{10.83}$$

trong đó U_p là thế năng bệ di động, U_{ai} là thế năng khâu ngõ vào trên nhánh i, U_{bi} là thế năng hai thanh nối nhánh i, và được xác định như sau:

$$U_p = m_p g_c p_z$$

$$U_{ai} = \frac{1}{2}m_a g_c a s\theta_{1i}$$

$$U_{bi} = m_b g_c(p_z + a s\theta_{1i})$$

Hàm Lagrange có dạng:

$$\begin{aligned} L = &\frac{1}{2}(m_p + 3m_b)(\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_z^2) \\ &+ \frac{1}{2}(I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)(\dot{\theta}_{11}^2 + \dot{\theta}_{12}^2 + \dot{\theta}_{13}^2) - (m_p + 3m_b)g_c p_z \\ &- \left(\frac{1}{2}m_a + m_b\right)g_c a(s\theta_{11} + s\theta_{12} + s\theta_{13}) \end{aligned} \tag{10.84}$$

Lấy đạo hàm của hàm Lagrange theo sáu tọa độ tổng quát:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_x}\right) = (m_p + 3m_b)\ddot{p}_x, \qquad \frac{\partial L}{\partial p_x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_y}\right) = (m_p + 3m_b)\ddot{p}_y, \qquad \frac{\partial L}{\partial p_y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_z}\right) = (m_p + 3m_b)\ddot{p}_z, \qquad \frac{\partial L}{\partial p_z} = -(m_p + 3m_b)g_c$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{11}}\right) = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_{11}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_{11}} = -(\frac{1}{2}m_a + m_b)g_c a c\theta_{11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{12}}\right) = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_{12}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_{12}} = -(\frac{1}{2}m_a + m_b)g_c a c\theta_{12}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{13}}\right) = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_{13}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta_{13}} = -(\frac{1}{2}m_a + m_b)g_c a c\theta_{13}$$

Lấy đạo hàm của hàm ràng buộc Γ_i theo sáu tọa độ tổng quát:

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial p_x} = 2(p_x + hc\phi_i - rc\phi_i - ac\phi_i c\theta_{1i}) \qquad \text{với } i=1,2,3$$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial p_y} = 2(p_y + hs\phi_i - rs\phi_i - as\phi_i c\theta_{1i}) \qquad \text{với } i=1,2,3$$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial p_z} = 2(p_z - as\theta_{1i}) \qquad \text{với } i=1,2,3$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_{11}} = 2a[(p_x c\phi_1 + p_y s\phi_1 + h - r)s\theta_{11} - p_z c\theta_{11}]$$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \theta_{11}} = 0 \qquad \text{với } i=2,3$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_{12}} = 0 \qquad \text{với } i=1,3$$

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_{12}} = 2a[(p_x c\phi_2 + p_y s\phi_2 + h - r)s\theta_{12} - p_z c\theta_{12}]$$

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_{13}} = 0 \qquad \text{với } i=1,2$$

$$\frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_{13}} = 2a[(p_x c\phi_3 + p_y s\phi_3 + h - r)s\theta_{13} - p_z c\theta_{13}]$$

Thay các đạo hàm trên vào các pt (10.79), (10.80), sẽ được hệ phương trình động lực học. Với j =1,2,3:

$$2\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(p_x + hc\phi_i - rc\phi_i - ac\phi_i c\theta_{1i}) = (m_p + 3m_b)\ddot{p}_y - f_{px} \qquad (10.85)$$

$$2\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(p_y + hs\phi_i - rs\phi_i - as\phi_i c\theta_{1i}) = (m_p + 3m_b)\ddot{p}_y - f_{py} \qquad (10.86)$$

$$2\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(p_z - as\theta_{1i}) = (m_p + 3m_b)\ddot{p}_z + (m_p + 3m_b)g_c - f_{pz} \qquad (10.87)$$

trong đó f_{px}, f_{py}, f_{pz} là các thành phần x, y, z của ngoại lực tác dụng lên bệ di động. Với j = 4,5,6:

$$\tau_1 = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_{11} + \left(\frac{1}{2}m_a + m_b\right)g_c ac\theta_{11}$$
$$- 2a\lambda_1[(p_x c\phi_1 + p_y s\phi_1 + h - r)s\theta_{11} - p_z c\theta_{11}] \qquad (10.88)$$

$$\tau_2 = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_{12} + \left(\frac{1}{2}m_a + m_b\right)g_c ac\theta_{12}$$
$$- 2a\lambda_2[(p_x c\phi_2 + p_y s\phi_2 + h - r)s\theta_{12} - p_z c\theta_{12}] \qquad (10.89)$$

$$\tau_3 = (I_m + \frac{1}{3}m_a a^2 + m_b a^2)\ddot{\theta}_{13} + \left(\frac{1}{2}m_a + m_b\right)g_c ac\theta_{13}$$
$$- 2a\lambda_3[(p_x c\phi_3 + p_y s\phi_3 + h - r)s\theta_{13} - p_z c\theta_{13}] \qquad (10.90)$$

Các pt (10.85) đến (10.87) là hệ ba phương trình tuyến tính ba ẩn, xác định ba số nhân Lagrange. Khi tính được các số nhân Lagrange, moment bộ tác động được xác định từ hệ phương trình thứ hai gồm các pt

(10.88) đến (10.90). Hai hệ phương trình này có thể được sử dụng để điều khiển thời gian thực cho cơ cấu chấp hành này.

Tóm tắt

Chương này trình bày động lực học đảo của cơ cấu chấp hành song song. Phần đầu giới thiệu phương pháp tính số dựa trên các phương trình Newton-Euler. Bằng cách xét từng nhánh theo hệ thống con, các phản lực và moment tại khớp nối các thành phần phía trên và phía dưới của nhánh có thể được loại bỏ khỏi các phương trình chuyển động. Bằng cách viết các phương trình chuyển động của từng nhánh xung quanh khớp cầu cố định và biểu thị kết quả theo hệ tọa độ khâu, các phản lực tại khớp cầu cố định bị loại bỏ, còn một số phản lực ở khớp cầu di động có thể được giải một cách độc lập từ các phương trình chuyển động của bệ di động, do đó hiệu suất tính toán tăng rõ rệt.

Phương pháp dựa trên nguyên lý công ảo có hiệu quả hơn. Bước cơ bản khi áp dụng phương pháp này là xác định các ma trận Jacobi khớp liên hệ trạng thái vận tốc của các nhánh với trạng thái vận tốc của bệ di động. Bệ Stewart-Gough với sáu nhánh được dùng làm ví dụ để minh họa phương pháp luận. Sử dụng nguyên lý công ảo, các phương trình động lực học chuyển động đối với cơ cấu chấp hành phức tạp có thể được rút gọn để giải hệ sáu phương trình với sáu ẩn. Để minh họa thuật toán này, thuật toán máy tính được triển khai và các ví dụ cụ thể được trình bày. Phương pháp này hiệu quả hơn phương pháp Newton-Euler, có thể được dùng để xác định sự điều khiển thời gian thực cho cơ cấu chấp hành song song, chẳng hạn bệ Stewart-Gough.

Mặc dầu hiện tại chưa thể thiết lập các phương trình động lực học tường minh cho cơ cấu chấp hành song song 6-dof tổng quát, nhưng có thể xác định hệ phương trình chuyển động cho các cơ cấu chấp hành tương đối đơn giản bằng cách áp dụng các phương trình Lagrange loại 1. Động lực học của cơ cấu chấp hành Maryland được phân tích để minh họa phương pháp này.

Phụ lục A

PHƯƠNG PHÁP LIÊN TỤC

Bài toán động học đảo của cơ cấu chấp hành nối tiếp có thể được rút gọn thành đa thức với một biến nếu cơ cấu này có ba trục khớp liên tiếp cắt nhau tại điểm chung hoặc song song với nhau. Tuy nhiên, đối với cơ cấu chấp hành có cấu trúc động học tổng quát, các nghiệm dạng khép kín hầu như không thể tìm được. Trong trường hợp này, có thể phải giải bài toán theo phương pháp số. Trong Phụ Lục này sẽ giới thiệu phương pháp số được gọi là phương pháp liên tục. Hai giải pháp quan trọng nhất trong phương pháp này là sử dụng số phức để biểu thị các biến và các thông số thực, và sử dụng các biến đồng nhất m. Phần kế tiếp sẽ giới thiệu khái niệm về đồng nhất hóa đa thức và khái niệm về tính liên tục. Giải pháp Tsai và Morgan được dùng để minh họa phương pháp luận này.

Số Bezout

Số Bezout tính số nghiệm đối với hệ các phương trình đa thức. Trước hết, cần xét phương trình đa thức với một biến phức.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_j x^{n-j} = 0 \qquad \text{(A.1)}$$

trong đó a_i là các hệ số hằng và x là biến phức. Định lý đại số cơ bản cho biết phương trình đa thức bậc n có n nghiệm. Như vậy, *số Bezout* của đa thức là bằng số bậc của phương trình đó.

Kế tiếp, cần xét n phương trình đa thức với n biến. Bậc của đại lượng của đa thức nhiều biến được xác định là tổng các lũy thừa, bậc của phương trình đa thức là bậc cao nhất của mọi đại lượng trong phương trình, và bậc toàn phần của hệ đa thức là tích các bậc của tất cả các phương trình trong hệ. Đối với hệ đa thức

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.2)}$$

nếu bậc của phương trình $f_i(x)$ là d_i, bậc toàn phần của hệ là $d = d_1 d_2 \ldots d_n$

Định lý Bezout cho biết hệ đa thức bậc toàn phần d có tối đa d nghiệm riêng biệt trong không gian phức Euclide. Nếu mọi nghiệm của hệ đa thức đều là bình thường, số nghiệm bằng số bậc toàn phần của hệ. Nếu tính cả các nghiệm là vô cực, *số Bezout* của hệ đa thức bằng bậc toàn phần của hệ đó.

Công thức đồng nhất cơ bản

Các nghiệm ở vô cực có thể được tính bằng cách sử dụng các tọa độ đồng nhất. Gọi $(x_1, x_2, ..., x_n)$ là n biến của hệ đa thức. Các tọa độ đồng nhất $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ có thể nhận được bằng cách mở rộng số biến từ n đến n+1 theo quan hệ $x_i = y_i/y_{n+1}$, với y_{n+1} là *hệ số vô hướng*. Thay $x_i = y_i/y_{n+1}$ vào hệ phương trình ban đầu và nhân từng phương trình với y_{n+1}^{di} để khử mẫu số, sẽ nhận được hệ các phương trình mới là đồng nhất theo y_i. Theo cách đó, các nghiệm ở vô cực trở thành các nghiệm hữu hạn khác zero, với $y_{n+1} = 0$ và nghiệm của hệ phương trình ban đầu có thể nhận được bằng cách chia nghiệm đồng nhất cho y_{n+1}. Phương pháp này được gọi là *công thức đồng nhất - 1* cơ bản.

Ví dụ, hệ phương trình, các pt (2.106) đến (2.110), từ động học đảo của cơ cấu chấp hành 6R tổng quát, có thể viết dưới dạng

$$F(x):\begin{cases} f_i(x) = a_{i,1}x_1x_3 + a_{i,2}x_1x_4 + a_{i,3}x_2x_3 + a_{i,4}x_2x_4 \\ \qquad + a_{i,5}x_5x_7 + a_{i,6}x_5x_8 + a_{i,7}x_6x_7 + a_{i,8}x_6x_8 \\ \qquad + a_{i,9}x_1 + a_{i,10}x_2 + a_{i,11}x_3 + a_{i,12}x_4 \\ \qquad + a_{i,13}x_5 + a_{i,14}x_6 + a_{i,15}x_7 + a_{i,16}x_8 \\ \qquad + a_{i,17} = 0 \quad (i = 1,...,4) \\ f_5(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ f_6(x) = x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \\ f_7(x) = x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0 \\ f_8(x) = x_7^2 + x_8^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad (A.3)$$

trong đó a_{ij} là hệ số và x_i là biến của tám đa thức. Các hệ số là các thông số khâu không đổi, và các biến là hàm sine và cosine của bốn góc khớp. Đối với hệ phương trình này, bậc của $f_i(x) = 0$ là 2 với i = 1 đến 8. Do đó bậc toàn phần của hệ là $2^8 = 256$.

Hệ thống đồng nhất - 1 cơ bản có thể nhận được bằng cách thay $x_i = y_i/y_9$ vào pt (A.3) sau đó nhân từng phương trình với y_9^2 để khử mẫu số. Từ đó sẽ nhận được hệ tám phương trình đồng nhất với chín ẩn.

$$\widetilde{F}(y):\begin{cases} \widetilde{f}_i(y) = a_{i,1}y_1y_3 + a_{i,2}y_1y_4 + a_{i,3}y_2y_3 + a_{i,4}y_2y_4 \\ \quad + a_{i,5}y_5y_7 + a_{i,6}y_5y_8 + a_{i,7}y_6y_7 + a_{i,8}y_6y_8 \\ \quad + a_{i,9}y_1y_9 + a_{i,10}y_2y_9 + a_{i,11}y_3y_9 + a_{i,12}y_4y_9 \\ \quad + a_{i,13}y_5y_9 + a_{i,14}y_6y_9 + a_{i,15}y_7y_9 + a_{i,16}y_8y_9 \\ \quad + a_{i,17}y_9^2 = 0 \quad (i = 1,\dots,4) \\ \widetilde{f}_5(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_9^2 = 0 \\ \widetilde{f}_6(y) = y_3^2 + y_4^2 - y_9^2 = 0 \\ \widetilde{f}_7(y) = y_5^2 + y_6^2 - y_9^2 = 0 \\ \widetilde{f}_8(y) = y_7^2 + y_8^2 - y_9^2 = 0 \end{cases} \qquad (A.4)$$

Đối với hệ đồng nhất - 1 cơ bản, nếu $(y_1, \dots, y_{n+1})$ là nghiệm, $(\rho y_1, \dots, \rho y_{n+1})$ cũng là nghiệm, với ρ là hằng bất kỳ khác zero. Mỗi nghiệm của hệ ban đầu ứng với đường đi qua điểm gốc của các tọa độ đồng nhất được gọi là không gian chiếu. Sử dụng các tọa độ đồng nhất, số Bezout của hệ phương trình đa thức là bằng bậc toàn phần của hệ đó, do đó số Bezout của hệ phương trình (A.4) là 256.

Sự đồng nhất hóa - m

Việc sử dụng nhiều biến đồng nhất đôi khi có thể giảm bớt số lượng các nghiệm dư. Nhiệm vụ chính trong sự đồng nhất hóa là liên hệ các biến theo nhóm và biến đổi từng nhóm thành tập hợp đồng nhất các biến. Hệ đa thức được gọi là công thức đồng nhất - m nếu các biến được sắp xếp vào m nhóm đồng nhất. Ví dụ, có thể sắp xếp các biến trong hệ phương trình (A.3) vào hai nhóm, (x_1, x_2, x_5, x_6) và (x_3, x_4, x_7, x_8), sau đó thay $x_i = y_i/y_9$ cho i = 1, 2, 5, 6, và $x_i = y_i/y_{10}$ cho i = 3, 4, 7, 8, vào các phương trình này và khử mẫu số sẽ nhận được hệ đồng nhất - 2.

$$
\tilde{F}(y):\begin{cases}
\tilde{f}_i(y) = a_{i,1}y_1y_3 + a_{i,2}y_1y_4 + a_{i,3}y_2y_3 + a_{i,4}y_2y_4 \\
\qquad + a_{i,5}y_5y_7 + a_{i,6}y_5y_8 + a_{i,7}y_6y_7 + a_{i,8}y_6y_8 \\
\qquad + a_{i,9}y_1y_{10} + a_{i,10}y_2y_{10} + a_{i,11}y_3y_9 + a_{i,12}y_4y_9 \\
\qquad + a_{i,13}y_5y_{10} + a_{i,14}y_6y_{10} + a_{i,15}y_7y_9 + a_{i,16}y_8y_9 \\
\qquad + a_{i,17}y_9y_{10} = 0 \quad (i = 1,\ldots,4) \\
\tilde{f}_5(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_9^2 = 0 \\
\tilde{f}_6(y) = y_3^2 + y_4^2 - y_{10}^2 = 0 \\
\tilde{f}_7(y) = y_5^2 + y_6^2 - y_9^2 = 0 \\
\tilde{f}_8(y) = y_7^2 + y_8^2 - y_{10}^2 = 0
\end{cases} \tag{A.5}
$$

Gọi β_j với j = 1 đến m là m nhóm biến, để tính số Bezout, trước hết cần tính tổng các tích $d_{ij}\beta_j$ cho từng phương trình đồng nhất - m, với d_{ij} là bậc của phương trình i theo các biến trong nhóm j. Kết quả sẽ có n phương trình tuyến tính trong nhóm β_j với d_{ij} là các hệ số. Kế tiếp cần tìm tích của các phương trình tuyến tính để nhận được đa thức phi tuyến theo β_j.

$$
\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} d_{ij}\beta_j\right) = (d_{11}\beta_1 + \cdots + d_{1m}\beta_m)(d_{21}\beta_1 + \cdots + d_{2m}\beta_m) \\
\cdots(d_{n1}\beta_1 + \cdots + d_{nm}\beta_m) \tag{A.6}
$$

Số Bezout đa đồng nhất được định nghĩa là hệ số của đại lượng $\prod_{j=1}^{m}\beta_j^{k_j}$ trong pt (A.6), với k_j là số biến trong nhóm j.

Đối với hệ đồng nhất - 2 trong pt (A.5), các biến được sắp xếp theo hai nhóm, (x_1, x_2, x_5, x_6) và (x_3, x_4, x_7, x_8), bậc của các phương trình này được nêu trong Bảng A.1. Để tìm số Bezout, có thể tính

$$
\prod_{i=1}^{8}\left(\sum_{j=1}^{2} d_{ij}\beta_j\right) = (\beta_1 + \beta_2)^4(2\beta_1)^2(2\beta_2)^2
$$

trong đó d_{ij} được lấy từ phần tử (i, j) trên Bảng A.1. Do cả hai nhóm đều chứa bốn biến và hệ số $\beta_1^4\beta_2^4$ trong đa thức nêu trên là 96, số Bezout đồng nhất - 2 là 96, do đó công thức đồng nhất - 2 của hệ này sẽ có tối đa là 96 nghiệm.

Bảng A.1 Số bậc của hệ đồng nhất - 2

Phương trình i	Nhóm 1 (j = 1)	Nhóm 2 (j = 2)
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	1	1
5	2	0
6	0	2
7	2	0
8	0	2

Nghiệm ở vô cực

Như đã đề cập, việc sử dụng các tọa độ đồng nhất, các nghiệm ở vô cực có thể được tính đến bằng cách xác lập tọa độ cuối trong từng nhóm biến là zero. Ví dụ, các nghiệm ở vô cực đối với hệ đồng nhất - 2 theo pt (A.5) gồm ba loại, (1) $y_9 = y_{10} = 0$, (2) $y_9 = 0$, $y_{10} = 1$ và (3) $y_9 = 1$, $y_{10} = 0$. Đối với trường hợp (1), bốn phương trình cuối của (A.5) được rút gọn thành

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_5(y) &= y_1^2 + y_2^2 = 0 \\
\tilde{f}_6(y) &= y_3^2 + y_4^2 = 0 \\
\tilde{f}_7(y) &= y_5^2 + y_6^2 = 0 \\
\tilde{f}_8(y) &= y_7^2 + y_8^2 = 0
\end{aligned} \tag{A.7}$$

trong đó, $y_2 = \pm i y_1$, $y_4 = \pm i y_3$, $y_6 = \pm i y_5$, $y_8 = \pm i y_7$, gồm 16 tổ hợp. Đối với tổ hợp bất kỳ, chẳng hạn $y_2 = i y_1$, $y_4 = i y_3$, $y_6 = i y_5$, $y_8 = i y_7$, bốn phương trình đầu của (A.5) sẽ rút gọn thành

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i(y) = {} & [(a_{i,1} - a_{i,4}) + i(a_{i,2} + a_{i,3})] y_1 y_3 \\
& + [(a_{i,5} - a_{i,8}) + i(a_{i,6} + a_{i,7})] y_5 y_7 \\
= {} & 0
\end{aligned} \tag{A.8}$$

với i = 1, 2, 3, 4

Có thể xét pt (A.8) là hệ bốn phương trình tuyến tính với hai biến, y_1y_3 và y_5y_7, các nghiệm khả thi là y_1y_3 và $y_5y_7 = 0$ đối với các thông số tổng quát. Tuy nhiên, y_1 và y_5 không thể đồng thời bằng zero, nếu chúng đồng thời bằng zero thì $(y_1, y_2, y_5, y_6, y_9) = (0, 0, 0, 0, 0)$, không xảy ra

trong không gian chiếu. Tương tự, y_3 và y_7 không thể đồng thời bằng zero. Đối với tổ hợp này có hai nghiệm, $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) = (1, i, 0, 0, 0, 0, 1, i)$ và $(0, 0, 1, i, 1, i, 0, 0)$. Do có 16 tổ hợp cho trường hợp (1), tổng số nghiệm riêng rẽ ở vô cực là 32.

Tương tự, có thể thấy có 16 nghiệm ở vô cực đối với từng trường hợp (2) và (3), do đó có 64 nghiệm ở vô cực. Do vậy, hệ phương trình này có tối đa 32 nghiệm. Mặc dù cả 32 nghiệm đều thỏa pt (A.3), nhưng có thể thấy có 16 nghiệm không thỏa các phương trình vòng khép kín gốc. Các nghiệm không thỏa phương trình vòng khép kín ban đầu được gọi là các nghiệm dư, các nghiệm còn lại đều có ý nghĩa.

Phương pháp liên tục

Trong phần này sẽ trình bày tóm tắt phương pháp số được gọi là phương pháp liên tục. Giả sử, cần giải hệ n phương trình đa thức với n biến.

$$F(x): \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (A.9)$$

Có thể gọi $F(x) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ là hệ đích. Ý tưởng của phương pháp liên tục là đưa hệ đích vào họ các hệ đa thức với tham số thực t, được gọi là tham số liên tục. Mọi nghiệm của một hệ trong họ, được gọi là hệ ban đầu $G(x) = 0$, có thể được giải ở dạng kín. Hơn nữa, các nghiệm của hệ ban đầu phải liên kết với mọi nghiệm riêng biệt của hệ đích, thông qua các đường dẫn được gọi là đường dẫn đồng nhất. Về nguyên tắc cần xây dựng hàm đồng nhất $H(x,t) = 0$ với tham số t mới sao cho $H(x, 1) = F(x)$, $H(x, 0) = G(x)$, và thỏa các tính chất sau:

1. Nghiệm của $G(x) = 0$ có thể giải ở dạng khép kín.
2. Tập hợp nghiệm của $H(x,t) = 0$ với $0 \le t < 0$ chứa số lượng đường dẫn hữu hạn, mỗi đường dẫn được đặc trưng bằng t.
3. Mỗi nghiệm riêng của $F(x) = 0$ đều liên hệ với nghiệm của $G(x) = 0$.

Các tính chất 1 đến 3 bảo đảm các đường dẫn nghiệm có thể bắt đầu các nghiệm $G(x) = 0$ tại $t = 0$ đến mọi nghiệm của $F(x) = 0$ tại $t = 1$ sử dụng kỹ thuật số bình thường kể cả các phương pháp giải phương trình vi phân. Cần chú ý, dù các tính chất 1 đến 3 cho biết mỗi nghiệm của $F(x) = 0$ sẽ ở cuối đường dẫn nghiệm, nhưng một số đường dẫn có thể phân kỳ

đến vô cực khi tham số liên tục t tiến 1. Điều này thường xảy ra khi G(x) = 0 có nhiều nghiệm hơn so với F(x) = 0, trong điều kiện đó, một số nghiệm của G(x) = 0 là dư và thường phân kỳ ở vô cực.

Phương pháp liên tục đòi hỏi hệ ban đầu G(x) = 0, hàm đồng nhất H(x, t) = 0, và kỹ thuật tính số để xét hàm đồng nhất từ t = 0 đến t = 1.

Hàm đồng nhất

Hàm đồng nhất cho phép diễn giải các nghiệm của hệ ban đầu với các nghiệm của hệ đích. Các đường dẫn nghiệm phải ổn định và không bất thường. Hàm đồng nhất tổng quát thường dùng là

$$H(x,t) = \gamma(1-t)G(x) + tF(x) \tag{A.10}$$

trong đó γ là hằng phức ngẫu nhiên. Chú ý, tại t = 0 các nghiệm của H(x,0) = 0 là các nghiệm của G(x) = 0 và tại t = 1 các nghiệm này là của hàm F(x) = 0.

Trong xây dựng hàm đồng nhất, tính chất (1) có thể dễ dàng thỏa mãn. Tuy nhiên, các tính chất (2) và (3) chỉ thỏa với sự lựa chọn cẩn thận G(x) và γ. Thông số γ là cần thiết để bảo đảm tính chất (3) của hàm đồng nhất. Điều này có thể được minh họa bằng ví dụ, trong đó hệ ban đầu là âm của hệ gốc, nghĩa là G(x) = -F(x). Đối với γ = 1, hàm đồng nhất H(x, t) = (1 - t) G(x) + tF(x) sẽ triệu tiêu tại t = 0.5, trong khi đối với các lựa chọn γ khác, điều này là không thể. Do đó cần chọn γ ngẫu nhiên để tránh điều đó.

Hệ ban đầu

Mọi nghiệm của hệ ban đầu phải được biết, mỗi nghiệm phải không bất thường, và hệ phải duy trì cùng cấu trúc đa thức như hệ đích. Nếu không, nhiều điều có thể xảy ra, chẳng hạn (1) H(x, t) = 0 có thể không có nghiệm ở giá trị t nào đó, hoặc có vài nghiệm khó phân biệt hoặc khó tìm; (2) G(x) = 0 có thể không có đủ nghiệm tương ứng với các nghiệm của F(x) = 0, hoặc F(x) = 0 sẽ có vài nghiệm không có đường dẫn liên tục hội tụ; (3) khi t tiến tới 1, các nghiệm của H(x, t) = 0 sẽ phân kỳ đến vô cực.

Có lẽ hệ ban đầu đơn giản nhất đối với hệ đa thức đồng nhất - 1 là

$$G(x): \begin{cases} g_1(x) = a_1 x_1^{d_1} - b_1 = 0 \\ g_2(x) = a_2 x_2^{d_2} - b_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ g_n(x) = a_n x_n^{d_n} - b_n = 0 \end{cases} \tag{A.11}$$

trong đó a_i và b_i là các hệ số phức ngẫu nhiên. Do cấu trúc đơn giản của G(x) trong pt (A.11), tính chất (1) hoàn toàn thỏa mãn. Có thể thấy tính chất (2) và (3) cũng thỏa cho hầu hết các lựa chọn a_i và b_i. Nghĩa là, $G(x) = 0$ chứa $d = \prod_{i=1}^{n} d_i$ đường dẫn, hội tụ đến các nghiệm của $F(x) = 0$ hoặc phân kỳ đến vô cực khi t tiến đến 1, và mỗi nghiệm riêng rẽ của $F(x) = 0$ có đường dẫn hội tụ. Điều duy nhất cần tính đến là khi t tăng dần, nghiệm của $H(x, t) = 0$ có thể phân kỳ đến vô cực. Tuy nhiên, có thể tìm được mọi nghiệm riêng rẽ của $F(x) = 0$. Sự lựa chọn a_j và b_j ngẫu nhiên là yếu tố quyết định đối với phương pháp này.

Hệ ban đầu tổng quát khả dĩ là

$$G(x): \begin{cases} g_1(x) = \prod_{j=1}^{d_1}(x_1 - b_{1j}) = 0 \\ g_2(x) = \prod_{j=1}^{d_2}(x_2 - b_{2j}) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x) = \prod_{j=1}^{d_n}(x_n - b_{nj}) = 0 \end{cases} \qquad (A.12)$$

trong đó, b_{ij} là hệ số phức ngẫu nhiên, hệ này thỏa các tính chất (1), (2), (3) với hầu như mọi b_{ij}.

Các hệ ban đầu nêu trên là tổng quát, có thể áp dụng cho hệ đa thức bất kỳ. Cũng có thể xây dựng hệ ban đầu cho bài toán cụ thể. Phương pháp là chọn hệ số một cách ngẫu nhiên của hệ đích nhưng không ảnh hưởng đến cấu trúc cơ bản của các đa thức. Đối với hệ đồng nhất - m, hệ ban đầu với cấu trúc đa thức không đổi so với hệ đích có thể xây dựng bằng tích các hệ số

$$g_i(x) = \prod_{j=1}^{m} h_{ij}(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{k_j j}) = 0 \qquad (A.13)$$

trong đó h_{ij} là đa thức bậc d_{ij} trong nhóm j, d_{ij} là bậc của phương trình i theo các biến của nhóm j, và k_j là số lượng các biến trong nhóm j. Các hệ số h_{ij} có thể được chọn ngẫu nhiên để thỏa các tính chất (1), (2) và (3).

Ví dụ, hệ ban đầu của hệ đồng nhất - 2 theo pt (A.5) có thể viết:

$$G(y):\begin{cases} g_1(y) = (y_1 - b_{11}y_9)(y_3 - b_{12}y_{10}) = 0 \\ g_2(y) = (y_2 - b_{21}y_9)(y_4 - b_{22}y_{10}) = 0 \\ g_3(y) = (y_5 - b_{31}y_9)(y_7 - b_{32}y_{10}) = 0 \\ g_4(y) = (y_6 - b_{41}y_9)(y_8 - b_{42}y_{10}) = 0 \\ g_5(y) = y_1^2 + y_2^2 - b_{51}y_9^2 = 0 \\ g_6(y) = y_3^2 + y_4^2 - b_{61}y_{10}^2 = 0 \\ g_7(y) = y_5^2 + y_6^2 - b_{71}y_9^2 = 0 \\ g_8(y) = y_7^2 + y_8^2 - b_{81}y_{10}^2 = 0 \end{cases} \quad (A.14)$$

trong đó b_{ij} là hằng phức ngẫu nhiên

Đường dẫn

Để thực hiện phương pháp liên tục, cần bắt đầu từ nghiệm của G(x) = 0, số gia t là δt và giải hàm H(x, δt) = 0, tăng thêm số gia cho t và giải H(x, 2δt) = 0, ... cho đến t = 1. Mỗi khi tăng t theo δt, cần sử dụng nghiệm H(x, t) = 0 ở bước trước để tìm nghiệm H(x, t+δt) = 0. Qui trình này được lặp lại cho từng nghiệm của G(x) = 0 cho đến khi tìm được mọi nghiệm của F(x) = 0.

Phương pháp này thường thực hiện trên máy tính, thiết lập hệ các phương trình vi phân với các nghiệm là các đường dẫn liên tục. Nói chung, các phương trình vi phân được giải bằng phương pháp tích phân số. Kết quả tích phân sau đó được tính theo hàm Newton để tìm nghiệm cuối mỗi đường dẫn nghiệm.

Nghiệm Tsai và Morgan

Xét bài toán động học đảo của cơ cấu chấp hành 6R tổng quát đã trình bày trong Chương 2. Khai triển các pt (2.106) đến (2.110) sẽ nhận được hệ tám đa thức theo pt (A.15), trong đó $x_1 = c\theta_1$, $x_2 = s\theta_1$, $x_3 = c\theta_2$, $x_4 = s\theta_2$, $x_5 = c\theta_4$, $x_6 = s\theta_4$, $x_7 = c\theta_5$, $x_8 = s\theta_5$ là các biến của tám đa thức; a_i, d_i, α_i là các thông số hằng của khâu D-H; θ_i, i = 1,2,3,4,5 là các góc khớp; $p = [p_x, p_y, p_z]^T$ là vector vị trí của gốc tọa độ khâu 5; và $e = [e_x, e_y, e_z]^T$ là vector đơn vị trên trục z_5, (Hình 2.11). Vector vị trí b và vector đơn vị e được tính theo pt (2.100) và (2.101) sử dụng định hướng và vị trí bộ tác động cuối cho trước.

$$
\mathbf{F}(\mathbf{x}):\begin{cases}
f_1(\mathbf{x}) = -c\alpha_1 s\alpha_2 p_y x_1 x_3 + s\alpha_2 p_x x_1 x_4 + c\alpha_1 s\alpha_2 p_x x_2 x_3 + s\alpha_2 p_y x_2 x_4 \\
\qquad - s\alpha_3 c\alpha_4 a_5 x_5 x_8 - s\alpha_3 a_5 x_6 x_7 - s\alpha_1 c\alpha_2 p_y x_1 + s\alpha_1 c\alpha_2 p_x x_2 \\
\qquad - s\alpha_1 s\alpha_2 (p_z - d_1) x_3 - s\alpha_2 a_1 x_4 + s\alpha_3 s\alpha_4 d_5 x_5 - s\alpha_3 a_4 x_6 \\
\qquad - c\alpha_3 s\alpha_4 a_5 x_8 + (c\alpha_1 c\alpha_2 p_z - c\alpha_1 c\alpha_2 d_1 - c\alpha_2 d_2 - d_3 \\
\qquad - c\alpha_3 d_4 - c\alpha_3 c\alpha_4 d_5) = 0 \\
f_2(\mathbf{x}) = -c\alpha_1 s\alpha_2 e_y x_1 x_3 + s\alpha_2 e_x x_1 x_4 + c\alpha_1 s\alpha_2 e_x x_2 x_3 + s\alpha_2 e_y x_2 x_4 \\
\qquad + s\alpha_3 c\alpha_4 s\alpha_5 x_5 x_7 - s\alpha_3 s\alpha_5 x_6 x_8 - s\alpha_1 c\alpha_2 e_y x_1 + s\alpha_1 c\alpha_2 e_x x_2 \\
\qquad - s\alpha_1 s\alpha_2 e_z x_3 + s\alpha_3 s\alpha_4 c\alpha_5 x_5 + c\alpha_3 s\alpha_4 s\alpha_5 x_7 \\
\qquad + (c\alpha_1 c\alpha_2 e_z - c\alpha_3 c\alpha_4 c\alpha_5) = 0 \\
f_3(\mathbf{x}) = a_2 e_x x_1 x_3 + c\alpha_1 a_2 e_y x_1 x_4 + a_2 e_y x_2 x_3 - c\alpha_1 a_2 e_x x_2 x_4 \\
\qquad - s\alpha_3 c\alpha_4 s\alpha_5 d_3 x_5 x_7 + s\alpha_5 a_3 x_5 x_8 + c\alpha_4 s\alpha_5 a_3 x_6 x_7 \\
\qquad + s\alpha_3 s\alpha_5 d_3 x_6 x_8 + (a_1 e_x - s\alpha_1 d_2 e_y) x_1 + (a_1 e_y + s\alpha_1 d_2 e_x) x_2 \\
\qquad + s\alpha_1 a_2 e_z x_4 - s\alpha_3 s\alpha_4 c\alpha_5 d_3 x_5 + s\alpha_4 c\alpha_5 a_3 x_6 \\
\qquad - s\alpha_4 s\alpha_5 (d_4 + c\alpha_3 d_3) x_7 + s\alpha_5 a_4 x_8 + (d_1 e_z + c\alpha_1 d_2 e_z \\
\qquad + c\alpha_3 c\alpha_4 c\alpha_5 d_3 + c\alpha_4 c\alpha_5 d_4 + c\alpha_5 d_5 - p_x e_x \\
\qquad - p_y e_y - p_z e_z) = 0 \\
f_4(\mathbf{x}) = a_2 p_x x_1 x_3 + c\alpha_1 a_2 p_y x_1 x_4 + a_2 p_y x_2 x_3 - c\alpha_1 a_2 p_x x_2 x_4 \\
\qquad + a_3 a_5 x_5 x_7 + s\alpha_3 c\alpha_4 a_5 d_3 x_5 x_8 + s\alpha_3 a_5 d_3 x_6 x_7 \\
\qquad - c\alpha_4 a_3 a_5 x_6 x_8 + (a_1 p_x - s\alpha_1 d_2 p_y) x_1 + (a_1 p_y + s\alpha_1 d_2 p_x) x_2 \\
\qquad - a_1 a_2 x_3 - s\alpha_1 a_2 (d_1 - p_z) x_4 + (a_3 a_4 - s\alpha_3 s\alpha_2 d_3 d_5) x_5 \\
\qquad + (s\alpha_4 a_3 d_5 + s\alpha_3 a_4 d_3) x_6 + a_4 a_5 x_7 + (s\alpha_4 a_5 d_4 \\
\qquad + c\alpha_3 s\alpha_4 a_5 d_3) x_8 + 0.5(-a_1^2 - d_1^2 - a_2^2 - d_2^2 + a_3^2 + d_3^2 \\
\qquad + a_4^2 + d_4^2 + a_5^2 + d_5^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2) = 0 \\
f_5(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\
f_6(\mathbf{x}) = x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \\
f_7(\mathbf{x}) = x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0 \\
f_8(\mathbf{x}) = x_7^2 + x_8^2 - 1 = 0
\end{cases}
\tag{A.15}
$$

Tsai và Morgan sử dụng pt (A.10) với $\gamma = 1$ làm hàm đồng nhất để giải hệ phương trình nêu trên. Các thông số D-H của cơ cấu chấp hành 6R được nêu trong Bảng A.2, định hướng và vị trí của đầu tác động cho trước được nêu trong Bảng A.3. Sử dụng pt (A.11) làm hệ ban đầu, sẽ có 256 điểm khởi đầu tổng quát. Đường dẫn liên tục được tạo ra cho từng điểm khởi đầu. Một số đường dẫn này hội tụ đến các nghiệm của pt (A.15) và số khác phân kỳ ở vô cực khi tham số liên tục t tiến đến 1. Mỗi nghiệm riêng của hệ này đều có đường dẫn hội tụ đến nghiệm đó. Mọi nghiệm đều riêng biệt trừ khi hệ có số nghiệm vô hạn, tức là khi cơ cấu chấp hành có cấu hình đặc biệt. Trong trường hợp này, một số nghiệm là riêng biệt và số khác tạo thành các siêu bề mặt đại số, với độ cong chung. Do đó, phương pháp liên tục sẽ tìm được mọi nghiệm trừ khi hệ có vô số nghiệm. Đối với cơ cấu chấp hành 6R, phương pháp liên tục luôn luôn có 32 đường dẫn hội tụ, trong đó 16 đường dẫn có ý nghĩa. Trong ví dụ nêu trên, phương pháp liên tục tìm được 12 nghiệm thực có ý nghĩa, và được nêu trong Bảng A.4.

Bảng A.2. Các thông số D-H của cơ cấu chấp hành 6R

i	a_i	d_i	α_i
1	0.5000	0.1875	80
2	1.0000	0.375	15
3	0.1250	0.250	120
4	0.6250	0.875	75
5	0.3125	0.500	100
6	0.2500	0.125	60

Bảng A.3. Định hướng và vị trí của bộ tác động cuối cho trước.

Bộ tác động cuối	Thành phần x	Thành phần y	Thành phần z
1	0.22441776	0.71549788	0.79551628
2	-0.71511545	0.65150320	0.25328538
3	-0.69899036	-0.66895464	-0.25280857
4	0.00473084	-0.35783135	0.93377425

Bảng A.4. Các nghiệm thực.

Số thứ tự	θ_1	θ_2	θ_4	θ_5
1	167.68	83.55	65.84	-88.67
2	-143.00	100.07	18.46	-59.49

3	115.86	-168.65	157.17	-111.41
4	107.56	2.00	166.77	-173.54
5	-106.07	-140.86	-161.28	35.54
6	-65.37	142.24	-70.90	-51.63
7	120.52	31.27	114.15	-143.62
8	7.75	103.87	-21.37	-79.90
9	-16.69	97.90	-80.98	-25.72
10	47.26	163.44	28.32	-41.13
11	20.93	58.74	-27.07	-125.66
12	38.93	-56.45	12.28	72.23

Theo pt (A.13), có thể xây dựng hệ ban đầu mới

$$G(x):\begin{cases} g_1(x) = -x_6x_7 + x_2 = 0 \\ g_2(x) = -x_6x_8 + x_2 = 0 \\ g_3(x) = x_1x_3 + x_5x_8 + x_1 + x_2 - x_7 - 5 = 0 \\ g_4(x) = x_1x_3 + x_5x_7 + x_1 + x_2 - x_3 + x_8 - 5 = 0 \\ g_5(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ g_6(x) = x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0 \\ g_7(x) = x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0 \\ g_8(x) = x_7^2 + x_8^2 - 2 = 0 \end{cases} \qquad (A.16)$$

Có thể thấy hệ nêu trên có 32 nghiệm riêng rẽ. Sử dụng hàm đồng nhất tổng quát, mỗi nghiệm riêng của hệ phương trình (A.15) có thể nhận được theo nghiệm của pt (A.16). Do có đúng 32 đường dẫn, kết quả này sẽ giúp tiết kiệm thời gian tính toán.

Tính đồng nhất Cheater

Tính đồng nhất Cheater được dùng để giải hệ phương trình đa thức, loại hệ phương trình cần giải lặp lại với các hệ số khác nhau. Gọi

$$F(x,a):\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n;a_1,\dots,a_k) = 0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n;a_1,\dots,a_k) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n;a_1,\dots,a_k) = 0 \end{cases} \qquad (A.17)$$

là hệ đích, trong đó $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là các biến và $a = (a_1, \ldots, a_k)$ là các hệ số, và gọi

$$G(x): \begin{cases} g_1(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1,\ldots,x_n; a_1^0,\ldots,a_k^0) + b_1^0 = 0 \\ g_2(x_1,\ldots,x_n) = f_2(x_1,\ldots,x_n; a_1^0,\ldots,a_k^0) + b_2^0 = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1,\ldots,x_n) = f_n(x_1,\ldots,x_n; a_1^0,\ldots,a_k^0) + b_n^0 = 0 \end{cases} \quad (A.18)$$

là hệ phương trình đa thức nhận được bằng cách thay các hệ số a với các số phức ngẫu nhiên $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_k^0)$ và bằng phép cộng các hằng $b^0 = (b_1^0, b_2^0, \ldots, b_n^0)$. Có thể thấy, tính chất (2) và (3) là đúng với hàm đồng nhất này.

$$H(x,t) = F(x,(1-t)a^0 + ta) + (1-t)b^0 = 0 \quad (A.19)$$

Chú ý, tại $t = 0$, $H(x, 0) = G(x, 0) = 0$, và tại $t = 1$, $H(x, 1) = F(x, a) = 0$

Tính đồng nhất Cheater được thực hiện theo hai bước

1. Giải hệ phương trình (A.18) sử dụng tính đồng nhất quy ước. Số các nghiệm d_0, tương ứng bậc toàn phần của hệ ban đầu ($d_0 \le d$)
2. Đối với từng lựa chọn mới các hệ số $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ theo d_0 đường dẫn được xác định bằng $H(x, t) = 0$ trong pt (A.19) sẽ tìm được tất cả các nghiệm của $F(x, a) = 0$.

Sử dụng phương pháp này, với $d = d_1 d_2 \ldots d_n$ đường dẫn của hệ các phương trình với các hệ số phức ngẫu nhiên a^0 và b^0 chỉ áp dụng để tìm d_0. Các nghiệm d_0 được dùng để khởi đầu các đường dẫn kế tiếp, do đó làm giảm số lượng đường dẫn và tăng hiệu quả của phương pháp.

Điều quan trọng là a^0 và b^0 phải là số phức, dù hệ ban đầu $F(x, a) = 0$ có thể có các số thực. Đối với a^0 và b^0 là số thực, hàm đồng nhất có thể không thỏa tính chất (2) và (3). Phương pháp đồng nhất Cheater còn được gọi là phương pháp đồng nhất không số.

Phụ lục B

PHƯƠNG PHÁP LOẠI TRỪ THẨM TÁCH SYLVESTER

Trong Phụ Lục này sẽ giới thiệu phương pháp loại trừ thẩm tách Sylvester để rút gọn hệ phương trình đa thức. Phương pháp đòi hỏi xác định phương trình được gọi là phương trình loại trừ hoặc phương trình kết quả. Phương pháp được dùng rộng rãi trong động học để tìm phương trình loại trừ là phương pháp loại trừ do Sylvester đưa ra. Về lý thuyết, phương pháp này rút gọn hệ phương trình đa thức nhiều biến bất kỳ thành một đa thức một ẩn. Trong thực tế, phương pháp này chỉ áp dụng được cho tập hợp tương đối nhỏ các phương trình đa thức. Điều này là do đa thức kết quả có thể tăng số lượng phương trình rất lớn và có nhiều nghiệm lạ.

Các bước loại trừ

Qui trình loại trừ của Sylvester sử dụng sáu bước cơ bản.

1. Viết lại tất cả các phương trình với một biến bị loại bỏ.
2. Xác định tích lũy thừa của các biến còn lại là "các biến tuyến tính" mới. Các tích lũy thừa là các đại lượng trong phương trình đa thức. Ví dụ, các tích lũy thừa của đa thức $x^2z + 6xy + 3yz + 4z + 1 = 0$ là x^2z, xy, yz, z, và 1.
3. Từ các phương trình gốc, cần tạo ra các phương trình tuyến tính độc lập bằng số lượng các ẩn tuyến tính.
4. Xác lập định thức của ma trận hệ số theo zero để nhận được đa thức theo biến đã loại bỏ.
5. Tìm các nghiệm của đa thức đặc tính của ma trận này, kết quả có thể là tất cả các nghiệm khả dĩ của biến đã loại bỏ.
6. Thay biến đã loại bỏ, một cách lần lượt, vào hệ các phương trình ban đầu và lặp lại cho các biến còn lại.

Quan trọng nhất trong qui trình loại trừ có lẽ là bước 3. Hệ phương trình tuyến tính mới thường được tạo bằng cách nhân các phương trình ban đầu với lũy thừa của một hoặc nhiều biến.

Ví dụ

Giải hai phương trình đa thức với hai biến x_1 và x_2

$$e_{11}\varepsilon_1^2 + e_{12}x_2^2 + e_{13}x_1x_2 + e_{14}x_1 + e_{15}x_2 + e_{16} = 0 \qquad (B.1)$$

$$e_{21}\varepsilon_1^2 + e_{22}x_2^2 + e_{23}x_1x_2 + e_{24}x_1 + e_{25}x_2 + e_{26} = 0 \qquad (B.2)$$

trong đó e_{ij} là các hệ số hằng

Bước 1. Viết lại pt (B.1) và (B.2) với biến x_2 bị loại trừ.

$$Ax_1^2 + Bx_1 + C = 0 \qquad (B.3)$$

$$A'x_1^2 + B'x_1 + C' = 0 \qquad (B.4)$$

trong đó $A = e_{11}$, $B = e_{13}x_2 + e_{14}$, $C = e_{12}x_2^2 + e_{15}x_2 + e_{16}$, $A' = e_{21}$, $B' = e_{23}x_2 + e_{24}$, $C' = e_{22}x_2^2 + e_{25}x_2 + e_{26}$.

Bước 2. Xét các tích lũy thừa x_1^2, x_1, và 1 là các biến tuyến tính mới, các pt (B.3) và (B.4) trở thành phương trình tuyến tính với các biến mới.

Bước 3. Thiết lập các phương trình mới bằng cách nhân các pt (B.3) và (B.4) với các lũy thừa của biến x_1.

$$Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 = 0 \qquad (B.5)$$

$$A'x_1^3 + B'x_1^2 + C'x_1 = 0 \qquad (B.6)$$

Bước 4. Xét các pt (B.3), (B.4), (B.5), (B.6) là bốn phương trình tuyến tính với bốn ẩn, x_1^3, x_1^2, x_1, 1. Xác lập định thức của ma trận hệ số theo bốn phương trình tuyến tính độc lập là zero.

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0 \qquad (B.7)$$

Khai triển pt (B.7)

$$(AC' - CA')^2 + (AB' - BA')(CB' - BC') \qquad (B.8)$$

Bước 5. Phương trình (B.8) là đa thức bậc bốn của x_2, tính đến các hệ số và các nghiệm ở vô cực, phương trình này có bốn nghiệm.

Bước 6. Thay từng nghiệm của x_2 vào pt (B.1) và (B.2), giải các phương trình theo x_1, sẽ chỉ có một nghiệm x_1 ứng với từng nghiệm x_2, do phải thỏa đồng thời cả pt (B.1) và (B.2).

Phụ Lục C

GIẢI PHÁP RAGHAVAN VÀ ROTH

Phương pháp loại trừ Sylvester trong Phụ Lục B chỉ hiệu quả đối với hệ phương trình đa thức nhỏ có bậc tương đối thấp. Đối với các hệ đa thức phức tạp hơn, phương pháp này sẽ tốn rất nhiều thời gian. Do đó, cần phải có phương pháp mới để tạo ra hệ các phương trình tuyến tính độc lập không có các tích lũy thừa mới, hoặc chỉ có ít tích lũy thừa mới. Trong Phụ Lục này sẽ trình bày giải pháp Raghavan và Roth dùng để giải bài toán động học đảo của cơ cấu chấp hành 6R tổng quát.

Phương trình vòng kín

Xét cơ cấu chấp hành 6R được minh họa trên Hình 2.11. Để thuận tiện có thể tách ${}^1A_2$ theo tích của hai ma trận.

$$ {}^1A_2 = {}^1G_2\,{}^1H_2 \tag{C.1} $$

trong đó

$$ {}^1G_2 = \begin{vmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{và} \quad {}^1H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & c\alpha_2 & -s\alpha_2 & 0 \\ 0 & s\alpha_2 & c\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} $$

Chú ý, ${}^1G_2$ chỉ chứa biến khớp và ${}^1H_2$ chỉ chứa thông số khâu. Thay pt (C.1) vào pt (2.99)

$$ {}^1H_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^3A_4\,{}^4A_5\,{}^5A_6 = {}^0A_6 \tag{C.2} $$

nhân trước cả hai vế của pt (C.2) với $({}^0A_1\,{}^1G_2)^{-1}$ và nhân sau cả hai vế với ${}^5A_6^{-1}$

$$ {}^1H_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = {}^1G_2^{-1}\,{}^0A_1^{-1}\,{}^0A_6\,{}^5A_6^{-1} \tag{C.3} $$

Chú ý, bằng cách chuyển θ_1, θ_2, θ_6 sang vế phải của phương trình này, sẽ hạ bậc cho các phương trình. Khi thực hiện phép nhân ma trận, pt (C.3) có dạng

$$\begin{bmatrix} f_{11}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) & f_{12}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) & f_{13}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) & f_{14}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) \\ f_{21}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) & f_{22}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) & f_{23}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) & f_{24}(\theta_3,\theta_4,\theta_5) \\ f_{31}(\theta_4,\theta_5) & f_{32}(\theta_4,\theta_5) & f_{33}(\theta_4,\theta_5) & f_{34}(\theta_4,\theta_5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f'_{11}(\theta_1,\theta_2,\theta_6) & f'_{12}(\theta_1,\theta_2,\theta_6) & f'_{13}(\theta_1,\theta_2) & f'_{14}(\theta_1,\theta_2 \\ f'_{21}(\theta_1,\theta_2,\theta_6) & f'_{22}(\theta_1,\theta_2,\theta_6) & f'_{23}(\theta_1,\theta_2) & f'_{24}(\theta_1,\theta_2) \\ f'_{31}(\theta_1,\theta_2,\theta_6) & f'_{32}(\theta_1,\theta_2,\theta_6) & f'_{33}(\theta_1,\theta_2) & f'_{14}(\theta_1,\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Phương trình (C.4) chỉ có các biến theo các phần tử của pt (C.3). Khi xét pt (C.4) sẽ thấy sáu phương trình vô hướng nhận được từ cột thứ ba và thứ tư là không có biến θ_6. Sáu phương trình này có thể viết dưới dạng vector, ký hiệu theo a và b

$$a: \begin{bmatrix} c\theta_3 & s\theta_3 & 0 \\ -c\alpha_2 s\theta_3 & c\alpha_2 c\theta_3 & s\alpha_2 \\ s\alpha_2 s\theta_3 & -s\alpha_2 c\theta_3 & c\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \\ \mu_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$b: \begin{bmatrix} c\theta_3 & s\theta_3 & 0 \\ -c\alpha_2 s\theta_3 & c\alpha_2 c\theta_3 & s\alpha_2 \\ s\alpha_2 s\theta_3 & -s\alpha_2 c\theta_3 & c\alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

trong đó

$$\mu_x = g_x c\theta_4 + g_y s\theta_4 + a_3$$

$$\mu_y = -(g_x s\theta_4 - g_y c\theta_4)c\alpha_3 + g_z s\alpha_3$$

$$\mu_z = (g_x s\theta_4 - g_y c\theta_4)s\alpha_3 + g_z c\alpha_3 + d_3$$

$$v_x = m_x c\theta_4 + m_y s\theta_4$$

$$v_y = -(m_x s\theta_4 - m_y c\theta_4)c\alpha_3 + m_z s\alpha_3$$

$$v_z = (m_x s\theta_4 - m_y c\theta_4)s\alpha_3 + m_z c\alpha_3$$

với g_x, g_y, g_z, h_x, h_y, h_z, m_x, m_y, m_z, n_x, n_y, n_z được xác định theo các pt (2.106) và (2.107). Chú ý, μ_x, μ_y, μ_z, v_x, v_y, v_z là các hàm tuyến tính với các

đại lượng $s\theta_4 s\theta_5$, $s\theta_4 c\theta_5$, $c\theta_4 s\theta_5$, $c\theta_4 c\theta_5$, $s\theta_4$, $c\theta_4$, $s\theta_5$, $c\theta_5$, và 1, còn h_x, h_y, h_z, n_x, n_y, n_z là các hàm tuyến tính của $s\theta_1$, $c\theta_1$, và 1.

Hai vector a và b trong pt (C.5) và (C.6) biểu thị sáu phương trình vô hướng với 5 ẩn, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_5$. Để loại bớt các biến, có thể coi vài tích lũy thừa là các biến mới và loại bỏ các tích lũy thừa khác. Có thể viết pt (C.5) và (C.6) ở dạng ma trận

$$A\begin{bmatrix} s\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 c\theta_5 \\ c\theta_4 s\theta_5 \\ c\theta_4 c\theta_5 \\ s\theta_4 \\ c\theta_4 \\ s\theta_5 \\ c\theta_5 \\ 1 \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 s\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 \\ c\theta_1 \\ s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} \qquad (C.7)$$

trong đó A là ma trận 6 x 9 với các phần tử là các tổ hợp tuyến tính của $s\theta_3$, $c\theta_3$, và 1, còn B là ma trận 6 x 8 với các phần tử đều là hằng.

Có thể thấy, các tích $a^T a$, $a^T b$, a x b, và $(a^T a)b - 2(a^T b)a$ tạo ra tám đa thức có cùng dạng như pt (C.7). Kết hợp cả tám phương trình này với pt (C.7), sẽ nhận được 14 phương trình tuyến tính độc lập có dạng

$$A'\begin{bmatrix} s\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 c\theta_5 \\ c\theta_4 s\theta_5 \\ c\theta_4 c\theta_5 \\ s\theta_4 \\ c\theta_4 \\ s\theta_5 \\ c\theta_5 \\ 1 \end{bmatrix} = B'\begin{bmatrix} s\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 s\theta_2 \\ c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 \\ c\theta_1 \\ s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} \qquad (C.8)$$

trong đó A' là ma trận 14 x 9 với các phần tử là kết hợp tuyến tính của $s\theta_3$, $c\theta_3$, và 1, còn B' là ma trận 14 x 8 với các phần tử đều là hằng.

Loại trừ θ_1 và θ_2

Trong phần này sẽ hướng dẫn phương pháp loại trừ đồng thời θ_1 và θ_2 ra khỏi pt (C.8). Có thể coi $s\theta_1 s\theta_2$, $s\theta_1 c\theta_2$, $c\theta_1 s\theta_2$, $c\theta_1 c\theta_2$, $s\theta_1$, $c\theta_1$, $s\theta_2$, $c\theta_2$ trong pt (C.8) là tám biến độc lập, các đại lượng ở vế trái là hằng. Phương trình (C.8) có 14 phương trình tuyến tính độc lập với tám ẩn, có thể tìm tám ẩn này trong số 14 phương trình và thay chúng vào 6 phương trình còn lại, sẽ tạo ra 6 phương trình độc lập không chứa θ_1 và θ_2, với dạng ma trận như sau

$$E\begin{bmatrix} s\theta_4 s\theta_5 \\ s\theta_4 c\theta_5 \\ c\theta_4 s\theta_5 \\ c\theta_4 c\theta_5 \\ s\theta_4 \\ c\theta_4 \\ s\theta_5 \\ c\theta_5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(C.9)}$$

trong đó E là ma trận 6 x 9 với các phần tử là các tổ hợp tuyến tính của $s\theta_3$, $c\theta_3$, và 1

Loại trừ θ_4 và θ_5

Phần này sẽ trình bày phương pháp loại trừ đồng thời θ_4 và θ_5. Chú ý, sáu phương trình trong pt (C.9) đã được viết với biến θ_3 bị loại bỏ. Có thể sử dụng các đồng nhất thức lượng giác sau đây để chuyển các phương trình này về dạng đa thức

$$c\theta_i = \frac{1 - t_i^2}{1 + t_i^2} \qquad \text{(C.10)}$$

$$s\theta_i = \frac{2t_i}{1 + t_i^2} \qquad \text{(C.11)}$$

trong đó $t_i = \tan(\theta_i/2)$.

Thay các pt (C.10) và (C.11) với i = 4 và 5 vào pt (C.9), sau đó nhân từng phương trình với $(1 + t_4^2)(1+t_5^2)$ để loại bỏ mẫu số.

$$E' \begin{bmatrix} t_4^2 t_5^2 \\ t_4^2 t_5 \\ t_4^2 \\ t_4 t_5^2 \\ t_4 t_5 \\ t_4 \\ t_5^2 \\ t_5 \\ 1 \end{bmatrix} = [0] \qquad (C.12)$$

trong đó E' là ma trận 6x9 với các phần tử là tổ hợp tuyến tính của $s\theta_3$, $c\theta_3$, và 1. Thay các pt (C.10) và (C.11) với i = 3 vào pt (C.12) và nhân bốn phương trình đầu với $(1+t_3^2)$

$$E'' \begin{bmatrix} t_4^2 t_5^2 \\ t_4^2 t_5 \\ t_4^2 \\ t_4 t_5^2 \\ t_4 t_5 \\ t_4 \\ t_5^2 \\ t_5 \\ 1 \end{bmatrix} = [0] \qquad (C.13)$$

trong đó E" là ma trận 6x9. Chú ý, các phần tử trong bốn hàng đầu của E" có chứa t_3^2, các phần tử trong hai hàng cuối là hàm hữu tỷ của t_3, các tử số là đa thức bậc hai của t_3 và các mẫu số là $(1+t_3^2)$. Nhân pt (C.13) với t_4, sẽ có sáu phương trình độc lập tuyến tính

$$E^{*}\begin{bmatrix} t_4^3t_5^2 \\ t_4^3t_5 \\ t_4^3 \\ t_4^2t_5^2 \\ t_4^2t_5 \\ t_4^2 \\ t_4t_5^2 \\ t_4t_5 \\ t_4 \end{bmatrix} = [0] \qquad (C.14)$$

Cuối cùng kết hợp pt (C.13) và (C.14) theo dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} E^{*} & 0 \\ 0 & E^{*} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_4^3t_5^2 \\ t_4^3t_5 \\ t_4^3 \\ t_4^2t_5^2 \\ t_4^2t_5 \\ t_4^2 \\ t_4t_5^2 \\ t_4t_5 \\ t_4 \\ t_5^2 \\ t_5 \\ 1 \end{bmatrix} = [0] \qquad (C.15)$$

Có thể coi $t_4^3t_5^2$, $t_4^3t_5$, t_4^3, $t_4^2t_5^2$, $t_4^2t_5$, t_4^2, $t_4t_5^2$, t_4t_5, t_4, t_5^2, t_5, và 1 là 12 ẩn. Phương trình (C.15) là tập hợp 12 phương trình tuyến tính độc lập. Điều kiện tương thích để có nghiệm là ma trận hệ số phải ở dạng đặc biệt. Xác lập định thức của ma trận hệ số là zero sẽ có đa thức bậc 16 của t_3. Khi tìm được θ_3, các biến khác có thể tìm được bằng phương pháp thay thế ngược. Bài toán động học đảo của robot 6R tổng quát có tối đa 16 nghiệm thực.

MỤC LỤC

Chương 1. Giới thiệu 7

Lịch sử phát triển 8
Các cơ cấu 10
Khâu và khớp 10
Chuỗi động học, cơ cấu, máy móc 12
Bậc tự do của cơ cấu 13
Tiêu chuẩn chuyển động theo vòng 18
Hệ thống robot 20
Phân loại robot 22
Phân loại theo số bậc tự do 22
Phân loại theo cấu trúc động học 22
Phân loại theo hệ thống truyền động 22
Phân loại theo dạng hình học không gian làm việc 24
Phân loại theo đặc tính chuyển động 25
Định vị, định hướng, và vị trí của vật rắn 27
Xác định vị trí 28
Xác định hướng 29
Xác định vị trí 39
Các biến đổi đồng nhất 40
Tọa độ đồng nhất 40
Ma trận biến đổi đồng nhất 41
Biến đổi đồng nhất phối hợp 42
Cơ học cơ cấu chấp hành robot 43
Động học 43
Tĩnh học 44
Động lực học 44
Tóm tắt 45

Chương 2. Phân tích vị trí của cơ cấu chấp hành nối tiếp 46

Giới thiệu 46
Các thông số khâu và hệ thống tọa độ khâu 47
Các ma trận biến đổi đồng nhất Denavit-Hartenberg 50
Phương trình vòng kín 55
Các hệ tọa độ 59
Phương pháp Denavit-Hartenberg 59
Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành 3-dof phẳng 60
Phân tích vị trí của robot Scorbot 64
Phân tích vị trí của robot Fanuc S-900W 66
Giải pháp Tsai và Morgan 75
Phương pháp chuyển vị xoắn liên tiếp 81
Phép biến đổi dựa trên chuyển vị xoắn 81
Sự chuyển vị xoắn liên tiếp 85
Phân tích vị trí của cơ cấu chấp hành khuỷu 88
Phân tích vị trí tay máy Stanford 93
Tóm tắt 99

Chương 3. Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành song song 100

Giới thiệu 100
Phân loại cấu trúc cơ cấu chấp hành song song 101
Cơ cấu chấp hành song song phẳng 102
Các cơ cấu chấp hành song song cầu 103
Cơ cấu chấp hành song song không gian 104
So sánh phương pháp DENAVIT-HARTENBERG với phương pháp hình học 105
Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành song song 3RRR phẳng 107
Hình học của cơ cấu chấp hành 107
Động học đảo 109
Động học thuận 109
Phân tích vị trí cơ cấu định hướng không gian 111

Hình học của cơ cấu 112
Động học đảo 114
Động học thuận 115
Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành MARYLAND 116
Hình học cơ cấu 116
Động học đảo 118
Động học thuận 120
Phân tích vị trí cơ cấu chấp hành song song không gian 3 RPS . 123
Hình học cơ cấu vận hành 123
Các ràng buộc của khớp quay 126
Chiều dài nhánh i 127
Động học đảo 127
Động học thuận 128
Phân tích vị trí bệ STEWART- GOUGH tổng quát 132
Hình học cơ cấu 133
Động học đảo 134
Động học thuận 134
Phân tích vị trí bệ STEWART- GOUGH cận tổng quát 136
Phân tích vị trí bệ STEWART- GOUGH 3-3 138
Tóm tắt 140

Chương 4. Phân tích JACOBI trong cơ cấu chấp hành nối tiếp 141

Giới thiệu 141
Động học vi phân của vật rắn 142
Vận tốc góc của vật rắn 143
Vận tốc tuyến tính của một điểm 145
Trục quay tức thời 146
Động học vi phân của cơ cấu chấp hành nối tiếp 148
Ma trận biến đổi vi phân khâu 148
Ma trận biến đổi vi phân toàn bộ cơ cấu 150
Tọa độ quay và hệ thống quay 152
Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành 155

Ma trận Jacobi quy ước 156
Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành phẳng 2 bậc tự do 158
Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành phẳng 3 bậc tự do 159
Ma trận Jacobi của cơ cấu chấp hành Stanford 160
Ma trận Jacobi quay vít 163
Ma trận Jacobi quay vít của cơ cấu chấp hành Stanford 166
Ma trận Jacobi quay vít của cơ cấu chấp hành khuỷu 169
Ma trận Jacobi quay vít của
cơ cấu chấp hành 6R cận tổng quát 174
Biến đổi tọa độ quay vít 177
Quan hệ giữa hai phương pháp 183
Số điều kiện 184
Phân tích cấu hình đặc biệt 187
Cấu hình đặc biệt của cơ cấu chấp hành phẳng 3 bậc tự do .. 189
Cấu hình đặc biệt cơ cấu chấp hành Stanford 189
Cấu hình đặc biệt của cơ cấu khuỷu 191
Tóm tắt 192

Chương 5. Phân tích JACOBI cơ cấu chấp hành song song 193

Giới thiệu 193
Ma trận Jacobi 193
Các điều kiện đặc biệt 194
Trạng thái đặc biệt động học đảo 194
Trạng thái đặc biệt đông học thuận 195
Trạng thái đặc biệt hỗn hợp 195
Jacobi quy ước 195
Jacobi của cơ cấu song song phẳng 3 RRR 196
Ma trận Jacobi của cơ cấu định hướng không gian 200
Ma trận Jacobi cơ cấu chấp hành của Đại học Maryland 203
Ma trận Jacobi của tay máy Stewart-Gough 207
Quay vít thuận nghịch 208
Các quay vít thuận nghịch của vài cặp động học 211
Các quay vít của chuỗi động học 212

Ma trận Jacobi quay vít 214
Ma trận Jacobi quay vít của bệ Stewart-Gough 217
Ma trận Jacobi quay vít của cơ cấu chấp hành có ba động cơ phẳng 220
Tóm tắt 224

Chương 6. Tĩnh học và phân tích độ cứng vững 225

Giới thiệu 225
Tĩnh học cơ cấu chấp hành nối tiếp 225
Sự cân bằng lực và moment khâu 226
Phương pháp đệ qui 227
Moment ngẫu lực khớp tương đương 229
Ứng dụng nguyên lý công ảo 236
Ellipsoid lực 237
Phép biến đổi lực và moment 239
Phân tích độ cứng vững cơ cấu chấp hành nối tiếp 243
Ma trận phối hợp 243
Ma trận cứng vững 244
Tĩnh học cơ cấu chấp hành song song 246
Phương pháp giản đồ vật thể tự do 246
Áp dụng nguyên lý công ảo 249
Phân tích độ vững cứng cơ cấu chấp hành song song 252
Phân tich độ cứng vững bệ Stewart-Gough 3-3 252
Tóm tắt 256

Chương 7 Cơ cấu cổ tay 257

Giới thiệu 257
Cơ cấu cổ tay bánh răng nón 259
Cấu trúc cơ cấu 261
Sơ đồ chức năng 261
Biểu diễn đồ thị 261
Biểu diễn theo đồ thị chuẩn tắc 262
Đặc tính cấu trúc bộ truyền động bánh răng epicyclic 264
Phân loại cơ cấu cổ tay 266

Động học truyền động bánh răng epicyclic 268
Phương trình mạch cơ sở 268
Điều kiện đồng trục 269
Động học cơ cấu cổ tay robot 273
Chuỗi vòng hở tương đương 274
Phép biến đổi giữa không gian khớp và không gian bộ tác động 275
Quan hệ vận tốc góc 277
Phân tích lực tĩnh học 277
Nguyên lý công ảo 277
Đường truyền động 279
Động học của cổ tay Bendix 280
Tóm tắt 282
Chương 8. Cơ cấu chấp hành truyền động bằng đai 283
Giới thiệu 283
Phân loại cơ cấu truyền động đai 283
Truyền động đai vòng kín 283
Truyền động đai đầu hở 284
Biểu diễn sơ đồ phẳng 286
Động học cơ cấu chấp hành truyền động đai 288
Phương trình mạch cơ sở 289
Điều kiện đồng trục 290
Đường truyền động 290
Phân tích lực tĩnh học 295
Ma trận cấu trúc khả thi 298
Đặc tính cấu trúc 298
Ma trận cấu trúc đẳng cấu 299
Ma trận cấu trúc giả tam giác khả thi 300
Phân giải lực dư thừa 302
Nguyên lý cơ bản 304
Ứng dụng vào hệ thống đa bậc tự do 306
Tóm tắt 314

Chương 9. Động lực học cơ cấu chấp hành nối tiếp 315

Giới thiệu 315
Các tính chất khối lượng 317
Tâm khối lượng 317
Ma trận quán tính 318
Định lý trục song song 319
Moment quán tính chính 320
Moment khối lượng 321
Moment khối lượng tuyến tính 321
Moment khối lượng góc 322
Biến đổi ma trận quán tính 323
Động năng 324
Định luật NEWTON - EULER 325
Điểm quy chiếu chung 325
Tâm khối lượng là điểm quy chiếu 326
Công thức NEWTON - EULER đệ quy 328
Tính toán thuận 330
Tính toán ngược 332
Phương trình moment ngẫu lực khớp 333
Công thức LAGRANGE 337
Tọa độ tổng quát hóa 339
Động năng 340
Thế năng 342
Lực tổng quát hóa 343
Dạng tổng quát các phương trình động lực 344
Tác dụng quán tính của rotor 354
Phân tích động học 355
Động năng của rotor quay 356
Phân tích động lực học 358
Phương trình động lực không gian bộ tác động cuối 361
Tóm tắt 363

Chương 10. Động lực học cơ cấu chấp hành song song 364

Giới thiệu 364
Công thức NEWTON - EULER 364
Động lực học bệ Stewart - Gough 365
Động lực học của các nhánh 371
Động lực học bệ di động 373
Bộ tác động và phản lực nền 374
Quy trình Newton-Euler 375
Nguyên lý công ảo 376
Ma trận Jacobi khâu 378
Sự quay xoắn quán tính và tác dụng 381
Phương trình chuyển động 381
Qui trình d'Alembert 383
Ví dụ bằng số 384
Công thức LAGRANGE 387
Động lực học Lagrange cơ cấu chấp hành của đại học Maryland 388
Tóm tắt 393

Phụ lục A. Phương pháp liên tục 394

Số Bezout 394
Công thức đồng nhất cơ bản 395
Sự đồng nhất hóa - m 396
Nghiệm ở vô cực 398
Phương pháp liên tục 399
Hàm đồng nhất 400
Hệ ban đầu 400
Đường dẫn 402
Nghiệm Tsai và Morgan 402
Tính đồng nhất Cheater 405

Phụ lục B. Phương pháp loại trừ thẩm tách Sylvester 407

Các bước loại trừ 407

Ví dụ 408

Phụ Lục C. Giải pháp Raghavan và Roth 409

Phương trình vòng kín 409

Loại trừ θ_1 và θ_2 412

Loại trừ θ_4 và θ_5 412

CƠ SỞ NGHIÊN CỨU & SÁNG TẠO

ROBOT

Trần Thế San

***

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám Đốc **CÁT VĂN THÀNH**

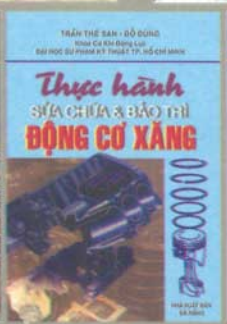
Biên tập : **NGUYÊN HẠNH**

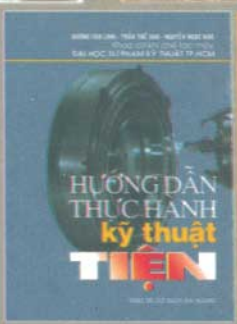
Bìa : **DUY TRẦN**

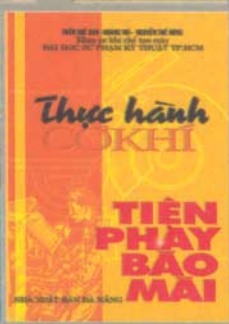
Sửa bản in : **TÁC GIẢ**

In 1.000 cuốn khổ (14,5x20,5)cm tại Xưởng In Trung Tâm Hội Chợ Triển Lãm Việt Nam. GPXB số 23-1232/XB-QLXB do Cục Xuất Bản cấp ngày 23/10/2002. In xong và nộp lưu chiểu quý 1/ 2003.

- MỜI CÁC BẠN TÌM ĐỌC -







- Nơi Phát Hành -

HIỆU SÁCH NGUYỄN TRÃI

4A - Ng Trãi - Q5 - Tp. HCM

ĐT: 8 383 669 - 9 971 765

Email: khanhduy@saigonnet.vn