BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

2
2001

SỐ 284 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

Chúc mừng
Trường THPT Lương Văn Tụy
ĐƠN VỊ ANH HÙNG

TOÁN HỌC MUÔN MẦU

BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ theo cách nhìn HÌNH HỌC

Với hai số dương a, b người ta thường xét các số trung bình (TB) sau :

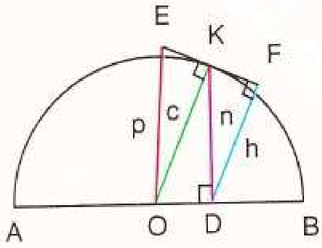
- TB toàn phương $p = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$; • TB cộng $c = \dfrac{a+b}{2}$
- TB nhân $n = \sqrt{ab}$; • TB điều hòa $h = \dfrac{2}{(1/a) + (1/b)} = \dfrac{2ab}{a+b}$

Lần lượt dựng (h.1 với $a \geq b$) : đường tròn tâm O đường kính $AB = AD + DB = a + b$, $DK \perp AB$ với K thuộc đường tròn, $EF \perp OK$ tại K, $DF \perp KF$, $KE = OD$. Dễ thấy $DF \leq DK \leq OK \leq OE$ (1)

Từ (1) và $OK = c$, $DK = n$, $DF = h$, $OE = p$ (hãy chứng minh) suy ra

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad (2)$$

Các đẳng thức đều xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

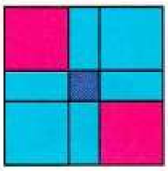


Hình 1

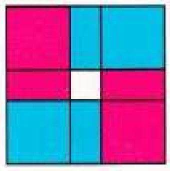
Dành cho bạn đọc

1) Hãy vẽ hình khác với hình 1 và so sánh độ dài các đoạn thẳng trên hình để suy ra các bất đẳng thức (2).

2) Các hình 2, 3, 4 mô tả các bất đẳng thức (2). Hãy giải thích.


Hình 2


Hình 3


Hình 4

Giải đáp bài : SỐ ĐA GIÁC

Số tam giác $T_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$; Số tứ giác $V_k = k^2$; Số ngũ giác $N_k = \dfrac{k(3k-1)}{2}$

Có thể tính số đa giác n đỉnh D_k^n theo các cách sau :

Cách 1. $D_k = D_{k-1} + a_k$ với $D_1 = a_1 = 1$ (h.5 với $n = 5$). Vì a_k là số các điểm thuộc $n-2$ cạnh của đa giác thứ k nên $a_k = 1 + (n-2)(k-1)$. Từ đó $D_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = k + (n-2)(1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1)) = k + \dfrac{(n-2)k(k-1)}{2}$

Cách 2. Cấp số cộng (a_k) ($k = 1, 2, \ldots$) có tính chất

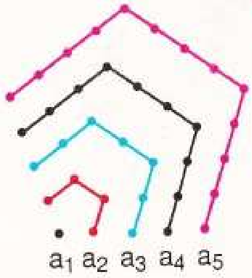
$a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = \ldots = a_k + a_1 = 2 + (n-2)(k-1)$

Từ đó $2D_k =$

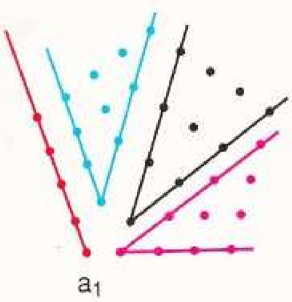
$= k(2 + (n-2)(k-1))$

$\Rightarrow D_k = k + \dfrac{(n-2)k(k-1)}{2}$

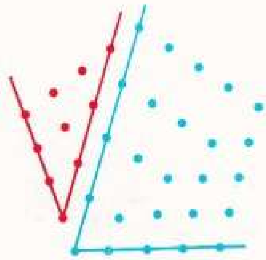
Cách 3. Xem hình 6 ($n = 5$) ta có $D_k = k + (n-2)T_{k-1} = k + (n-2)\dfrac{k(k-1)}{2}$



Hình 5



Hình 6


Hình 7

Cũng có thể tìm D_k^n bằng quy nạp theo n dựa vào $D_k^n = D_k^{n-1} + T_{k-1}$ (xem h.7 với $n = 5$).

Các bạn có nhiều cách giải bài này được nhận tặng phẩm là :

1) *Nguyễn Phúc Thành An*, 10 toán, THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế
2) *Nguyễn Tiến Việt Hưng*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương
3) *Lê Xuân Dũng*, đội 9, Hoằng Thịnh, Hoằng Hóa, Thanh Hóa

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 284 (2–2001)
Tòa soạn : Ngõ187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1: Chủ tịch Trần Đức Lương đến thăm trường THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình
Bìa 2 : **Toán học muôn màu** – Bất đẳngthức đại số theo cách nhìn hình học
Bìa 3 : **Giải trí toán học – Math Recreation**
Bìa 4: Trường THPT Lương Văn Tụy – Đơn vị Anh hùng

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

VÀI PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

NGUYỄN CÔNG SỨ
(GV ĐH Kĩ thuật mật mã Hà Nội)

Việc giải các phương trình vô định tức là việc tìm nghiệm nguyên của các phương trình đại số với hệ số nguyên, luôn đòi hỏi học sinh khả năng phân tích, đối chiếu dự đoán và phương pháp tư duy lôgic để lựa chọn nghiệm thích hợp. Do vậy các bài toán này thường thấy cả trong các đề toán trên các tạp chí toán học sơ cấp, các đề toán thi chọn học sinh giỏi và cả các đề thi vào đại học và trung học chuyên nghiệp. Với loại toán này không có phương pháp giải tổng quát. Ở đây chúng tôi xin giới thiệu một vài thủ pháp cơ bản để giải các bài toán tìm nghiệm nguyên thường gặp.

I- HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM DỰA VÀO TÍNH CHIA HẾT

Lựa chọn nghiệm trong một tập hợp hữu hạn số là thủ pháp cơ bản để giải các phương trình vô định. Các thủ pháp giải đều nhằm xác định tập số chứa nghiệm sao cho có ít phần tử nhất. Cách đưa về xét tập hợp hữu hạn số ở đây dựa vào tính chia hết của số nguyên.

Ví dụ 1. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau :*

$$xy - 2x - 3y + 1 = 0$$

Giải. $xy - 3y = 2x - 1 \Rightarrow y(x-3) = 2x - 1$ thấy ngay $x = 3$ không là nghiệm, với $x \neq 3$ thì

$$y = \frac{2x-1}{x-3} = 2 + \frac{5}{x-3}$$

Để y là nguyên thì $x - 3$ phải là ước của 5 :

a) với $x-3 = 1 \Rightarrow x = 4$, $y = 2+5 = 7$;

b) với $x-3 = -1 \Rightarrow x = 2$, $y = 2-5 = -3$

c) với $x-3 = 5 \Rightarrow x = 8$, $y = 2+1 = 3$

d) với $x-3 = -5 \Rightarrow x = -2$

vậy có nghiệm (x, y) là $(4, 7)$, $(8, 3)$

Ví dụ 2. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$x^2 - y^2 = 1999$$
$$(x-y)(x+y) = 1999$$

Giải. Vì 1999 là số nguyên tố nên ước số nguyên của 1999 chỉ có thể là ± 1, ± 1999 Từ đó suy ra nghiệm (x, y) là $(1000, 999)$.

Ví dụ 3. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương, trong đó p là nguyên tố :* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$

Giải: $xy = px + py \Rightarrow (x-p)(y-p) = p^2$

Vì p là số nguyên tố nên ước số nguyên của p^2 chỉ có thể là : ± 1, $\pm p$, $\pm p^2$. Thử lần lượt với các ước trên ta được các nghiệm (x, y) là : $(p+1, p+p^2)$; $(2p, 2p)$; $(p+p^2, p+1)$.

II. HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM DỰA VÀO ĐIỀU KIỆN CỦA CÁC ẨN

Ví dụ 4. *Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$$

Giải. Thấy ngay $0 \le x, y \le 50$. Từ $\sqrt{y} = \sqrt{50} - \sqrt{x}$ ta có

$$y = 50 + x - 2\sqrt{50x} = 50 + x - 10\sqrt{2x}$$

Vì y nguyên nên $2x = 4k^2 \Rightarrow x = 2k^2$, $k \in Z$ với $2k^2 \le 50 \Rightarrow k^2 \le 25 \Rightarrow k$ chỉ có thể nhận các giá trị : 0, 1, 2, 3, 4, 5. Lựa chọn k trong các số trên để thỏa mãn phương trình ta được các nghiệm (x, y) là : $(0, 50)$; $(2, 32)$; $(8, 18)$, $(18, 8)$, $(32, 2)$, $(50, 0)$

Ví dụ 5. *Giải phương trình nghiệm nguyên dương :* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = z$

Giải. Biến đổi thành : $xyz = x + y$

Do tính đối xứng của x và y nên có thể giả thiết rằng $x \le y$. Ta có $xyz = x + y \le y + y = 2y$ $\Rightarrow xz \le 2$.

Ta lựa chọn nghiệm trong các trường hợp sau : $x = 1, z = 1$; $x = 2$; $z = 1$; $x = 1, z = 2$

Từ đó suy ra nghiệm (x, y, z) là $(2, 2, 1)$ và $(1, 1, 2)$

III. HẠN CHẾ TẬP HỢP CHỨA NGHIỆM BẰNG CÁCH SẮP THỨ TỰ CHÚNG

Để giảm bớt cách thử khi tìm nghiệm ta có thể sắp thứ tự các giá trị của ẩn nếu vai trò của chúng như nhau rồi lần lượt xét giá trị của từng ẩn.

Ví dụ 6. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

Giải. Do x, y, z có vai trò như nhau nên có thể giả thiết $1 \le x \le y \le z$. Ta thử các trường hợp sau

a) với $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$: vô nghiệm

b) với $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \Rightarrow (y-2)(z-2) = 4$

Vì $0 \le y-2 \le z-2$ và ước của 4 là 1, 2, 4 nên suy ra nghiệm (x, y, z) là (2, 3, 6) và (2, 4, 4)

c) Với $x=3 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. Nếu $y=3$ thì $z=3$; nếu $y \ge 4$ thì $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$: vô nghiệm.

d) với $x = 4 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ < 1 : vô nghiệm.

Vậy ta được các nghiệm (x, y, z) là :
(2, 3, 6) ; (2, 4, 4) ; (3, 3, 3) ; (4, 2, 4) ; (4, 4, 2) ; (2, 6, 3) ; (3, 2, 6) ; (3, 6, 2) ; (6, 2, 3) ; (6, 3, 2).

Ví dụ 7. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$$

Giải. Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên có thể giả sử $1 \le x \le y \le z$. Từ đó

$x^2 + y^2 + z^2 + xyz > 3x^2 + x^2 = 4x^2$

tức là $4x^2 \le 20 \Rightarrow x^2 \le 5 \Rightarrow x \le 2$. Xét 2 trường hợp :

a) với $x = 1 \Rightarrow y^2 + z^2 + yz = 19$

$\Rightarrow y^2 + y^2 + y^2 \le 19 \Rightarrow y^2 \le \frac{19}{3} \Rightarrow y \le 2$

nếu $y=1 \Rightarrow z^2+z=18 \Rightarrow z(z+1) = 18$: vô nghiệm
nếu $y = 2 \Rightarrow z^2 + 2y - 15 = 0$
$\Rightarrow z = 3$, có nghiệm là (1, 2, 3)

b) Với $x = 2 \Rightarrow 4 + y^2 + z^2 + 2yz = 20$

$y^2+ z^2 + 2yz = 16 \Rightarrow y^2 + y^2 + 2y^2 \le 16$

$\Rightarrow 4y^2 \le 16 \Rightarrow y \le 2$

Với $y = 2$ ta có $z^2 + 4z = 12 \Rightarrow z = 2$ có nghiệm là (2, 2, 2)

Tráo đổi vai trò của x, y, z ta có các nghiệm (x, y, z) là (1, 2, 3); (1, 3, 2) ; (2, 1, 3); (2, 3, 1) ; (3, 2, 1) ; (3, 1, 2) ; (2, 2, 2)

IV. GIẢN ƯỚC CHO ƯỚC SỐ CHUNG

Ví dụ 8. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau :

$$x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4t^4)$$

Giải. Giả sử (x_o, y_o, z_o, t_o) là nghiệm của phương trình trên. Gọi d là ước chung lớn nhất của chúng ta có $x_o = dx_1$; $y_o = dy_1$; $z_o = dz_1$, $t_o = dt_1$ trong đó x_1, y_1, z_1, t_1 nguyên tố cùng nhau. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$x_1^4 + 4y_1^4 = 2(z_1^4 + 4t_1^4)$$

Do $2(z_1^4 + 4t_1^4)$ chẵn, $4y_1^4$ chẵn nên x_1^4 phải chẵn tức là $x_1 = 2x_2$ và do vậy ta lại có $16x_2^4 + 4y_1^4=2(z_1^4 + 4t_1^4) \Rightarrow 2(4x_2^4 + y_1^4) = z_1^4 + 4t_1^4$

Lập luận tương tự lại có $z_1 = 2z_2$ và quá trình cứ tiếp tục như vậy, sau hai bước liên tiếp ta được $y_1 = 2y_2$, $t_1 = 2t_2$ thành thử x_1, y_1, z_1, t_1 lại có ước chung là 2, trái với giả thiết về tính nguyên tố cùng nhau của chúng, do vậy phương trình trên là vô nghiệm.

Ví dụ 8. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

Giải. Xem bài T1/266 THTT số 270 (12/1999)

V. ĐƯA VỀ TRƯỜNG HỢP RIÊNG:

Ví dụ 9. *Tìm nghiệm nguyên không âm của phương trình*

$$\sqrt{x + \sqrt{x + ... + \sqrt{x}}} = y$$

trong đó ở vế trái có n dấu căn.

Giải. Ta thấy ngay (x, y) bằng (0, 0) là nghiệm của phương trình

a) Nếu $n = 1$ thì $\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2$ $(x \ge 0)$

Vậy nghiệm (x, y) là (t^2, t), $t \in N$.

b) Nếu $n = 2$ thì $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y \Rightarrow x + \sqrt{x} = y^2$ $\Rightarrow \sqrt{x} = y^2 - x \Rightarrow \sqrt{x}$ là số tự nhiên :
$\sqrt{x} = t$, $t \in N$ và khi đó $t(t+1) = y^2$. Nhưng $t^2 < t(t+1) < (t+1)^2$ nên $t^2 < y^2 < (t+1)^2$.

Điều này không xảy ra với $t > 0$ và phương trình chỉ có nghiệm là (0, 0)

c) Với $n \ge 3$ ta có $\sqrt{x + \sqrt{x + ... + \sqrt{x}}} = y^2 - x$ trong đó vế trái có $n-1$ dấu căn, đặt $y^2 - x = y_1$ là số nguyên dương. Tiếp tục làm như thế $n-2$ lần dẫn đến $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y_{n-2}^2 - x$

Như vậy ta lại trở về trường hợp b) và chỉ có nghiệm là (0, 0)

Trên đây mới chỉ nêu một số phương pháp giải phương trình nghiệm nguyên, mời các bạn tìm thêm các phương pháp khác./.

CUỘC THI QUỐC TẾ PHÁT HIỆN NĂNG KHIẾU TOÁN HỌC

TRẦN ANH DŨNG
(Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

GIỚI THIỆU VỀ CUỘC THI

Cuộc thi quốc tế phát hiện năng khiếu toán học (The International Mathematical Talent Search) gọi tắt là IMTS là một cuộc thi hàng năm mà bài thi được chuyển qua đường thư tín. Cuộc thi nhằm phát hiện các lí luận toán học sáng tạo của học sinh bậc trung học phổ thông, dành cho học sinh tất cả các nước. IMTS là mục thường xuyên của Tạp chí Toán và Tin học hàng quý (Mathematics and Informatics Quarterly) viết tắt là M&IQ, tạp chí được phát hành 3 tháng một kì từ năm 1991. Cuộc thi được tổ chức song song với kì thi phát hiện năng khiếu toán học của Mỹ (USAMTS) bắt đầu từ năm 1989.

Mỗi năm IMTS có 4 vòng thi, mỗi vòng gồm 5 bài. Các vòng thi được đánh số thứ tự liên tục (đến nay đã qua vòng thứ 37). Các nước tham dự có thể lựa chọn vòng để dự thi phù hợp với năm học của nước đó. Những học sinh đã được đề cử gửi lời giải cho 4 vòng thi của năm học sẽ thu được số điểm tương ứng với bài làm của mình. Như vậy với 5 điểm cho mỗi bài, học sinh có thể được tối đa 100 điểm trong năm.

Cần nhấn mạnh rằng cuộc thi không có ý so sánh kết quả hoặc trình độ của các nước tham dự. Mục tiêu chính của cuộc thi là giới thiệu những cách giải toán sáng tạo, thể hiện sự độc đáo của tư duy mà nhiều học sinh đều quan tâm, đồng thời cuộc thi cũng là nơi mà học sinh có điều kiện để nâng cao năng lực trình bày lời giải toán bằng tiếng Anh, một ngôn ngữ được nhanh chóng chấp nhận trong toán học.

CÁCH THỨC GỬI LỜI GIẢI

Lời giải phải được gửi đến thành viên chính thức của Hội đồng giám khảo quốc tế (HĐGKQT). Trong trường hợp ở quốc gia của học sinh dự thi không có thành viên của HĐGKQT thì lời giải phải được gửi đến người điều phối chương trình, Tiến sĩ George Berzsenyi theo địa chỉ :

Dr.George Berzsenyi, IMTS Coordinator

13226 Piute Trail

Pine, Co 80470 – 9557 USA

e–mail : GBerzsenyi@aol.com

Lời giải phải được gửi trong 1 phong bì dán kín có ghi rõ họ tên, cấp lớp đang học, địa chỉ quốc gia và trường đang theo học. Lời giải gửi dự thi phải hoàn chỉnh, trình bày rõ ràng bằng tiếng Anh, gửi về địa chỉ như trên (ở Việt Nam chưa có thành viên của HĐGKQT). Hiện nay HĐGKQT đã có 27 thành viên ở 27 nước. Các nhà toán học ở các nước muốn tham gia HĐGKQT, có thể liên hệ trực tiếp với Giáo sư Berzsenyi theo địa chỉ như trên.

TẠP CHÍ TOÁN VÀ TIN HỌC (M&IQ)

Đây là tạp chí ra 3 tháng một kì, nhằm giới thiệu các bài toán, các lời giải của IMTS (chủ biên là GS Berzsenyi), tạp chí quốc tế này gồm nhiều vấn đề sinh động và hấp dẫn đối với học sinh giỏi của bậc THPT. Để biết thêm chi tiết hoặc việc gửi bài cho tạp chí, các bạn có thể liên hệ qua web site của các kì thi Olympic tin học quốc tế, web site này được chủ trì bởi GS Tom Verhoeff (Hà Lan) :

http://olympiads.win.tue.nl/ioi/mise/miq.html

4 kì của tập thứ 9 của tạp chí M&IQ, xuất bản năm 1999 giới thiệu đề bài của các vòng thi từ thứ 32 đến 35 và lời giải của các vòng thi từ thứ 29 đến 32. Vòng 29 tương đương vòng 1 lớp 10 kì thi phát hiện năng khiếu toán học của Mỹ.

ĐỀ THI IMTS - VÒNG 37

Bài 1/37. Tìm số nguyên dương bé nhất N có 5 chữ số sao cho $2N$ cũng là số nguyên có 5 chữ số và tất cả các chữ số từ 0 đến 9 đều tìm thấy trong N và $2N$.

Bài 2/37. Số $2^{2^{24}}+1$ đã được chứng minh gần đây không là số nguyên tố. Hãy tìm 4 chữ số tận cùng của số đó.

Bài 3/37. Tìm các số nguyên a, b, c, d, e thỏa mãn : $(x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e) = x^5 - 9x - 27$

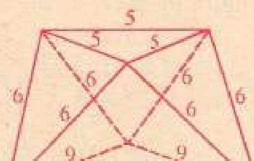
Bài 4/37. Một dãy số thực s_o, s_1, s_2, ... thỏa mãn các điều kiện : $s_is_j = s_{i+j} + s_{i-j}$ với mọi số nguyên không âm i, j mà $i \geq j$,

$s_i = s_{i+12}$ với mọi số nguyên không âm i,

$s_o > s_1 > s_2 > 0$

Tìm 3 số hạng s_o, s_1, s_2.

Bài 5/37. Một khối bát diện được cho bởi hình vẽ bên, đáy trên và đáy dưới là hai tam giác đều có cạnh là 5 đơn vị và 9 đơn vị, các cạnh còn lại đều bằng 6 đơn vị. Tính khoảng cách giữa hai đáy của khối bát diện.



GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM NĂM 2000

Hội đồng Giải thưởng Lê Văn Thiêm đã họp và quyết định trao 6 Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2000 cho một thầy giáo và 5 học sinh có tên dưới đây :

1. *Nhà giáo* Hoàng Hoa Trại, trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi. Thành tích : Nhiều năm giảng dạy Toán ở vùng còn gặp nhiều khó khăn, trong đó nhiều năm có số học sinh trong lớp đỗ đại học 100%, nhiều em đạt điểm tối đa về môn Toán. Tham gia tích cực vào công tác bồi dưỡng học sinh giỏi, là cộng tác viên tích cực của Báo Toán học và tuổi trẻ gần 30 năm nay, tham gia giảng dạy Đội tuyển Olympic toán quốc tế. Đã trực tiếp bồi dưỡng được 10 em đoạt giải quốc gia ở THCS, 4 em đoạt giải quốc gia ở THPT, 2 em đoạt giải Olympic Châu Á - Thái Bình Dương, 1 em đoạt Huy chương bạc Olympic toán quốc tế.

Các học sinh THPT :

1. *Bùi Viết Lộc*, lớp 12 khối PT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. Thành tích trong các cuộc thi toán : Đạt nhiều giải thành phố và toàn quốc cấp THCS, giải nhất toàn quốc THPT năm 1999, giải ba toàn quốc THPT năm 2000 Huy chương bạc Olympic châu Á - Thái Bình Dương năm 2000, Huy chương vàng Olympic quốc tế 2000.

2. *Đỗ Đức Nhật Quang*, lớp 12 khối PT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Thành tích trong các cuộc thi toán : Đạt nhiều giải thành phố và toàn quốc cấp THCS, giải nhì toàn quốc THPT 1999, giải nhất toàn quốc THPT 2000, Huy chương vàng Olympic quốc tế 2000.

3. *Nguyễn Phi Lê*, lớp 12 trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.

Là nữ sinh, gia đình nghèo, bố mẹ là giáo viên tiểu học ở xã Hoằng Lộc, Hoằng Hóa, Thanh Hóa, đã khắc phục khó khăn, đạt thành tích xuất sắc trong các cuộc thi toán : giải nhì toàn quốc THPT 2000, Huy chương bạc Olympic quốc tế 2000.

4. *Trần Quốc Nam*, lớp 11 trường THPT Bến Tre.

Là học sinh ở một vùng có nhiều khó khăn, gia đình nghèo, bố là công nhân, mẹ là cán bộ xã. Nhiều năm là học sinh giỏi cấp tỉnh, thi toán đạt giải nhì toàn quốc THPT 2000, Huy chương bạc Olympic 30-4 của các tỉnh phía Nam năm 2000.

5. *Trần Tuấn Anh*, lớp 12 trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa.

Gia đình nông dân, thuộc diện xóa đói giảm nghèo của địa phương. Trong các cuộc thi toán đoạt giải nhì quốc gia THCS, giải nhì quốc gia THPT 1999, giải ba quốc gia THPT 2000, Huy chương vàng Olympic 30-4 của các tỉnh phía Nam 1998, giải khuyến khích Olympic Châu Á - Thái Bình Dương 2000. Ngoài ra đoạt nhiều giải của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ : giải xuất sắc 1996, 1997, giải ba 1998, giải xuất sắc 1999, giải nhì cuộc thi kỉ niệm 35 năm Toán học và Tuổi trẻ.

Trong các giải thưởng Lê Văn Thiêm năm nay, có một giải thưởng do Tạp chí THTT tài trợ, giải thưởng này được trao cho bạn Trần Tuấn Anh, một học sinh vượt khó khăn, đạt thành tích xuất sắc về toán và có nhiều đóng góp xây dựng tạp chí THTT.

Nhân dịp Hội Toán học Việt Nam họp mặt mừng năm mới, ngày 12/1/2001 tại Hà Nội, GS Phan Đình Diệu, GS Đỗ Long Vân đã trao giải thưởng Lê Văn Thiêm cho nhà giáo Hoàng Hoa Trại và các học sinh Bùi Viết Lộc, Đỗ Đức Nhật Quang, Nguyễn Phi Lê. Các học sinh ở phía Nam sẽ được Hội Toán học Việt Nam trao giải thưởng tại Tp. Hồ Chí Minh.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 38

Problem. In how many different ways can 33 boys be divided into 3 football teams of 11 boys each ?

Solution. The eleven boys who form the first team can be chosen in 33.32...23/11! defferent ways (the binomial coefficient 33 over 11). The eleven boys who form the second team can be chosen in 22.21...12/11! ways among the remaining 22 boys (the binomial coefficient 22 over 11). Once the first and second teams are chosen, the third team is completely determined since it consists of the 11 remaining boys. Therefore, there are

$$33.32...23.22.21...12/(11!)^2 = 33!/(11!)^3$$

ways of dividing the boys into a first team, second team, and third team. But in this enumeration each division into three teams is counted 3! = 6 times depending on the way of deciding which team is to be called first, second, and third. Thus, the number of divisions into three teams is

$$33!/3!(11!)^3 = 22\ 754\ 499\ 243\ 840$$

Từ mới :

different	= khác nhau
divide	= chia, phân chia (động từ)
into	= thành (giới từ)
football	= bóng đá
team	= đội
form	= lập thành (động từ)
choose	= chọn (động từ)
among	= trong số, ở giữa (giới từ)
remain	= còn lại (nội động từ)
completely	= hoàn toàn
enumeration	= cách đếm, sự liệt kê
depend	= phụ thuộc (động từ)
decide	= quyết định, phân xử (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

MÔN TOÁN KHỐI A ĐỢT I - NĂM 2000

A. PHẦN BẮT BUỘC

Câu I. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

2) Tìm tất cả những điểm M trên đồ thị sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

Câu II. Cho $f(x) = (m-1).6^x - \dfrac{2}{6^x} + 2m + 1$.

1) Giải bất phương trình $f(x) \geq 0$ với $m = \dfrac{2}{3}$.

2) Tìm m để $(x - 6^{1-x}).f(x) \geq 0$ với mọi x thuộc đoạn $[0, 1]$.

Câu III. 1) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^4 x dx$

2) Tính tích phân $J = \displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2(\pi x) dx$.

Câu IV. 1) Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó chữ số đầu tiên là chữ số lẻ ?

2) Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác 0) ?

B. PHẦN TỰ CHỌN

Thí sinh được chọn một trong hai câu : Va hoặc Vb.

Câu Va. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm I (1, 1, 1) và đường thẳng (D) có phương trình

$$(D): \begin{cases} x - 2y + z - 9 = 0 \\ 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

1) Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc H của I lên đường thẳng (D).

2) Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm tại I và cắt đường thẳng (D) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 16$.

Câu Vb. Cho hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Cạnh bên SD vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SD = a$.

1) Chứng minh rằng tam giác SBC vuông. Tính diện tích tam giác SBC.

2) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) Đồ thị có hai tiệm cận : $x = 1$ và $y = x$

Gọi $N\ (x_o; y_o)$ là điểm thuộc đồ thị thì $y_o = f(x_o) = x_o + \dfrac{1}{x_o - 1}$. Khoảng cách từ M tới đường $y = x$ là $\dfrac{|x_o - y_o|}{\sqrt{2}}$. Do đó tổng hai khoảng cách trên là :

$$D = |x_o - 1| + \frac{|x_o - y_o|}{\sqrt{2}} = |x_o - 1| + \frac{1}{\sqrt{2}\,|x_o - 1|}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$D \geq 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{8}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow |x_o - 1| = \dfrac{1}{\sqrt{2}\,|x_o - 1|}$

$\Leftrightarrow x_o = 1 \pm \sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$.

Từ đó tìm được 2 điểm

$N_1\left(1 + \sqrt[4]{8}\ ;\ 1 + \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2} + \sqrt[4]{2}\right)$ và

$N_2\left(1 - \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2};\ 1 - \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2} - \sqrt[2]{8}\right)$

Khi đó D nhỏ nhất là $\sqrt[4]{8}$

Câu II.

1) Đặt $t = 6^t > 0$ sẽ có :

$t^2 - 7t + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq 6^x \leq 6$
$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

2) Với $x = 1$ thì bất phương trình thỏa mãn không phụ thuộc m, nên chỉ cần tìm m để bất phương trình thỏa mãn với mọi $x \in [0; 1)$.

Lưu ý : $h(x) = x - 6^{1-x} = x - 6\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ là hàm số đồng biến trên $[0; 1)$ và $h(1) = 0$ thì $h(x) < 0$ với $x \in [0; 1)$. Do đó chỉ cần tìm m sao cho

$f(x) \le 0$ với $x \in [0; 1)$. Đặt $t = 6^x \in [1; 6)$ ta có : $m \le \dfrac{t^2 - t + 2}{t^2 + 2t} = g(t)$ với $t \in [1; 6)$.

Lập bảng biến thiên $g(t)$ trên $[1; 6]$ ta có kết quả $m \le \dfrac{1}{2}$.

Câu III.

1) Liên tiếp dùng công thức hạ bậc, dễ dàng có $I = \dfrac{3\pi - 8}{32}$.

2) Ta có $J = \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^x dx - \dfrac{1}{2}\int_0^1 e^x . \cos(2\pi x)dx$.

Dùng cộng thức tính tích phân từng phần để tính $J_1 = \int_0^1 e^x . \cos(2\pi x)dx$ ta có $J_1 = e-1+2\pi J_2$ với $J_2 = \int_0^1 e^x . \sin(2\pi x)dx$.

Mặt khác lại có $J_2 = -2\pi J_1$ nên $J_1 = \dfrac{e-1}{1+4\pi^2}$.

Từ đó : $J = \dfrac{2\pi^2(e-1)}{1+4\pi^2}$

Câu IV. 1) Gọi số thỏa mãn bài toán là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ thì a_1 là chữ số lẻ và a_6 là chữ số chẵn. Do đó a_1 có 5 cách chọn, a_6 có 5 cách chọn và $\overline{a_2a_3a_4a_5}$ có A_8^4 cách chọn. Vậy số các số thỏa mãn bài toán là $5^2 . A_8^4 = 42000$

2) Có C_5^3 cách chọn 3 chữ số chẵn và C_5^3 cách chọn 3 chữ số lẻ. Với 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ, nếu viết thành số có 6 chữ số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ và cho phép $a_1 = 0$ thì có 6! số.

Vậy có $C_5^3 . C_5^3 . 6!$ số có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ mà trong 6 chữ số khác nhau có 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ, tuy có cả những số mà $a_1 = 0$. Trong các số như thế, tính số các số có $a_1 = 0$ thì dễ dàng được $C_4^2 . C_5^3 . 5 ! = 7\,200$.

Từ đó suy ra số các số thỏa mãn bài toán là :

72000 – 7200 = 64800 số.

Câu Va. 1) Đặt $y = k$ thì phương trình tham số của (D) là

$$\begin{cases} x = 14 + 4k \\ y = k \\ z = -5 - 2k \end{cases}$$

Vì H thuộc (D) nên $H(14 + 4k\ ; k, -5-2k) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (13+4k\ ; k-1; -6-2k)$. Véctơ chỉ phương của (D) là $\overrightarrow{u} = (4; 1; -2)$

Ta có $IH \perp (D) \Leftrightarrow$ là $\overrightarrow{IH} . \overrightarrow{u} = 0$

$\Leftrightarrow 4(13+4k) + (k-1) - 2(-6-2k) = 0 \Leftrightarrow k = -3$.

Vậy $H(2; -3; 1)$.

2) Lưu ý : Tam giác IAB cân đỉnh I nên H là trung điểm của AB. Từ đó tính bán kính $R = IA = 9$ và phương trình mặt cầu là :

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 81$.

Câu Vb.

1) Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên DC thì tứ giác $ABHD$ là hình vuông, nên $DH = BH = HC = a$, do đó $BC \perp BD$. Mặt khác :

$SD \perp (ABCD)$ nên $BC \perp SB$. Do đó tam giác SBC là tam giác vuông đỉnh B. Dễ dàng tính được diện tích của ΔSBC là $\dfrac{1}{2} SB.BC = \dfrac{1}{2} a^2\sqrt{6}$.

2) Gọi K là giao điểm của AH và BD thì K là trung điểm của DB. Vì $AK \perp BD$ và $BC \perp BD$ nên $AK // BC$. Do đó :

$d[A\ ; (SBC)] = d[K, (SBC)] = d[D, (SBC)]$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của D trên SB thì : $DI \perp BC \Rightarrow DI \perp (SBC)$

$\Rightarrow d[D; (SBC)] = DI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\Rightarrow d[A; (SBC)] = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải : **L.T.N**

CÂU LẠC BỘ THTT

CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và *dán ở bên ngoài phong bì* gửi Tòa soạn THTT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

Xin gợi ý : Người trong ảnh đã từng có ảnh khác in trên THTT rồi đấy !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẦU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

. . . .

Ảnh chụp khi . . . . tuổi.

KÌ THI OLYMPIC ĐỒNG BẰNG SÔNG CỬU LONG
LẦN THỨ 8 - NĂM 2000

ĐỖ THANH HÂN
(Trường THPT chuyên Bạc Liêu)

Kì thi được tổ chức ngày 3/1/2001 tại trường THPT chuyên Bạc Liêu, tỉnh Bạc Liêu. Về môn Toán thí sinh phải làm 5 bài toán trong 3 giờ. Kì thi lần 8 có 42 thí sinh từ 11 tỉnh ĐBSCL (Cà Mau không tham gia) với 14 đội dự thi. Mỗi đội gồm 3 thí sinh. Điểm tối đa của mỗi thí sinh là 20. Có 4 thí sinh đạt giải nhất là :

1. *Trần Quốc Tuấn*, THPT chuyên Bạc Liêu, 19 điểm;
2. *Ngụy Đức Thuận*, THPT Cao Lãnh, 19 điểm;
3. *Nguyễn Thị Kim Liên*, THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ, 17,5 điểm;
4. *Ngô Minh Trí*, THPT Sa Đéc, 17,5 điểm

5 đội có tổng số điểm cao nhất về môn Toán trong kì thi này là :

1. Trường THPT chuyên Bạc Liêu, 45 điểm;
2. Trường THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ, 39,5 điểm
3. Sở Giáo dục - Đào tạo Kiên Giang, 31 điểm;
4. Trường THPT Sa Đéc 29,5 điểm
5. Trường THPT Cao Lãnh, 29 điểm.

Sau đây xin giới thiệu đề thi môn Toán, trong ngoặc ghi tên tỉnh có đề được chọn.

Bài 1. Giải phương trình :

$$3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0$$

(An Giang)

Bài 2. Cho tam giác ABC có các góc thỏa điều kiện :

$$\cot A+\cot B+\cot C=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

Chứng tỏ rằng tam giác ABC đều.

(Cần Thơ)

Bài 3. Cho dãy (x_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ thỏa điều kiện : $\begin{cases} x_o = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n+1}{x_n+2}, \ n \in N \end{cases}$

a) Tính x_{2000}

b) Tìm phần nguyên của : $\sum_{i=1}^{2000} x_i$ *(Bạc Liêu)*

Bài 4. Tam giác ABC có đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AC và BC, đồng thời tiếp xúc với hai trung tuyến AM và BN. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân. *(Vĩnh Long)*

Bài 5. Mặt phẳng (α) qua trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ cắt các cạnh AB, AC, AD lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh rằng :

$$\frac{BP}{PA}+\frac{CQ}{QA}+\frac{DR}{RA}=1$$

(Kiên Giang)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC *(Tiếp trang 21)*

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Nghệ An: *Lê Ngọc Tuấn*, 12A3, *Hồ Việt Hùng*, K28 Lí ; *Phạm Cung Sơn*, 10A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Phú Thọ:** *Nguyễn Kim Ngọc, Vũ Quốc Hiển*, 10B1, (CL), *Vũ Quốc Huy*, 12 Lí, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Tiến*, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên, *Vũ Xuân Tiến*, 12A1, THPT Thuận Thành 1; **Hải Phòng:** *Trần Đức Trường*, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Hưng Yên:** *Đào Ngọc Thúy*, 11 Lí, PTNK Hưng Yên; **Yên Bái:** *Hoàng Anh Tài, Hoàng Tiến Dũng*, 12A1, chuyên Yên Bái; **Quảng Bình:** *Lê Văn Điệp*, 11 Lí, PTNK Quảng Bình; **Đồng Tháp :** *Châu Hoàng Huy*, 12T, THPT thị xã Cao Lãnh; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 12, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Đồng Nai:** *Đỗ Quang Trí*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Văn Chí Bửu*, 10A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hà Nam:** *Trần Gia Phương*, 12 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Tiền Giang:** *Trần Tấn Lộc*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Nam Định:** *Phùng Văn Huân*, 12S, THPT Giao Thủy A, **Hà Tĩnh:** *Trương Hữu Đằng*, 11 Toán, THPT NK Hà Tĩnh; **Hà Tây:** *Trần Văn Chinh*, 11 Lí 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Tuấn Linh, Nguyễn Trung Hiếu, Nguyễn Minh Kiên, Dương Trung Kiên, Nguyễn Duy Hưng*, 11A3, *Lê Thị Thu Hường*, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN LỚP 12 THPT NĂM HỌC 1999-2000 (BẢNG A)

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ Trung học Phổ thông)

Bài 1: Cho c là một số thực dương. Dãy số $\{x_n\}$, n=0, 1, 2, ... , được xây dựng theo cách sau:

$$x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c+x_n}}$$

(n=0,1, 2, ...) nếu các biểu thức dưới căn là không âm.

Tìm tất cả các giá trị của c để với mọi giá trị ban đầu $x_0 \in (0, c)$ dãy $\{x_n\}$ được xác định với mọi giá trị n và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$ khi $n \to \infty$.

Lời giải: Ta có

$\exists x_1 \ \forall x_0 \in (0, c) \Leftrightarrow c \ge \sqrt{c+x_0} \quad \forall x_0 \in (0, c)$

$\Leftrightarrow c(c-1) \ge x_0 \quad \forall x_0 \in (0, c) \Rightarrow c(c-1) \ge c$

$\Leftrightarrow c \ge 2$ (do c >0).

Như vậy, dãy $\{x_n\}$ được xác định $\forall n \in N$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$ chỉ khi $c \ge 2$.

Ngược lại, như đã trình bày trong lời giải Bài1 Bảng B (TH&TT số 283, tháng 1 năm 2001), ta chứng minh được rằng khi $c \ge 2$ thì dãy $\{x_n\}$ được xác định $\forall n \in N$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$.

Tất cả các giá trị c cần tìm là: $c \ge 2$.

Chú ý: Với giả thiết $c \ge 2$, ta có thể chứng minh dãy $\{x_n\}$ là dãy hội tụ, bằng cách sử dụng định nghĩa giới hạn của dãy số, như sau:

Gọi a là nghiệm dương của phương trình $x^2+x+1 = c$, ta có

$$|x_{n+1} - a| = |\sqrt{c - \sqrt{c+x_n}} - a| = \frac{|c - \sqrt{c+x_n} - a^2|}{\sqrt{c + \sqrt{c+x_n}} + a}$$

$$\le \frac{|a + 1 - \sqrt{c+x_n}|}{a} = \frac{|(a+1)^2 - c - x_n|}{a(a+1+\sqrt{c+x_n})}$$

$$\le \frac{|x_n - a|}{a^2+a+a\sqrt{c}} = \frac{|x_n - a|}{c - 1+a\sqrt{c}} \qquad (1)$$

Vì $c-1+a\sqrt{c} \ge 1+a\sqrt{c} > 1$ nên từ (1) suy ra $\lim x_n = a$.

Bài 2: Trên mặt phẳng cho trước hai đường tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2). Trên đường tròn (O_1, r_1) lấy một điểm M_1 và trên đường tròn (O_2, r_2) lấy một điểm M_2 sao cho đường thẳng O_1M_1 cắt đường thẳng O_2M_2 tại một điểm Q. Cho M_1 chuyển động trên đường tròn (O_1, r_1), M_2 chuyển động trên đường tròn (O_2, r_2), cùng theo chiều kim đồng hồ và với vận tốc góc như nhau.

1) Tìm quĩ tích trung điểm đoạn thẳng M_1M_2.

2) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác M_1QM_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải: Xem lời giải Bài 2 Bảng B (TH&TT số 283, tháng 1 năm 2001).

Bài 3: Cho đa thức

$P(x) = x^3 + 153x^2 - 111x + 38.$

1) Chứng minh rằng trong đoạn $[1; 3^{2000}]$ tồn tại ít nhất 9 số nguyên dương a sao cho P(a) chia hết cho 3^{2000}.

2) Hỏi trong đoạn $[1; 3^{2000}]$ có tất cả bao nhiêu số nguyên dương a mà P(a) chia hết cho 3^{2000} ?

Lời giải: Trước hết, ta chứng minh hai Bổ đề sau:

Bổ đề 1: Với $a, n \in N^*$; $n \ge 5$, $a \equiv 1 \pmod 9$ và $\alpha = a + 3^{n-2}b$, $b \in Z$ ta luôn có:

$$P(\alpha) \equiv P(a) + 3^n bh \pmod{3^{n+1}}$$

trong đó: $h \in Z$ và $(h,3) = 1$.

Chứng minh: Tương tự Nhận xét 1 trong lời giải Bài 3 Bảng B (TH&TT số 283, tháng 1 năm 2001).

Bổ đề 2: $\forall n \ge 5 \ \exists a_n \equiv 1 \pmod 9$ sao cho: $P(a_n) \equiv 0 \pmod{3^n}$.

Chứng minh: Với $n = 5$ ta có $a_5 = 19$ thoả mãn các yêu cầu của Bổ đề. Tiếp theo, chứng minh tương tự như Nhận xét 2 của lời giải Bài 3 Bảng B (TH&TT số 283, tháng 1 năm 2001).

1) Theo Bổ đề 2, $\exists m \equiv 1 \pmod 9$ sao cho: $P(m) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$. Xét $a_t = m + 3^{1998}t$. Theo Bổ đề 1, ta có: $P(a_t) \equiv P(m) + 3^{2000}ht \pmod{3^{2001}} \Rightarrow P(a_t) \equiv P(m) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$. Hơn nữa, dễ thấy $a_t \equiv a_s \pmod{3^{2000}} \Leftrightarrow t \equiv s \pmod 9$. Do đó $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ là 9 số nguyên dương phân biệt (theo mod 3^{2000}) mà $P(a_t)$ chia hết cho 3^{2000}. Từ đó suy ra trong đoạn $[1; 3^{2000}]$ có 9 số nguyên dương a mà P(a) chia hết cho 3^{2000}.

2) Ngoài hai Bổ đề nêu trên, ta còn có:

Bổ đề 3: Cho $n \in N^*$, $n \geq 5$. Khi đó, nếu a và a' là hai nghiệm của phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{3^n}$ thì $a \equiv a' \pmod{3^{n-2}}$.

Chứng minh: Với $n = 5$ ta có tất cả các nghiệm của phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{3^n}$ là 19; 46; 73; 100; 127; 154; 187; 208; 235. Bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, các nghiệm nói trên đôi một đồng dư với nhau theo mod 3^3. Như vậy, khẳng định của Bổ đề đúng với $n = 5$.

Giả sử, khẳng định của Bổ đề đúng với $n = k$, $k \geq 5$. Ta sẽ chứng minh khẳng định của Bổ đề cũng đúng với $n = k+1$. Thật vậy, với a và a' là hai nghiệm của phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$ ta có $P(a) \equiv P(a') \equiv 0 \pmod{3^k}$. Do đó, theo giả thiết qui nạp, $a' = a + 3^{k-2}b$. Vì $P(a) \equiv 0 \pmod{3^5}$ nên $a \equiv 1 \pmod 9$. Suy ra, theo Bổ đề 1, $P(a') \equiv P(a) + 3^k.bh \pmod{3^{k+1}}$, trong đó $(h, 3) = 1$. Vì $P(a) \equiv P(a') \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$ nên $bh \equiv 0 \pmod 3$. Suy ra, $b \equiv 0 \pmod 3$. Dẫn tới $a' = a + 3^{k-1}b'$, hay $a \equiv a' \pmod{3^{k-1}}$. Vậy, theo nguyên lí qui nạp, Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Theo kết quả câu 1), phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$ có 9 nghiệm nguyên dương: $a_t = m + 3^{1998}t$, $t = 0, 1, 2, \dots, 8$. Giả sử, x_0 là số nguyên dương mà $P(x_0) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$. Ta sẽ chứng minh $\exists t \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ sao cho $x_0 \equiv a_t \pmod{3^{2000}}$. Thật vậy, theo Bổ đề 3, ta có $x_0 = m + 3^{1998}k$, $k \in Z$. Gọi t là số tự nhiên mà $0 \leq t \leq 8$ và $t \equiv k \pmod 9$. Khi đó, $x_0 \equiv a_t \pmod{3^{2000}}$. Như vậy chỉ có 9 số nguyên dương a phân biệt (theo mod 3^{2000}) mà $P(a) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$. Từ đó suy ra:

Trong đoạn $[1; 3^{2000}]$ có tất cả 9 số nguyên dương a mà $P(a) \equiv 0 \pmod{3^{2000}}$.

Bài 4: Cho trước góc α với $0 < \alpha < \pi$.

1) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một tam thức bậc hai dạng $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b là số thực) sao cho với mọi $n > 2$ đa thức

$$P_n(x) = x^n\sin\alpha - x\sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha$$

chia hết cho f(x).

2) Chứng minh rằng không tồn tại nhị thức bậc nhất dạng $g(x) = x + c$ (c là số thực) sao cho với mọi $n > 2$ đa thức $P_n(x)$ chia hết cho g(x).

Lời giải: 1) Ta có

$$P_3(x) = x^3\sin\alpha - x\sin3\alpha + \sin2\alpha$$
$$= (x + 2\cos\alpha)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\sin\alpha. \quad (2)$$

Từ đó, với lưu ý rằng tam thức $f(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$ không có nghiệm thực, suy ra f(x) là tam thức bậc hai duy nhất có dạng $x^2 + ax + b$ mà $P_3(x)$ chia hết cho f(x). (3)

Cũng từ (2), tương tự như lời giải câu 1 Bài 4 Bảng B (xem T/c TH&TT số 283, tháng 1 năm 2001), ta chứng minh được: với mọi $n > 2$ đa thức $P_n(x)$ chia hết cho f(x). Kết hợp điều này với (3) suy ra tồn tại duy nhất một tam thức bậc hai f(x) có dạng $x^2 + ax + b$ (a, b là số thực) sao cho với mọi $n > 2$ đa thức $P_n(x)$ chia hết cho f(x).

2) Giả sử, ngược lại, tồn tại nhị thức bậc nhất dạng $g(x) = x + c$ $(c \in R)$ sao cho với mọi $n > 2$ đa thức $P_n(x)$ chia hết cho g(x). Khi đó, $\exists x_0 \in R$: $P_n(x_0) = 0$ $\forall n > 2$. Do đó, từ

$$P_{n+1}(x) - xP_n(x) = f(x)\sin(n\alpha) \quad \forall x \in R \quad \forall n > 2 \ (*)$$

suy ra $\sin(n\alpha) = 0$ $\forall n > 2$. Dẫn tới:

$$\sin4\alpha = \sin3\alpha = 0 \quad (4)$$

Mà $\sin4\alpha = \sin3\alpha\cos\alpha + \cos3\alpha\sin\alpha$, nên từ (4) suy ra $\sin\alpha = 0$, trái với giả thiết $0 < \alpha < \pi$. Mâu thuẫn nhận được cho ta đpcm.

Bài 5: Tìm tất cả các số tự nhiên $n > 3$ sao cho tồn tại n điểm trong không gian thoả mãn đồng thời các tính chất sau đây:

a) Không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng,

b) Không có bốn điểm nào trong chúng cùng nằm trên một đường tròn,

c) Tất cả các đường tròn đi qua ba điểm trong chúng đều có bán kính bằng nhau.

Lời giải: Kí hiệu (XYZ) là đường tròn đi qua ba điểm X, Y, Z.

Hiển nhiên hệ gồm 4 điểm, là 4 đỉnh của một tứ diện đều, thoả mãn các điều kiện của đề bài. Suy ra $n = 4$ là một giá trị cần tìm.

Xét $n = 5$. Giả sử tồn tại 5 điểm A, B, C, D, E trong không gian thoả mãn các điều kiện bài ra.

• *Trường hợp 1: A, B, C, D, E đồng phẳng.* Vì trong mặt phẳng chỉ có đúng hai đường tròn có bán kính bằng nhau đi qua A và B nên, theo nguyên lí Dirichlê, phải có ít nhất hai trong số các đường tròn (ABC), (ABD), (ABE) trùng nhau. Suy ra, phải có 4 trong số 5 điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn, trái với điều kiện b) của đề bài. Mâu thuẫn nhận được cho thấy chỉ có thể xảy ra:

• *Trường hợp 2: A, B, C, D, E không đồng phẳng.* Khi đó, sẽ tồn tại 2 điểm sao cho chúng nằm cùng phía đối với mặt phẳng đi qua 3 điểm còn lại. Không mất tổng quát, giả sử D và E nằm cùng phía đối với mặt phẳng ABC (D, E $\notin$ m.p. ABC). (**)

Theo kết quả của bài 5 Bảng B (xem lời giải bài toán này trong T/c TH&TT số 283, tháng 1 năm

2001, tr.11), các tứ diện ABCD và ABCE là các tứ diện gần đều. Kết hợp điều này với (**) suy ra D ≡ E. Điều vô lí nhận được cho thấy trường hợp 2 không thể xảy ra.

Như vậy, giá trị $n = 5$ không thoả mãn yêu cầu đề bài. Do đó, mọi giá trị $n > 5$ cũng không thoả mãn yêu cầu đề bài.

Vậy, $n = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Bài 6: Với mỗi đa thức hệ số thực $P(x)$, kí hiệu A_P là tập hợp các số thực x sao cho $P(x) = 0$.

Tìm số phần tử nhiều nhất có thể có của A_P khi $P(x)$ thuộc tập hợp các đa thức hệ số thực với bậc ít nhất là 1 và thoả mãn đẳng thức:

$$P(x^2 -1) = P(x).P(-x) \qquad (5)$$

với mọi giá trị thực x.

Lời giải: Kí hiệu T là tập hợp các đa thức $P(x)$ hệ số thực với bậc ít nhất là 1 và thoả mãn (5) $\forall x \in R$. Ta có các Nhận xét sau:

• *Nhận xét 1*: Các đa thức $(\varphi_1 - x)$; $(\varphi_2 - x)$ và $x(x+1)$ thuộc T, trong đó φ_1 và φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$) là các nghiệm của phương trình $t^2 - t - 1 = 0$.

Chứng minh: Dễ dàng kiểm tra.

• *Nhận xét 2*: Nếu $P(x) = Q(x).G(x)$ $\forall x \in R$; $P(x)$, $Q(x) \in T$ và $G(x)$ không phải là đa thức hằng thì $G(x) \in T$.

Chứng minh: Ta có

$$P(x).P(-x) = P(x^2 -1) = Q(x^2 - 1).G(x^2 - 1)$$

$$= Q(x).Q(-x).G(x^2 - 1) \quad \forall x \in R \qquad (6)$$

và $P(x).P(-x) = Q(x).Q(-x).G(x).G(-x)$ $\forall x \in R$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra $G(x) \in T$. (Đpcm).

Đặt $T^* = \{P(x) \in T \mid A_P \neq \varnothing\}$. Ta có:

• *Nhận xét 3*: Giả sử $P(x) \in T^*$. Khi đó, nếu $a \in A_P$ thì $a \in \{0, -1, \varphi_1, \varphi_2\}$.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp qui nạp theo degP.

Với $P(x) \in T^*$ mà $\deg P = 1$ dễ thấy $P(x) \in \{\varphi_1 - x;\ \varphi_2 - x\}$. Do đó, Nhận xét 3 đúng $\forall P(x) \in T^*$ mà $\deg P = 1$.

Giả sử Nhận xét 3 đúng $\forall P(x) \in T^*$ mà $\deg P < k$ ($k \geq 2$). (8)

Xét $P(x) \in T^*$ mà $\deg P = k$. Giả sử $\forall a \in A_P$ đều có $a \notin \{0, -1, \varphi_1, \varphi_2\}$. Khi đó $\forall a \in A_P$ đều có $a^2 - 1 \in A_P$ (do (5)) và $a^2 - 1 > -1$. Gọi x_0 là số bé nhất thuộc tập $A_P \cap (-1; +\infty)$. Ta có:

+ Nếu $x_0 > \varphi_2$ thì $x_0^2 - x_0 - 1 > 0$. Suy ra $x_1 = x_0^2 - 1 > x_0 > \varphi_2$ và $x_1 \in A_P$. Tiếp tục quá trình suy luận này ta sẽ có một dãy số tăng $\{x_n\}$, $n \in N$, được xác định bởi:

$$x_{n+1} = x_n^2 - 1 \qquad \forall n \in N,$$

mà mọi số hạng của dãy đều thuộc A_P. Điều này mâu thuẩn với tính hữu hạn của A_P. (9)

+ Nếu $\varphi_2 > x_0 > \varphi_1$ thì $x_0^2 - x_0 - 1 < 0$. Suy ra $-1 < x_1 = x_0^2 - 1 < x_0$ và $x_1 \in A_P$. Điều này mâu thuẩn với định nghĩa x_0. (10)

+Nếu $x_0 < \varphi_1$ thì $x_2 = x_1^2 - 1 = (x_0^2 - 1)^2 - 1 = x_0^4 - 2x_0^2 > -1$ và $x_2 \in A_P$ (do $x_1 \in A_P$). Suy ra $x_2 \geq x_0$ hay $x_0(x_0 + 1)(x_0^2 - x_0 - 1) \geq 0$. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do $-1 < x_0 < \varphi_1 < 0$ và $x_0^2 - x_0 - 1 > 0$. (11)

Từ các kết luận (9), (10), (11) suy ra $\exists a_0 \in A_P$ mà $a_0 \in \{0, -1, \varphi_1, \varphi_2\}$. Ta sẽ chứng minh: nếu $\exists a \neq a_0$ và $a \in A_P$ thì $a \in \{0, -1, \varphi_1, \varphi_2\}$. Thật vậy, xét các trường hợp sau:

• *Trường hợp 1*: $a_0 \in \{0, -1\}$. Khi đó, do $a_0^2 - 1 \in A_P$ nên $\{0, -1\} \subseteq A_P$. Suy ra, trong trường hợp này, $P(x)$ có dạng:

$$P(x) = x(x+1)Q(x) \qquad \forall x \in R \quad (12)$$

Nếu $\{0, -1\} = A_P$ thì hiển nhiên ta có đpcm.

Nếu $\{0, -1\} \subset A_P$ thì $1 \leq \deg Q(x) < k$. Vì vậy, theo các Nhận xét 1, 2, ta có $Q(x) \in T$. Xét $a \in A_P \setminus \{0, -1\}$. Từ (12) ta có $Q(a) = 0$, và do đó $Q(x) \in T^*$. Suy ra, theo (8), $a \in \{0, -1, \varphi_1, \varphi_2\}$.

• *Trường hợp 2*: $a_0 = \varphi_1$ (*hoặc* $a_0 = \varphi_2$). Khi đó $P(x)$ sẽ có dạng: $P(x) = (\varphi_1 - x)Q(x)$ (hoặc $P(x) = (\varphi_2 - x)Q(x)$) $\forall x \in R$ (13)

Nếu $\{\varphi_1\} = A_P$ (tương ứng $\{\varphi_2\} = A_P$) thì hiển nhiên ta có đpcm.

Nếu $\{\varphi_1\} \subset A_P$ (tương ứng $\{\varphi_2\} \subset A_P$) thì $1 \leq \deg Q(x) < k$. Vì vậy, theo các Nhận xét 1, 2, ta có $Q(x) \in T$. Xét $a \in A_P \setminus \{\varphi_1\}$ (tương ứng $a \in A_P \setminus \{\varphi_2\}$). Từ (13) ta có $Q(a) = 0$, và do đó $Q(x) \in T^*$. Suy ra, theo (8), $a \in \{0, -1, \varphi_1, \varphi_2\}$.

Như vậy, Nhận xét 3 đúng $\forall P(x) \in T^*$ mà $\deg P = k$. Theo nguyên lí qui nạp, Nhận xét 3 được chứng minh.

Từ Nhận xét 3 ta có: $|A_P| \leq 4$ $\forall P(x) \in T^*$. (14)

Hiển nhiên $|A_P| = 0$ $\forall P(x) \in T \setminus T^*$. Kết hợp với (14) ta được: $|A_P| \leq 4$ $\forall P(x) \in T$. Hơn nữa, dễ thấy, với $P(x) = x(x+1)(x^2-x-1)$ thì $P(x) \in T$ và $|A_P| = 4$. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $|A_P|$, với $P \in T$, bằng 4.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/284. Cho số nguyên dương n và số nguyên tố p lớn hơn $n+1$. Hỏi phương trình sau có nghiệm nguyên không :

$$1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{2n+1}+\ldots+\frac{x^p}{pn+1}=0$$

NGUYỄN HỮU BẰNG
(GV THCS Bến Thủy, Vinh, Nghệ An)

Bài T2/284. Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện

$$(x+\sqrt{1+y^2})(y+\sqrt{1+x^2})=1.$$

Chứng minh rằng

$$(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1$$

LÊ QUANG NĂM
(SV khoa Toán ĐHKHTN – ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Bài T3/284. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức

$$\frac{(1+x)^8+16x^4}{(1+x^2)^4}$$

trong đó x là số thực.

LÊ QUỐC HÁN
(GV khoa Toán, ĐHSP Vinh, Nghệ An)

Bài T4/284. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung $BC<2R$. Điểm A chuyển động trên cung lớn BC, điểm D chuyển động trên cung nhỏ BC. Hãy xác định vị trí của điểm A và D để tổng

$$\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}$$

đạt giá trị nhỏ nhất

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV. Tp Hồ Chí Minh)

Bài T5/284. Tam giác ABC có các đường phân giác trong AD, BE, CF cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng nếu bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AQF, BQD, CQE bằng nhau thì tam giác ABC là đều.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/284. Chứng minh rằng không tồn tại đa thức $P(x)$ bậc lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện : với mọi x nếu $P(x)$ là số nguyên thì $P(x+1)$ cũng là số nguyên.

TRẦN NAM DŨNG
(GV khoa Toán ĐHKHTN–ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Bài T7/284. Chứng minh rằng phương trình

$$16x^5-20x^3+5x+2=0$$

có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm đó

TRẦN VĂN VUÔNG
(Viện Khoa học Giáo dục)

Bài T8/284. Cho dãy số (x_n) $(n=0, 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi :

$$x_0=a \text{ và } x_{n+1}=\frac{2^{x_n}(ln2.x_n-1)+1}{\ln 2.2^{x_n}-1}=1.$$

Hãy tìm giới hạn (theo a) của dãy trên.

HOÀNG HOA TRẠI
(GV THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Bài T9/284. Cho ba đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2) và (O_3, R_3) với $R_3<R_1\le R_2$, cùng tiếp xúc với đường thẳng d và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Gọi M, N, P theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (O_3, R_3) với (O_1, R_1), (O_2, R_2) và d. Chứng minh rằng diện tích tam giác MNP bằng $\dfrac{2R_3^2R_1R_2}{(R_3+R_1)(R_3+R_2)}$

TRẦN XUÂN BANG
(GV THPT bán công Đồng Hới, Quảng Bình)

Bài T10/284. Cho hình chóp $SABC$. Chứng minh rằng nếu các trung tuyến của các tam giác SAB, SBC, SCA kẻ từ đỉnh S tạo với các cạnh đáy AB, BC, CA những góc không tù bằng nhau thì diện tích của mỗi mặt bên nhỏ hơn tổng diện tích các mặt bên còn lại.

NGÔ THẾ PHIỆT
(GV THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

L1/284. Một tấm ván có chiều dày h được giữ cố định trong mặt phẳng thẳng đứng. Một viên đạn bay theo phương ngang vuông góc với mặt tấm ván và xuyên qua tấm ván. Vận tốc của viên đạn giảm từ v_0 đến v. Biết rằng lực cản của tấm ván tỉ lệ với bình phương vận tốc viên đạn. Tính thời gian chuyển động của viên đạn trong tấm ván (bỏ qua tác dụng của trọng lực đối với viên đạn).

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV trường THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/284. Let be given a positive integer n and a prime number p greater than $n+1$. Does the following equation have an integer-root :

$$1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{2n+1}+\ldots+\frac{x^p}{pn+1}=0$$

T2/284. The real numbers x, y satisfy the condition

$$(x+\sqrt{1+y^2})(y+\sqrt{1+x^2})=1.$$

Prove that :

$$(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1$$

T3/284. Find the least value and the greatest value of the expression

$$\frac{(1+x)^8+16x^4}{(1+x^2)^4}$$

where x is a real number.

T4/284. Let be given a circle with center O and radius R and a chord $BC < 2R$. A point A moves on the major arc BC, a point D moves on the minor arc BC. Determine the position of A and D so that the sum $\frac{1}{DA}+\frac{1}{DB}+\frac{1}{DC}$ attains its smallest value.

T5/284. The inner angled-bisectors AD, BE, CF of a triangle ABC are concurrent at Q. Prove that if the inradii of the triangles AQF, BQD, CQE are all equal then ABC is an equilateral triangle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/284. Prove that there does not exist a polynomial $P(x)$ with degree > 1, satisfying the condition : for every x, if $P(x)$ is an integer then $P(x+1)$ is also an integer.

T7/284. Prove that the equation

$$16x^5-20x^3+5x+2=0$$

has a unique root and find it.

T8/284. The sequence of numbers (x_n) (n = 0, 1, 2, ...) is defined by :

$$x_0=a \text{ and } \quad x_{n+1}=\frac{2^{x_n}(ln2.x_n-1)+1}{\ln 2.2^{x_n}-1}$$

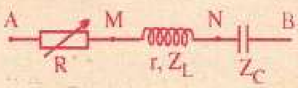
Find the limit (in terms of a) of the sequence.

T9/284. Let be given three circles (O_1, R_1), (O_2, R_2) and (O_3, R_3) with $R_3 < R_1 \le R_2$ which are tangent to the line d and are externally tangent each to the two others. Let M, N, P be respectively the touching points of (O_3, R_3) with (O_1, R_1), (O_2, R_2) and d. Prove that the area of triangle MNP is equal to

$$\frac{2R_3^2R_1R_2}{(R_3+R_1)(R_3+R_2)}$$

T10/284. Let $SABC$ be a pyramid. Prove that if the medians issued from S of the triangles SAB, SBC, SCA form with the sides of the base AB, BC, CA equal non obtuse angles, then the area of each lateral face is less than the sum of the areas of the other lateral faces.

☛ **L2/284.** Đặt một hiệu điện thế $u=U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ với U, ω không đổi vào đoạn mạch AB (hình bên), người ta thấy khi điều chỉnh biến trở đến giá trị R = 75(Ω) thì đồng thời có:



- Biến trở R tiêu thụ công suất lớn nhất.

- Thêm bất kì một tụ điện C' nào vào đoạn NB, dù nối tiếp hay song song với tụ điện C vẫn thấy U_{NB} giảm.

Hãy tính r, Z_L, Z_C, Z biết rằng chúng đều có trị số (Ω) nguyên.

TRẦN VĂN MINH
(GV Hà Nội)

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 285 (3-2001)

- Dành cho các bạn THCS : *Giải bài toán cực trị đại số với các biến bị các điều kiện ràng buộc*
- *Đề thi toán tuyển sinh vào lớp 10 khối PT chuyên toán ĐHQG Tp Hồ Chí Minh.*
- Các tính chất của một hàm số số học liên quan đến hệ nhị phân.
- *Phương pháp đồ họa máy tính* dành cho toán phổ thông.
- *Các bài toán nhận dạng tam giác* khi thi đại học
- Giải đề thi môn toán vào Đại học SP Vinh

Bạn có biết *Trò chơi phóng tên ở nước Anh* chưa ? Hãy thử giải những bài đố vui trong Giải trí toán học, Câu lạc bộ...

Nếu bạn muốn tiếp tục tham gia Cuộc thi *Nhìn ảnh đoán tuổi* hãy tìm phiếu dự thi ở số báo tới.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T1/280. *Tìm m để phương trình*

$$(x^2-1)(x+3)(x+5)=m$$

có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-1$$

Lời giải. (của *Lê Duy Cường*, 9D, THCS Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc**)

Ta có

$$(x^2-1)(x+3)(x+5)=m \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x-1)(x+5)=m$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+3)(x^2+4x-5)=m \qquad (2)$$

Đặt $y=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$, khi đó (2) có dạng : $(y-1)(y-9)=m$

hay $\quad y^2-10y+(9-m)=0 \qquad (3)$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt tương đương với phương trình (3) có 2 nghiệm dương phân biệt $y_1>y_2>0$.

Hay có

$$\left.\begin{array}{l}\Delta'=16+m>0\\ S=y_1+y_2=10>0\\ P=y_1.y_2=9-m>0\end{array}\right\}\Leftrightarrow -16<m<9 \quad (4)$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2+4x+4-y_1=0 \qquad (5)$

x_3, x_4 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\quad x^2+4x+4-y_2=0 \qquad (6)$

Theo định lí Viet và (3), (5), (6) ta có

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}+\frac{x_3+x_4}{x_3.x_4}$$

$$=\frac{-4}{4-y_1}-\frac{4}{4-y_2}=\frac{4(y_1+y_2)-32}{16-4(y_1+y_2)+y_1y_2}$$

$$=\frac{40-32}{16-40+9-m}=\frac{8}{-15-m}=-1$$

Từ đó ta có $m=-7$ thỏa mãn

$$-16<m=-7<9.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Thái Nguyên:** *Cao Nguyên*, 9A2, THCS Tân Lập, Tp Thái Nguyên; **Bắc Giang:** *Đỗ Xuân Hòe*, 8A, phổ thông DTBT huyện Sơn Động; **Bắc Ninh:** *Lê Duy Cường*, 9B, THCS Yên Phong, huyện Yên Phong, *Ngô Thị Hoan*, Chợ Sơn, Việt Đoàn, Tiên Du; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thế Tùng*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Lê Anh Tuấn*, 9A, THCS Vĩnh Tường; *Phạm Văn* Hoàng, Kim Đình Trường, 9B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Hoàng*, 9B, *Nguyễn Thị Bích Hằng*, 9C, THCS Vĩnh Yên; **Hòa Bình:** *Nguyễn Bảo Thịnh*, 9A1, THCS Sông Đà; **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn, Trần Ngọc Phương*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nam:** *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Hà Nội:** *Vũ Quang*, 8G, Mari Quiri, Khương Đình, Thanh Xuân; **Hải Dương:** *Hoàng Thanh Hải*, 9A, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ; *Trần Thị Thương*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, thị trấn Nam Sách, *Phạm Huy Hoàng*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Thái Bình:** *Đỗ Hồng Hải*, 9E, THCS huyện Thái Thụy, *Trần Trung Hiếu*, 9A, THCS Tân Thuật, Kiến Xương; *Nguyễn Tuấn Hùng*, 9B1, THCS Lương thế Vinh, Tx. Thái Bình; **Nam Định:** *Phạm Thị Thu Hương*, 9B, THCS Hải Hậu, *La Xuân Hùng*, 8A, THCS Xuân Trường, **Thanh Hóa;** *Mai Thị Nhàn*, 8A, THCS Hoằng Đạo, *Lê Thị Hiền*, 9A, THCS Hoằng Trung, Hoằng Hóa, *Trịnh Đức Anh*, 9a, THCS Yên Thọ, Yên Định, **Nghệ An:** *Võ Huyền Trang*, 9A, THCS Nghi Hương, Tx Cửa Lò, *Trần Đình Trung*, 9A, Hermann Gmeiner, Tx. Vinh; **Hà Tĩnh:** *Đặng Văn Trường*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Trường Khanh*, 9^1, Nguyễn Tri Phương, Huế; **Quảng Ngãi:** *Ngô Ngọc Khiêm*, 9_2, THCS Nguyễn Tự Tân, huyện Bình Sơn; **Phú Yên:** *Nguyễn Kim Duân*, 9c, THCS Lương Thế Vinh, T. Tuy Hòa; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Viết Cường*, 9_3, THCS Lê Văn Tám, Bình Thạnh; **Đồng Tháp:** *Võ Hữu Trí*, 9A7, THPT Tx. Cai Lậy

TỐ NGUYÊN

Bài T2/280. *Cho ba số thực a, b, c với $a\geq 2$, $b\geq 9$, $c\geq 1945$ và thỏa mãn : $a+b+c=2000$. Tìm giá trị lớn nhất của tích abc.*

Lời giải. (của *Lê Thái Hoàng*, 9A1, THCS Hữu Nghị và *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, **Hòa Bình**) :

Từ giả thiết ta có $a+b\leq 55$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương $\frac{778}{11}a$, $\frac{778}{11}b$, c thì :

$$\left(\frac{778}{11}\right)^2.abc=\frac{778}{11}.a.\frac{778}{11}.b.c$$

$$\leq\left[\frac{\frac{778}{11}(a+b)+c}{3}\right]^3$$

$$=\left[\frac{\frac{767}{11}(a+b)+(a+b+c)}{3}\right]^3\leq\left[\frac{767.5+2000}{3}\right]^3$$

$$=1945^3\Rightarrow abc\leq\frac{1945.55^2}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=55 \\ \frac{778}{11}a = \frac{778}{11}b = c \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{55}{2} \text{ (thỏa mãn giả thiết)} \\ c=1945 \end{cases}$

Chứng tỏ giá trị lớn nhất của abc là $\frac{1945.55^2}{4}$ $= 1470906,25$

Nhận xét. 1) Một số bạn chứng minh rằng : "Để abc đạt giá trị lớn nhất thì $c = 1945$" bằng phương pháp phản chứng. Từ đó dễ dàng suy ra tiếp abc lớn nhất khi $a = b = \frac{55}{2}$.

2) Một số bạn lí luận để abc lớn nhất thì a, b, c đều phải lớn nhất (?). Thật là sai lầm !

3) Có bạn đưa ra kết quả : $abc \le \frac{(2000-c)^2.c}{4}$ rồi lí luận abc lớn nhất khi đẳng thức xảy ra (?). Điều này cũng thiếu căn cứ vì vế phải chưa là ... hằng số.

4) Có thể nhận xét : $b < 1945$ và $c \ge 1945$ để dẫn đến : $(1945-b)(1945-c) \le 0 \Rightarrow bc \le 1945(b+c-1945)$ (*) . Sau đó áp dụng bất đẳng thức Côsi để có : $a(b+c-1945) \le \frac{(55)^2}{2}$ (**). Từ (*) và (**) có $abc \le 1945.\left(\frac{55}{2}\right)^2$ và đến kết quả đúng.

5) Các bạn giải chính xác và trình bày tốt là : **Nam Định:** *Nguyễn Đức Tâm*, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định, *Trần Trung Kiên, Nguyễn Đăng Hợp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Trương Nho Đại*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hòa Bình:** *Triệu Quốc Hiệp*, 9A, THCS Kim Đồng, Tân Lạc; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh, Vương Anh Quyền, Nguyễn Tiến Dũng*, 8A, THPT NK Trần Phú; **Hà Tây:** *Lê Bảo Khánh*, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông; *Dương Minh Sơn, Trần Ngọc Phương*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Bình Minh, Nguyễn Tuấn Minh*, 9A, THCS Yên Phong; **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 9^2, THCS Mỹ Hóa; **Hưng Yên :** *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đức Chinh*, 9B, *Lê Thanh Tùng*, 9C, THCS Việt Trì; **Nghệ An:** *Phan Trung Kiên*, 8C, THCS thị trấn Nam Đàn; **Hà Nội:** *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Quảng Ngãi:** *Ngô Ngọc Khiêm*, 9^2, THCS Nguyễn Tự Tân

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/280. *Hàm số $f(x, y)$ xác định với mọi cặp số không âm (x, y) và thỏa mãn các điều kiện :*

a) $f(0, y) = y + 1$

b) $f(x+1, 0) = f(x, 1)$

c) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1, y))$

với mọi cặp số không âm x, y.

Tìm số nguyên k lớn nhất sao cho $f(4, 2000) - f(3, 2000)$ chia hết cho 2^k.

Lời giải. (của bạn *Vũ Thúy Hà*, 9B, THCS Đại Yên, Thành Bồ, **Quảng Ninh** và nhiều bạn khác)

Từ điều kiện a), b) và c) ta có ngay

$f(1, 0) = 2, f(2, 0) = 3, f(3, 0) = 5 ; f(4, 0) = 13$

Ta chứng minh bằng quy nạp các đẳng thức sau : $f(1, n) = n+2$ (1)

$f(2, n) = 2n+1$ (2)

$f(3, n) = 2^{n+3} - 3$ (3)

Rõ ràng các đẳng thức (1), (2) và (3) đúng với $n = 0$. Giả sử chúng đúng với $n = k$. Ta chứng minh chúng cũng đúng với $n = k+1$.

Từ a) và c) ta có :

$f(1, k+1) = f(0, f(1, k)) = f(1, k) + 1 = k+2+1 = k+3$

$f(2, k+1) = f(1, f(2, k)) = f(2, k) + 2$ (theo (1)) $= (2k+3) + 2 = 2(k+1) + 3$.

Tiếp tục áp dụng c) ta có

$f(3, k+1) = f(2, f(3, k))$ (theo (2)) =

$= 2f(3, k) + 3 = 2(2^{k+3} - 3) + 3 = 2^{k+4} - 3$.

Mặt khác, dễ thấy (theo quy nạp) $f(4, y+1) > f(4, y)$ và $f(4, 2000) = f(3, f(4, 1999)) = 2^{f(4, 1999)+3} - 3$; $f(4, 1999) > 2000$

Do vậy : $f(4, 2000) - f(3, 2000) = 2^{2003}(2^{f(4, 1999)-2000} - 1)$

Suy ra số k lớn nhất bằng 2003 vì

$2^{f(4, 1999)-2000} - 3$ là một số lẻ.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

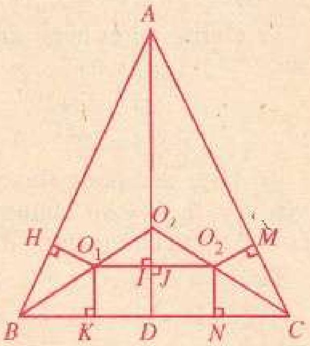
Nguyễn Lâm Tuyên, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, **Hòa Bình**; *Đỗ Minh Thành*, 9A, THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh, **Nam Định**; *Lương Hồng Tâm*, 8C, THCS Cao Thượng, Tân Yên, **Bắc Giang**; *Ngô Ngọc Khiêm*, 9A2, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn, **Quảng Ngãi**; *Hoàng Thành Hải*, 9A, THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ, **Hải Dương**; *Trương Nho Đại, Trần Thanh Hưng*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Đức Chính*, 9B, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**, *Nguyễn Tiến Dũng*, 9_2, THCS Mỹ Hóa, **Bến Tre**, *Hồ Trung Cang*, THCS-DTNT Đack Tô, Kon Tum; *Nguyễn Kim Duân*, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa, **Phú Yên**; *Lê Hùng Việt Bảo*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T4/280. *Cho tam giác ABC cân (AB = AC). Lấy điểm D trên cạnh BC (D khác B, C). Gọi r_1 và r_2 lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABD và ACD. Xác định vị trí của D để tích r_1r_2 đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Gọi O là giao điểm 3 đường phân giác của tam giác ABC, O_1 là tâm đường tròn nội tiếp ΔABD, O_2 là tâm đường tròn nội tiếp ΔACD. Dễ thấy $O_1 \in OB$, $O_2 \in OC$. Vì $r_1 > 0$ và $r_2 > 0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$r_1.r_2 \leq \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$$



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $r_1 = r_2$.

Khi đó $\Delta O_1KB = \Delta O_2NC$.

Suy ra $BK = CN$. Suy tiếp ra $BH = CM$.

Từ đó $AH = AM$. Vậy $\Delta AHO_1 = \Delta AMO_2$

Nên $AO_1 = AO_2$. Kẻ $O_1I \perp AD$, $O_2J \perp AD$. Dễ thấy $I \equiv J$ và $O_1I = O_2J$.

Từ đó $KD = DN$.

Vậy D là trung điểm của BC thì tích r_1r_2 đạt giá trị lớn nhất (Lúc đó A, O, D thẳng hàng).

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Hòa Bình: *Nguyễn Bảo Thịnh*, 9A1, THCS Sông Đà; **Phú Thọ:** *Nguyễn Minh Hoàng*, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Trường*, 9B, THCS Yên Lạc, *Hoàng Minh Hải*, 9C, THCS Tam Đảo, Tam Dương, *Nguyễn Thị Thúy Hồng*, 8B, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Phạm Huy Hoàng*, 9/3 THCS Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** *Doãn Thị Kim Huế*, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh*, 8A, THPT NK Trần Phú; **Hà Tây:** *Dương Minh Sơn*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, *Trần Trung Kiên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** *Trần Thanh Hưng*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Trịnh Thị Ngoan*, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Trương Nho Đại*, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** *Bùi Danh Nam*, 8B, THCS TT Nam Đàn, *Đặng Song Toàn*, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** *Trần Việt Dũng*, 9B, THCS Nguyễn Trãi, 81, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn

VŨ KIM THỦY

Bài T5/280. *Trong một cuộc đấu cờ giữa các học sinh, mỗi người phải đấu với người khác một ván. Ở mỗi ván người thắng được 1 điểm, người thua được 0 điểm, còn ở ván hòa mỗi người được 0,5 điểm. Tham gia cuộc đấu này có các học sinh lớp A và lớp B, số học sinh lớp B nhiều gấp 10 lần số học sinh lớp A. Sau cuộc đấu tổng số điểm của học sinh lớp B bằng 4,5 lần tổng số điểm của học sinh lớp A. Hỏi kết quả các ván cờ của học sinh lớp A như thế nào ?*

Lời giải. (Theo ý chứng minh của một số bạn)

Gọi n là số học sinh của lớp A và $10n$ là số học sinh của lớp B. Tổng số học sinh của cả hai lớp là $11n$ và mỗi em phải thi đấu đúng $11n-1$ ván, nên tổng số ván phải thi đấu là $\frac{11n(11n-1)}{2}$. Do tổng số điểm của mỗi ván cờ đúng bằng 1, nên $\frac{11n(11n-1)}{2}$ là tổng số điểm của tất cả học sinh hai lớp A và B.

Theo bài ra, tổng số điểm của học sinh lớp B bằng 4,5 lần tổng số điểm của học sinh lớp A, cho nên tổng số điểm tất cả học sinh lớp A là $\frac{11n(11n-1)}{2} : 5{,}5 = n(11n-1)$. Số điểm này đúng bằng tổng số ván cờ của tất cả học sinh lớp A, nên có nghĩa là trong mọi ván cờ, học sinh lớp A đều thắng 1 điểm.

Từ đó lớp A có đúng một học sinh (vì hai học sinh lớp A không thể đều thắng trong ván cờ đấu với nhau), lớp B có đúng 10 học sinh. Tổng số điểm của học sinh duy nhất của lớp A là 10 và tổng số điểm của học sinh lớp B là $\frac{10 \times 9}{2} = 45$, thỏa mãn giả thiết của bài toán.

Nhận xét. Một số bạn giải sai bài toán này, hoặc không đi đến kết luận rõ ràng hoặc kết luận sai là yêu cầu bài toán không thể thỏa mãn được.

Nhiều bạn giải đúng bài này, các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn và đầy đủ nhất.

Hòa Bình: *Nguyễn Lâm Tuyền*, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy, *Nguyễn Bảo Thịnh*, 9A, THCS Sông Đà; **Vĩnh Phúc:** *Bùi Hữu Đức*, 8A, Vĩnh Yên, *Phạm Văn Hoàng*, 9B, THCS Yên Lạc; **Đắc Lắc:** *Ngô Thị Huyền Trang*, 7A1, THCS Trần Hưng Đạo, thành phố Buôn Mê Thuột; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Nhật Hoàng Học*, 9A, THCS Yên Phong; **Nam Định:** *Trần Trung Kiên*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hải Phòng:** *Nguyễn Đức Phương*, 8A, THCS Trần Phú, *Bùi Anh Tuấn*, 8A, THPT NK Trần Phú, *Nguyễn Văn Quang*, 9T, THCS Chu Văn An, quận Ngô Quyền, *Trần Xuân Dũng*, 8A, THPT NK Trần Phú; **Phú Thọ**; *Hà Tuấn Anh*, 9B, THCS Việt Trì; **Quảng Ngãi:** *Ngô Ngọc Khiêm*, 9_2, THCS Nguyễn Tự Tân, huyện Bình Sơn; **Hà Tây:** *Nguyễn Đức Thuận*, 9A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T6/280. *Tìm tất cả các số dương n để $5^n + 1$ chia hết cho 7^{2000}.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Việt Hằng*, 12A1, THPT chuyên Yên Bái, **Yên Bái**)

Bước 1. Đặt $a_k = 6.7^{k-1}$ ($k \geq 1$). Khi đó $5^{a_k} - 1$ chia hết cho 7^k nhưng không chia hết cho 7^{k+1}.

Chứng minh quy nạp. Với $k = 1$ đúng. Giả sử đúng với k.

Ta có $5^{a_{k+1}} - 1 = 5^{7a_k} - 1 = (5^{a_k} - 1)A$

trong đó $A = 5^{6a_k} + 5^{5a_k} + ... + 5^{a_k} + 1$

$= u^6 + ... + u + 1$ với $u = 5^{a_k} \equiv 1$ (mod7).

Suy ra $A = \sum_{i=0}^{6} (7t+1)^i \equiv 7 \pmod{7^2}$

Từ đó và giả thiết quy nạp suy ra :

$5^{a_{k+1}} - 1 \ \vdots\ 7^{k+1}$ và không chia hết cho 7^{k+2}

Bước 2. Nếu $5^n \equiv 1 \pmod{7^k}$ thì $n \ \vdots\ a_k$

Chứng minh quy nạp theo k. Với $k = 1$ dễ thấy đúng. Giả sử đúng với k. Ta chứng minh đúng với $k+1$. Nếu $5^n \equiv 1 \pmod{7^{k+1}} \Rightarrow 5^n \equiv 1 \pmod{7^k} \Rightarrow n = ta_k$ ($t \in N^*$) do quy nạp.

Ta có $5^n - 1 = (5^{a_k} - 1)B$ ở đó $B = \sum_{i=0}^{t-1} (5^{a_k})^i \equiv t \pmod 7$ vì $5^{a_k} \equiv 1 \pmod 7$.

Theo bước 1 ta phải có $B \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow t \ \vdots\ 7 \Leftrightarrow n \ \vdots\ a_{k+1} = 7a_k$.

Bước 3: Giả sử $5^n \equiv -1 \pmod{7^k} \Rightarrow 5^{2n} \equiv 1 \pmod{7^k}$. Theo bước 2 ta có $2n \ \vdots\ a_k \Leftrightarrow n = 3.7^{k-1}.t$ ($t \in Z$). Vì $(5^{3.7^{k-1}})^2 = 5^{a_k} \equiv 1 \pmod{7^k}$ và $5^{3.7^{k-1}} \not\equiv 1 \pmod{7^k}$ (do bước 2) nên $5^{3.7^{k-1}} \equiv -1 \pmod{7^k}$. thành thử $5^n \equiv -1 \pmod{7^k} \Leftrightarrow (-1)^t \equiv -1 \pmod{7^k}. \Leftrightarrow t$ lẻ. Đảo lại nếu $n = 3.7^{k-1}.t$ với t lẻ thì $5^n \equiv (-1)^t \equiv -1 \pmod{7^k}$

Kết luận : $n = 3t.7^{k-1} = 3.t.7^{1999}$ với t lẻ, $t \in N^*$.

Nhận xét. 1) Các bạn sau có lời giải đúng : *Lương Hoàng Va*, 12 Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**; *Nguyễn Dư Thái*, 12T, ĐHKH Huế; *Lê Quang Huấn*, 9A, Việt Yên, **Bắc Giang**; *Hoàng Đức Giang Nguyên*, 10A, Thái Phiên, **Hải Phòng**; *Nguyễn Lâm Hưng*, PTNK Tp Hồ Chí Minh, *Tạ Việt Tân*, 12A chuyên **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Mạnh Long*, THPT Thăng Long, **Hà Nội**; *Vương Như Khuê*, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Kim Đình Thái*, 11A1; ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Thị Khánh Hiền*, 12T, Lê Quý Đôn, Khánh Hòa, *Đinh Duy Hiển*, 11 Toán, **Hòa Bình**; *Ngô Quốc Anh*, 12A, ĐHKHTN,ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11, Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**; *Hoàng Ngọc Minh*, 10a, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**, *Nguyễn Anh Ngọc*, 10A1, THPT NK **Hải Dương**; *Phạm Thị Ngọc Mai*, 8A, Đô Lương, **Nghệ An**; *Trần Thái An Nghĩa*, 11 THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi.

2) Một số bạn giải sai khi kết luận rằng không tồn tại n. Một số bạn nêu bài toán tổng quát : "Cho $a \in N^*$ và p là số nguyên tố, $k \in N^*$. Tìm tất cả $n \in N$ để $a^n + 1 \ \vdots\ p^k$" nhưng chưa cho lời giải mà chỉ nói rằng có thể làm bằng phương pháp tương tự (chú ý rằng nếu $a = 2, p = 7$ thì $2^n + 1$ không chia hết cho 7 với mọi n do đó việc biện luận kết quả là không đơn giản).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/280. *Chứng minh rằng*

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + ... + \frac{\sin nx}{n} > \sin nx$$

trong đó n là số nguyên lớn hơn 1 và $0<x<\frac{\pi}{n}$.

Lời giải. Xét hàm số

$$f(x) = \sin x + \sin\frac{2x}{2} + ... + \frac{\sin nx}{n} - \sin nx$$

với $x \in [0; \frac{\pi}{n})$. Lấy đạo hàm được

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx - n\cos nx$$

Dễ thấy hàm số $y = \cos t$ nghịch biến trên $[0, \pi)$ và $\cos t = 0$ chỉ khi $t = 0$. Từ đó $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} (\cos ix - \cos nx) > 0$, suy ra hàm số $f(x)$ tăng thực sự trên $(0; \frac{\pi}{n})$ nên $f(x) > 0$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn đã giải được bài này. Không ít bạn trình bày dài vì chứng minh bằng quy nạp. Một số bạn chứng minh $\frac{\sin kx}{k} > \frac{\sin nx}{n}$ với $x \in (0, \frac{\pi}{n})$ và $1 \leq k \leq n-1$, sau đó lấy tổng với k chạy từ 1 đến n.

2) Một số bạn chỉ ra rằng : đây là trường hợp riêng của bài toán thi Olympic châu Á - Thái Bình Dương (3/1999) :

Cho dãy số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n > 1)$ thỏa mãn $a_{i+j} \le a_i + a_j$ với mọi $1 \le i, j \le n$. Chứng minh rằng :

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + ... + \frac{a_n}{n} \ge a_n \qquad (*)$$

Giải. Đặt $kb_k = a_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ thì (*)

$$\Leftrightarrow b_1 + b_2 + ... + b_n \ge a_n \qquad (**)$$

Chứng minh (**) bằng quy nạp. Với $n = 1$ thì đúng. Giả sử với $k-1$ đúng, sử dụng giả thiết quy nạp và biến đổi sau để suy ra với k thì (**) vẫn đúng

$$k(b_1 + b_2 + ... + b_{k-1}) = b_1 + (b_1 + b_2) + ... +$$
$$+ (b_1 + b_2 + ... + b_{k-1}) + a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} \ge$$
$$\ge 2(a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} (a_i + a_{k-i}) \ge (k-1)a_k$$

Thay dãy số (a_i) $(i = 1, 2, ... n)$ bởi các hàm số $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ trong tập xác định thích hợp thỏa mãn $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ sẽ có các bài toán cụ thể.

3) Các bạn sau có lời giải đúng và gọn :

Hà Giang: *Nguyễn Kim Cương, Vũ Hoàng Gia*, 12T, THPT chuyên; **Yên Bái:** *Nguyễn Việt Hằng*, 12A1, THPT chuyên; **Phú Thọ:** *Trần Thanh Hải*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Việt Tôn*, 12T, *Nguyễn Đắc Tùng*, 12A3, *Nguyễn Tiến Thịnh*, 12AI, *Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11 Toán, THPT Hà Nội - Amsterdam, *Phan Nhất Thống*, 12A1, THPT Tôn Đức Thắng, *Lê Chí Thức*, 12A, THPT Nguyễn Thị Minh Khai, *Nguyễn Mạnh Long*, 11N, THPT Thăng Long, *Kim Đình Thái, Nguyễn Trung Kiên*, 11A1, PTCTT - ĐHSP Hà Nội, *Ngô Quốc Anh*, 12A Toán, PTCTT - ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội ; **Hà Tây:** *Phạm Trung Kiên*, 12 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Nam, Đỗ Quang Trung, Phạm Thành Trung*, 10T, *Vũ Xuân Nam, Ngô Xuân Bách*, 11T, THPT NK Nguyễn Trãi ; *Trần Hưng Hải*, 11B2, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn ; **Hải Phòng:** *Cao Vũ Nhân*, 10 Lý, *Vũ Đình Đấu*, 11T, THPT NK Trần Phú **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng, Trần Quốc Việt, Đoàn Thái Sơn*, 11 Toán THPT Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Lưu Hoài Nam*, 11A8, THPT Phụ Dực, *Nguyễn Tiến Dũng*, 12A1, THPT Quỳnh Thọ; **Thanh Hóa:** *Lê Hoàng Tuân*, 12T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Phương Lê*, 11A, PTCT - ĐHSP Vinh; **Hà Tĩnh:** *Trương Xuân Chiến*, 12G, THPT Phan Đình Phùng ; **Quảng Bình:** *Hà Văn Quý, Lưu Quang Tuấn*, 12 Toán, THPT NK; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Dư Thái*, 12T - PTCT - ĐHKH Huế ; **Gia Lai:** *Lê Hoàng An*, 12C3, THPT Hùng Vương, PlâyKu ; **Đắc Lắc:** *Cao Tiến Đạt*, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột. **Quảng Ngãi:** *Lê Trung Tín*, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết,; **Phú Yên:** *Nguyễn Huỳnh Tấn Trung*, 11T1, THPT chuyên Lương Văn Chánh

VIỆT HẢI

Bài T8/280. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : R \to R$ thỏa mãn : $f(x.f(y)) = y.f(x)$ với mọi số thực x, y.* (1)

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn bài toán. Với $x = y = 0$ ta có $f(0) = 0$.

Mặt khác với mọi x, y

$$f(y.f(x)) = f(1.f(x.f(y))) = xf(y).f(1)$$

và $f(y.f(x)) = x.f(y)$

Do đó $xf(y)(f(1) - 1) = 0$ (2)

Chú ý $f(x) \equiv 0$ là một hàm số thỏa mãn bài toán. Ta xét trường hợp $f(x) \not\equiv 0$, từ (2) ta suy ra $f(1) = 1$.

Bây giờ ta xét số thực t mà $f(t) \ne 0$. Giả sử $f(y_1) = f(y_2)$. Ta có

$y_1 f(t) = f(t.f(y_1)) = f(t.f(y_2)) = y_2 f(t)$. Suy ra $y_1 = y_2$. Tức là $f(x)$ là hàm số đơn ánh. Kết hợp với giả thiết $f(x)$ là hàm số liên tục, suy ra $f(x)$ là hàm số đơn điệu. Nhưng do $f(0) = 0 < f(1) = 1$ thì $f(x)$ phải là hàm số tăng.

Trong (1) cho $x = 1$ suy ra $f(f(y)) = y$ $\forall y \in R$.

Nếu $y < f(y)$ thì $y < f(y) < f(f(y))$ mâu thuẫn.

Nếu $y > f(y)$ thì $y > f(y) > f(f(y))$ mâu thuẫn

Vậy phải có $f(y) = y$ $\forall y \in R$

Thử lại ta thấy có hai hàm số thỏa mãn là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) \equiv x$.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của 110 bạn, có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt : **Hòa Bình:** *Nguyễn Thái Ngọc, Nguyễn Lâm Tuyền, Hà Hữu Cao Trình*, 11T, THPT NK Hoàng Văn Thụ ; **Hà Nội:** *Lạc Việt*, 10A2, PTCT ĐHSPI ; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, THPT Hà Nội - Amsterdam; **Hà Tây:** *Nguyễn Tuấn Nam*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách, Vũ Xuân Nam*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Xuân Quang, Nguyễn Xuân Trường*, 11A1, THPT chuyên; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thị Thanh Hà*, 11A, THPT Hà Trung, *Lưu Hồng Vân*, 11A4, THPT Yên Định I, *Nguyễn Đức Tài*, 11T, THPT Lam Sơn, **Nghệ An:** *Nguyễn Phương Lê*, 11A, PTCT ĐHSP Vinh, *Nguyễn Đức Quyết*, 11A2, THPT Phan Bội Châu; **Quảng Bình:** *Lê Nguyên Hồng, Hoàng Kim*, 11T, THPT NK; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 11T, PTNK - ĐHQG, *Phạm Ngọc Giao, Nguyễn Vũ Thiên Nga, Nguyễn Văn Thắng*, 11T, THPT Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/280. *Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4 trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi A_{ij}, A_{ik}, A_{ih} là hình chiếu vuông góc của A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ trên các cạnh A_kA_h, A_hA_j, A_jA_k của tam giác $A_jA_kA_h$. Gọi C_i là đường tròn (hoặc đường thẳng) qua ba điểm A_{ij}, A_{ik}, A_{ih} và E_i là đường tròn Ơle của tam giác $A_jA_kA_h$. Chứng minh rằng các* *đường tròn (hoặc đường thẳng) C_i và E_i cùng đi qua một điểm.*

Lời giải. (của các bạn *Nguyễn Trung Kiên, Kim Đình Thái*, 11A1, PTCTT ĐHSP **Hà Nội**)

Để giải quyết trọn vẹn bài toán này ta cần đến khái niệm góc định hướng (x, y) giữa hai đường thẳng x và y theo modun π.

Bổ đề 1. Cho hình bình hành $PRQS$ với O là giao điểm hai đường chéo, M là điểm bất kì. N là điểm đối xứng của M qua O. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PRM, SQM, PSN, RQN cùng đi qua một điểm.

Chứng minh:

Gọi T là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp hai tam giác PRM, SQM ($T \neq M$, nếu $T \equiv M$ thì coi MT là tiếp tuyến chung) (h.1). Ta thấy :

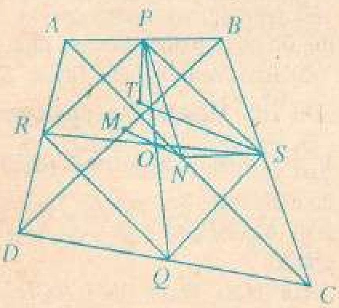
$$\begin{aligned}(TP, TS) &\equiv (TP, TM) + (TM, TS)\\ &\equiv (RP, RM) + (QM, QS)\\ &\equiv (SQ, SN) + (PN, PR)\\ &\equiv (NP, NS) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Suy ra : T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác PSN. Tương tự, T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác RQN. Bổ đề 1 đã được chứng minh.

Bổ đề 2: Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng đường tròn Ơle của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cùng đi qua một điểm.

Chứng minh:

Gọi P, Q, N, M, R, S lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, CD, AC, DB, AD, BC (h.1). Dễ thấy MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm O của mỗi đường.



Hình 1

Xét hình bình hành $PRQS$, theo bổ đề 1, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác QSM, QRN, PRM, PSN cùng đi qua một điểm, đó là đường tròn Ơle của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC tương ứng. Bổ đề 2 được chứng minh.

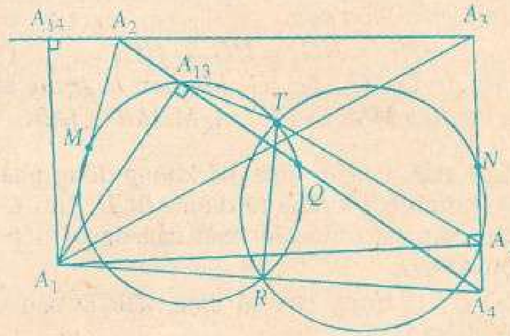
Trở lại bài toán của ta.

Nếu A_1, A_2, A_3, A_4 cùng nằm trên một đường tròn thì C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là các đường thẳng và C_i, E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) cùng đi qua một điểm (kết quả này đã được chứng minh trong bài T9/232 báo THTT 10/1996).

Nếu A_1, A_2, A_3, A_4 không cùng nằm trên một đường tròn thì C_i ($i = 1, 2, 3$) là các đường tròn và bài toán được chứng minh như sau :

Theo bổ đề 2, đường tròn Ơle của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ $A_1A_2A_3$ cùng đi qua một điểm, gọi điểm đó là T. Ta sẽ chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_{ij}A_{ik}A_{ih}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) cũng đi qua T.

Thật vậy : Gọi R, Q, N, M lần lượt là trung điểm các đoạn A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4, A_1A_2 (h.2)



Hình 2

Theo hệ thức Salơ cho góc định hướng giữa hai đường thẳng ta có :

$(TA_{12}, TA_{13}) \equiv (TA_{12}, TR) + (TR, TA_{13})$ (mod π) (1)

Vì đường tròn ngoại tiếp các tam giác NRA_{12}, QRA_{13} tương ứng là đường tròn Ơle của các tam giác $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ nên :

$$\begin{cases}(TA_{12}, TR) \equiv (NA_{12}, NR) \pmod{\pi}\\ (TR, TA_{13}) \equiv (QR, QA_{13}) \pmod{\pi}\end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$(TA_{12}, TA_{13}) \equiv (NA_{12}, NR) + (QR, QA_{13})$ (modπ) (3)

Vì $NR // A_3A_1$, $QR // A_2A_1$, nên từ (3) có :

$(TA_{12}, TA_{13}) \equiv (A_3A_{12}, A_3A_1) +$
$+ (A_2A_1, A_2A_{13})$ (modπ) (4)

Vì bốn điểm A_1, A_3, A_{14}, A_{12} cùng thuộc một đường tròn; bốn điểm A_1, A_2, A_{14}, A_{13} cùng thuộc một đường tròn nên

$(A_3A_{12}, A_3A_1) \equiv (A_{14}A_{12}, A_{14}A_1)$ (mod π) ;
$(A_2A_1, A_2A_{13}) \equiv (A_{14}A_1, A_{14}A_{13})$ (mod π) (5)

Từ (4) (5) suy ra

$(TA_{12}, TA_{13}) \equiv$
$\equiv (A_{14}A_{12}, A_{14}A_1) + (A_{14}A_1, A_{14}A_{13})$
$\equiv (A_{14}A_{12}, A_{14}A_{13})$ (mod π)

Vậy : T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_{12}A_{13}A_{14}$, tức là T thuộc đường tròn (C_1). Tương tự, T thuộc các đường tròn (C_2), (C_3), (C_4). Bài toán đã được chứng minh.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán khó, chỉ có 19 bạn tham gia giải. Ngoài hai bạn Kiên và Thái, còn có bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** cho lời giải tương đối tốt.

Để giải tốt bài này và đặc biệt là để cho phép chứng minh không phụ thuộc vào hình vẽ ta cần phải có những hiểu biết tốt về khái niệm góc định hướng giữa hai đường thẳng

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/280. *Cho tứ diện ABCD có bốn đường cao cắt nhau tại một điểm H. Chứng minh rằng có một và chỉ một điểm M trong không gian thỏa mãn*

$$HG_1 = HG_2 = HG_3 = HG_4 \qquad (*)$$

trong đó G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tứ diện MBCD, MCDA, MDAB, MABC.

Lời giải. Giả sử điểm M không đồng phẳng với 3 đỉnh bất kì của tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm và O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Vì G_1 là trọng tâm tứ diện $MBCD$ nên với mỗi điểm H ta có :

$$4\overrightarrow{HG_1} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}$$
$$= \overrightarrow{HM} - \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD}$$
$$= \overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{HG}$$
$$= \overrightarrow{AO} + 3\overrightarrow{OM} - 4\overrightarrow{GH} = \vec{v} - \overrightarrow{OA}$$

trong đó ta đặt $\vec{v} = \overrightarrow{OM} - 4\overrightarrow{GH}$

Tương tự, ta cũng có các hệ thức :

$4\overrightarrow{HG_2} = \vec{v} - \overrightarrow{OB}$, $4\overrightarrow{HG_3} = \vec{v} - \overrightarrow{OC}$, $4\overrightarrow{HG_4} = \vec{v} - \overrightarrow{OD}$.

Từ đó điểm H thỏa mãn (*) :

$\Leftrightarrow (\vec{v} - \overrightarrow{OA})^2 = (\vec{v} - \overrightarrow{OB})^2 = (\vec{v} - \overrightarrow{OC})^2 = (\vec{v} - \overrightarrow{OD})^2$

$\Leftrightarrow \vec{v}.\overrightarrow{OA} = \vec{v}.\overrightarrow{OB} = \vec{v}.\overrightarrow{OC} = \vec{v}.\overrightarrow{OD}$

$\Leftrightarrow \vec{v}\overrightarrow{DA} = \vec{v}\overrightarrow{DB} = \vec{v}.\overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (vì ba véctơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng).

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{GH} \qquad (**)$

Trong tứ diện ABCD có 4 đường cao cắt nhau tại H thì trực tâm H được xác định bởi $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ nên (**) $\Leftrightarrow \overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{HO}$

Ta đi đến kết luận : Tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn (*), đó chính là điểm đối xứng của điểm O (tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trực tâm $ABCD$) qua trực tâm H của tứ diện đó.

Lời giải 2. (của bạn *Nguyễn Việt Hằng*, 12A1, THPT chuyên Yên Bái, **Yên Bái** và một số bạn khác).

Gọi A', B', C' và D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC của tứ diện $ABCD$, dễ dàng thiết lập các hệ thức :

$\overrightarrow{MG_1} = 3\overrightarrow{G_1A'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MA'}$;

Tương tự : $\overrightarrow{MG_2} = 3\overrightarrow{G_2B'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MB'}$

Từ đó suy ra : $\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Tương tự, $\overrightarrow{G_1G_3} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{G_1G_4} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, v.v...

Từ đó đưa đến kết luận : $[G_1G_2G_3G_4]$ là ảnh của tứ diện $[ABCD]$ qua một phép vị tự $V_T^{-\frac{1}{4}}$ tâm T nào đó với tỉ số $\lambda = -\frac{1}{4}$. Rồi suy ra : (*) $\Leftrightarrow H = V_T^{-1/4}(O)$, trong đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, T là giao điểm chung của AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 và OH với : $(AG_1, T) = (BG_2, T) = (CG_3, T) = (DG_4, T) = (OH, T) = -4$.

Suy ra : T là trọng tâm của hệ điểm $\{A, B, C, D, M\}$. Từ đó ta được :

$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HO} - 4\overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{GH} \quad (**)$

Vậy tồn tại duy nhất điểm M, xác định bởi (**) sao cho M thỏa mãn (*), trong trường hợp $ABCD$ là tứ diện trực tâm với trực tâm là H, ta thấy lại kết quả ở lời giải trên.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn khẳng định rằng : bài toán vẫn đúng đối với tứ diện bất kì, lúc đó với mỗi điểm H thì tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn (*)

2) Bạn *Nguyễn Lâm Tuyên*, 11T, THPT NK Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** xét tích hai phép vị tự $V_G^{-1/3}$ và $V_M^{3/4}$ để biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $G_1G_2G_3G_4$, từ đó cũng thiết lập được (**)

3) Ngoài các bạn trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

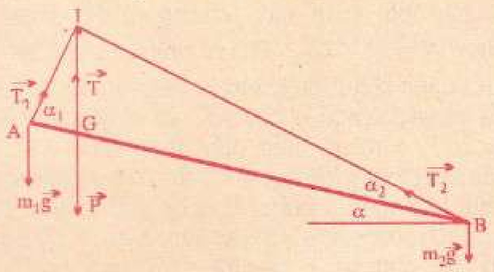
Hà Nội: *Phạm Văn Hùng, Nguyễn Trung Kiên*, 11A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, THPT Hà Nội - Amsterdam; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Nam, Phạm Thành Trung*, 10T, THPT NK Nguyễn Trãi, *Nguyễn Trung Dũng*, 10K, THPT Kim Thành; **Phú Thọ:** *Trần Thanh Hải*, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hà Giang:** *Nguyễn Kim Cương*, 12T, THPT chuyên Hà Giang; **Lào Cai:** *Nguyễn Quốc Tuấn, 11A, THPT chuyên Lào Cai;* **Quảng Bình:** *Lê Nguyên Hồng*, 11T, THPT NK Quảng Bình; **Bình Định:** *Nguyễn Tấn Lợi*, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Lâm Đồng:** *Cap Phạm Đình Thăng*, 12T, THPT chuyên Đà Lạt, Lâm Đồng

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/280. *Thanh AB dài 15cm, khối lượng không đáng kể, đầu A gắn vật nặng m_1 và đầu*

B gắn vật nặng $m_2 = \frac{m_1}{3}$*. Người ta buộc một sợi dây vào hai đầu A, B của thanh và treo vào một đinh I cố định không ma sát sao cho thanh nằm cân bằng như trên hình vẽ.*

Chiều dài dây treo $l = AI + IB = 20cm$.



1) Xác định các góc α_1, α_2 *và* α.

2) Cố định hai đoạn dây treo tại I. Tính chu kì "đung đưa" nhỏ của thanh AB trong mặt phẳng thẳng đứng.

Lấy $g = 10m/s^2$.

Hướng dẫn giải.

1) Do đinh I không ma sát nên $T_1 = T_2$. Thanh AB cân bằng suy ra : $T_2.AB\sin\alpha_2 = m_2g.AB\cos\alpha$

$T_1.AB\sin\alpha_1 = m_1g.AB\cos\alpha$.

Vì $m_2 = \frac{m_1}{3}$ suy ra $\sin\alpha_1 = 3\sin\alpha_2$.

Áp dụng định lí hàm số sin : $\frac{BI}{\sin\alpha_1} = \frac{AI}{\sin\alpha_2}$

$\Rightarrow BI = 3AI \Rightarrow AI = 5$cm ; $BI = 15$cm $= AB \Rightarrow$ tam giác ABI cân tại B $\Rightarrow$ $\cos\alpha_2 = \frac{2BI^2 - AI^2}{2BI^2} = \frac{17}{18} \Rightarrow \alpha_2 = 19{,}2^\circ$ và $\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{35}}{18}$

$\Rightarrow \sin\alpha_1 = 3\sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{35}}{6} \Rightarrow \alpha_1 = 80{,}4^\circ$. Mặt khác, vì thanh AB cân bằng nên

$m_1\vec{g} + \vec{T_1} + m_2\vec{g} + \vec{T_2} = \vec{0} \Rightarrow$

$T_1\cos(\alpha_1 - \alpha) = T_2\cos(\alpha_2 + \alpha)$

$\Rightarrow \cos(\alpha_1 - \alpha) = \cos(\alpha_2 + \alpha)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 30{,}6^\circ$.

2) Giả sử G là khối tâm của hệ thanh $m_1 + m_2$.

Ta có : $m_1g.AG = m_2g.BG \Rightarrow BG = 3AG$ mà $BG + AG = AB = 15$cm.

$\Rightarrow AG = 3{,}75$cm ; $BG = 11{,}25$cm

$\Rightarrow IG = \sqrt{BI^2 + BG^2 - 2BI.BG\cos\alpha_2} \approx 5{,}73$cm.

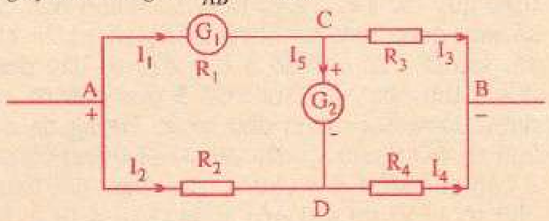
Khi cố định 2 đoạn dây treo tại I thì các lực căng $\vec{T'_1} \neq \vec{T'_2}$. Ta có $\vec{P} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g}$; $\vec{P}$ có điểm đặt tại G. Còn $\vec{T} = \vec{T'_1} + \vec{T'_2}$ cũng có điểm đặt tại G và $\vec{T}$ có phương đi qua I ($\vec{T} \equiv \vec{GI}$). Vì IG = const suy ra khi thanh AB đung đưa, chuyển động của hệ giống như một con lắc đơn có điểm treo tại I và chiều dài IG = 5,73cm $\Rightarrow$ chu kì đung đưa nhỏ của thanh AB là $T = 2\pi\sqrt{\frac{IG}{g}} \approx 0{,}475s$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Vĩnh Phúc: THPT Vĩnh Phúc : *Nguyễn Duy Hưng, Lê Thị Thu Hường*, 12A3, *Nguyễn Tuấn Linh*, 11A3, *Phạm Thị Ngọc Yến*, 11A2; **Vĩnh Long:** *Lâm Hữu Khánh Phương*, 12T, Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Đồng Tháp:** *Châu Hoàng Huy*, 12T, THPT thị xã Cao Lãnh; **Thừa Thiên - Huế:** *Phùng Quốc Trí*, 12 Chuyên Lí, Quốc học Huế; **Bắc Ninh:** *Vũ Xuân Tiến*, 12A1, THPT Thuận Thành 1; **Yên Bái:** *Hoàng Tiến Dũn*, 12A1, THPT chuyên Yên Bái ; **Phú Yên:** *Lê Anh Nhiên*, 11 Lí, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Nghệ An:** THPT Phan Bội Châu, Vinh; *Lê Minh Nguyên, Lê Ngọc Tuấn*, 12A3, **Hà Nội:** *Nông Hồng Dương*, 11A2, THPT Trần Phú; *Đỗ Huy Điệp*, 12A, THPT Nguyễn Trãi;

MAI ANH

Bài L2/280. *Tính số chỉ của 2 điện kế* G_1 *và* G_2 *trong mạch điện ở hình vẽ dưới, biết rằng :* $R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 3\Omega$; $R_4 = 4\Omega$; *2 điện kế có cùng điện trở ;* R_1 *có trị số (theo* Ω*) là số nguyên dương ;* $U_{AB} = 7{,}4V$



Hướng dẫn giải. Kí hiệu x là điện trở các điện kế. Ta có các phương trình :

$xI_1 + 3I_3 = U_{AB}$ (1) ; $2I_2 + 4I_4 = U_{AB}$ (2) ;

$x(I_1 + I_5) = 2I_2$ (3) ; $I_1 = I_3 + I_5$ (4) ;

$I_4 = I_2 + I_5$ (5)

Từ đó tìm được : $I_1 = \frac{U_{AB} + 3I_5}{x + 3}$;

$I_2 = \frac{U_{AB} - 4I_5}{6}$, và $I_5 = U_{AB} \cdot \frac{3 - 2x}{3x^2 + 22x + 12}$.

Ta phải có : $I_5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$, suy ra $x = 1\Omega$ (vì x nguyên dương).

Từ đó $I_5 = I_{G_2}$ và $I_1 = I_{G_1} = 2$A.

Chú ý. Có thể chuyển đổi $G_1G_2R_2$ từ mạch tam giác sang mạch sao rồi áp dụng định luật Ôm.

(Xem tiếp trang 8)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

PHƯƠNG PHÁP SONG ÁNH VỚI CÁC BÀI TOÁN GIẢI TÍCH TỔ HỢP

TRẦN NAM DŨNG
(GV khoa Toán ĐHKHTN, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Mỗi cách giải một bài toán đều có cái hay riêng của nó. Đối với chúng ta, lời giải hay không chỉ là những lời giải ngắn, độc đáo, mà phương pháp này còn áp dụng được vào hàng loạt các bài toán khác. Dưới đây chúng ta xem xét một số ví dụ sử dụng phương pháp song ánh để tính số lượng các phần tử của một tập hợp.

Bài toán 2. *Gọi M là số tất cả các số nguyên dương viết trong hệ thập phân có n chữ số 1, n chữ số 2 và không có một chữ số nào khác. Gọi N là số tất cả các số viết trong hệ thập phân có n chữ số, chỉ chứa các chữ số 1, 2, 3, 4 và có số các số 1 bằng số các số 2. Chứng minh rằng M = N.*

(Vô địch Ucraina 1996)

Lời giải. Chúng ta không mấy khó khăn để xây dựng mọt song ánh từ tập hợp thứ hai vào tập hợp thứ nhất : Số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 và số các chữ số 1 bằng số các chữ số 2 được "nhân đôi" thành số có $2n$ chữ số theo quy tắc sau : Đầu tiên hai phiên bản của số này được viết kề nhau thành số có $2n$ chữ số, sau đó các chữ số 3 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 1, chữ số 3 ở n chữ số sau được được đổi thành chữ số 2. Tương tự, các chữ số 4 ở n chữ số đầu được đổi thành chữ số 2 còn chữ số 4 ở n chữ số sau được đổi thành chữ số 1. Ví dụ với $A = 123412$ ($n = 6$) ta lần lượt có các phép biến đổi $1234142 \to 12341421234142 \to 12121221221112$

Như thế, ta thu được một số có đúng n số 1 và n số 2. Rõ ràng đây là một đơn ánh. Để chứng minh đây là một song ánh, ta xây dựng ánh xạ ngược như sau : Với một số có n số 1 và n số 2, ta cắt n chữ số đầu và n chữ số cuối và đặt chúng song song với nhau khi thực hiện phép cộng. Thực hiện phép "cộng" theo quy tắc $1 + 1 = 1$, $2 + 2 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 4$, ta sẽ thu được một số có n chữ số gồm các chữ số 1, 2, 3, 4 với số các số 1 bằng số các số 2. Ví dụ với $B = 112121222211$

$$\begin{array}{c} 112121 \\ \underline{222211} \\ 332341 \end{array}$$

Và như thế song ánh giữa hai tập hợp đã được thiết lập và ta có $M = N$. Điều đáng chú ý là nhờ bài toán này, chúng ta dễ dàng tính được $N = M = C_{2n}^{n}$. Thế nhưng nếu xét bài toán một cách riêng biệt, tức là đặt vấn đề tính số N tất cả các số có n chữ số, chỉ chứa các chữ số 1, 2, 3, 4 trong biểu diễn thập phân và có số các số 1 bằng số các số 2 thì đây sẽ là một bài toán không đơn giản : Hướng giải truyền thống trong trường hợp này sẽ như sau : Giả sử i là số các chữ số 1 và chữ số 2 ($i \le [n/2]$). Có $C_n^i C_{n-i}^i$ cách chọn vị trí cho i chữ số 1 và i chữ số 2 này. Còn lại $n-2i$ vị trí trống có thể đặt 3 hay 4 tùy ý. Như vậy có tất cả 2^{n-2i} cách đặt cho $n-2i$ vị trí còn lại. Vậy

$$N = \sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^i C_{n-i}^i 2^{n-2i}$$

và việc biến đổi biểu thức trên đây về dạng rút gọn tường minh C_{2n}^n không phải là vấn đề đơn giản.

Trong ví dụ trên, thực tế là chúng ta đã chứng minh được một đẳng thức khá thú vị : $\sum_{i=0}^{[n/2]} C_n^i C_{n-i}^i 2^{n-2i} = C_{2n}^n$. Nếu chứng minh công thức trên bằng phương pháp biến đổi đại số (ví dụ quy nạp) thì sẽ khá phức tạp và rắc rối, thế nhưng bằng cách xây dựng phép tương ứng nói trên, ta thấy hai vế bằng nhau vì đều là số phần tử của cùng một tập hợp. Phép chứng minh các đẳng thức như thế được gọi là phương pháp chứng minh bằng giải tích tổ hợp và ý tưởng chung của phương pháp đó là dùng các phương pháp khác nhau để tính số phần tử của cùng một tập hợp, từ đó suy ra hai kết quả thu được (thường ở dạng chưa rút gọn) bằng nhau. Dưới đây chúng ta xét thêm một ví dụ về "kiểu" chứng minh này.

Bài toán 3: *Gọi $p_n(k)$ là số các hoán vị của tập hợp $\{1, 2, ..., n\}$ có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng $\sum_{k=0}^{n} k.p_n(k) = n!$*

(Đề thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 29 – 1987)

Lời giải. Tính tất cả các cặp (x, s) trong đó s là hoán vị với x làm điểm cố định. Với mỗi một giá trị của x, ta có $(n-1)!$ hoán vị s nhận x làm điểm cố định, và do đó có tất cả $n!$ cặp như vậy. Nhưng nếu chúng ta tính số cặp (x, s) theo s thì sẽ được tổng bên trái, vì với mỗi k, $0 \le k \le n$, có $p_n(k)$ hoán vị với k điểm cố định và ứng với mỗi một hoán vị s này ta có k cặp (x, s) khác nhau.

Qua các ví dụ trên, chúng ta có thể thấy rằng phương pháp song ánh có thể áp dụng rất hiệu quả trong lí thuyết giải tích tổ hợp, nhất là trong các bài toán tính toán tổ hợp, cũng như việc thiết lập các đẳng thức liên quan đến các số tổ hợp. Để hiểu rõ hơn phương pháp này, cũng như để rèn luyện các kĩ năng vận dụng phương pháp, mời các bạn thử sức với các bài tập sau :

BÀI TẬP

1. Câu lạc bộ leo núi gồm n thành viên tổ chức 4 cuộc leo núi cho các thành viên của mình. Giả sử E_1, E_2, E_3, E_4 là các đội tham gia vào các cuộc leo núi này. Có bao nhiêu cách chia đội sao cho điều kiện sau luôn được thỏa mãn

$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing, E_2 \cap E_3 \neq \varnothing, E_3 \cap E_4 \neq$

(Cuộc thi Toán Áo – Ba Lan 1995)

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$\sum_{k=1}^{n} k(C_n^k)^2 = n.C_{2n-1}^{n-1}$$

3. Có n người xếp thành một hàng dọc. Hỏi với một số nguyên dương $k \le [n/2]$ cho trước, có bao nhiêu cách chọn ra k người từ n người trên sao cho không có hai người đứng kề nhau được chọn.

SAI LẦM Ở ĐÂU ? *(Tiếp trang 24)*

Xin cấp bằng "bác sĩ chuyên khoa" cho các bạn : *Lê Phương*, 10T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai, *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, Hà Nam, *Nguyễn Tiến Yết*, 10T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây ; *Nguyễn Hồng Anh*, 11E, THPT Nguyễn Viết Xuân, *Nguyễn Văn Thích*, Ngũ Kiên, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc; *Đặng Thành Dũng*, 9B, THCS Bạc Liêu, Yên Thành, Nghệ An.

KIHIVI

MỘT bài, HAI lời giải, HAI đáp số trong MỘT cuốn sách

Trong cuốn sách "Giới thiệu đề thi tuyển sinh năm học 2000-2001, có câu Va (đề thi của Học viện Kĩ thuật Quân sự) và câu II (đề thi của Đại học Cảnh sát nhân dân) như nhau : "Tìm m để hệ

$$\begin{cases} xy + x + y = m + 2 \\ x^2y + y^2x = m + 1 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất". Tác giả đưa ra hai lời giải.

Câu Va. *Cần:* Nếu (x_0, y_0) là nghiệm của hệ thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm $\Rightarrow (x_0, y_0)$ là nghiệm duy nhất của hệ khi và chỉ khi $x_0 = y_0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^3 + 2x_0 = m + 1 \\ 2x_0^3 = m + 1 \end{cases} \Rightarrow m = 1, m = -3, m = -\frac{3}{4}.$$

Đủ : – Nếu $m = 1$ thì

$$(H) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x + y = 3 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

– Nếu $m = -3$ thì $(H) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x + y = -1 \\ xy(x + y) = -2 \end{cases}$

Hệ có ba nghiệm $(-1, -1)$; $(-1, 2)$; $(2; -1)$

– Nếu $m = -\frac{3}{4}$ thì $(H) \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x + y = \frac{5}{4} \\ xy(x + y) = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $x = y = -\frac{3}{4}$.

Đáp số : $m = 1$, $m = -\frac{3}{4}$

Câu II. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y) + xy = m + 2 \\ xy(x + y) = m + 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = m \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = m \\ xy = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Hệ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x, y \text{ là hai nghiệm của } t^2 - t + m = 0 \ (1) \\ x, y \text{ là hai nghiệm của } t^2 - mt + 1 = 0 \ (2) \end{array} \right.$

Hệ sẽ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} (1) \text{ có } \Delta_1 = 1 - 4m = 0 \\ (2) \text{ có } \Delta_2 = m^2 - 4 < 0 \end{cases} & \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \\ \begin{cases} \Delta_2 = 0 \\ \Delta_1 = 1 - 4m < 0 \end{cases} & \Leftrightarrow m = 2 \\ \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{m}{2} \end{cases} & \text{(không xảy ra)} \end{array} \right.$$

Đáp số: $m = 2$, $m = \frac{1}{4}$.

Các bạn hãy cho biết lời giải nào sai, lời giải nào đúng ? Nếu sai thì sai ở ... chỗ nào ?

LÊ THỊ THƠM

(12G, THPT Hoằng Hóa II - Thanh Hóa)

THƠ VÀ TOÁN

Nhiều bạn không phát hiện ra mối liên quan giữa bài thơ và ... điều gì đó của toán. Các bạn : *Nguyễn Văn Thích*, Ngũ Kiên, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc; *Nguyễn Xuân Khánh*, 11A1, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Hà Tây; *Nguyễn Thạc Dũng* lớp A1K43 Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội không những phát hiện ra : đây là bài thơ để nhớ các chữ số đầu tiên của số π mà còn có thơ ... "tương tư".

Tất nhiên có bài khi viết các từ nối còn chưa hay lắm, nhưng cũng xin trình làng và mong rằng khi học tập bất cứ môn nào, thấy chỗ nào khó nhớ các bạn nên "phổ thơ", thậm chí "phổ nhạc" cho dễ nhớ.

LỜI BÁO

(của bạn Nguyễn Thạc Dũng)

Vui a ! Toán ở bên – ta
Dân nghiền mê thưởng hương hoa mỗi – kỳ
Toán – gieo hương – khắp miền – quê
Từng – trang báo đã đem nghề – Toán trao
Trường kì nguyện gắng tâm cao
Đồng – hành, tri kỉ bên – nhau tháng – ngày

CẢM TÁC

(của bạn Nguyễn Văn Thích)

Lão Ô thẹn ý Cao – xa
Cảm – thương Pi nguyện mặn – mà nối ngang
Ngưu – Lang thẩn – thức rộn – ràng
Trập – trùng gợi số lại vang – vọng tình
Nghinh cụ Nguyễn Thái bên anh
Muôn – ngàn hoa rộ học – hành thông – minh

Một số bài thơ khác chưa vần nên không dám khoe. Một số cách nhớ của các nước Anh, Pháp, Đức cũng được các bạn gửi về. Xin cảm ơn và rất lấy làm tiếc vì còn thừa đến 2 tặng phẩm chưa biết trao ai !

C.L.B

SỬA THƠ VÀ GIẢI TOÁN

Tết vừa qua có một nhóm bạn cũng chén ... bánh chưng, tức cảnh làm thơ và gửi CLB. Xin giới thiệu với các hội viên :

7 người xơi 4 bánh chưng
Cắt đúng 1 nhát chia từng người ăn
Không người nào phải băn khoăn
Nhỏ to nhưng số miếng bằng nhau thôi

Các bạn hãy cho biết :

1) Bài thơ trên có "bị" CLB in nhầm lẫn vị trí các con số nào không ?

2) Các bạn ý ... đã cắt bánh chưng như thế nào nhỉ ?

Các phần thưởng đầu xuân đang chờ ai nhanh tay nhất

L.T.N

BÀI TOÁN HAY, LỜI GIẢI SAI ?

Bạn Hoàng Thanh Hà, lớp 8_3, THCS Quảng Ninh, Quảng Trạch, Quảng Bình tâm sự : *Từ nhỏ em đã khao khát sau này lớn lên làm bác sĩ. Ba thường nói đùa : "con muốn thành bác sĩ tương lai thì phải chữa bệnh cho các bài toán ngay từ bây giờ". Thế là cứ hàng tháng em mua báo về nghiền ngẫm... mà em thích nhất vẫn là chuyên mục "Sai lầm ở đâu ?".*

Ôi ! Câu nói của ba Hà sao mà trúng ý của KIHIVI đến thế ! Vậy thì điều đáng sợ mà các bác sĩ phải tránh là gì nhỉ ? Chẩn đoán nhầm bệnh hay kê đơn sai ?

Hầu hết các bác sĩ tương lai đều thấy rằng : *Nếu có điểm M ở ngoài B, C bên này thì sẽ không có vị trí thứ hai ở ngoài bên kia !*

Bởi nếu thế thì ... đỉnh A và hai điểm M này sẽ thẳng hàng mất !

Đặc biệt khi tam giác ABC cân tại A thì không có điểm M nào ở ngoài B, C thỏa mãn bài toán. Một số bạn còn tinh hơn khi chỉ ra M có 2 vị trí ở bên trong cạnh BC.

Các bạn đã sử dụng phương tích từ M đến đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC để giải đúng bài toán :

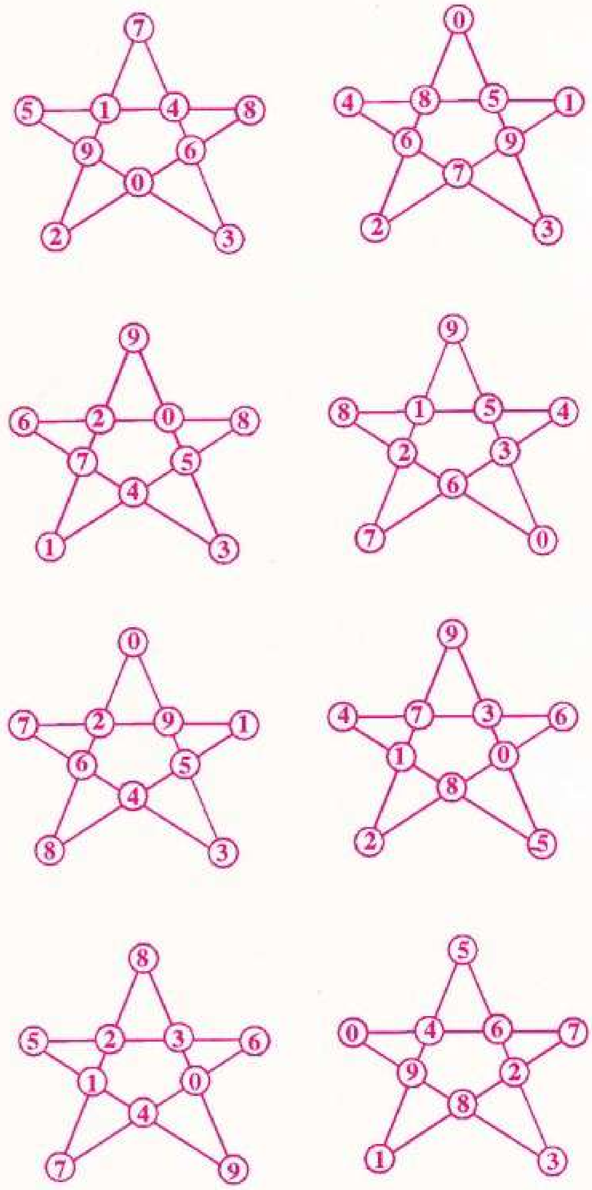
+ Nếu M ở ngoài B, C thì M là giao của tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp (C) với BC.

+ Nếu M ở trong đoạn BC thì M là giao của đường tròn đường kính OA, (O là tâm đường tròn ngoại tiếp (C)) với BC.

Như vậy : Nếu tam giác ABC cân tại A thì có 2 vị trí của M thỏa mãn. Nếu tam giác ABC không cân đỉnh A thì có 3 vị trí của M thỏa mãn :

Riêng KIHIVI nghĩ mãi ... tại sao tác giả lại nhầm liên tiếp đến thế ? Riêng hai đẳng thức $BM_1 = AM_1$ và $AM_2 = CM_2$ cũng chỉ đúng khi M_1, M_2 ở trong đoạn BC. KIHIVI cũng thất vọng như bạn Vũ Hải Sơn và lẩn thẩn đoán : Hay là ... sách in sai ?

(Xem tiếp trang 23)



Kết quả

ĐIỀN SỐ HÌNH SAO

Ta thấy mỗi vòng tròn trên hình sao thuộc đúng 2 hàng. Giả sử tổng các số trên mỗi hàng lần lượt là a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$ thì

$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4)$

$= 2(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 90$

Từ đó dẫn đến $a = 16$. Và 5 số tự nhiên liên tiếp có được khi tính tổng các số trên mỗi hàng lần lượt là 16, 17, 18, 19, 20.

Với mỗi cách điền số, thực hiện phép quay 72° quanh tâm của hình sao sẽ được một cách điền số mới (những cách có được nhờ phương pháp này ta coi là như nhau).

Như vậy sẽ có bao nhiêu cách điền số ? Xin để dành *tặng phẩm đặc biệt cho bạn nào trả lời được câu hỏi này*, còn bây giờ... xin công bố các kỉ lục "bền bỉ" điền số : *Nguyễn Đức Việt*, 7A4, THCS Chu Văn An, Tp Thái Nguyên (240), *Nguyễn Xuân Hòa*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, Thanh Hóa (483), *Nguyễn Tôn Phong*, 12C1, THPT Ngô Gia Tự, Eakar, Đăk Lăk (155) ; *Nguyễn Tuấn Chung*, 10A2, THPT Ngọc Tảo, Phúc Thọ, Hà Tây (125), *Lê Văn Hùng*, 11A1, THPT Triệu Sơn, Thanh Hóa (104).

Bạn *Nguyễn Văn Hoàng*, 12G, THPT Hoằng Hóa II, Thanh Hóa đã thử lập luận để tìm ra và khẳng định số cách điền số ... suýt được.

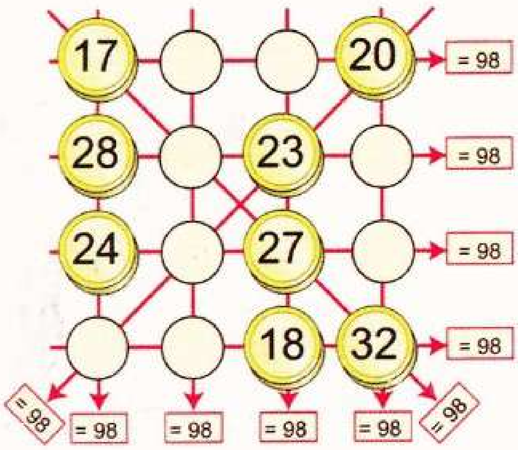
Xin chờ các bạn tiếp tục ngẫm nghĩ thêm và tham khảo ít cách điền ở hình bên.

NGỌC MAI

BẢNG SỐ KÌ DIỆU

Bạn hãy điền số vào các ô tròn trống ở hình bên biết rằng tổng các ô số của mỗi hàng ngang, hàng dọc và đường chéo đều bằng 98. Xem ai tính giỏi nào ?

BC



TRƯỜNG THPT LƯƠNG VĂN TỤY
ĐƠN VỊ ANH HÙNG

Nhà giáo ưu tú NGUYỄN ANH BẢO – Hiệu trưởng trường THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình

* Thành lập : 1959, là trường cấp 3 đầu tiên của tỉnh Ninh Bình

* Năm học 2000-2001 : 39 lớp với 1740 học sinh (21 lớp chuyên với 648 học sinh, 18 lớp không chuyên với 1092 học sinh). Cán bộ giáo viên : 108, trong đó có 35 đảng viên, 12 đoàn viên thanh niên, 7 giáo viên có trình độ thạc sĩ.

Thành tích nổi bật trong thời kì đổi mới : (1986 - 2000)

* Chấp nhận thử thách, liên tục phấn đấu, khắc phục khó khăn, năng động sáng tạo, đáp ứng tốt quy mô phát triển đa hệ (cải cách, thí điểm phân ban, hệ chuyên), không ngừng nâng cao với tốc độ nhanh chất lượng giáo dục toàn diện, nhất là chất lượng học sinh giỏi, thực sự là trường trọng điểm chất lượng cao : Hạnh kiểm đạt 100% khá, tốt : Học lực đạt 75-85% khá, giỏi, không có loại yếu ; Đỗ đại học : từ 35% (1985) lên 75 (%) (2000) ; Học sinh giỏi cấp tỉnh : Đạt 3185 giải (từ 16 giải năm 1986 lên 627 giải năm 2000, bằng 65% tổng số giải cả tỉnh) ; Học sinh giỏi Quốc gia : Từ 2 giải năm 1993 lên 51 giải năm 2000, đưa tổng số lên 256 giải (trong đó có 7 nhất, 52 nhì, 113 ba, 84 khuyến khích) ; Có 1 giải nhì quốc tế ; Là trường có phong trào mạnh về TDTT, Văn nghệ, ...

* Đội ngũ cán bộ giáo viên là một tập thể đoàn kết, chấp nhận khó khăn, dám nghĩ, dám làm, yêu nghề, mến trẻ, tự trọng nghề nghiệp, đi đầu trong phong trào đổi mới phương pháp dạy học. Đề tài khoa học cấp tỉnh : "Phát hiện, tuyển chọn và bồi dưỡng học sinh năng khiếu" đã được nghiệm thu, hiện đang được áp dụng có hiệu quả ở trường và các trường bạn ; Có nhiều sáng kiến kinh nghiệm được xếp hạng, 4 cán bộ quản lí và giáo viên được cấp bằng lao động sáng tạo... góp phần tích cực nâng cao chất lượng giáo dục học sinh.

* Đi đầu trong phong trào tự học, tự bồi dưỡng, không ngừng nâng cao trình độ giáo viên, 7 giáo viên có bằng thạc sĩ, 30% CBGV sử dụng tốt máy vi tính.

* Tận dụng nguồn lực, cần kiệm thu chi, xây dựng và sử dụng có hiệu quả cơ sở vật chất, trang thiết bị phục vụ dạy và học.

* Đi đầu trong việc xã hội hóa giáo dục, thực hiện tốt cuộc vận động kỉ cương, tình thương, trách nhiệm, luôn gương mẫu chấp hành tốt chủ trương chính sách của Đảng và pháp luật của Nhà nước.

Liên tục là lá cờ đầu khối trường THPT tỉnh Ninh Bình ; Đã được Nhà nước tặng thưởng Huân chương Lao động hạng nhất ; nhì ; ba và Huân chương Độc lập hạng 3 ; Là một trong mười chín trường được suy tôn là điển hình tiên tiến xuất sắc toàn quốc của ngành Giáo dục trong thời kì đổi mới.

Ngày 23 tháng 9 năm 2000, Chủ tịch nước Trần Đức Lương đã kí quyết định phong tặng Trường THPT Lương Văn Tụy danh hiệu Anh hùng lao động.

Vinh dự, tự hào, thày giáo và học sinh nhà trường quyết tâm thi đua dạy thật tốt, học thật tốt, giữ gìn và không ngừng phát huy truyền thống, xứng đáng với những phần thưởng cao quý và sự tin yêu của Đảng bộ và nhân dân Ninh Bình.

Các thầy giáo và đội tuyển học sinh giỏi Toán

ISN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT86M1

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2001

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng